Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 3 / 2 / 2

Выполнил:
студент 104 группы
Дыскина М. А.

Преподаватель:
Гуляев Д. А.

Москва
2022

Содержание

Постановка задачи

- Требуется реализовать численный метод, позволяющий с заданной точностью вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми. Для этого необходимо вычислить абсциссы пересечения заданных кривых и представить площадь заданной фигуры как алгебраическую сумму определенных интегралов.

- Площадь под графиком необходимо искать квадатурной формулой трапеций.

- Вершины фигуры необходимо искать методом хорд. Точность вычисления вершин фигуры e1 = 0.00001.

- Отрезок для применения метода нахождения корней должен быть вычислен аналитически. Точность вычисления площади e2 = 0.00001.

Математическое обоснование

Итерации метода хорд сходятся к корню f(x), если начальные величины x_0 и x_1 достаточно близки к корню. Метод секущих является быстрым. Порядок сходимости равен: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...$

Таким образом, порядок сходимости больше линейного, но не квадратичен. Этот результат справедлив, если $f(x)$ дважды дифференцируема и корень не является кратным.

Если $f(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, и знак f"(x) сохраняется на рассматриваемом промежутке, то полученные приближения будут сходиться к корню монотонно. Если корень ξ уравнения f(ξ) $=$ 0 находится на отрезке [a, b], производные $f'(x)$ и $f"(x)$ на этом промежутке непрерывны и сохраняют постоянные знаки и $f"(b)f(b) > 0$, то можно доказать, что погрешность приближенного решения стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

При оценке погрешности приближения можно пользоваться соотношением: $|x^* - x_i| < |x_i - x_{i-1}|$. Если обозначать через m наименьшее значение $|f'(x)|$ на промежутке [a,b], которое можно определить заранее, то получим формулу для оценки точности вычисления корня: $|x_n$-$x^*| \leq$ |f(x_n)|/m или |f(x_n)|/m $\leq$ *eps*, где *eps* - заданная погрешность вычислений.

Абсолютная погрешность метода трапеций оценивается как: $|\delta| \leq \max|f"(x)|\frac{(b-a)^3}{12n^2}$

Таким образом, $\varepsilon_1 = \frac{10^{-4}}{4}$ и $\varepsilon_2 = \frac{10^{-3}}{2}$, где ε_1 – погрешность вычисления корня методом хорд, ε_2 – погрешность вычисления площади формулой трапеций.

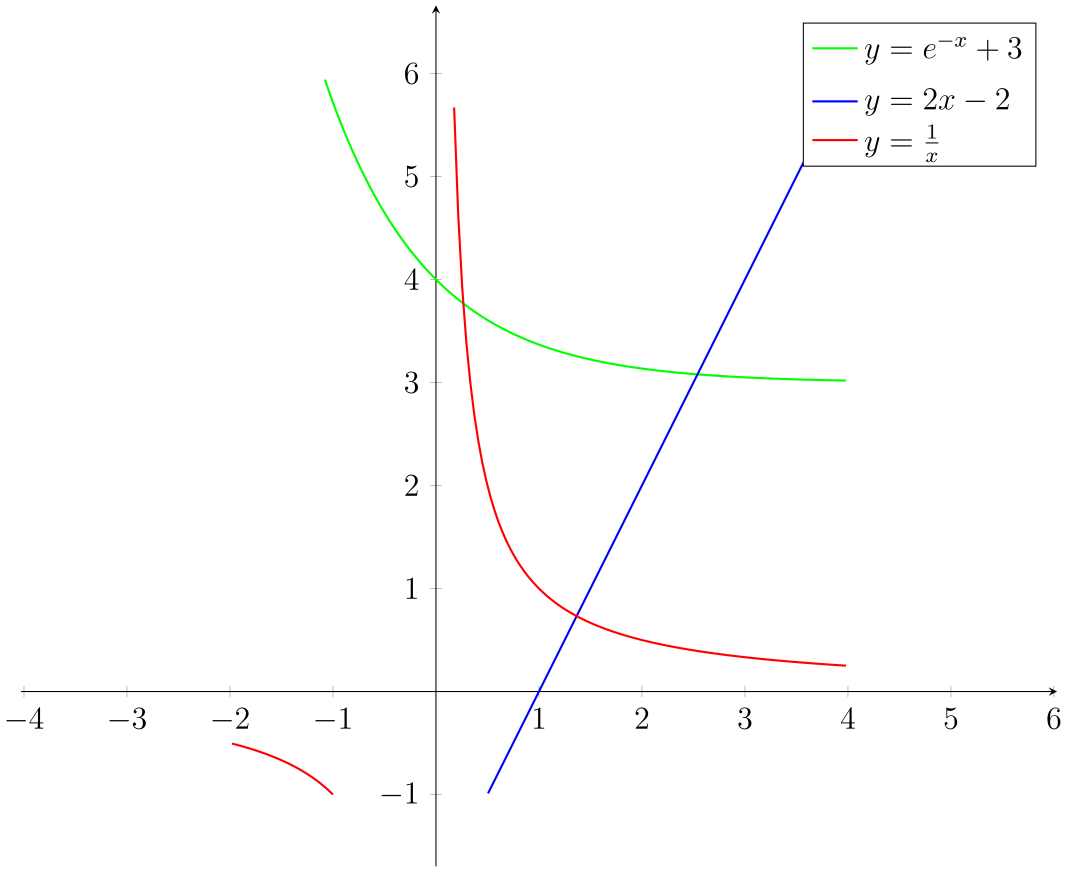

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Результаты экспериментов

В данном разделе необходимо провести результаты проведенных вычислений: координаты точек пересечения (таблица 1) и площадь полученной фигуры.

Кривые	x	y
1 и 2	2.5394	3.0789
2 и 3	1.3660	0.7320
1 и 3	0.2655	3.7664

Таблица 1: Координаты точек пересечения

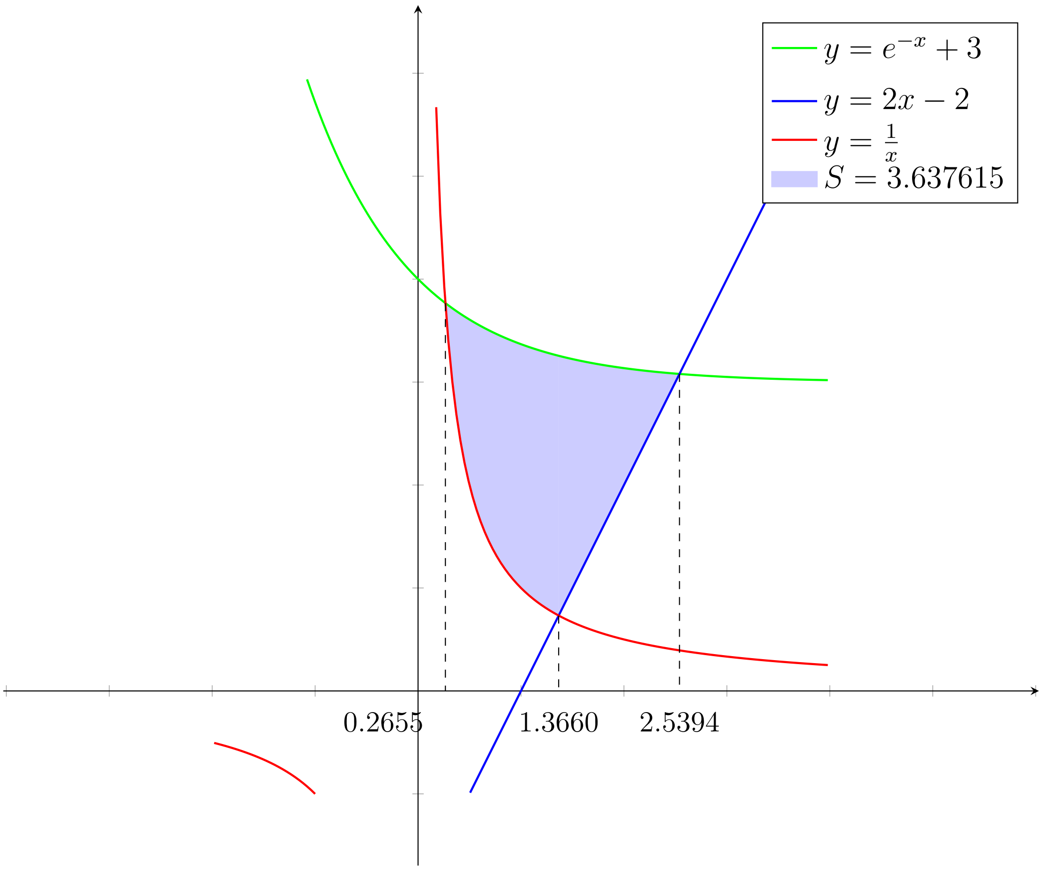

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Функции, вычисляющие значения f1, f2, f3, реализуются на языке ассемблера с соглашением вызова cdecl. Функция опредления точек пересечения кривых и функция вычисления приближенного значения интеграла программы реализуются на языке Си.
Программа, реализующая расчетную задачу, состоит из двух моудлей.

Модуль project.asm на языке ассемблера

float f_1 (float x): вычисляет значение функции $f_1 = e^{-x} + 3$

float f_2 (float x): вычисляет значение функции $f_1 = 2x - 2$

float f_3 (float x): вычисляет значение функции $f_1 = \frac{1}{x}$

Модуль integral.c на языке C

1. Прототип функции root: float root(float(*f)(float), float(*g)(float), float a, float b, float eps1). Функция вычисляет корень x уравнения f(x) = g(x) с точностью ε_1 на отрезке [a, b], используя метод хорд.

2. Прототип функции Integral: float integral(float (*f)(float), float a, float b, float eps2). Функция вычисляет величину определенного интеграла от функции f(x) с точностью ε_2 на отрезке [a, b] по квадратурной формуле трапеций.

3. Прототип функции main: int main(int argc, const char * argv[]).

Сборка программы (Make-файл)

```
all: function

function: integral.o project.o
    gcc -m32 -o function integral.o project.o

integral.o: integral.c
    gcc -m32 -c integral.c

project.o: project.asm
    nasm -f elf32 project.asm

clean:
    rm -rf *.o function
```

Отладка программы, тестирование функций

Для тестирования функций root и integral были использованы тестовые функции: $f_1 = 3x + 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2 + x + 1$.

Тестирование функции root

1. x_1 = root(f1, f2, -1, 0, 0.00001); x_1 = -0.500000. Корень уравнения f1 = f2 равен -0.5

2. x_2 = root(f2, f3, 0.1, 2, 0.00001); x_2 = 0.999991. Корень уравнения f2 = f3 равен 1

3. x_3 = root(f1, f3, 1, 2, 0.00001); x_3 = 1.879378. Корень уравнения f1 = f3 равен 1.879

Тестирование функции integtral

1. s_1 = integral(f1, 0, 3, 0.00001); s_1 = 16.499802. Верный ответ: $\int_0^3 (3x + 1)dx = \frac{33}{2}$

2. x_2 = integral(f2, 0, 4, 0.00001); s_2 = 8.000069. Верный ответ: $\int_0^4 \ln(\mathrm{x})dx = 8$

3. s_3 = integral(f3, 1, 2, 0.00001); s_3 = 3.749997. Верный ответ: $\int_0^3 (3x + 1)dx = \frac{15}{4}$

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программ имеются в архиве, который приложен к этому отчету.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.