Задача на моделирование

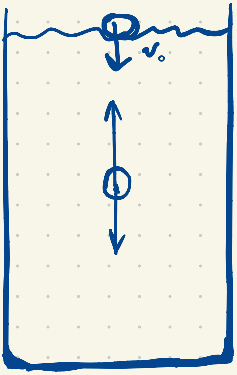
дисциплина: дополнительные главы высшей математики
преподаватель: Мурзина Анастасия Алексеевна
выполнили: Дзюба Мария
Карасёва Екатерина
Рындина Валерия
группа: M3235

Зависимость движения шара в зависимости от вязкости среды

ITMO University

12.2020

1. Составление дифф. уравнения



сила тяжести: mg

сила выталкивания: $\rho_0 g V$

Сила вязкого трения: $6\pi R v \eta$

вязкость

формуле Стокса, где можно еще добавить $k_2(v)^2 + k_3(v)^3 \ldots$ но эти слагаемые очень малы и тру физики на них забивают

силе сопротивление волн, стихающих в глубину

$C e^{-kx} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega t)$

завист от v_0

волны утихают по координате и со временем

Итак, общее уравнение:

$$ma = F_T - F_A - F_{вяз} + F_{волн}$$

$$m\ddot{x} = mg - \rho_0 g V_ш - 6\pi R \eta \dot{x} + C e^{-kx} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega t) \quad \Big| : m$$

$$\ddot{x} = g - \frac{\rho_0 g V_ш}{m} - \frac{6\pi R \eta}{m}\dot{x} + \frac{C}{m} e^{-kx} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega t)$$

Константы, которые задаёт пользователь модели:

Шар: m, v_0 Жидкость: C_p ← контрация мыла %

Константы, которые досчитаем из полученных:

Шар: $\rho = const$

$V = \frac{m}{\rho}$

$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Жидкость: $C = 5v_0$

$\eta = 1.92 e^{0.05 C_p}$; $\omega = e^{-\eta}$

$k = 0$

$\rho_0 = 1 + \frac{C_p}{100}$

$\tau = 1$

Что в итоге решаем?

$$\boxed{\ddot{x} = A + B\dot{x} + D \cdot e^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega t)}$$

2. Решение дифф. уравнения

$$\ddot{x} = A + B\dot{x} + De^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} - B\dot{x} = De^{-t/\tau}\cos(\omega t) + A$$

Замена: $z(t) = \dot{x} \Rightarrow z' = \ddot{x}$

$$z' - Bz = De^{-t/\tau}\cos(\omega t) + A$$ ← линейное

Метод Лагранжа:

$$z = C(t)\cdot e^{Bt}, \quad z' = C'e^{Bt} + BC\cdot e^{Bt}$$

$$C'e^{Bt} + \cancel{BCe^{Bt}} - \cancel{BC\cdot e^{Bt}} = De^{-t/\tau}\cdot\cos(\omega t) + A$$

$$C' = De^{-t/\tau - Bt}\cdot\cos(\omega t) + A\cdot e^{-Bt}$$

$$C = \int\left(De^{-t/\tau - Bt}\cdot\cos(\omega t) + A\cdot e^{-Bt}\right)dt$$

$$C = D\underbrace{\int e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)}\cos(\omega t)\,dt}_{(2.1.1)} + A\int e^{-Bt}dt \quad (2.1)$$

$$C = \frac{D e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t}\tau^2\left(\omega\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\left(\frac{1}{\tau}+B\right)\right)}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2} - \frac{A}{B}e^{-Bt} + const$$

$$z = \frac{D e^{-\frac{t}{\tau}}\tau^2\left(\omega\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\left(\frac{1}{\tau}+B\right)\right)}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2} - \frac{A}{B} + const\cdot e^{Bt}$$

$$x = \int\left(\frac{D e^{-\frac{t}{\tau}}\tau^2\left(\omega\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\left(\frac{1}{\tau}+B\right)\right)}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2} - \frac{A}{B} + const\cdot e^{Bt}\right)dt \quad (2.2)$$

$$x = \frac{D\tau^3 e^{-\frac{t}{\tau}}}{(\tau^2\omega^2 + \tau^2B^2 + 2\tau B + 1)(1 + \tau^2\omega^2)}\left(-\omega(2 + B\tau)\sin(\omega t) + \left(-\tau\omega^2 + B + \frac{1}{\tau}\right)\cos(\omega t)\right) - \frac{A}{B}t + const\frac{e^{Bt}}{B} + const2$$

(2.1.1):

$$\int \underbrace{e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)}}_{g'} \underbrace{\cos(\omega t)}_{f}\, dt = -\cos(\omega t)\,\frac{e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)}}{\frac{1}{\tau}+B} - \int \frac{\overbrace{\omega}^{} \overbrace{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t}}^{} \overbrace{\sin(\omega t)}^{f}}{\underbrace{\frac{1}{\tau}+B}_{=-g'}}\, dt$$

$$f' = -\omega \sin(\omega t)$$

$$g = -\frac{e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)}}{\frac{1}{\tau}+B}$$

$$f' = -\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$g = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t}}{\left(\frac{1}{\tau}+B\right)^2}$$

$$= -\cos(\omega t)\,\frac{e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)}}{\frac{1}{\tau}+B} + \left(+ \frac{\omega e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t} \sin(\omega t)}{\left(\frac{1}{\tau}+B\right)^2} + \int - \frac{\omega^2 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t} \cos(\omega t)}{\left(\frac{1}{\tau}+B\right)^2}\, dt \right)$$

$$\int e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)} \cos(\omega t)\, dt = \frac{-\cos(\omega t)\,\frac{e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)}}{\frac{1}{\tau}+B} + \frac{\omega e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t} \sin(\omega t)}{\left(\frac{1}{\tau}+B\right)^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{\tau}+B\right)^2}} =$$

$$= \frac{\omega e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t} \sin(\omega t) - \cos(\omega t)\, e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)} \left(\frac{1}{\tau}+B\right)}{\left(\frac{1}{\tau}+B\right)^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t} \left(\omega \sin(\omega t) - \cos(\omega t)\left(\frac{1}{\tau}+B\right)\right)}{\frac{1}{\tau^2} + 2\frac{B}{\tau} + B^2 + \omega^2} \cdot \tau^2 =$$

$$= \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t}\, \tau \left(\omega \sin(\omega t)\tau - \cos(\omega t)\left(1 + B\tau\right)\right)}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2}$$

(2.1): $C = D\int e^{-t\left(\frac{1}{\tau}+B\right)} \cos(\omega t)\,dt + A\int e^{-Bt}\,dt =$

$$= D \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t}\tau\left(\omega\sin(\omega t)\tau - \cos(\omega t)\left(1+B\tau\right)\right)}{1+2B\tau+B^2\tau^2+\omega^2\tau^2} + A \cdot \frac{e^{-Bt}}{-B} + const$$

$$= \frac{D \cdot e^{-\left(\frac{1}{\tau}+B\right)t}\tau^2\left(\omega\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\left(\frac{1}{\tau}+B\right)\right)}{1+2B\tau+B^2\tau^2+\omega^2\tau^2} - \frac{A}{B}e^{-Bt} + const$$

(2.2): $$X = \int \left(\frac{D e^{-\frac{t}{\tau}} \tau^2 \left(\omega \sin(\omega t) - \cos(\omega t)\left(\frac{1}{\tau} + B\right)\right)}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2} - \frac{A}{B} + const. e^{Bt} \right) dt =$$

$$= \frac{D\tau^2}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2} \left(\omega \underbrace{\int e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t) dt}_{(2.2.1)} - \left(\frac{1}{\tau} + B\right) \underbrace{\int e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t) dt}_{(2.2.2)} \right)$$

$$+ \int \left(- \frac{A}{B} + const\, e^{Bt} \right) dt =$$

$$= \frac{D\tau^2}{1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2} \left(-\omega \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \tau \left(\omega\tau \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right)}{1 + \tau^2\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\tau} + B \right) \frac{\tau e^{-t/\tau} \left(\omega\tau \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \right)}{1 + \tau^2\omega^2} \right) - \frac{A}{B} t + \frac{e^{Bt}}{Bt} const + const2 =$$

$$= \frac{-D\tau^2 \cdot \tau e^{-\frac{t}{\tau}}}{(1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2)(1 + \tau^2\omega^2)} \cdot \left(\omega^2 \tau \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) + \frac{\omega\tau}{\tau} \sin(\omega t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\tau} \cos(\omega t) + B\omega\tau \sin(\omega t) - B \cos(\omega t) \right) - \frac{A}{B} t + \frac{const}{Bt} \cdot e^{Bt} + const2 =$$

$$= \frac{-D\tau^3 e^{-\frac{t}{\tau}}}{(1 + 2B\tau + B^2\tau^2 + \omega^2\tau^2)(1 + \tau^2\omega^2)} \left(\omega(2 + B\tau) \sin(\omega t) + \left(\omega^2\tau - \frac{1}{\tau} - B\right) \cos(\omega t) \right)$$

$$- \frac{A}{B} t + \frac{const}{Bt} \cdot e^{Bt} + const2$$

(2.2.1): $\int \underbrace{e^{-t/\tau}}_{g'} \underbrace{\sin(\omega t)}_{f} \, dt = -\tau e^{-t/\tau} \sin(\omega t) - \int \underbrace{-\tau e^{-t/\tau}}_{g'} \underbrace{\omega \cos(\omega t)}_{f} \, dt =$

$g = -\tau e^{-t/\tau}$

$f' = \omega \cos(\omega t)$

$f' = -\omega^2 \sin(\omega t)$

$g = \tau^2 e^{-t/\tau}$

$$= -\tau e^{-t/\tau} \sin(\omega t) - \left(\omega \cos(\omega t) \tau^2 e^{-t/\tau} - \int -\tau^2 \omega^2 e^{-t/\tau} \sin(\omega t) \, dt \right) \Rightarrow$$

$$\int e^{-t/\tau} \sin(\omega t) \, dt = \frac{-\tau e^{-t/\tau} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \tau^2 e^{-t/\tau}}{1 + \tau^2 \omega^2} =$$

$$= - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \tau \left(\omega \tau \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right)}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

(2.2.2): $\int \underbrace{e^{-t/\tau}}_{g'} \underbrace{\cos(\omega t)}_{f} dt = -\tau e^{-t/\tau} \cos(\omega t) - \int \underbrace{\tau e^{-t/\tau}}_{-g'} \underbrace{\omega \sin(\omega t)}_{-f} dt =$

$g = -\tau e^{-t/\tau}$
$f' = -\omega \sin(\omega t)$

$f' = -\omega^2 \cos(\omega t)$
$g = \tau^2 e^{-t/\tau}$

$$= -\tau e^{-t/\tau} \cos(\omega t) - \left(-\omega \sin(\omega t)\, \tau^2 e^{-t/\tau} - \int -\tau^2 \omega^2 e^{-t/\tau} \cos(\omega t)\, dt \right) \Rightarrow$$

$$\int e^{-t/\tau} \sin(\omega t)\, dt = \frac{-\tau e^{-t/\tau} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\, \tau^2 e^{-t/\tau}}{1 + \tau^2 \omega^2} =$$

$$= \frac{\tau e^{-t/\tau} (\omega \tau \sin(\omega t) - \cos(\omega t))}{1 + \tau^2 \omega^2}$$