Методы оптимизации.

Отчет по лабораторной работе №3

Работа выполнена группой:

Дзюба Мария M3235
Карасева Екатерина M3235
Рындина Валерия M3235

Университет ИТМО, 2021

Цель работы: Изучить и реализовать метод решения СЛАУ. Провести исследование методов по различным характеристикам.

Задача 1.

a) Постановка задачи
Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения.

b) Решение задачи:

- Вычислительная схема метода:
исходная задача: Ax = f
преобразуем задачу в: Ux = y = L^{-1}f => LUx = f, где U - это верхнедиагональная матрица, L - это нижнедиагональная матрица.
То есть матрицу A можно представить как A=LU, по следующим формулам:

$$L_{11} = A_{11}$$

$$\forall i \text{ от } 2 \text{ до } n$$

$$L_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \cdot U_{kj} \; ; \; j = \overline{1, i-1}$$

$$U_{ji} = \frac{1}{L_{jj}} \left[A_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} \cdot U_{ki} \right] ; \; j = \overline{1, i-1}$$

$$L_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot U_{ki}$$

$$U_{ii} = 1 \quad \forall i$$

Итоговая задача в итоге преобразуется в систему уравнений:

$$Ax = f \iff L(Ux) = f \iff \begin{cases} Ly = f \\ Ux = y \end{cases}$$

Итоговая задача в итоге преобразуется в систему уравнений: Каждое из уравнений полученной системы легко решается обратным ходом метода Гаусса в контексте того, что матрицы U и L являются верхнедиагональными и нижнедиагональными.

- Пример решения задачи реализованным методом:

  i. Условие задачи и начальные данные:

  $$\begin{pmatrix} 8.0 & -3.0 & -4.0 \\ -2.0 & 5.0 & -3.0 \\ -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -10.0 \\ -1.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

  ii. Численный ответ: $x = \begin{pmatrix} 1.0000000000000004 \\ 2.0000000000000004 \\ 3.0000000000000004 \end{pmatrix}$

Задача 2.

a) Постановка задачи:
Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания (то есть оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Для этого необходимо решить последовательность СЛАУ: $A_k x_k = f_k$, k = 0, 1, 2, 3…
Для каждого k , для которого система $A_k x_k = f_k$ вычислительно разрешима, оценить погрешность найденного решения.

b) Решение задачи:

- Схема построения СЛАУ:
  матрицы Ak строятся следующим образом:

$$a_{ii} = \begin{cases} -\sum\limits_{i \neq j} a_{ij}, & i > 1 \\ -\sum\limits_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k}, & i = 1 \end{cases}$$

  и $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$ выбираются достаточно произвольно, а правая часть f_k получается умножением матрицы A_k на вектор x* = (1,…n).

- Пример решения задачи реализованным методом:
  См пример в Задаче 1

- Исследования погрешностей найденного решения:
  см **Приложение 1**

- Вывод: С увеличением числа обусловленности матрицы ошибка решения растет, что особенно хорошо заметно при переходе от хорошо обусловленных матриц к плохо обусловленным.

Задача 3.

a) Постановка задачи:
Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности. Матрица Гильберта размерности k.

b) Решение задачи:

- Схема построения СЛАУ:
матрицы Гильберта Ak строятся следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ i,j = \overline{1,k}\ .$$

правая часть f_k получается умножением матрицы A_k на вектор x* = (1,…n).

- Пример решения задачи реализованным методом:

i. Условие задачи и начальные данные:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.3333333333333333 \\ 0.5 & 0.3333333333333333 & 0.25 \\ 0.3333333333333333 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$* \ x = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 1.9166666666666665 \\ 1.4333333333333333 \end{pmatrix}$$

ii. Численный ответ: $x = \begin{pmatrix} 1.000000000000004 \\ 1.9999999999999807 \\ 3.0000000000000173 \end{pmatrix}$

- Исследования погрешностей найденного решения:
см **Приложение 2**

- Вывод: Огромная погрешность, которая имеет тенденцию увеличиваться с увеличением размерности матрицы. Такую большую погрешность можно объяснить большими числами в ответах.

Задача 4.

a) Постановка задачи:
Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц. Сравнить метод Гаусса по точности получаемого решения и по количеству действий с реализованным прямым методом LU-разложения.

b) Решение задачи:

- Вычислительная схема метода Гаусса:
  Находим наибольший метод в столбце, преобразуем его в 1 деление всей строки на этот элемент. Обнуляем другие элементы этого столбца вычитанием из строк «нашей» строки, умноженной на элемент данной строки, «нашего» столбца.

- Пример решения задачи реализованным методом:

  i. Условие задачи и начальные данные:
  $$\begin{pmatrix} 3.0 & -1.0 & -1.0 \\ -3.0 & 3.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2.0 \\ 3.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

  ii. Численный ответ: $x = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}$

- Таблица сравнения метода Гаусса и прямого метода LU-разложения по точности получаемого решения и по количеству действий:
  см **Приложение 3.**

- Вывод: Можно проследить, что оба метода имеют практически идентичные значения при подсчете погрешности, что говорит об равной точности. Стоит подметить, что метод Гаусса в разы больше производит действий, чем метод LU-разложения.

Задача 5.

a) Ожидается…..

Задача 6.

a) Постановка задачи:
   I. Для разработанного программного кода в отчете привести код основных модулей, диаграмму классов, сделать текстовое описание.

b) Решение задачи
   I. Код основных модулей и текстовое описание представлены по ссылке https://github.com/MariaDziuba/metopt3. Диаграмма классов приведена в **Приложение 4**.

Приложение 1

n	k	$\lVert x^n - x_k \rVert$	$\lVert x^* - x_k \rVert / \lVert x^* \rVert$
15	0	0.00000000000041	0.0000000000000117
15	1	0.00000000000057	0.0000000000000161
15	2	0.00000000000303	0.0000000000000861
15	3	0.00000000008434	0.0000000000023951
15	4	0.00000000020212	0.0000000000057399
15	5	0.00000000326162	0.0000000000926237
15	6	0.00000001528084	0.0000000004339467
65	0	0.00000000000021	0.0000000000000007
65	1	0.00000000001720	0.0000000000000562
65	2	0.00000000002563	0.0000000000000837
65	3	0.00000000048441	0.0000000000015828
65	4	0.00000003175205	0.0000000001037488
65	5	0.00000002630400	0.0000000000859475
65	6	0.00000001616883	0.0000000000528311
115	0	0.00000000000255	0.0000000000000036
115	1	0.00000000001385	0.0000000000000193
115	2	0.00000000091658	0.0000000000012790
115	3	0.00000000548645	0.0000000000076557
115	4	0.00000004558477	0.0000000000636080
115	5	0.00000008716376	0.0000000001216263
115	6	0.00001275237923	0.0000000177943832
165	0	0.00000000000680	0.0000000000000055
165	1	0.00000000013185	0.0000000000001073
165	2	0.00000000137880	0.0000000000011217
165	3	0.00000000670192	0.0000000000054521
165	4	0.00000006883962	0.0000000000560021
165	5	0.00000025185766	0.0000000002048900
165	6	0.00000143245093	0.0000000011653204
215	0	0.00000000001254	0.0000000000000069
215	1	0.00000000018244	0.0000000000000999
215	2	0.00000000042157	0.0000000000002308
215	3	0.00000002272447	0.0000000000124418
215	4	0.00000055434033	0.0000000003035061
215	5	0.00000317557055	0.0000000017386519
215	6	0.00000680995161	0.0000000037285066
265	0	0.00000000002078	0.0000000000000083
265	1	0.00000000078908	0.0000000000003159
265	2	0.00000000940523	0.0000000000037656
265	3	0.00000003259960	0.0000000000130520
265	4	0.00000169197672	0.0000000006774215
265	5	0.00000652602387	0.0000000026128427
265	6	0.00000300238652	0.0000000012020740
315	0	0.00000000002109	0.0000000000000065
315	1	0.00000000012349	0.0000000000000382
315	2	0.00000000822502	0.0000000000025421
315	3	0.00000005291591	0.0000000000163549
315	4	0.00000075180849	0.0000000002323643
315	5	0.00001171868421	0.0000000036219377
315	6	0.00011939986708	0.0000000369033652
365	0	0.00000000005412	0.0000000000000134
365	1	0.00000000024717	0.0000000000000613

365	2	0.00000002459916	0.0000000000060975	565	2	0.00000006890086	0.0000000000088743
365	3	0.00000019482658	0.0000000000482923	565	3	0.00000100517666	0.0000000001294656
365	4	0.00000024109461	0.0000000000597609	565	4	0.00000597622684	0.0000000007697310
365	5	0.00001216054094	0.0000000030142749	565	5	0.00000876836455	0.0000000011293550
365	6	0.00007707991131	0.0000000191060614	565	6	0.00073509193712	0.0000000946789739
415	0	0.00000000020281	0.0000000000000415	615	0	0.00000000040747	0.0000000000000462
415	1	0.00000000138560	0.0000000000002834	615	1	0.00000000200415	0.0000000000002273
415	2	0.00000000689983	0.0000000000014111	615	2	0.00000004505048	0.0000000000051100
415	3	0.00000008095069	0.0000000000165548	615	3	0.00000024487622	0.0000000000277757
415	4	0.00000211298840	0.0000000004321172	615	4	0.00000473857480	0.0000000005374851
415	5	0.00001241771684	0.0000000025394879	615	5	0.00009132824521	0.0000000103591423
415	6	0.00002550153320	0.0000000052151967	615	6	0.00160280387454	0.0000001818021724
465	0	0.00000000002396	0.0000000000000041	665	0	0.00000000005899	0.0000000000000060
465	1	0.00000000281374	0.0000000000004852	665	1	0.00000000181798	0.0000000000001834
465	2	0.00000002278490	0.0000000000039294	665	2	0.00000010982234	0.0000000000110797
465	3	0.00000003673907	0.0000000000063359	665	3	0.00000031550361	0.0000000000318305
465	4	0.00000146534128	0.0000000002527087	665	4	0.00000544870217	0.0000000005497076
465	5	0.00000332743770	0.0000000005738406	665	5	0.00001021666573	0.0000000010307369
465	6	0.00032426557451	0.0000000559219355	665	6	0.00013246921032	0.0000000133645275
515	0	0.00000000012941	0.0000000000000192	715	0	0.00000000051016	0.0000000000000462
515	1	0.00000000094176	0.0000000000001394	715	1	0.00000000742138	0.0000000000006716
515	2	0.00000001431519	0.0000000000021184	715	2	0.00000003401057	0.0000000000030779
515	3	0.00000061581156	0.0000000000911309	715	3	0.00000086380646	0.0000000000781741
515	4	0.00000588208640	0.0000000008704608	715	4	0.00000975922102	0.0000000008832048
515	5	0.00006842920693	0.0000000101264992	715	5	0.00010151526471	0.0000000091870827
515	6	0.00021179568571	0.0000000313425940	715	6	0.00000103384741	0.0000000000935627
565	0	0.00000000028672	0.0000000000000369	765	0	0.00000000099788	0.0000000000000816
565	1	0.00000000288284	0.0000000000003713	765	1	0.00000000281930	0.0000000000002306

765	2	0.00000000761303	0.0000000000006226
765	3	0.00000092163940	0.0000000000753709
765	4	0.00000585440923	0.0000000004787690
765	5	0.00003020160485	0.0000000024698635
765	6	0.00023100572938	0.0000000188914668
815	0	0.00000000051656	0.0000000000000384
815	1	0.00000001147072	0.0000000000008531
815	2	0.00000003118130	0.0000000000023191
815	3	0.00000095593851	0.0000000000710976
815	4	0.00000354051570	0.0000000002633245
815	5	0.00005051949545	0.0000000037573683
815	6	0.00007212227745	0.0000000053640670
865	0	0.00000000068211	0.0000000000000464
865	1	0.00000000067548	0.0000000000000459
865	2	0.00000008507996	0.0000000000057875
865	3	0.00000018195599	0.0000000000123773
865	4	0.00000200825079	0.0000000001366086
865	5	0.00020816918328	0.0000000141604329
865	6	0.00133220860892	0.0000000906217255
915	0	0.00000000032051	0.0000000000000200
915	1	0.00000000459518	0.0000000000002873
915	2	0.00000005691750	0.0000000000035589
915	3	0.00000190393055	0.0000000001190486
915	4	0.00000169704060	0.0000000001061122
915	5	0.00001797393749	0.0000000011238708
915	6	0.00154895355386	0.0000000968526626
965	0	0.00000000042900	0.0000000000000248
965	1	0.00000001542176	0.0000000000008904
965	2	0.00000012976675	0.0000000000074920
965	3	0.00000015464663	0.0000000000089284
965	4	0.00000412742179	0.0000000002382929
965	5	0.00000063015891	0.0000000000363816
965	6	0.00165748873057	0.0000000956935911

Приложение 2

k	$\Vert x^n - x_k \Vert$	$\Vert x^* - x_k \Vert / \Vert x^* \Vert$
15	259.34702409835910	7.3649605756710880
65	138608.33465152525000	452.8982857727000400
115	480884.82686606730000	671.0158746239665000
165	407861.52801675803000	331.8015069409954000
215	529199304.93860960000000	289741.1300883682000000
265	1217835.28193678520000	487.5881712617839000
315	1899092.17478458440000	586.9595480051802000
365	6324345.04523482200000	1567.6370459255056000
415	7934297.63299700600000	1622.6052895938808000
465	8623516.60969150300000	1487.1875946023906000
515	17515928.09579663400000	2592.0953974573117000
565	45953484.61965941000000	5918.7545803334660000
615	5178358772.21829500000000	587368.7287011959000000
665	18485528.51850561400000	1864.9643404870762000
715	34617424.90895326400000	3132.8603414938966000
765	32909091.27558392700000	2691.2795889795890000
815	38791488.16819092000000	2885.1021991187830000
865	30235416.16499347600000	2056.7241245410550000
915	168870439.23620066000000	10559.0975511652210000
965	66272180.27241713600000	3826.1635228599716000

Приложение 3

S - количество действий;

		LU-разложение			метод Гаусса		
n	k	$\| x^n - x_k \|$	$\| x^*-x_k \| / \| x^* \|$	S	$\| x^n - x_k \|$	$\| x^*-x_k \| / \| x^* \|$	S
15	0	0.00000000000041	0.0000000000000117	224	0.00000000000042	0.0000000000000118	1450
15	3	0.00000000008434	0.0000000000023951	221	0.00000000008434	0.0000000000023951	1450
15	6	0.00000001528084	0.0000000004339467	223	0.00000001528084	0.0000000004339466	1450
115	0	0.00000000000255	0.0000000000000036	13192	0.00000000000241	0.0000000000000034	526700
115	3	0.00000000548645	0.0000000000076557	13195	0.00000000548631	0.0000000000076555	526700
115	6	0.00001275237923	0.0000000177943832	13193	0.00001275237921	0.0000000177943832	526700
215	0	0.00000000001254	0.0000000000000069	46182	0.00000000001260	0.0000000000000069	3381950
215	3	0.00000002272447	0.0000000000124418	46181	0.00000002272454	0.0000000000124419	3381950
215	6	0.00000680995161	0.0000000037285066	46172	0.00000680995165	0.0000000037285066	3381950
315	0	0.00000000002109	0.0000000000000065	99144	0.00000000002112	0.0000000000000065	10567200
315	3	0.00000005291591	0.0000000000163549	99162	0.00000005291565	0.0000000000163548	10567200
315	6	0.00011939986708	0.0000000369033652	99142	0.00011939986775	0.0000000369033654	10567200
415	0	0.00000000020281	0.0000000000000415	172114	0.00000000020291	0.0000000000000415	24082450
415	3	0.00000008095069	0.0000000000165548	172124	0.00000008095050	0.0000000000165548	24082450
415	6	0.00002550153320	0.0000000052151967	172128	0.00002550153368	0.0000000052151968	24082450
515	0	0.00000000012941	0.0000000000000192	265096	0.00000000012927	0.0000000000000191	45927700
515	3	0.00000061581156	0.0000000000911309	265101	0.00000061581017	0.0000000000911307	45927700
515	6	0.00021179568571	0.0000000313425940	265091	0.00021179568557	0.0000000313425939	45927700
615	0	0.00000000040747	0.0000000000000462	378063	0.00000000040681	0.0000000000000461	78102950
615	3	0.00000024487622	0.0000000000277757	378077	0.00000024487553	0.0000000000277756	78102950
615	6	0.00160280387454	0.0000001818021724	378063	0.00160280387375	0.0000001818021723	78102950
715	0	0.00000000051016	0.0000000000000462	511059	0.00000000051008	0.0000000000000462	122608200
715	3	0.00000086380646	0.0000000000781741	511046	0.00000086380606	0.0000000000781740	122608200
715	6	0.00000103384741	0.0000000000935627	511027	0.00000103384952	0.0000000000935629	122608200

815	0	0.00000000051656	0.0000000000000384	664021	0.00000000051843	0.0000000000000386	181443450
815	3	0.00000095593851	0.0000000000710976	664057	0.00000095593740	0.0000000000710975	181443450
815	6	0.00007212227745	0.0000000053640670	664033	0.00007212227885	0.0000000053640671	181443450
915	0	0.00000000032051	0.0000000000000200	837015	0.00000000032103	0.0000000000000201	256608700
915	3	0.00000190393055	0.0000000001190486	836945	0.00000190393183	0.0000000001190487	256608700
915	6	0.00154895355386	0.0000000968526626	836995	0.00154895355634	0.0000000968526628	256608700

Приложение 4