

Asignación sobre las aplicaciones de los espacios tensoriales

Damian Steven Ospina *
Robert Orcasitas García **
María Fernanda Estupiñan Aguilar ***
Universidad Industrial de Santander
Calle - 9 Cra. 27, Bucaramanga, Santander

26 de Junio de 2024

Índice

1. Introducción	3
1.1. Fundamentación Teórica	3
2. Tratamiento de Datos	4
2.1. Sistema de partículas	4
2.1.1. Momento Centrado de Orden Cero	4
2.1.2. Momento Centrado de Orden Uno	4
2.1.3. Momento Centrado de Orden Dos	5
2.2. Momentos centrados	6
2.2.1. Preguntas Propuestas	8
2.3. Estadísticas del Producto Interno Bruto (PIB)	10
2.3.1. Autovalores y Autovectores de la Matriz de Covarianza	13
2.3.2. Matriz Transformación	14
3. Conclusiones	14
4. Referencias	16

* email:damian2201296@correo.uis.edu.co

** email:robert2210726@correo.uis.edu.co

*** email:maria2210727@correo.uis.edu.co

Resumen

En este trabajo, se explora la versatilidad y eficacia de los espacios tensoriales en el análisis de dos conjuntos de datos distintos: la posición de un grupo de partículas con masa dentro de un volumen determinado y los registros del Banco Mundial sobre el gasto porcentual del Producto Interno Bruto (PIB) de Colombia en diversos sectores económicos, como la defensa, la ciencia y tecnología, la salud y la educación. En el caso del sistema de partículas con masa, se investigará la determinación de momentos centrados y su relación con la representación física del sistema. Para los datos económicos, se examinará cómo los tensores pueden ayudar a identificar patrones y relaciones que no son fácilmente detectables mediante técnicas convencionales.

1. Introducción

En el análisis de datos contemporáneo, se enfrenta frecuentemente la problemática de la alta dimensionalidad, caracterizada por la presencia de un gran número de variables. Este escenario complica la detección de patrones y relaciones subyacentes cuando se emplean técnicas convencionales de análisis de datos. Es en este contexto donde los espacios tensoriales emergen como herramientas matemáticas de gran utilidad, permitiendo representar y analizar datos de alta dimensionalidad de manera eficiente. Los espacios tensoriales, ampliamente utilizados en campos tan diversos como la física y la inteligencia artificial, proporcionan un marco robusto para abordar problemas complejos que involucran múltiples variables y relaciones.

Los tensores, en un sentido avanzado, son objetos algebraicos que describen relaciones multilineales entre conjuntos de objetos algebraicos asociados a espacios vectoriales. Estos objetos permiten una representación compacta y manipulable de datos multidimensionales, lo que facilita el análisis y la extracción de información relevante. La capacidad de los tensores para encapsular interacciones complejas y su aplicabilidad en la descomposición de datos hacen de ellos una herramienta versátil en la ciencia de datos y en la física matemática.

La aplicación de los espacios tensoriales en estos contextos permitirá ilustrar su capacidad para simplificar y clarificar la estructura subyacente de datos complejos. Además, se discutirán las implicaciones prácticas de estas técnicas en el ámbito de la física y la economía, subrayando la importancia de los enfoques aplicados en la comprensión y solución de problemas reales. Esta exploración no solo aportará una comprensión más profunda de los datos analizados, sino que también destacará el valor de los espacios tensoriales como herramientas fundamentales en el análisis de datos de alta dimensionalidad.

1.1. Fundamentación Teórica

Los espacios vectoriales pueden estar formados por funciones, es decir, por aplicaciones que pueden transformar unas funciones en otras. Adicionalmente, en esta etapa pensaremos a las bases como distintos observadores o sistemas de referencias. Los tensores son mucho más que simples números respecto a un sistema de coordenadas y la clave radica en la “ley de transformación” de sus componentes, es decir, en la relación que existe entre las componentes de un tensor en un sistema de coordenadas y las componentes del mismo tensor en otro sistema de coordenadas diferente. Lo que hay detrás de todo esto es el hecho que las leyes matemáticas que describen los fenómenos físicos deben ser “invariantes” bajo transformaciones de coordenadas, como por ejemplo: traslaciones (el espacio es homogéneo) y rotaciones (el espacio es isótropo). Las distribuciones son objetos que generalizan la noción convencional de funciones en el análisis matemático y permiten

diferenciar funciones cuyas derivadas no existen en el sentido tradicional del cálculo diferencial. Las distribuciones también son importantes en Física e Ingeniería, donde muchos problemas conducen a ecuaciones diferenciales cuyas soluciones (con condiciones iniciales o de frontera) son distribuciones.

Como hemos construido la noción de distribución a partir del concepto de funcionales lineales, podemos también utilizar el producto tensorial definido en la sección 3.2.2 para extender las distribuciones a varias dimensiones.

2. Tratamiento de Datos

Se realizó un código en Python haciendo uso de diferentes librerías con herramientas gráficas y numéricas para tener un mejor tratamiento de datos para el sistema de partículas y las estadísticas del PIB. Todas las figuras utilizadas también fueron hechas con ese código, el cual está disponible en el Anexo 1 y en el repositorio de Github ¹.

2.1. Sistema de partículas

En este caso tenemos un sistema formado por 1533 partículas con diferentes masas. Estas partículas se encuentran distribuidas en un volumen y se tiene información de la masa y posición (x,y,z) de cada una, organizada en una tabla de datos en formato CSV. Con esta tabla de datos lo primero que se hizo fue una representación gráfica de la posición de las partículas para los casos 2D y 3D. Estas representaciones están se encuentran en las figuras 1 y 6

Se nos pide hallar los momentos centrados de orden cero, uno y dos para un sistema de partículas en dos y tres dimensiones, los momentos centrados son una medida estadística que describe la distribución espacial de masa alrededor de un origen.

2.1.1. Momento Centrado de Orden Cero

El momento de orden cero es simplemente la suma de las masas de todas las partículas que conforman el sistema que estamos estudiando. Para calcularlo, se utilizó la función ‘sum’ de la librería NumPy para sumar todas las masas previamente importadas desde el archivo CSV.

$$\mu_0(m) = \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{donde } m_i \text{ es la masa de la } i\text{-ésima partícula} \quad (1)$$

2.1.2. Momento Centrado de Orden Uno

El momento de primer orden se refiere al producto de las masas de las partículas por sus respectivas posiciones en relación con un punto de referencia, que en este caso es la media de las posiciones de cada coordenada.

¹<https://github.com/MariaEsA/Metodos-I>

$$\mu_1(m) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (|x\rangle_i - |\tilde{x}\rangle) \quad (2)$$

Donde $|x\rangle$ son las posiciones de las partículas en uno de sus ejes y $|\tilde{x}\rangle$ es la media de estas posiciones.

Para desarrollar este inciso, se utilizó una expresión análoga a la anterior que relaciona las masas de las partículas con sus respectivas coordenadas. El centro de masa del sistema se obtuvo dividiendo esta suma ponderada por la masa total del sistema M :

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot |x\rangle_i \quad (3)$$

2.1.3. Momento Centrado de Orden Dos

El momento de orden dos o momento de inercia es una herramienta que describe cómo se distribuye la masa de un objeto alrededor de un punto, generalmente, este punto coincide con el centro de masa del objeto, pero no necesariamente es así. El tensor de inercia también proporciona información sobre cómo la distribución de masa del objeto afecta su rotación alrededor de cada uno de sus ejes.

Para un cuerpo rígido, el tensor de inercia I es una matriz 3×3 que se define de la siguiente manera en un sistema de coordenadas cartesianas:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Donde los elementos I_{ij} están dados por:

$$I_{ij} = \int_V \rho(r) (\delta_{ij} \|r\|^2 - r_i r_j) dV \quad (4)$$

Donde $i, j \in 1, 2, 3$ y donde $(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$

En el caso de cuerpos no rígidos, como una caja llena de partículas, el cálculo del tensor de inercia se vuelve más complejo. Sin embargo, se puede calcular el tensor de inercia considerando la suma de las contribuciones individuales de cada partícula. Si N partículas de masa m_i están en las posiciones $r_i = (x_i, y_i, z_i)$, el tensor de inercia \mathbb{I} se puede calcular como:

$$\mu_2(m) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot (|x\rangle_i - |\tilde{x}\rangle)^2 \quad (5)$$

2.2. Momentos centrados

Como se mencionó anteriormente, el primer paso fue realizar una representación gráfica de las 1533 partículas que conforman el sistema, utilizando sus coordenadas en el plano xy . Esta representación permite visualizar la distribución espacial de las partículas y sus masas representada por una gama de colores en una escala de 1 a 5, donde los colores más oscuros corresponden a masas menores y los colores más claros a masas mayores.

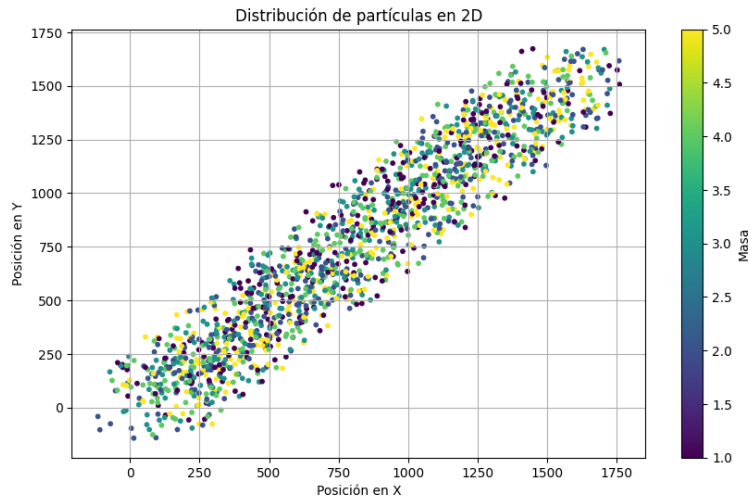


Figura 1: Representación gráfica del sistema a partir de sus posiciones (x,y)

En el caso de las tres dimensiones, usando las coordenadas de los tres ejes x,y,z y la masa nuevamente respresentada por una gama de colores como el caso anterior, nos da como resultado:

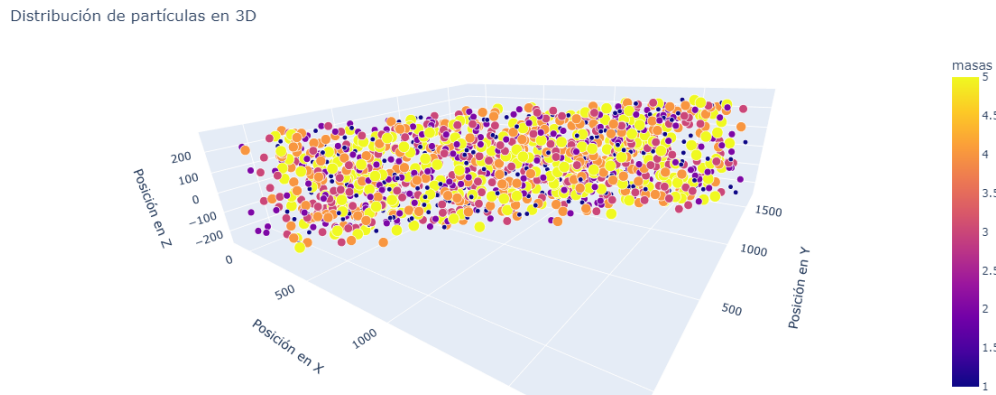


Figura 2: Representación gráfica del sistema a partir de sus posiciones (x,y,z)

Para el correcto análisis de la distribución de masas de un sistema de partículas se requiere la determinación de los momentos de la función que proporcionana información valiosa sobre las propiedades del sistema.

En la determinacion del momento de orden cero, también conocido como masa total del sistema, sencillamente se suman las masas de todas las partículas que conforman al sistema, como se indica en la formula 2, esto nos proporciona información sobre el "valor total" de la masa presente en el sistema. Al realizar los calculos usando la función suma de NumPy, nos da como resultado, que la masa total del sistema es de 4627.

El momento de orden uno o centro de masa del sistema se calcula como la suma de los productos de las masas y las posiciones de las partículas en cada coordenada, dividido entre la masa total del sistema que hallamos anteriormente como se observa en 3.

El centro de masa para la distribución 2D es [825.82 776.92] y en el caso tridimensional se repitió el mismo proceso, como resultado se halló que el centro de masa para la distribución 3D es [825.81521504 776.91852172 15.5033499]

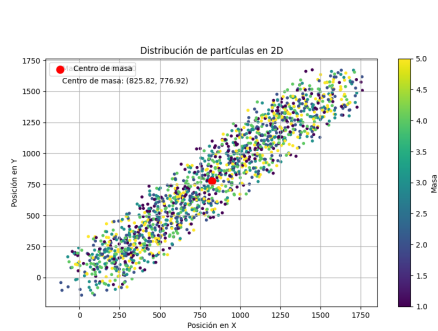


Figura 3: Ubicación del centro de masa en la distribución 2D (x,y)

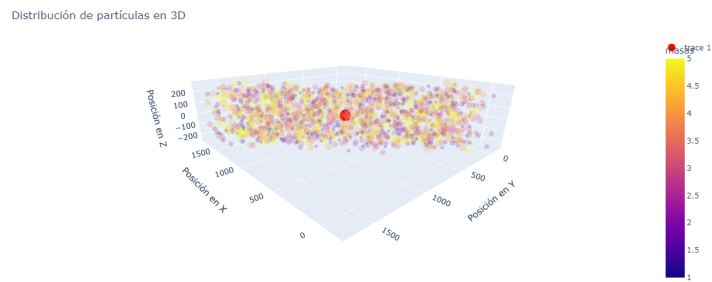


Figura 4: Ubicación del centro de masa en la distribución 3D (x,y,z)

Por último, se calcula el momento de orden dos usando la definición 5 para cuerpos no rígidos. Este es una medida de la resistencia de un cuerpo, en este caso un conjunto de partículas, a cambios en su movimiento de rotación en relación con sus ejes. Estos cambios dependen tanto de la distribución de masa como de la distancia de las partículas al eje.

Cómo resultado se obtiene que el tensor de inercia en el caso bidimensional es:

$$\begin{bmatrix} 9,637 \times 10^8 & -9,117 \times 10^8 \\ -9,117 \times 10^8 & 9,585 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Y para el caso tridimensional es:

$$\begin{bmatrix} 1,065 \times 10^9 & -9,117 \times 10^8 & 7,142 \times 10^6 \\ -9,117 \times 10^8 & 1,06 \times 10^9 & 1,93 \times 10^6 \\ 7,142 \times 10^6 & 1,93 \times 10^6 & 1,922 \times 10^9 \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2.1. Preguntas Propuestas

¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?

Para el desarrollo de esta pregunta es necesario calcular los autovalores y los autovectores correspondientes a los tensores de inercia calculados para ambos casos, el bidimensional y el tridimensional. Los autovalores de un tensor de inercia representan los momentos principales de inercia, mientras los autovectores corresponden a las direcciones principales de inercia.

Para encontrar estos valores se hizo uso de la función `linalg.eigh` de NumPy, la cual al aplicarse sobre los tensores de inercia nos da sus autovectores:

Caso bidimensional:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0,706 \\ -0,708 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0,708 \\ 0,706 \end{bmatrix}$$

Caso tridimensional:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0,706 \\ -0,708 \\ 0,003 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0,047 \\ -0,052 \\ -0,998 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ -0,704 \\ 0,07 \end{bmatrix}$$

Una vez hallados los autovectores del tensor de inercia los comparamos con los vectores base del sistema coordenado cartesiano, esta comparación se realizó usando la función `allclose` de NumPy, que determina si dos arreglos son elementos iguales dentro de cierta tolerancia.

En este caso los vectores base del sistema cartesiano no constituyen una base propia para esta distribución de masa en ninguno de los dos casos. Este resultado implica que los vectores cartesianos no son los ejes principales de inercia de esta distribución de masa

Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.

Los autovectores del tensor de inercia, que forman una base ortogonal respecto a la cual la distribución de masa se organiza de forma más simple, son los hallados anteriormente, para comprobarlo se diagonaliza el tensor de inercia.

El proceso de diagonalización del tensor de inercia comienza con el cálculo de sus autovalores y autovectores. A partir de los autovectores hallados, se construye la matriz de transformación, la cual sirve para transformar de la base cartesiana a la base de los ejes principales de inercia. Finalmente, se verifica la correcta diagonalización del tensor de inercia mediante la reconstrucción del tensor utilizando la matriz de autovectores.

Como resultado obtenemos los ejes principales de inercia, en el caso bidimensional estos son:

$$\begin{aligned} \text{Eje 1: Autovector} &= \begin{bmatrix} -0,706 \\ -0,708 \end{bmatrix}, & \text{Autovalor} &= 4,935 \times 10^7 \\ \text{Eje 2: Autovector} &= \begin{bmatrix} -0,708 \\ 0,706 \end{bmatrix}, & \text{Autovalor} &= 1,873 \times 10^9 \end{aligned} \quad (8)$$

En el caso tridimensional obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Eje 1: Autovector} &= \begin{bmatrix} -0,706 \\ -0,708 \\ 0,004 \end{bmatrix}, & \text{Autovalor} &= 1,512 \times 10^8 \\ \text{Eje 2: Autovector} &= \begin{bmatrix} 0,047 \\ -0,052 \\ -0,998 \end{bmatrix}, & \text{Autovalor} &= 1,922 \times 10^9 \\ \text{Eje 3: Autovector} &= \begin{bmatrix} 0,707 \\ -0,704 \\ 0,070 \end{bmatrix}, & \text{Autovalor} &= 1,975 \times 10^9 \end{aligned} \quad (9)$$

Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales

La matriz de transformación se forma utilizando los autovectores del tensor de inercia como columnas, estos autovectores forman una base ortogonal dado que el tensor de inersia es real y simétrico. Esta matriz de autovectores transforma cualquier vector expresado en la base cartesiana a la base de los ejes principales del tensor de inercia.

Para hallar la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores es necesario invertir la matriz de transformación conformada originalmente con los autovectores como columnas. A causa de la simetria en la matriz de de autovectores en el caso bidimensional, la matriz de transformación es identica a su inversa:

$$\begin{aligned}
\text{Matriz de Autovectores: } & \begin{bmatrix} -0,706 & -0,708 \\ -0,708 & 0,706 \end{bmatrix}, \\
\text{Matriz de Transformación: } & \begin{bmatrix} -0,706 & -0,708 \\ -0,708 & 0,706 \end{bmatrix} \\
v_1 \text{ transformado: } & \begin{bmatrix} 1,000 \\ 9,233 \times 10^{-17} \end{bmatrix} \\
v_2 \text{ transformado: } & \begin{bmatrix} -7,398 \times 10^{-17} \\ 1,000 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{10}$$

En el caso de tres dimensiones:

$$\begin{aligned}
\text{Matriz de Autovectores: } & \begin{bmatrix} -0,706 & 0,047 & 0,707 \\ -0,708 & -0,052 & -0,704 \\ 0,004 & -0,998 & 0,070 \end{bmatrix}, \\
\text{Matriz de Transformación: } & \begin{bmatrix} -0,706 & -0,708 & 0,004 \\ 0,047 & -0,052 & -0,998 \\ 0,707 & -0,704 & 0,070 \end{bmatrix} \\
v_1 \text{ transformado: } & \begin{bmatrix} 1,000 \\ 3,086 \times 10^{-18} \\ 6,970 \times 10^{-18} \end{bmatrix} \\
v_2 \text{ transformado: } & \begin{bmatrix} -2,116 \times 10^{-18} \\ 1,000 \\ -1,236 \times 10^{-17} \end{bmatrix} \\
v_3 \text{ transformado: } & \begin{bmatrix} 3,253 \times 10^{-17} \\ 5,928 \times 10^{-18} \\ 1,000 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{11}$$

2.3. Estadísticas del Producto Interno Bruto (PIB)

La matriz de covarianza es una herramienta estadística que mide cómo varían dos variables conjuntamente y, en el caso de los porcentajes del PIB, proporciona información sobre cómo estos sectores interactúan entre sí en términos de inversión. Esta es útil para identificar si las inversiones en dos sectores, como la educación e investigación, tienden a aumentar o disminuir juntas en el caso de una covarianza positiva o negativa.

Este tipo de herramientas son de mucha ayuda a la hora de realizar una planificación presupuestaria y asignar los recursos con el fin de lograr objetivos económicos más equilibrados. Por ejemplo, si las inversiones en todos los sectores tienen covarianzas altas y positivas, significa que las inversiones no están diversificadas y pueden ser susceptibles a riesgos económicos comunes.

Por otra parte, la matriz de correlación mide la relación lineal normalizada entre variables,

proporcionando un valor que oscila entre -1 y 1, donde -1 indica una relación perfectamente negativa, 0 ninguna relación y 1 una relación perfectamente positiva. Esta matriz cuenta con el beneficio de estar normalizada, lo que significa que las relaciones entre los sectores no están influenciadas por las diferencias en las escalas de las inversiones, permitiendo una comparación más clara.

La matriz de correlación es otra herramienta que reitera la ayuda a la hora de identificar sectores económicos que podrían ser afectados por los mismos riesgos económicos o políticos en el caso de una alta correlación positiva, y oportunidades para compensar los riesgos en casos de una correlación negativa.

Utilizando los datos de El Banco Mundial sobre el porcentaje del PIB que Colombia ha invertido en defensa, salud, investigación y educación, vamos a hallar una matriz de covarianza y correlación que relacione los parámetros de estos cuatro sectores.

Para calcular la matriz de covarianza es necesario recopilar los datos de los porcentajes del PIB invertido en los sectores seleccionados, luego se calcula el promedio de los datos. Finalmente se hallan las entradas de la matriz de covarianza mediante la siguiente formula:

$$cov(X, Y) = \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{X})(Y_i - \tilde{Y}) \quad (12)$$

La matriz de covarianza hallada es por tanto:

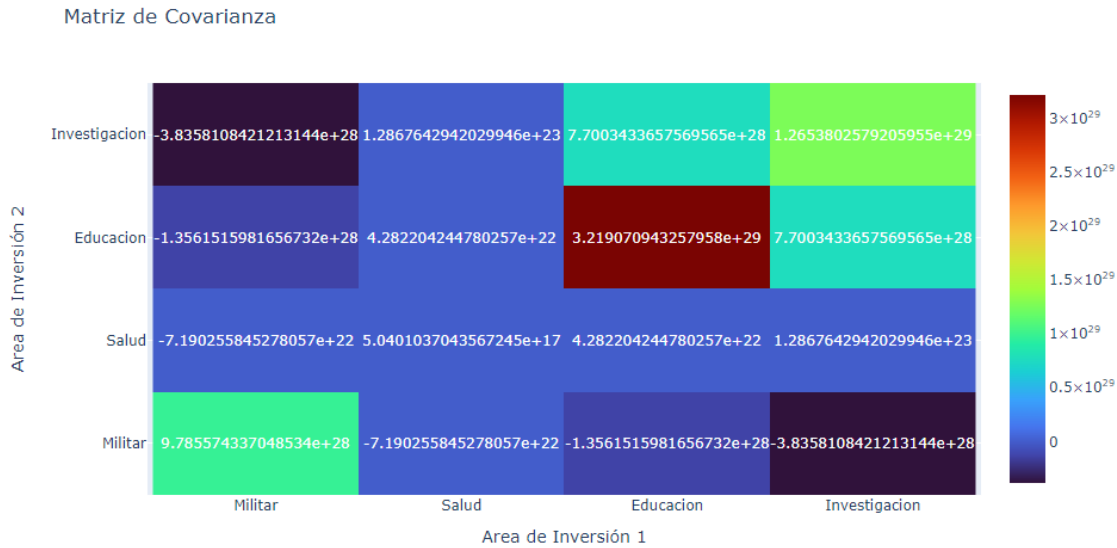


Figura 5: Matriz de Covarianza

La matriz de correlación mide la relación lineal normalizada entre variables, proporcionando un valor que oscila entre -1 y 1. Para calcular esta matriz es necesario hallar las desviaciones estándar de los datos para cada sector, se forma la matriz de productos externos de las desviaciones estándar y finalmente se normaliza la matriz de covarianza al dividirla entre este producto.

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (13)$$

La matriz de correlación hallada es:

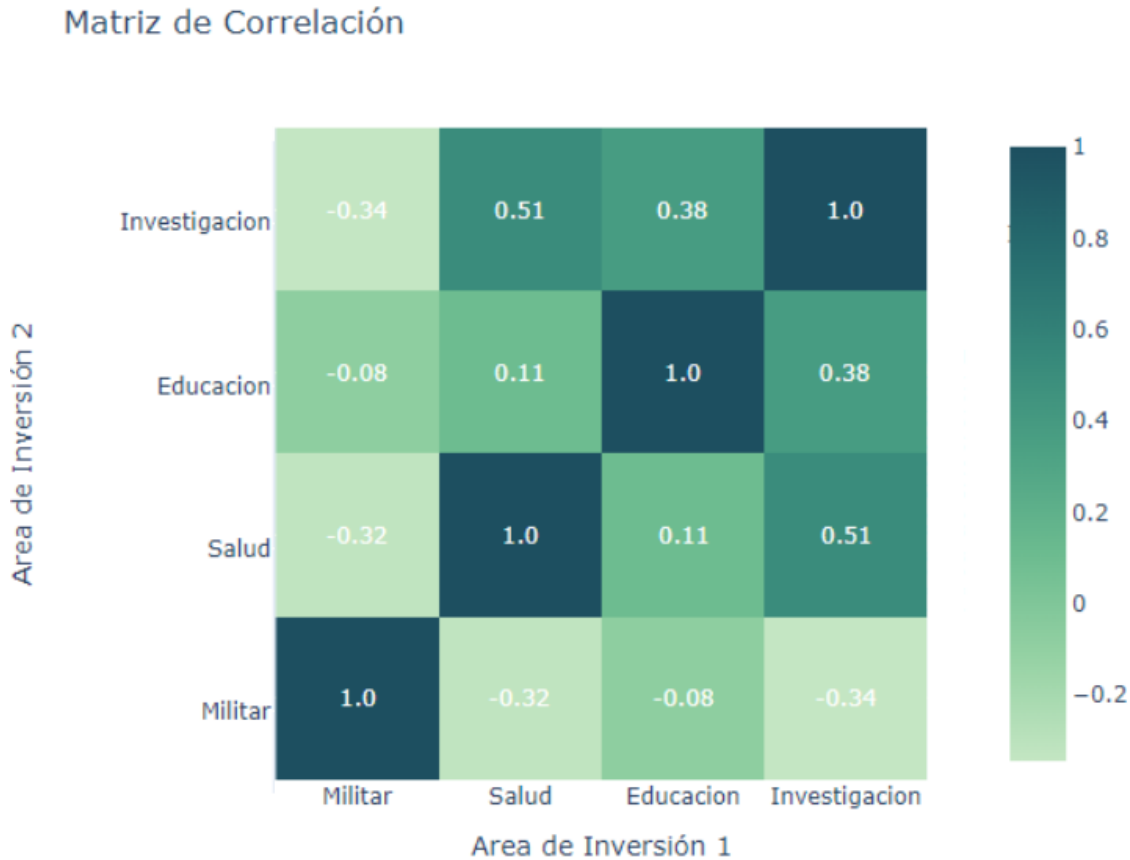


Figura 6: Matriz de Correlación

Los elementos diagonales de la matriz de covarianza representan cuánto varía cada sector de inversión con respecto a su promedio a lo largo del tiempo, en la matriz hallada podemos observar que la educación es el sector con la mayor varianza, seguido de la investigación y la militar, mientras que la salud es el sector de inversión más estable a lo largo de los veinte años de estudio.

A la hora de analizar cómo varían conjuntamente los sectores de inversión, podemos encontrar

algunos patrones importantes. El sector militar cuenta con una covarianza negativa con los otros tres sectores analizados, lo que implica que siempre que se hace un aumento en la inversión militar, este implica una disminución principalmente en la investigación y la educación, pero también en la salud. Esto es preocupante porque implica que estos tres sectores, principales promotores del bienestar y desarrollo de un país, están compitiendo en recursos con el sector militar, con el agravante de que el país está sumergido en una guerra de guerrillas.

Por otra parte, podemos encontrar que los sectores de educación, investigación y salud cuentan con una correlación positiva, destacando educación y salud. Esto podría ocurrir gracias a políticas en estos sectores que los benefician mutuamente, como por ejemplo la implementación de hospitales universitarios cuyo desarrollo se beneficia de los aumentos de inversión en los dos sectores.

La matriz de correlación nos permite apreciar de forma más directa los resultados discutidos en la matriz de covarianza, mostrando qué tan moderada es la correlación entre los diferentes sectores. En esta matriz se puede ver claramente que la correlación más significativa se encuentra entre el sector de la salud y el de investigación, con un valor de 0,51. Implicando que estos sectores se benefician mutuamente de las inversiones realizadas en sus respectivos ámbitos, pero también que en cierta medida comparten riesgos económicos.

2.3.1. Autovalores y Autovectores de la Matriz de Covarianza

Para hallar los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza se realizó el mismo proceso anteriormente detallado en el desarrollo del momento de orden uno con el apoyo de las herramientas disponibles en la biblioteca de NumPy, estos son los resultados:

Matriz de Covarianza:

$$\begin{bmatrix} 9,79 \times 10^{28} - 7,19 \times 10^{22} & -1,36 \times 10^{28} - 3,84 \times 10^{28} \\ -7,19 \times 10^{22} 5,04 \times 10^{17} & 4,28 \times 10^{22} 1,29 \times 10^{23} \\ -1,36 \times 10^{28} 4,28 \times 10^{22} & 3,22 \times 10^{29} 7,70 \times 10^{28} \\ -3,84 \times 10^{28} 1,29 \times 10^{23} & 7,70 \times 10^{28} 1,27 \times 10^{29} \end{bmatrix}$$

Autovalores y autovectores de la matriz de covarianza:

$$\begin{bmatrix} \text{Autovector 1} & \text{Autovector 2} & \text{Autovector 3} & \text{Autovector 4} & \text{Autovalor} \\ 0 & -0,101 & 0,677 & -0,729 & -0,000 & 3,512 \times 10^{29} \\ 1 & 0,000 & -0,935 & -0,400 & -1,000 & 1,293 \times 10^{29} \\ 2 & 0,936 & 0,314 & 0,162 & -0,000 & 6,584 \times 10^{28} \\ 3 & 0,338 & -0,666 & -0,665 & 0,001 & 3,569 \times 10^{17} \end{bmatrix}$$

La magnitud del autovalor indica que su autovector correspondiente explica una cantidad significativa de la variabilidad de los datos originales. Además, los autovalores suelen ordenarse según su magnitud,

de mayor a menor, mostrando primero los autovectores que explican una mayor variabilidad y, a medida que descenden, estos explican una menor varianza.

Los autovectores son ortogonales entre sí, lo que implica que representan direcciones perpendiculares en el espacio de las variables. La dirección que toma el autovector nos muestra cómo se relacionan las diferentes variables entre sí, mostrándonos relaciones positivas o negativas entre los diferentes sectores.

2.3.2. Matriz Transformación

Por último hallamos la matriz transformación que nos lleva de la base original a la representación de la matriz en la base de los autovectores y autovalores siguiendo el procedimiento anteriormente detallado en la sección de preguntas propuestas, la matriz transformación hallada es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} -0,101 & 0,000 & 0,936 & 0,338 \\ 0,677 & -0,000 & 0,314 & -0,666 \\ -0,729 & -0,000 & 0,162 & -0,665 \\ -0,000 & -1,000 & -0,000 & 0,001 \end{bmatrix}$$

Vectores transformados:

$$V1 \text{ transformado} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ -0,000 \\ -0,000 \\ 0,000 \end{bmatrix}$$

$$V2 \text{ transformado} = \begin{bmatrix} -0,000 \\ 1,000 \\ 0,000 \\ -0,000 \end{bmatrix}$$

$$V3 \text{ transformado} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ -0,000 \\ 1,000 \\ -0,000 \end{bmatrix}$$

$$V4 \text{ transformado} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ -0,000 \\ 1,000 \end{bmatrix}$$

3. Conclusiones

- Los tensores son estructuras matemáticas que pueden manejar eficientemente grandes volúmenes de datos y múltiples dimensiones. En el contexto del análisis de distribuciones de masas en

dos y tres dimensiones, esto permite procesar y analizar datos masivos de manera efectiva, facilitando la identificación de patrones y tendencias que podrían ser difíciles de detectar con técnicas tradicionales de análisis de datos.

- El uso de espacios tensoriales ofrece una flexibilidad notable para modelar diferentes tipos de datos y relaciones. Esta adaptabilidad es esencial cuando se trabaja con distribuciones de masas multidimensionales, ya que permite ajustar los modelos según las necesidades específicas del análisis, mejorando la precisión y la relevancia de los resultados obtenidos. Además, la capacidad de integrar diferentes fuentes y tipos de datos en un marco tensorial proporciona una visión más integral y detallada del fenómeno estudiado.
- Las matrices de covarianza son poderosas para identificar la variabilidad y las tendencias en los datos del PIB. Al analizar las covarianzas entre diferentes variables económicas, es posible identificar patrones y correlaciones clave que pueden influir en el crecimiento económico.
- Las matrices de covarianza no son exclusivas del ámbito científico, también son una herramienta clave en la optimización de modelos econométricos, se utilizan para analizar y predecir fenómenos económicos. Al incorporar matrices de covarianza, los modelos pueden capturar la variabilidad conjunta de múltiples variables, mejorando así la precisión de las estimaciones y las predicciones. Esto permite desarrollar políticas y estrategias más efectivas, basadas en un entendimiento más detallado y preciso de la economía.

4. Referencias

Referencias

- [1] HERNÁNDEZ, H. Y NUÑES, L., *Matematicas avanzadas de los espacios lineales al análisis vectorial, con aplicaiones en Maxima*, Colombia 2021.
- [2] ROMAN, P., (1968) *Some modern mathematics for physicists and other outsiders: An introduction to algebra, topology, and functional analysis*. Pergamon Press.