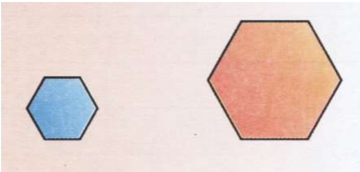
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

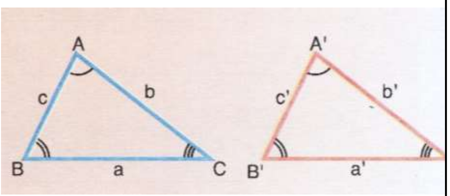
Semelhança

Duas figuras geométricas são semelhantes quando possuem o mesmo formato, mesmo que possuam tamanhos diferentes. Quando temos duas figuras semelhantes, é como se uma delas fosse a ampliação da outra.

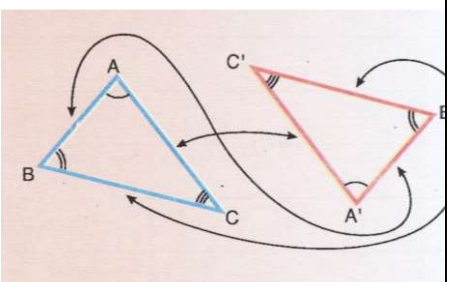


Semelhança de triângulos

Considere dois triângulos ABC e A’B’C’ semelhantes entre si:



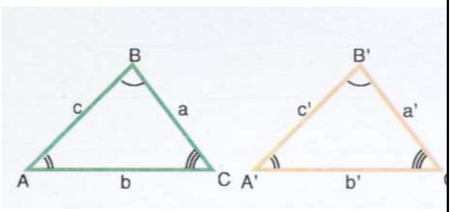
Indicamos: Δ ABC ~ Δ A’B’C’
Estes dois triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos ordenadamente com a mesma medida.
Dois lados são chamados **homólogos** quando cada um deles está em um triângulo e ambos são opostos a ângulos que possuem a mesma medida. Assim, nos triângulos representados na figura acima, o lado **a** é homólogo ao lado **a’**, o **b** é homólogo ao **b’** e o **c** ao **c’**.
Na figura abaixo, as setas indicam os lados homólogos nos triângulos semelhantes.



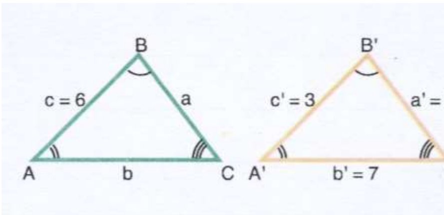
Razão de semelhança

Se dois triângulos são semelhantes entre si, os lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$$



Na expressão anterior, **k** é chamada razão de semelhança entre os triângulos.
Sendo dado, por exemplo, que os triângulos ABC e A’B’C’ são semelhantes, que os lados do segundo têm medidas $\overline{A'B'}$ = 3 cm, $\overline{B'C'}$=5 cm e $\overline{A'C'}$ = 7 cm, e que a medida do lado AB do primeiro é 6 cm, vamos obter a razão de semelhança dos triângulos e os outros dois lados do primeiro triângulo.



Δ ABC ~ Δ A’B’C’

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

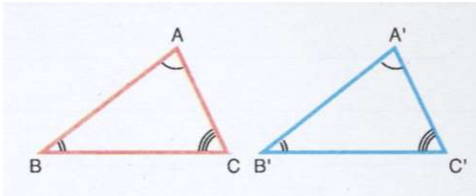
A razão de semelhança é 2.

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} = 2 \rightarrow a = 10 \\ \frac{b}{7} = 2 \rightarrow b = 14 \end{cases}$$

Os outros dois lados do primeiro triângulo medem $\overline{BC}$ = 10cm e $\overline{AC}$ = 14cm.

Casos de semelhança

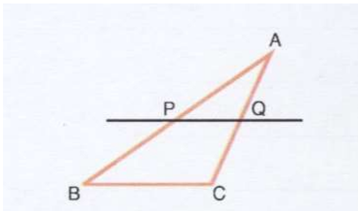
Sabemos que dois triângulos são semelhantes se possuem os três ângulos ordenadamente com a mesma medida. Na verdade, para provar que esses triângulos são semelhantes, basta comprovar que dois de seus ângulos possuem ordenadamente a mesma medida. O terceiro ângulo de cada um deles automaticamente também terá a mesma medida, já que, em qualquer triângulo, a soma das medidas dos três ângulos internos sempre é igual a 180°.



$$\left.\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ B \equiv B' \end{matrix}\right\} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes então eles são semelhantes entre si.

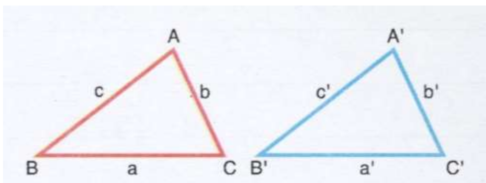
Vimos que dois triângulos semelhantes tem os lados homólogos proporcionais. A recíproca também é verdadeira.
Para demonstrar este caso, vamos tomar o triângulo ABC e no lado $\overline{AB}$, vamos marcar um ponto P de tal modo que $\overline{AP} = \overline{A'B'}$



Traçando, por P, uma reta paralela a BC, obtemos dois triângulos semelhantes (Δ APQ ~ Δ ABC) porque:

PÂQ $\equiv$BÃC
APQ$\equiv$ABC

Se esses triângulos são semelhantes então os lados homólogos são proporcionais:



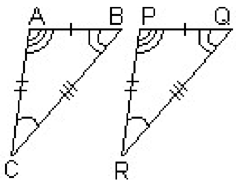
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Se dois triângulos têm os três lados proporcionais então eles são semelhantes entre si.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de um e os vértices do outro, de modo que os lados e os ângulos correspondentes sejam, respectivamente, congruentes

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{BC} \cong \overline{QR} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \hat{C} \cong \hat{R} \end{cases}$$



CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA

1º Critério: LLL
Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.

2º Critério: LAL
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo entre eles, respectivamente, congruentes.

3º Critério: ALA
Dois triângulos são congruentes, quando possuem dois ângulos e o lado entre eles, respectivamente, congruentes.

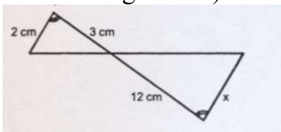
4º Critério: LAA_o
Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.

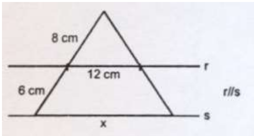
Importante

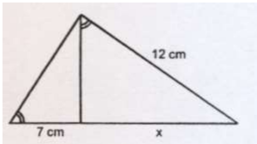
- LLA não garante a congruência
- Se dois triângulos retângulos possuem hipotenusas congruentes e um dos catetos congruentes, então eles são congruentes.

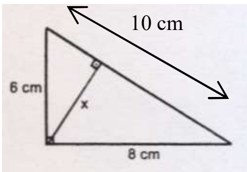
Exercícios de Aula

01. Determine o comprimento x nas figuras abaixo (ângulos com marcas iguais são congruentes):

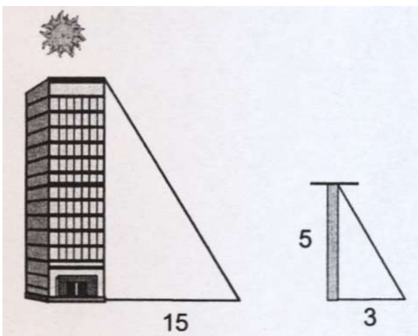
a)


b)


c)


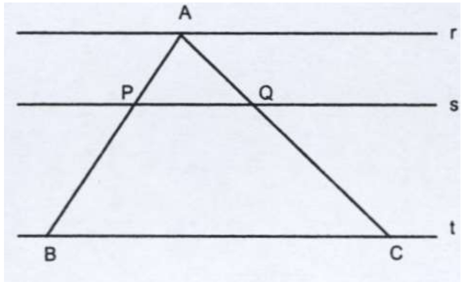
d)


02. (VUNESP) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m



A altura do prédio, em metros, é
(A) 25
(B) 29
(C) 30
(D) 45
(E) 75

03. (UFMS) Na figura a seguir, representamos três retas coplanares e paralelas, **r**, **s** e **t**, tais que a distância entre **r** e **s** é igual a 2cm e a distância entre **s** e **t** é igual a 6cm.

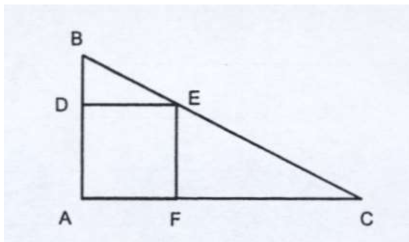


Sabendo-se que PQ = 3 cm, calcule, em cm^2, a área do triângulo ABC.

Tarefa Básica

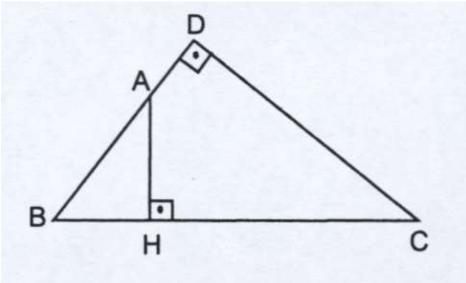
01. (FUVEST) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é
(A) 6m
(B) 7,2m
(C) 12m
(D) 20m
(E) 72m

02. (FUVEST) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado,
AB=1e AC=3.



Quanto mede o lado do quadrado?
(A) 0,70 (B) 0,75 (C) 0,80
(D) 0,85 (E) 0,90

03. (MACK) Na figura AH=4, BC= l0 e DC=8. A medida de AB é



(A) 4,8   (B) 5,2   (C) 5,0
(D) 4,6   (E) 5,4

Respostas da Tarefa Básica

01.(D)
02.(B)
03.(C)