

EA614 - Análise de Sinais

Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 2 – Série de Fourier

Turma A – 1º semestre de 2021

Prof: Levy Boccato Email: lboccato@dca.fee.unicamp.br

PED-C: Renan Del Buono Brotto Email: rbrotto@decom.fee.unicamp.br

Introdução

A série de Fourier permite caracterizar sinais periódicos através de uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas, conforme a equação de síntese:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (1)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ denota a frequência fundamental, T denota o período fundamental do sinal $x(t)$ e os valores a_k são os coeficientes da série. Tais coeficientes são dados pela equação de análise:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

O objetivo deste exercício computacional é estudar a série de Fourier para a onda do tipo “dente de serra” através de simulações computacionais. A seguir, é apresentado o roteiro do experimento.

Parte Computacional

Considere a onda “dente de serra”, de amplitude unitária, com período $T = 4$ s, definida em um período por:

$$x(t) = \frac{2}{T}t, \quad \text{para} \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2} \quad (3)$$

A Figura 1 apresenta 3 períodos do sinal em questão:

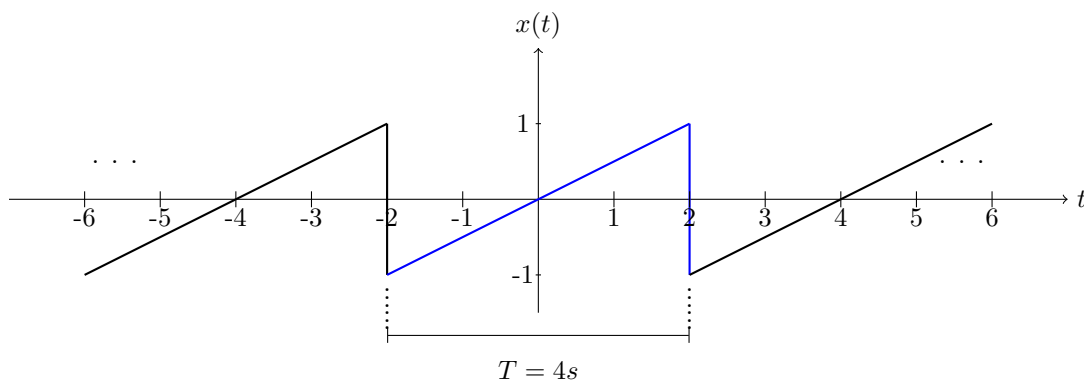


Figura 1: Onda “dente de serra” (ilustração de 3 períodos).

- (a) Obtenha os coeficientes a_k da série de Fourier da onda “dente de serra” com período T . **Dica:** calcule o coeficiente a_0 separadamente, lembrado que ele corresponde ao nível DC do sinal.
- (b) Com os coeficientes obtidos anteriormente, implemente um programa que aproxime a onda “dente de serra” pela sua série de Fourier com N harmônicas:

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4)$$

De posse do programa, exiba, em gráficos diferentes, a onda “dente de serra” dada por (3) junto com sua aproximação dada pela série de Fourier com os valores $N = 1, 10, 20, 50$, para um período do sinal. Procure usar cores distintas para cada uma das séries obtidas, bem como para a onda “dente de serra”.

Neste item, portanto, devem ser gerados quatro gráficos, sendo que cada gráfico mostrará duas curvas: a onda “dente de serra” e a aproximação em série de Fourier para o valor adotado de N .

- (c) Para cada um dos valores de N do item anterior, calcule a potência média do erro P_N :

$$P_N = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(x(t) - \tilde{x}_N(t) \right)^2 dt \quad (5)$$

Uma vez que estamos lidando com representações discretas dos sinais, a potência pode ser aproximada através da média temporal de $\left(x(t) - \tilde{x}_N(t) \right)^2$.

- (d) Para $N = 50$, plote o módulo dos coeficientes da série $|a_k|$ em função de ω e discuta a simetria observada. Como queremos plotar uma sequência de valores discretos, utilize o comando `stem()` no Matlab (ou Python).
- (e) Considere o circuito analógico mostrado na Figura 2, que corresponde a um sistema LIT cuja resposta em frequência é dada por $H(j\omega) = \frac{1}{1-j(\frac{\omega_c}{\omega})}$, onde $\omega_c = \frac{1}{RC}$ é a frequência de corte do filtro (em rad/s). Plote o módulo e a fase da resposta em frequência e discuta a ação deste sistema como um filtro. (Dica: utilize os comandos `abs(·)` e `angle(·)`).

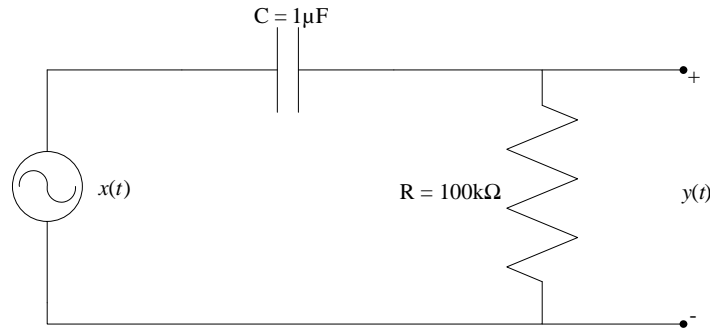


Figura 2: Circuito RC que implementa um filtro analógico.

- (f) Tendo como base os conceitos de autofunção e autovalor, mostre a forma de onda $y(t)$ observada na saída do sistema LIT do item (e) quando a entrada é a onda “dente de serra” aproximada com $N = 50$. Comente a forma de onda obtida.
- (g) A Figura 3 mostra a resposta do sistema LIT do item (e) à onda dente de serra da Figura 1. Explique as diferenças entre o gráfico da Figura 3 e a resposta do sistema observada no item (f).

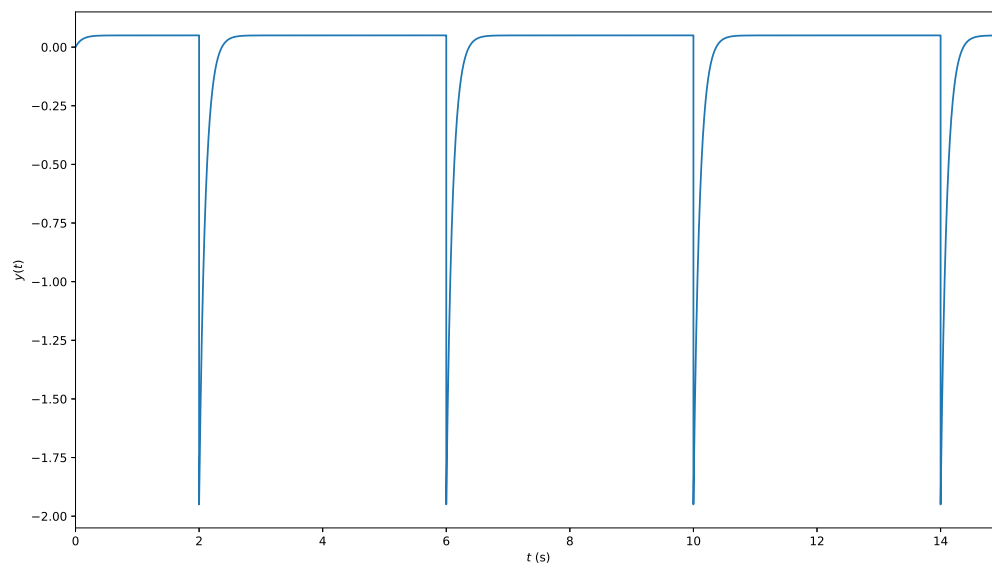


Figura 3: Resposta do circuito da Figura 2 ao sinal dente de serra da Figura 1.