TESTE 3

Q.1)

Primeiramente, vamos definir algebricamente nossa função:

$$x_1(t) = \begin{cases} t+2, & \text{se } -2 \leq t < -1 \\ 1, & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ -1, & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ t-2, & \text{se } 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \delta(t), \text{ se } t = 0$$

pela propriedade da linearidade temos:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

então:

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

Vamos encontrar $X_1(j\omega)$. Esta função também é composta de outras funções, conforme o t varia, então também podemos usar a propriedade da linearidade:

$$X_1(j\omega) = \int_{-2}^{-1} (t+2) \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-1}^{0} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} -1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt +$$

$$+ \int_{1}^{2} (t-2) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

vamos fazer cada integral separadamente:

$$\rightarrow \int_{-2}^{-1} (t+2) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \left[-\frac{t \cdot e^{-j\omega t}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} - \frac{2e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{e^{j\omega} - e^{2j\omega} + j\omega \cdot e^{j\omega}}{\omega^2}$$

$$\rightsquigarrow \int_{-1}^{0} e^{-j\omega t}\,dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{j - j\cdot e^{j\omega}}{\omega}$$

$$\rightsquigarrow \int_{0}^{1} -1\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{j - j e^{-j\omega}}{\omega}$$

$$\rightsquigarrow \int_{1}^{2} (t-2)\, e^{-j\omega t}\,dt = \left[\frac{-t e^{-j\omega t}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} + \frac{2 e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{j\omega e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}}{\omega^2}$$

então $X_1(j\omega)$ é:

$$X_1(j\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{2j\omega} + j\omega\cdot e^{j\omega}}{\omega^2} + \frac{j - je^{j\omega}}{\omega} + \frac{j - je^{-j\omega}}{\omega} + \frac{j\omega e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}}{\omega^2}$$

Vamos encontrar $X_2(j\omega)$. Através da tabela de Transformada de Fourier, podemos rapidamente definir $X_2(j\omega)$:

$$X_2(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

Assim temos $X_1(j\omega)$ e $X_2(j\omega)$ que compoem $X(j\omega)$. A partir disso concluímos:

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{2j\omega} + j\omega e^{j\omega}}{\omega^2} + \frac{j - je^{j\omega}}{\omega} + \frac{j - je^{-j\omega}}{\omega} + \frac{j\omega e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}}{\omega^2} + 1$$

tilibra A partir de ~~...~~ manipulações algébricas na expressão acima, especialmente pela representação da função seno em termos da exponencial de Euler, podemos simplificar ainda mais:

$$X(j\omega) = \frac{-2j\ sen(2\omega)}{\omega^2} + \frac{2j\ sen(\omega)}{\omega^2} + \frac{2j}{\omega} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega) = 1 + \frac{2j}{\omega^2}\left[sen(\omega) - sen(2\omega) + \omega\right]}$$

— " — " — " — " — " — " — " —

Q.2.)

a)

Primeiramente, vamos definir o atraso de grupo:

$$\omega = -\frac{d}{d\omega}(\angle H(j\omega))$$

mas, pelo enunciado, temos um atraso de grupo igual a 5, $\forall\omega$, então substituindo temos:

$$5 = -\frac{d}{d\omega}(\angle H(j\omega)) \Rightarrow d(\angle H(j\omega)) = -5\,d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle H(j\omega) = -5\omega + C$$

pelo enunciado temos também que ~~q~~ a resposta ao impulso $h(t)$ é real, isso implica que a fase $\angle H(j\omega)$ é uma função ímpar, portanto $C = 0$, assim:

$$\angle H(j\omega) = -5\omega$$

Com o que obtivemos até agora, é possível reescrever $H(j\omega)$ ~~da~~ forma que usemos seu módulo e sua fase, conforme abaixo:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| . e^{j \cdot \angle H(j\omega)} = |H(j\omega)| . e^{-j5\omega}$$

utilizando dos dados de magnitude de resposta em frequência dado no enunciado, temos:

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j5\omega} & , \ 180\pi \leq |\omega| \leq 220\pi \\ 0 & , \ \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, para determinarmos a resposta ao impulso $h(t)$, devemos calcular a transformada inversa de $H(j\omega)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-220\pi}^{-180\pi} e^{-j5\omega} . e^{j\omega t} \, d\omega + \int_{180\pi}^{220\pi} e^{-j5\omega} . e^{j\omega t} \, d\omega\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} . \int_{-220\pi}^{-180\pi} . e^{j\omega(t-5)} \, d\omega + \frac{1}{2\pi} . \int_{180\pi}^{220\pi} e^{j\omega(t-5)} \, d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} . \left. \frac{e^{j\omega(t-5)}}{j(t-5)} \right|_{-220\pi}^{-180\pi} + \frac{1}{2\pi} . \left. \frac{e^{j\omega(t-5)}}{j(t-5)} \right|_{180\pi}^{220\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} . \left[\frac{e^{-j180\pi(t-5)} - e^{-j220\pi(t-5)}}{j(t-5)}\right] + \frac{1}{2\pi} . \left[\frac{e^{j220\pi(t-5)} - e^{j180\pi(t-5)}}{j(t-5)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-j200\pi(t-5)}\left[\frac{\text{sen}(20\pi(t-5))}{\pi(t-5)}\right] + e^{j200\pi(t-5)} . \left[\frac{\text{sen}(20\pi(t-5))}{\pi(t-5)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{\text{sen}(20\pi(t-5))}{\pi(t-5)} . \left[e^{j200(t-5)} + e^{-j200(t-5)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{2 . \text{sen}(20\pi . (t-5)) . \cos(200\pi . (t-5))}{\pi(t-5)}}$$

b)

Caso não fosse especificado que $h(t)$ era real, o conhecimento de $|H(j\omega)|$ e do atraso de grupo não seria suficiente para determinar a resposta ao impulso de forma única.

Isso ocorre porque o fato de $h(t)$ ser real fez com que a constante C na letra a) igualasse a zero. Caso a condição de $h(t)$ real não fosse dada, a função $\angle H(j\omega)$ só poderia ser encontrada através de uma condição inicial apresentada pelo problema.

——— " ——— " ——— " ——— " ——— " ——— " ——— " ——— " ———

Q.3.)

$$X(j\omega) = j\omega \cdot \cos(100\omega) \cdot [10 \cdot Sa(5\omega)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \underbrace{j\omega}_{\text{derivada no domínio do tempo}} \cdot \underbrace{\cos(100\omega)}_{X_1(j\omega)} \cdot \underbrace{10 \cdot Sa(5\omega) \cdot 10 \cdot Sa(5\omega)}_{X_2(j\omega)}$$

O produto $X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$ no domínio da frequência indica uma convolução entre suas inversas no domínio do tempo: $x_1(t) * x_2(t)$.

Vamos encontrar $X_1(j\omega) \Leftrightarrow x_1(t)$:

$$x_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\cos(100\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{j100\omega} + e^{-j100\omega}}{2}\right\}$$

da tabela de transformadas temos que $\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t - t_0)$, assim podemos encontrar $x_1(t)$ como:

$x_1(t) = \frac{1}{2} . [\delta(t+100) + \delta(t-100)]$

Vamos encontrar $x_2(t)$:

$X_2(j\omega) = \underbrace{10 . Sa(5\omega)}_{X_3(j\omega)} \; 10 . Sa(5\omega)$

utilizando da mesma propriedade da multiplicação em frequência, temos:

$X_2(j\omega) = X_3(j\omega) \cdot X_3(j\omega) \Leftrightarrow x_3(t) * x_3(t)$

então:

$X_3(j\omega) = 10 . Sa(5\omega)$ onde $\tau = 10$, assim:

$X_3(j\omega) = \tau . Sa\left(\frac{\tau}{2} . 5\right) = 10 . Sa\left(\omega . \frac{10}{2}\right)$

pela tabela das transformadas:

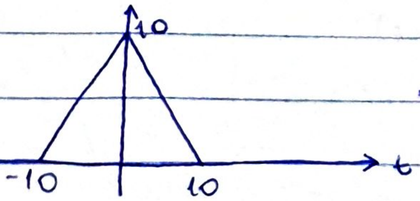
$x_3(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{10 . Sa\left(\omega . \frac{10}{2}\right)\right\} = ret\left(\frac{t}{\tau}\right) = ret\left(\frac{t}{10}\right)$

dessa forma, ficamos com:

$x_1(t) * [x_3(t) * x_3(t)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} . [\delta(t+100) + \delta(t-100)] * \left[ret\left(\frac{t}{10}\right) * ret\left(\frac{t}{10}\right)\right]$

a convolução entre os retângulos resulta em um triângulo com o dobro de base e altura 10:



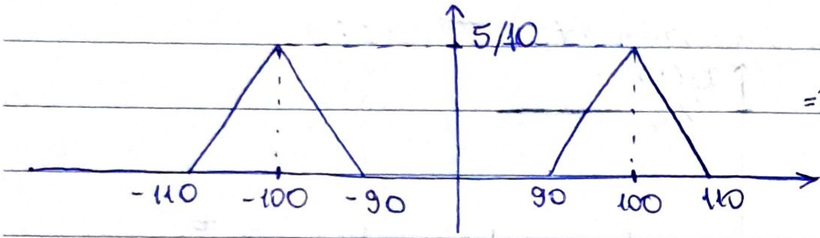
$\Rightarrow ret\left(\frac{t}{10}\right) * ret\left(\frac{t}{10}\right) = 10 . \Delta\left(\frac{t}{10}\right)$

então temos:

$$x_1(t) * 10 \cdot \Delta\left(\frac{t}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left[\delta(t+100) + \delta(t-100)\right] * 10 \cdot \Delta\left(\frac{t}{10}\right)$$

esta convolução resulta em dois triângulos centrados em 100 e -100 com base 20 e altura 5/10 = 1/2:



$$\Rightarrow \frac{5}{10}\left[\Delta\left(\frac{t}{10}+10\right) + \Delta\left(\frac{t}{10}-10\right)\right]$$

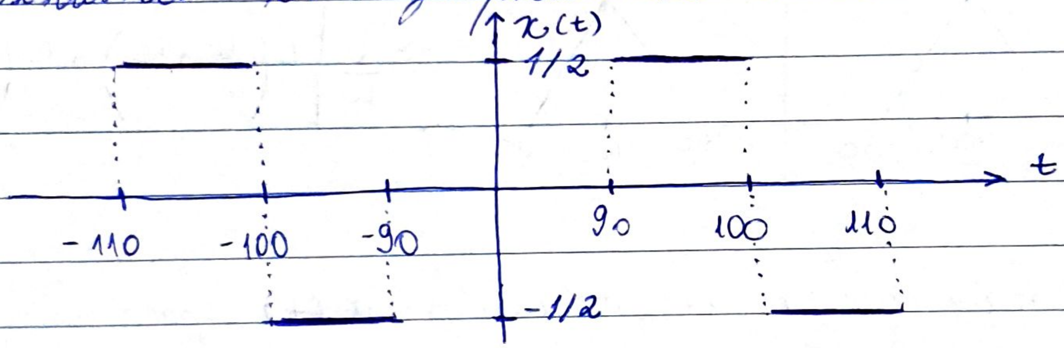
para finalizarmos e encontrarmos $x(t)$, precisamos apenas derivar em função do tempo por conta do termo $j\omega$ mencionado no início, para isso, vamos determinar algebricamente a função graficada acima com base em equações de retas:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (t+110), & \text{se } -110 \leq t \leq -100 \\ \frac{1}{2} \cdot (-t+90), & \text{se } -100 < t \leq -90 \\ \frac{1}{2} \cdot (t+90), & \text{se } 90 \leq t \leq 100 \\ \frac{1}{2} \cdot (-t+110), & \text{se } 100 < t \leq 110 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

derivando ficamos com nosso $x(t)$ por completo:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } -110 \leq t \leq -100 \\ -1/2, & \text{se } -100 < t \leq -90 \\ 1/2, & \text{se } 90 \leq t \leq 100 \\ -1/2, & \text{se } 100 < t \leq 110 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}}$$

representando $x(t)$ graficamente temos:



— " — " — " — " — " — " —