TESTE 5

Q.1.)

- Dados do exercício
  - → $x[n]$ discreto obtido de $x(t)$ analógico
  - → taxa de amostragem 900Hz $\Rightarrow f_s = 900$
  - → cálculo da DFT de N pontos
    - ↳ resolução de frequência tão pequena quanto 12 Hz $\Rightarrow f_m = 12Hz$

- Resolução
  - → distâncias entre as amostras de uma DFT é dada por

$$\Omega = \frac{2\pi}{N}$$

mas $\Omega = \omega . T_s = \frac{2\pi f_m}{f_s}$, então:

$$\Omega = \frac{2\pi f_m}{f_s}$$

→ dos dados temos $f_s \leq f_n \Rightarrow \Omega_s \leq \Omega_m$, assim:

$$\frac{2\pi}{N} \leq \frac{2\pi . f_n}{f_s} \Rightarrow N \geq \frac{f_s}{f_n}$$

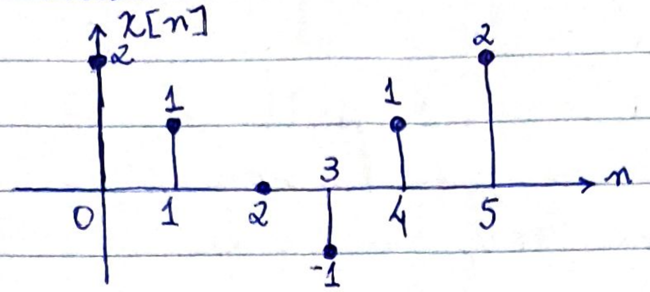
substituindo com os valores dados:

$$N \geq \frac{900}{12} = 75 \Rightarrow \boxed{N \geq 75}$$

O menor N que satisfaz a condição é $N = 75$

Q2)

• *Dados do exercício*



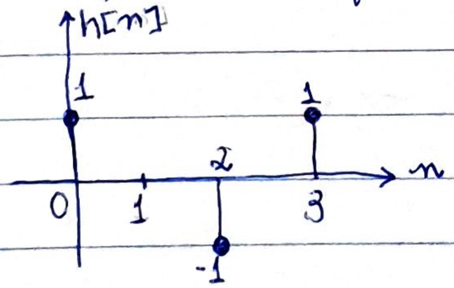
$L=6$

Q2a) $y_c[n] = x[n] \circledast_N h[n]$, $N=6$

↳ $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-3]$

• *Resolução:*

→ primeiramente, vamos representar graficamente $h[n]$:



→ sabemos que $x[n] \circledast_N h[n] = y_c[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n - r \cdot N]$

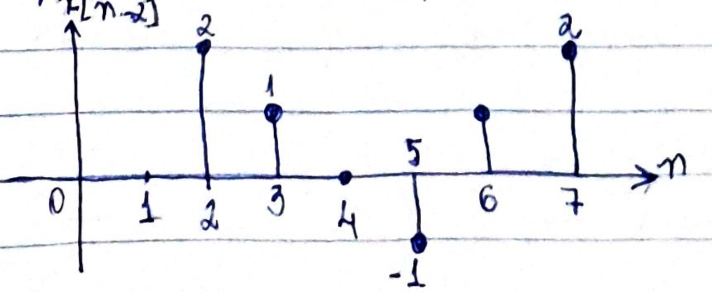
mas:

$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow$

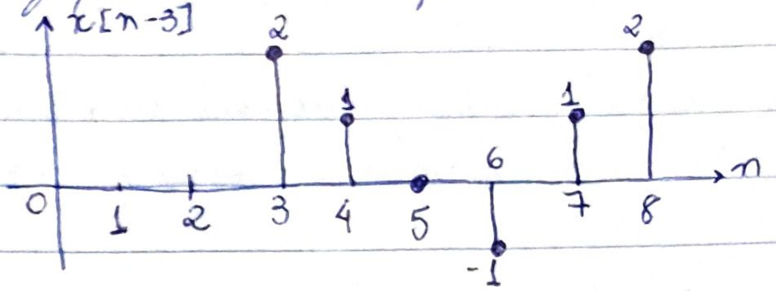
$\Rightarrow y[n] = x[n] * (\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-3]) \Rightarrow$

$\Rightarrow y[n] = x[n] - x[n-2] + x[n-3]$

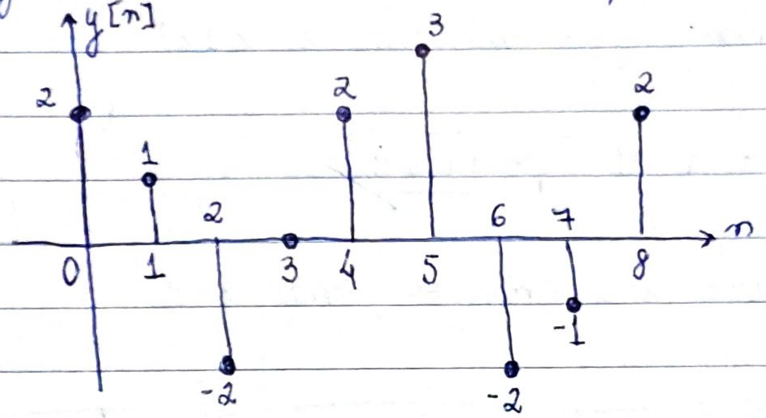
→ vamos graficar $x[n-2]$ a partir de $x[n]$ do enunciado



→ vamos graficar $x[n-3]$ a partir de $x[n]$ do enunciado:

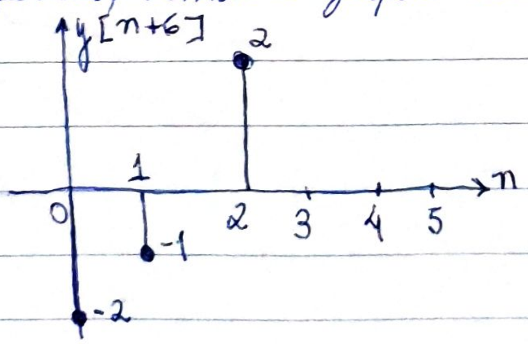


→ como $y[n] = x[n] - x[n-2] + x[n-3]$ podemos graficar $y[n]$:

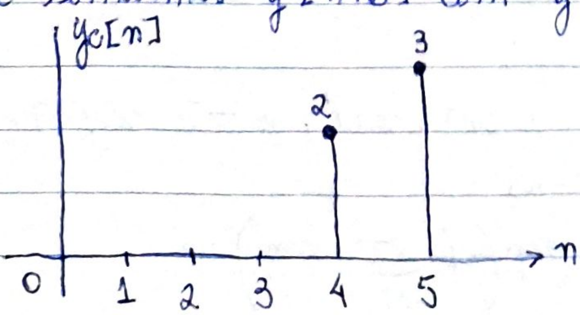


→ disso, podemos observar que $N=6$ é menor que o comprimento obtido em $y[n]$. Assim, $y_c[n]$ é uma versão truncada de $y[n]$ com aliasing temporal.

→ desta forma, temos o gráfico de $y[n+6]$ para $0 \leq n \leq N-1 \Rightarrow 0 \leq n \leq 5$.



→ assim, se somarmos $y[n+6]$ com $y[n]$ para $0 \leq n \leq 5$ obtemos $y_c[n]$:



então: $\boxed{y_c[n] = 2 \cdot \delta[n-4] + 3 \cdot \delta[n-5]}$

Q.2b)

• Resolução:

→ para que a convolução circular produzisse o mesmo resultado que a convolução linear devemos satisfazer a seguinte inequação

$$N \geq N_x + N_h - 1$$

↳ N_h é o comprimento de $h[n]$

↳ N_x é o comprimento de $x[n]$

assim:

$$N \geq 6 + 4 - 1 = 9 \Rightarrow \boxed{N \geq 9}$$

O parâmetro N deve ser maior ou igual a 9.

Q3)

• Dados do exercício:

→ $x[n]$

↳ sinal real

↳ $N = 110$ amostras

→ DFT de N pontos

↳ $X[k]$, $k = 0, \cdots, N-1$

↳ $X[15] = 1/2 - \sqrt{3}\, j$

• Resolução

→ vamos provar que se $x[n]$ real, então $x[n] = x^*[n]$; consequentemente, $X[k] = X^*[N-k]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k\, n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n\,(N-k)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(-j\, 2\pi \cdot n\right) \cdot \exp\left(j\, \frac{2\pi}{N} \cdot nk\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot nk\right) = X^*[k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^*[k] = X[N-k] \Rightarrow X[k] = X[N-k]$$

→ vamos, então, substituir os valores fornecidos no enunciado:

$$X[15] = X^*[110-15] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X[15] = X^*[95]$$

Logo, podemos determinar o valor de $X[95]$:

$$X^*[95] = X[15] = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,j \quad \text{(pelo enunciado)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X[95] = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\,j}$$

Q4.)

· Dados do exercício

→ $N = 4$ amostras de uma DFT de $x[n]$ com comprimento $M = 11$

→ rotina fft(·) $\rightarrow X_k = \text{fft}(x[n], N)$

tilibra

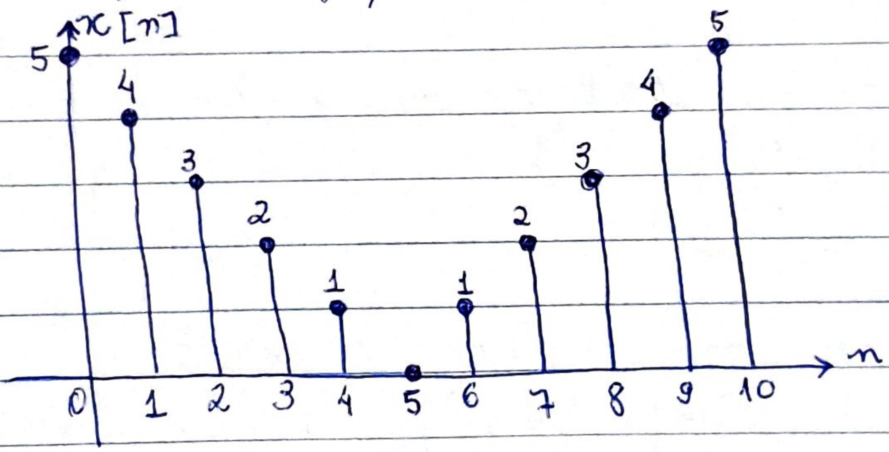
Q4a)

Pelas referências, temos que para $N < M$, $x[n]$ é truncado em N; assim a rotina não retornará o resultado correto, pois não teríamos passado para ela os valores do intervalo $4 \leq n \leq 10$.

Q4b) $x[n] = \begin{cases} 5-n, & 0 \leq n \leq 5 \\ n-5, & 5 < n \leq 10 \end{cases}$

• Resolução

→ primeiramente, vamos graficar $x[n]$



→ queremos encontrar a sequência $y[n]$ com comprimento $P=4$, onde $X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$. Assim temos:

$$\sum_{n=0}^{3} y[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot nk\right) = \sum_{n=0}^{10} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{4} nk\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{3} y[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{4} nk\right) = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} nk\right) +$$

$$+ \sum_{n=4}^{7} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{4} nk\right) +$$

$$+ \sum_{n=8}^{11} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{4} nk\right)$$

vamos fazer $n_1 = n-4$ no segundo somatório e $n_2 = n-8$ no terceiro somatório:

$$\sum_{n=0}^{3} y[n] \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} nk\right) = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} nk\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{3} x[n+4] \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} nk\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{3} x[n+8] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{4} nk\right)$$

então:

$$\sum_{n=0}^{3} y[n] \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} nk\right) = \sum_{n=0}^{3} \left(x[n] + x[n+4] + x[n+8]\right) \cdot \exp\left(-j \frac{2\pi}{4} nk\right)$$

portanto:

$$y[n] = x[n] + x[n+4] + x[n+8]$$

→ a partir disso, vamos calcular $y[n]$ com $0 \leq n \leq 3$:

↳ $y[0] = x[0] + x[4] + x[8] = 5 + 1 + 3 = 9$

↳ $y[1] = x[1] + x[5] + x[9] = 4 + 0 + 4 = 8$

↳ $y[2] = x[2] + x[6] + x[10] = 3 + 1 + 5 = 9$

↳ $y[3] = x[3] + x[7] + x[11] = 2 + 2 + 0 = 4$

→ vamos graficar $y[n]$: