TESTE 2

Q.1.)

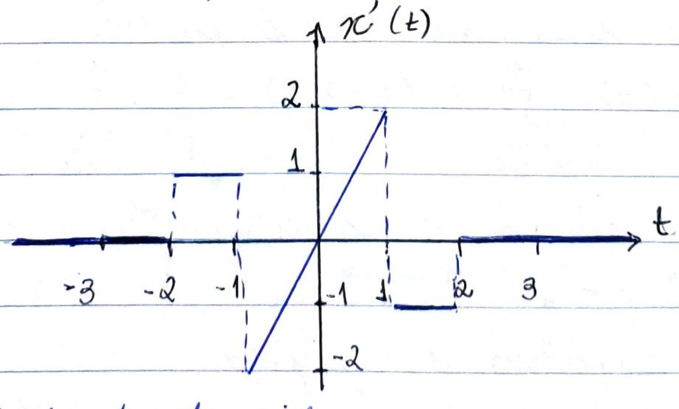
$$x(t) = \begin{cases} t+2, & se \ -2 \leq t < -1 \\ t^2, & se \ -1 \leq t < 1 \\ 2-t, & se \ 1 \leq t < 2 \\ 0, & caso \ contrário \end{cases}$$

• Para obter os coeficientes c_n da série de Fourier do sinal $x(t)$ acima usaremos de propriedades para nos auxiliar:

→ propriedade da derivada:

$$x'(t) = \begin{cases} (t+2)' \\ (t^2)' \\ (2-t)' \\ 0' \end{cases} \Rightarrow x'(t) = \begin{cases} 1, & se \ -2 \leq t < -1 \\ 2t, & se \ -1 \leq t < 1 \\ -1, & se \ 1 \leq t < 2 \\ 0, & caso \ contrário \end{cases}$$

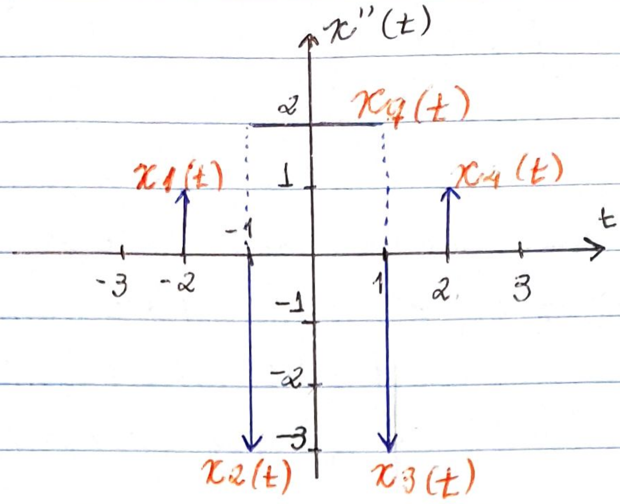
↳ gráfico da primeira derivada:



→ propriedade da derivada

↳ ao realizar a derivada segunda de $x(t)$, isto é, $x''(t)$, as descontinuidades do tipo degrau do gráfico de $x'(t)$ serão caracterizadas por impulsos e o trecho em que temos a reta $x'(t) = 2t$ ficaremos com $x''(t) = (2t)'' \Rightarrow$
$\Rightarrow x''(t) = 2$ se $-1 \leq t < 1$.

↳ disso, obtemos o gráfico da derivada segunda $x''(t)$



↳ do gráfico de $x''(t)$ temos uma onda quadrada de $-1 \leq t < 1$ e um trem de impulsos

→ vamos agora analisar algebricamente essas diferenciações em conjunto com a série de Fourier:

$$x'(t) = \sum_{k} c_k' \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad \text{onde} \quad c_k' = jk\omega_0 a_k$$

então: $c_k'' = j^2 \cdot k^2 \cdot \omega_0^2 c_k$ em $x''(t)$

→ cálculo da série para os impulsos

↳ definição da série para os impulsos:

$$x_{impulso}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 \cdot t}$$

↳ definição da série para uma função deslocada no tempo: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot a_k$

↳ cálculo dos impulsos do gráfico:

↳ $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(2\pi/6)\cdot(-2)} \cdot e^{jk(2\pi/6)\cdot t}$$

↳ a_{k1} (coeficiente a_k de $x_1(t)$):

$$a_{k1} = \frac{1}{6} \cdot e^{jk\frac{2}{3}\pi}$$

↳ $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \frac{-3}{6} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(2\pi/6).(-1)} \cdot e^{jk(2\pi/6).t}$$

↳ a_{k2} (coeficiente a_k de $x_2(t)$):

$$a_{k2} = \frac{-3}{6} \cdot e^{jk(1/3)\pi}$$

↳ $x_3(t)$:

$$x_3(t) = \frac{-3}{6} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(2\pi/6).1} \cdot e^{-jk(2\pi/6)t}$$

↳ a_{k3} (coeficientes a_k de $x_3(t)$):

$$a_{k3} = \frac{-3}{6} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}}$$

↳ $x_4(t)$:

$$x_4(t) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(2\pi/6).2} \cdot e^{-jk(2\pi/3).t}$$

↳ a_{k4} (coeficientes a_k de $x_4(t)$):

$$a_{k4} = \frac{1}{6} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{3}}$$

→ cálculo da série para a onda quadrada

↳ $x_q(t)$:

↳ é centrada na origem e possui amplitude 2, então:

$$x_q(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk(2\pi/6)t}$$

↳ a_{kq} (coeficientes a_k de $x_q(t)$):

$$a_{kq} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \dfrac{2 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\pi} & , k \neq 0 \end{cases}$$

→ então, temos, a partir do calculado:

↳ $x''(t)$:

$$x''(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_q(t)$$

e $$C_K'' = a_{K1} + a_{K2} + a_{K3} + a_{K4} + a_{Kq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_K'' = \begin{cases} 1/6 \cdot (e^{jK2\pi/3} - 3e^{jK\pi/3} - 3e^{-jK\pi/3} + e^{-jK2\pi/3}) + 1 & , K=0 \\ 1/6 \cdot (e^{jK2\pi/3} - 3e^{jK\pi/3} - 3e^{jK\pi/3} + e^{jK2\pi/3}) + \frac{2}{K\pi} \cdot sen(K\pi/2) & , K \neq 0 \end{cases}$$

como havíamos dito antes:

$$C_K'' = j^2 K^2 \omega_0^2 \, C_K \Rightarrow C_K = \frac{C_K''}{j^2 K^2 (2\pi/6)^2}$$

substituindo podemos encontrar C_K:

$$C_K = \begin{cases} \frac{-3}{2K^2\pi^2} \cdot (e^{jK2\pi/3} - 3e^{jK\pi/3} - 3e^{-jK\pi/3} + e^{-jK2\pi/3} + 6) & , K=0 \\ \frac{-3}{2K^2\pi^2} \cdot \left(e^{jK2\pi/3} - 3e^{jK\pi/3} - 3e^{-jK\pi/3} + e^{-jK2\pi/3} + \frac{12}{K\pi} \cdot sen(K\pi/2) \right) & , K \neq 0 \end{cases}$$

mas, em $k=0$, C_0 equivale ao valor médio do sinal $x(t)$, então:

$$C_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t).dt = \frac{1}{6} \cdot \int_{-3}^{3} x(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{6}\left[\int_{-2}^{-1} t+2\, dt + \int_{-1}^{1} t^2\, dt + \int_{1}^{2} 2-t\, dt\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{18}$$

então podemos reescrever C_k:

$$C_k = \begin{cases} 5/18 & , k=0 \\ \frac{-3}{2k^2\pi^2} \cdot \left(e^{jk2\pi/3} - 3.e^{jk\pi/3} - 3.e^{-jk\pi/3} + e^{-jk2\pi/3} + \frac{12}{k\pi}.\text{sen}(k\pi/2)\right) & , k \neq 0 \end{cases}$$

Q.2:)

• Vamos encontrar, primeiramente:

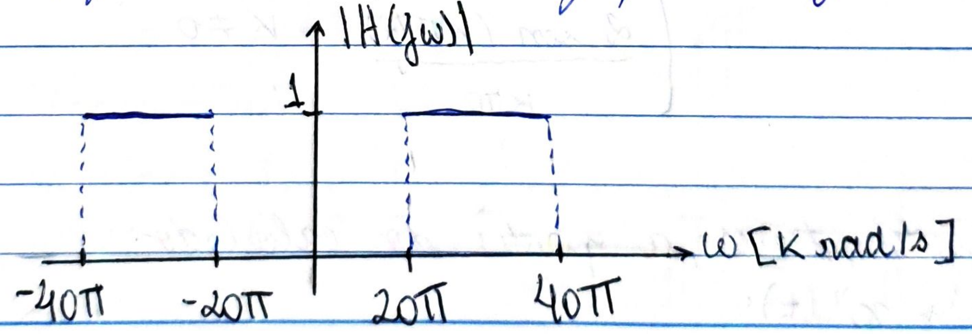
→ largura de banda do FPF em termos angulares:

$$B = 10\,KHz = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^3 = 20\pi\,K\,rad/s$$

→ frequência em termos angulares:

$$\omega = 2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 10^3 = 25\pi\,K\,rad/s$$

• A partir disso, podemos encontrar o gráfico $|H(j\omega)| \times \omega$:



→ a partir do gráfico, podemos definir $|H(j\omega)|$:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & 15\pi \leq |\omega| \leq 35\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$ com ω em [K rad/s]

• Vamos encontrar a frequência fundamental de $x_q(t)$:

→ do enunciado (parte gráfica) temos $T = 2 \cdot 10^{-4}$ s

→ frequência fundamental ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \omega_0 = 10\pi \text{ K rad/s}$$

• Com o ω_0 e $|H(j\omega)|$ podemos concluir que o sinal se encontra na faixa de passagem do filtro para $K=-3$, $K=-2$, $K=2$ e $K=3$; para todos os outros valores, o sinal está na faixa de rejeição do FPF.

→ a partir disso, podemos começar a encontrar $y(t)$:

$$y(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K \cdot H(j\omega) \cdot e^{jK\omega_0 t}$$

↳ como a faixa de passagem se dá em $K=-3$, $K=-2$, $K=2$ e $K=3$:

$$y(t) = C_{-3} \cdot 1 \cdot e^{-j3\omega_0 t} + C_{-2} \cdot 1 \cdot e^{-j2\omega_0 t} + C_2 \cdot 1 \cdot e^{j2\omega_0 t} + C_3 \cdot e^{j3\omega_0 t}$$

↳ os coeficientes C_K da série de Fourier da onda quadrada de amplitude 2 são:

$$C_K = \begin{cases} 1 & , K = 0 \\ 0 & , K \text{ par} \neq 0 \\ \frac{2}{K\pi} \cdot (-1)^{(K-1)/2} & , K \text{ ímpar} \end{cases}$$

↳ no caso de $K=2$ e $K=-2$ deste exercício, teremos $C_2 = C_{-2} = 0 \Rightarrow y(t)$ não conterá esses termos. Logo, nosso $y(t)$ fica:

$$y(t) = C_{-3} \cdot 1 \cdot e^{-j3\omega_0 t} + C_3 \cdot 1 \cdot e^{j3\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2}{-3\pi} \cdot (-1)^{(-3-1)/2} \cdot e^{-j3\omega_0 t} + \frac{2}{3\pi} \cdot (-1)^{(3-1)/2} \cdot e^{j3\omega_0 t} \Rightarrow$$

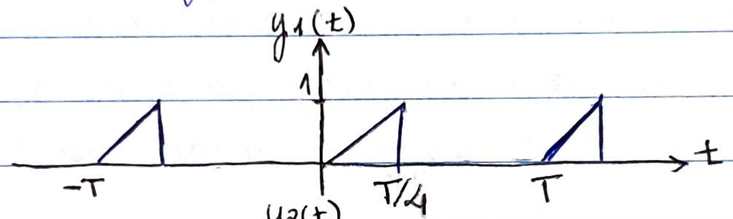
$\Rightarrow y(t) = \frac{-2}{3\pi} \cdot e^{-j3\omega_0 t} - \frac{2}{3\pi} \cdot e^{j3\omega_0 t}$

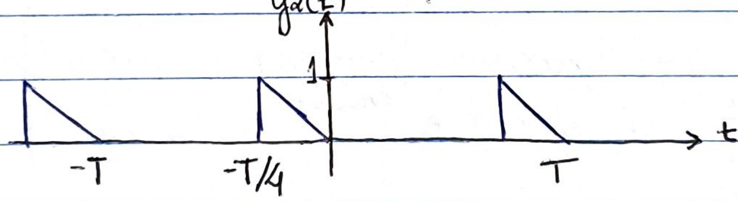
como encontramos $\omega_0 = 10k$ rad/s:

$$y(t) = \frac{-2}{3\pi}\left[e^{-j(30\pi \cdot 10^3)t} + e^{j(30\pi \cdot 10^3)t}\right]$$

Q.3.) a)

• Podemos representar $y(t)$ como a soma de dois sinais:





→ então:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

↳ podemos obter $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a partir de $x(t)$:

↳ $y_1(t)$ é um deslocamento e uma inversão no tempo de $x(t)$:

$$y_1(t) = x(-t + T/4)$$

↳ $y_2(t)$ é um deslocamento de $x(t)$:

$$y_2(t) = x(t + T/4)$$

→ assim, encontramos a representação matemática de $y(t)$ em função de $x(t)$:

$$y(t) = x(-t + T/4) + x(t + T/4)$$

Q.3.) b)

- Para obter os coeficientes a_k da Série de Fourier de $y(t)$ a partir dos coeficientes C_k, vamos utilizar 3 propriedades
  - → propriedade da linearidade

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) \leftrightarrow a_{k1} \\ y_2(t) \leftrightarrow a_{k2} \end{array}\right\} \Rightarrow y(t) \leftrightarrow a_{k1} + a_{k2}$$

  - → propriedade do deslocamento no tempo

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jk\cdot\omega_0 \cdot t_0} \cdot C_k$$

  - → propriedade da reversão no tempo

$$x(-t) \leftrightarrow C_{-k}$$

- Determinando os coeficientes:
  - → $y_1(t) = x(-t + T/4) \Rightarrow a_{k1} = C_{-k} \cdot e^{-jk\omega_0(T/4)}$
  - → $y_2(t) = x(t + T/4) \Rightarrow a_{k2} = C_k \cdot e^{jk\cdot\omega_0(T/4)}$
  - → então podemos definir a_k:

$$y(t) \leftrightarrow a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k = C_{-k} \cdot e^{-jk\cdot\omega_0(T/4)} + C_k \cdot e^{jk\omega_0(T/4)}$$

mas, como sabemos, $\omega_0 = 2\pi/T$, então ficamos com:

$$a_k = C_{-k} \cdot e^{-jk\pi/2} + C_k \cdot e^{jk\pi/2}$$