EFC 1

PARTE TEÓRICA

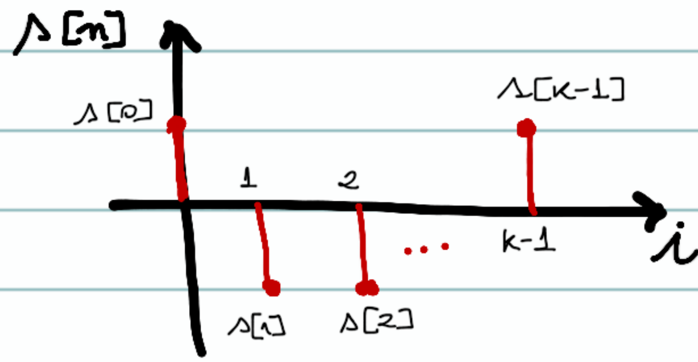
(a)

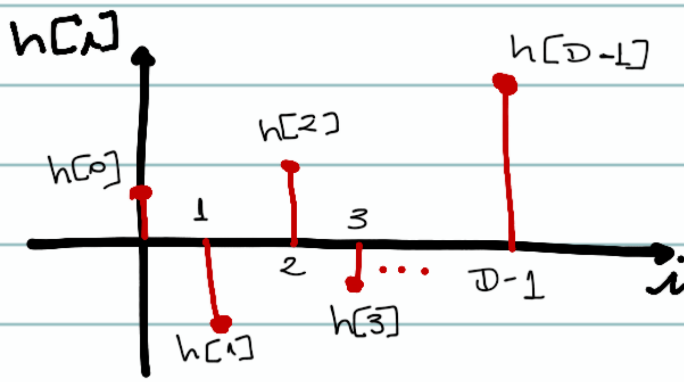
A fórmula da convolução é dada por:

$$x[n] = h[n] * s[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] \cdot h[n-i]$$

vamos, então, realizar os passos da convolução para encontrarmos P.

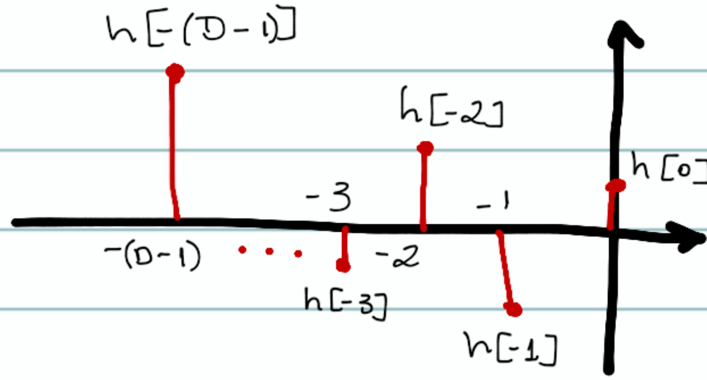
1º: vamos representar $s[n]$ e $h[n]$ no eixo i:



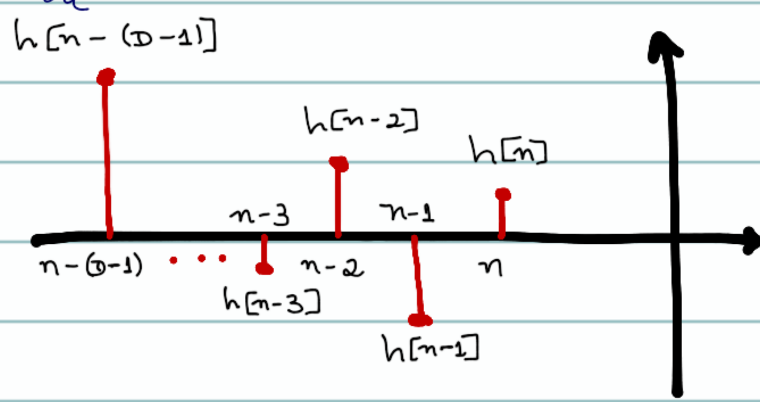


$2^{\underline{o}}$: vamos graficar $h[n-i]$, que é uma versão invertida e deslocada de $h[i]$

→ vamos inverter:



→ vamos deslocar de n



$3^{\underline{o}}$: este passo consiste em efetuar $x[i] \cdot h[n-i]$ ponto a ponto, mas podemos concluir P sem realizar este passo excaustivo.

↳ sabemos que enquanto $n<0$ a convolução resulta em zero. Logo, o valor de P é zero enquanto $n<0$.

↳ para $n>0$ podemos concluir duas coisas:

↳ $h[n-i]$ passará completamente pela origem ao fazer o produto ponto a ponto. Então temos um comprimento parcial de D até o momento

↳ ao realizar a convolução, $h[n-i]$ "passará" por toda a extensão de $s[i]$, da origem até seu último ponto $K-1$. Logo, o comprimento deste percurso é o próprio $K-1$.

↳ somando-se os comprimentos parciais obtidos chegamos no valor de P:

$$\boxed{P = D + K - 1}$$

(b)

Vamos trabalhar agora com a convolução na seguinte ordem de operações:

$$x[n] = h[n] * s[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot s[n-K]$$

vamos realizar esta operação para algumas amostras, assim poderemos enxergar uma relação para encontrar $x = H \cdot s$:

$n<0$: como h e s são ambos causais, a convolução será sempre nula.

$n=0$:

$$x[0] = \sum_{K=0}^{\infty} h[k] \cdot s[-K]$$

$$K=0 \longrightarrow x[0] = h[0] \cdot s[0]$$

$n = 1:$

$$x[1] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot s[1-k]$$

$$\underbrace{k=0 \text{ e } k=1} \rightarrow x[1] = h[0] \cdot s[1] + h[1] \cdot s[0]$$

$n = 2:$

$$x[2] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot s[2-k]$$

$$\underbrace{k=0,\ k=1 \text{ e } k=2} \rightarrow x[2] = h[0] \cdot s[2] + h[1] \cdot s[1] + h[2] \cdot s[0]$$

A partir desses termos podemos construir a representação completa matricial da convolução:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x[P-1] \end{bmatrix}}^{x_{P\times 1}} = \overbrace{\begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & \cdots & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[D-1] & h[D-2] & h[D-3] & \cdots & 0 \\ 0 & h[D-1] & h[D-2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h[D-1] \end{bmatrix}}^{H_{P\times K}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} s[0] \\ s[1] \\ s[2] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ s[K-1] \end{bmatrix}}^{s_{K\times 1}}$$

(c)

Temos $x[n] = s[n] - 0{,}5 . s[n-1]$ e queremos encontrar sua resposta ao impulso $h[n]$ tal que $x[n] = h[n] * s[n]$.

Se $h[n]$ convoluído com $s[n]$ resulta em $x[n]$ e conhecemos $x[n] = s[n] - 0{,}5\, s[n-1]$, podemos afirmar que $h[n]$ será formado por funções de impulso, logo:

$$h[n] = \delta[n] - 0{,}5 . \delta[n-1]$$

(d)

$$s[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow x[n] \longrightarrow \boxed{w[n]} \longrightarrow y[n]$$

do diagrama temos:

$$\begin{cases} x[n] = h[n] * s[n] & (\mathrm{I}) \\ y[n] = w[n] * x[n] & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

substituindo (I) em (II):

$$y[n] = w[n] * (h[n] * s[n])$$

pela associatividade:

$$y[n] = (w[n] * h[n]) * s[n] \qquad (\mathrm{III})$$

nosso objetivo é, ao final, chegarmos em $y[n] = s[n]$. A única forma disso ocorrer é:

$$w[n] * h[n] = \delta[n]$$

(e) Queremos encontrar uma resposta que chegue o mais próximo possível de uma recuperação completa do sinal, isto é:

$$y[n] = s[n]$$

Para isso, vimos na parte teórica que a convolução entre $w[n]$ e $h[n]$ deve resultar no impulso unitário $\delta[n]$.

Analisando g_1 e g_2 encontramos:

$$\begin{cases} g_1 = [1, 0, 0, 0, 0, -0.03125] \\ g_2 = [1, 1, -0.05, -0.55, 0.4, -0.15] \end{cases}$$

Note que tanto em g_1 como em g_2 o primeiro elemento é 1. No entanto, g_2 não apresenta elementos nulos, enquanto g_1 possui quatro elementos nulos. Logo, g_1 possui uma melhor qualidade de filtragem se comparado a g_2.

(f) Os valores de $x[n]$, resultantes da convolução entre s e h, quando comparados ponto a ponto com $s[n]$, possuem uma amplitude que varia de -4.5 a 4.5 que ocorrem nas amplitudes máximas e mínimas de $s[n]$ (note que isso não ocorre para todas as máximas ou mínimas, mas $x[n] = 4.5$ ocorre em alguns $s[n] = 3$, assim como $x[n] = -4.5$ ocorre em alguns $s[n] = -3$).

(g) A partir dos gráficos plotados, observamos que o Gráfico 1 possui a saída mais próxima ao sinal original $s[n]$, reafirmando o que havíamos concluído anteriormente na letra (e).