

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**ГОТОВЕЦ**

Мария Алексеевна

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ  
ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ  
РОСТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ**

Дипломная работа

Научный руководитель  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Допущена к защите

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|                                                                                                                | С. |
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .                                                                                      | 6  |
| <b>ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> . . . . .                                    | 9  |
| 1.1 Задачи оптимального управления . . . . .                                                                   | 9  |
| 1.2 Принцип максимума и динамическое программирование . . . . .                                                | 12 |
| 1.3 Классификация численных методов решения. Прямые методы . . . . .                                           | 15 |
| <b>ГЛАВА 2 УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ</b> . . . . .                                                   | 18 |
| 2.1 Основные положения теории МРС . . . . .                                                                    | 18 |
| 2.2 Условия устойчивости . . . . .                                                                             | 21 |
| 2.3 Экономический МРС . . . . .                                                                                | 24 |
| <b>ГЛАВА 3 ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ</b> . . . . .                                       | 26 |
| 3.1 Математическая модель . . . . .                                                                            | 26 |
| 3.2 Задача оптимального управления . . . . .                                                                   | 27 |
| 3.3 Редуцированная задача . . . . .                                                                            | 31 |
| 3.4 Решение редуцированной задачи . . . . .                                                                    | 32 |
| <b>ГЛАВА 4 ПРИМЕНЕНИЕ ЕМРС К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РОСТЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ</b> . . . . . | 39 |
| 4.1 Прогнозирующие задачи оптимального управления. . . . .                                                     | 39 |
| 4.2 Оптимальное программное решение с применением Direct Single Shooting . . . . .                             | 41 |
| 4.3 Результаты численных экспериментов. . . . .                                                                | 45 |
| 4.4 Реализация алгоритма ЕМРС . . . . .                                                                        | 58 |
| 4.5 Применение ЕМРС для решения задачи роста . . . . .                                                         | 59 |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .                                                                                    | 65 |
| <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .                                                              | 66 |

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 66 с., 34 рис., 3 табл. 11 источников.

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ, ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬ, АЛГОРИТМ

Объектом исследования является процесс экономического развития страны технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера, связанная с ним задача оптимального управления распределением трудовых ресурсов страны-последователя.

Цель работы — проанализировать решение задачи оптимального экономического роста страны-последователя при различных экономических параметрах, применить методы управления по прогнозирующей модели с целью аппроксимации решения задачи с бесконечным горизонтом последовательным решением прогнозирующих задач с конечным горизонтом, исследовать три различных подхода к построению прогнозирующих задач, обосновать правила выбора терминальной стоимости в третьем подходе.

Для решения и исследования поставленной задачи используются следующие методы: принцип максимума Л.С. Понтрягина для получения аналитического решения, прямые методы численного решения нелинейных задач оптимального управления, методы управления по прогнозирующей модели для экономических задач.

Результатами работы являются — новый подход к решению задач оптимального управления экономическими процессами с бесконечным горизонтом планирования на основе методов управления по прогнозирующей модели, новая формулировка прогнозирующей задачи оптимального управления с терминальной стоимостью, рекомендации по выбору параметров линейной терминальной стоимости в данной задаче.

# РЭФЕРАТ

Дыпломная работа, 66 с., 34 мал., 3 табл., 11 крыніц.

## АПТЫМАЛЬНАЕ КИРАВАННЕ, КИРАВАННЕ ПА ПРАГНАЗЫЙНАЙ МАДЕЛИ, ЭКАНАМІЧНЫ РОСТ, ТЭХНАЛАГІЧНЫ ПАСЛЯДОЎНІК, АЛГАРЫТМ

Аб'ектам даследавання з'яўляецца працэс эканамічнага развіцця краіны тэхналагічнага паслядоўніка, які запазычвае тэхналогіі краіны-лідэра, звязаная з ім задача аптымальнага кіравання размеркаваннем працоўных рэсурсаў краіны-паслядоўніка.

Мэта работы — прааналізаваць рашэнне задачы аптымальнага эканамічнага росту краіны-паслядоўніка пры розных эканамічных параметрах, прымяніць метады кіравання па прагназыйнай мадэлі з мэтай апраксімацыі рашэння задачы з бясконцым гарызонтам паслядоўным рашэннем прагназыйных задач з канчатковым гарызонтам, даследаваць тры розных падыходу да пабудовы прагназыйных задач, абгрунтаваць правілы выбару тэрмінальнай кошту ў трэцім падыходзе.

Для вырашэння і даследавання пастаўленай задачы выкарыстоўваюцца наступныя метады: прынцып максімуму Л.С. Понтрыгіна для атрымання аналітычнага рашэння, прамыя метады колькаснага рашэння нелінейных задач аптымальнага кіравання, метады кіравання па прагназыйнай мадэлі для эканамічных задач.

Вынікамі працы з'яўляюцца — новы падыход да вырашэння задач аптымальнага кіравання эканамічнымі працэсамі з бясконцым гарызонтам планавання на аснове метадаў кіравання па прагназыйнай мадэлі, новая фармулёўка прагназыйнай задачы аптымальнага кіравання з тэрмінальным коштам, рэкамендацыі па выбары параметраў лінейнага тэрмінальнага кошту ў дадзенай задачы.

# ABSTRACT

Graduation work, 66 c., 34 fig., 3 tab., 11 sources.

OPTIMAL CONTROL, MODEL PREDICTIVE CONTROL, ECONOMIC GROWTH, TECHNOLOGICAL FOLLOWER, ALGORITHM

The object of this study is the economic development process of the country that is a technological follower, borrowing the technology from the leader country, and the related optimal control problem for the optimal allocation of labor resources of the follower.

Our goals are to analyze the solution of the optimal economic growth problem of the follower for various economic parameters, apply model predictive control methods in order to approximate the solution of the problem with an infinite horizon by a sequential solution of the predictive problems with a finite horizon, investigate three different approaches to the formulation of predictive problems, and justify our new approach for choosing the terminal cost in the third approach.

To solve and study the problem, the following methods are used: The Pontryagin's Maximum Principle for obtaining the analytical solution, direct methods for the numerical solution of nonlinear optimal control problems, economic model predictive control methods

The following results were obtained: A new approach to solving optimal control problems for economic processes with an infinite planning horizon based on model predictive control, a new formulation of a predictive optimal control problem with a terminal cost, justified recommendations for choosing a linear terminal cost's parameters in this problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач — задач определения максимальных и минимальных значений [8]. Экстремальные задачи исследовались с древнейших времен, со временем они усложнились, теория математического программирования, созданная для решения статических задач, дополнилась теорией оптимизации для динамических систем, и таким образом во второй половине XX в. возникли первые формулировки и результаты для задач оптимального управления.

Для постановки задачи оптимального управления необходимо построить математическую модель объекта или процесса, описывающая его поведение с течением времени под влиянием управляющих воздействий и текущего состояния, задать ограничения на переменные — управляющие воздействия и состояния объекта, а также выбрать критерий качества для оценки качества переходного процесса и/или состояния в момент окончания процесса.

К настоящему моменту получены фундаментальные результаты теории оптимального управления, доставляющие необходимые и достаточные условия оптимальности — принцип максимума Л.С. Понтрягина [11] и метод динамического программирования [10].

Многие оптимизационные задачи, и особенно это относится к задачам оптимального управления, очень сложны, в связи с чем для их решения необходимо применять численные методы. Численные методы решения задач оптимального управления можно разделить на три категории: динамическое программирование, не прямые методы, основанные на принципе максимума, и прямые методы, которые основаны на дискретизации процесса управления и сведении динамической задачи к статической задаче математического программирования.

Типичные задачи теории оптимального управления, фундаментальные теоретические результаты и прямые методы численного решения задач оптимального управления освещаются в данной дипломной работе в главе 1.

В настоящее время теория оптимального управления привлекает большое внимание исследователей в связи с существенным прогрессом цифровых технологий, вычислительной техники, усложнением практических задач и возможности создания эффективных алгоритмов, способных проводить вычисления в режиме реального времени.

Принцип управления в реальном времени успешно реализуется в одном из современных методов теории управления, широко применяемом на прак-

тике при решении задач стабилизации. Этот метод носит название *управления по прогнозирующей модели*, в англоязычной литературе — Model Predictive Control (МРС) [5, 6]. Популярность МРС на практике обусловлена тем, что метод применим к многосвязным объектам управления, в том числе нелинейным, учитывает ограничения на управляющие воздействия и переменные состояния, принимает во внимание качественные требования к процессу управления.

Теория МРС опирается на решение в ходе конкретного процесса управления в каждый текущий момент времени вспомогательных (прогнозирующих) задач оптимального управления на конечном промежутке времени с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием процесса. Оптимальная программа прогнозирующей задачи подается на вход системы управления до тех пор, пока не будет получено и обработано следующее состояние. Повторяемая в темпе поступления информации о состоянии системы процедура дает реализацию управления типа обратной связи, обеспечивающего различные полезные свойства замкнутой системы (асимптотическая устойчивость, робастность и др.) в зависимости от конкретного вида критерия качества и ограничений [6].

В настоящей дипломной работе классические методы МРС описаны в главе 2. Здесь же вкратце освещается новый подход, который получил название экономического МРС (Economic MPC, ЕМРС) [1]. ЕМРС возник в связи с большим числом приложений, в которых необходимо учитывать экономические цели (максимизация прибыли, минимизация затрат) при формулировке прогнозирующих задач, а также изучать экономический эффект управления.

Методы МРС и ЕМРС можно трактовать как оптимальное планирование в долгосрочном периоде на основе последовательного краткосрочного планирования с коррекцией краткосрочных оптимальных решений в зависимости от реализовавшейся ситуации, что характерно для экономического планирования. Поэтому естественным приложением ЕМРС являются различные динамические задачи микро- и макроэкономики.

В дипломной работе в качестве такого приложения, на примере которого будут демонстрироваться результаты ЕМРС, выбрана задача об оптимизации экономического роста технологического последователя [9]. Данная задача возникает в теории эндогенного экономического роста при обращении к процессам обмена технологиями между странами. Сопряженная с необходимостью оптимизировать технологическую динамику с учетом потока "внешних" знаний, моделируется как задача об оптимизации экономического роста технологического последователя — страны, научно-исследовательский сектор которой во многом ориентирован на заимствование части знаний, производи-

мых страной — технологическим лидером.

Формулировка задачи об оптимизации экономического роста технологического последователя и ее решение на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина приводятся в главе 3. Здесь выделяются случаи, когда задача имеет магистральное решение, приводятся уравнения для нахождения магистралей, оптимальных управлений и оптимальных траекторий роста. Данные результаты важны для понимания условий, которые должны быть включены в прогнозирующую задачу оптимального управления в ЕМРС для обеспечения устойчивости магистрали в замкнутом контуре.

В главе 4 дипломной работы приводятся результаты численных экспериментов по применению метода ЕМРС к решению задачи об оптимальном росте технологического последователя. При этом рассматриваются три подхода к построению прогнозирующей задачи оптимального управления:

1. базовый ЕМРС: прогнозирующая задача совпадает с исходной задачей, с тем лишь отличием, что бесконечный горизонт планирования заменен на конечный — это так называемый неограниченный ЕМРС [6];
2. ЕМРС с терминальным ограничением-равенством: прогнозирующая задача содержит условие точного попадания на магистраль в терминальный момент времени;
3. ЕМРС с терминальной стоимостью: критерий качества прогнозирующей задачи дополняется специальной выбранной терминальной стоимостью.

Последний подход является новым, предлагается в данной работе впервые. Цель предложенной модификации 3 состоит в том, чтобы упростить задачу оптимального управления для численных методов, поскольку задачи без жестких ограничений-равенств проще с вычислительной точки зрения.

В главе 4 проводится сравнение решений, полученных всеми тремя подходами, а также сравнение с решением задачи на основе принципа максимума из главы 3.



# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе приводится обзор основных результатов теории оптимального управления. Сначала обсуждаются формулировки задач, возникающих при оптимизации динамических систем управления. Затем приводятся основные результаты качественной теории — принцип максимума Л.С. Понтрягина [11] и динамическое программирование Р. Беллмана. [10]

Наконец, рассматриваются наиболее часто применяемые на практике численные методы решения задач оптимального управления [3].

### 1.1 Задачи оптимального управления

Постановка любой конкретной задачи оптимального управления включает в себя 5 необходимых элементов: промежуток управления, математическую модель управляемого объекта, класс управлений и ограничений на них, ограничения на фазовую траекторию, критерий качества. Рассмотрим их подробнее.

1) Промежуток управления. Прежде всего задачи оптимального управления разделяются на непрерывные, рассматриваемые на некотором промежутке времени  $T = [t_0, t_f]$ , и дискретные, в которых динамический процесс рассматривается в дискретные моменты времени  $k = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  — натуральное число.

По продолжительности процесса различаются задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания процесса. Выделяются также задачи на бесконечном интервале.

В экономических приложениях динамические процессы, как правило, стационарны, поэтому процесс стартует в момент времени  $t = 0$ . В задачах с конечным промежутком времени момент окончания процесса  $t = z$  называется горизонтом планирования.

2) Математическая модель. Динамика изучаемого процесса моделируется, как правило, дифференциальными

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (1.1)$$

или разностными уравнениями

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $n$ -вектор  $x$  называется состоянием системы,  $r$ -вектор  $u$  называется управлением, функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  задана.

Число переменных состояния  $n$  называется порядком системы управления, число  $r$  — числом входов.

Далее будем рассматривать непрерывные системы вида (1.1).

3) Класс управлений и ограничения на них. Для непрерывного процесса управления указывается класс функций, из которого выбираются управления. Это могут быть: измеримые, дискретные, кусочно-непрерывные, гладкие, импульсные функции и т.д.

Кроме класса доступных управлений задается множество  $U \subset \mathbb{R}^r$  — множество допустимых значений управления. Как правило,  $U$  — компакт в  $\mathbb{R}^r$ .

Далее будем рассматривать управление в классе кусочно-непрерывных функций.

**Определение 1.1** Кусочно-непрерывная функция  $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$  называется доступным управлением, если  $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$ .

4) Ограничения на фазовую траекторию. Ограничения на переменные состояния могут накладываться:

- в начальный момент времени  $t_0$ :

$$x(t_0) \in X_0;$$

- в конечный момент времени  $t_f$ , такие ограничения называются терминальными:

$$x(t_f) \in X_f;$$

- в изолированные моменты  $t_i \in [t_0, t_f], i = \overline{1, m}$ , из промежутка управления — промежуточные фазовые ограничения:

$$x(t_i) \in X_i, \quad i = \overline{1, m};$$

- на всем промежутке управления — фазовые ограничения:

$$x(t) \in X(t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

где  $X_0, X_f, X_i, i = \overline{1, m}, X(t), t \in [t_0, t_f]$ , — заданные подмножества пространства состояний.

Задача управления с  $x(t_f) \in X_f$  называется:

- задачей со свободным правым концом траектории, если  $X_f = \mathbb{R}^n$ ,
- задачей с закрепленным правым концом траектории, если  $X_f = \{x_f\}$ ,
- задачей с подвижным правым концом траектории, если  $X_f$  содержит более одной точки и не совпадает с  $\mathbb{R}^n$ .

Аналогичная классификация имеет место для задач с ограничениями на левый конец траектории  $x_0 \in X_0$ .

Выделяют также смешанные ограничения, учитывающие связи между переменными состояния и переменными управления:

$$(u(t), x(t)) \in S \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, t_f[.$$

**Определение 1.2** Доступное управление  $u(\cdot)$  называется допустимым (или, программой), если оно порождает траекторию  $x(\cdot) = (x(t), t \in [t_0, t_f]$ , удовлетворяющую всем заданным ограничениям задачи.

5) Критерий качества. Качество допустимого управления оценивается так называемым критерием качества

Существуют четыре типа критерия качества:

i) критерий качества Майера (терминальный критерий)

$$J(u) = \varphi(x(t_f)),$$

ii) критерий качества Лагранжа (интегральный критерий)

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

iii) критерий качества Больца

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

iv) задачи быстрогодействия (являются задачами с нефиксированной продолжительностью процесса).

$$J(u) = t_f - t_0 \rightarrow \min.$$

**Определение 1.3** Допустимое управление  $u^0(\cdot)$  называется оптимальным управлением (оптимальной программой), если на нем критерий качества достигает экстремального значения ( $\min$  или  $\max$ ):

$$J(u^0) = \text{extr } J(u),$$

где минимум (максимум) берется по всем допустимым управлениям.

В экономических приложениях наиболее часто встречающимися являются: критерий качества типа Больца — для задач с конечным горизонтом планирования; критерий качества типа Лагранжа — в задачах с бесконечным горизонтом. Нестационарность функции  $f$  выражается наличием множителя дисконтирования  $e^{-\rho t}$ .

## 1.2 Принцип максимума и динамическое программирование

В теории оптимального управления существует два фундаментальных результата: принцип максимума Л.С. Понтрягина [11] и динамическое программирование Р. Беллмана [10]. Приведем эти результаты на примере простейшей задачи оптимального управления.

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

### 1.2.1 Принцип максимума Понтрягина

Принципом максимума называется основное необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, связанное с максимизацией гамильтониана:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - f_0(x, u, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x, u, t) - f_0(x, u, t).$$

Здесь  $\psi = \psi(t) \in \mathbb{R}^n$  — сопряженная переменная.

**Теорема 1.1** Пусть  $u^0(\cdot), x^0(\cdot)$  — оптимальное управление и траектория в задаче (1.2)  $\psi^0(\cdot)$  — соответствующее решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}^0(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t),$$

с начальным условием

$$\psi^0(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0(t_f)).$$

Тогда для любого  $t \in [t_0, t_f]$ , управление  $u^0(t)$  удовлетворяет условию:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{v \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), v, t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Для того чтобы решить задачу с помощью принципа максимума обычно поступают следующим образом. Функцию  $H(x, \psi, u, t)$  рассматривают как функцию  $r$  переменных  $u = (u_1, \dots, u_r)$ . Далее проводят поточечную оптимизацию для каждого фиксированного набора  $(x, \psi, t)$

$$U(x, \psi, t) = \arg \max_{v \in U} H(x, \psi, v, t). \quad (1.3)$$

Если исходная задача (1.2) имеет решение, функция (1.3) определена на непустом множестве значений  $(x, \psi, t)$ .

Пусть  $u$  в виде (1.3) найдена, тогда можно рассмотреть следующую систему с граничными условиями:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(x, \psi, u(x, \psi, t), t) = f(x, \psi, u(x, \psi, t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, \psi, u(x, \psi, t), t), \quad \psi(t_f) = -\frac{\partial \varphi(x(t_f))}{\partial x}.$$

Таким образом получена специальная краевая задача, которая называется краевой задачей принципа максимума.

Можно ожидать, что имеются лишь отдельные изолированные пары функций  $x(\cdot), \psi(\cdot)$ , удовлетворяющие краевой задаче принципа максимума. Подставив одну такую пару в (1.3), получим:

$$u(t) = u(x(t), \psi(t), t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

которая удовлетворяет принципу максимума и, значит, может претендовать на роль оптимального управления, а функция  $x(t) = x(t \mid t_0, x_0, u(\cdot))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , — на роль оптимальной траектории в задаче.

Отметим, что принцип максимума в задаче (1.2) является лишь необходимым условием оптимальности, поэтому построенное управление может не быть оптимальным. Построенная функция называется экстремалью Понтрягина.

### 1.2.2 Динамическое программирование

Рассмотрим задачу (1.2) и предположим, что она имеет решение. Следуя динамическому программированию [10], погрузим задачу (1.2) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_{\tau,z}(u) &= \varphi(x(t_f)) + \int_{\tau}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= f(x, u), \quad x(\tau) = z, \quad x(t_f) \in X, \\ u(t) &\in, \quad t \in T = [\tau, t_f], \end{aligned} \quad (1.4)$$

зависящих от скаляра  $\tau \in T$  и  $n$ -вектора  $z$ .

Пару  $(\tau, z)$  назовем позицией в задаче (1.2). Обозначим через

$$B(\tau, z) = \min_{u(t|\tau,z)} J_{\tau,z}(u)$$

минимальное значение критерия качества в задаче (1.4) для позиции  $(\tau, z)$ . Если для позиции  $(\tau, z)$  задача (1.4) не имеет решения, то положим  $B(\tau, z) = +\infty$ . Пусть

$$X_{\tau} = \{z \in \mathbb{R}^n : B(\tau, z) < +\infty\}.$$

Функцию

$$B(\tau, z), \quad z \in X_{\tau}, \quad \tau \in T, \quad (1.5)$$

называют функцией Беллмана.

Уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция (1.5), называют уравнением Беллмана

$$-\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \left\{ \frac{\partial B(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \right\}, \quad z \in X_{\tau}, \quad \tau \in T. \quad (1.6)$$

Выделяя из семейства (1.4) задачу с  $\tau = t_f$ , находим граничное условие для уравнения Беллмана [8]:

$$B(t_f, z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in X, \\ +\infty, & z \notin X. \end{cases} \quad (1.7)$$

Схема применения динамического программирования состоит в следующем:

- Для задачи составляется уравнение Беллмана.
- По решению уравнения строится позиционное решение.

Эффективно строить решение уравнения Беллмана удастся в редких случаях. В общем случае необходимо привлекать численные методы.

### 1.3 Классификация численных методов решения. Прямые методы

Численные методы решения задач оптимального управления можно разделить на три категории:

- динамическое программирование;
- не прямые методы, основанные на принципе максимума;
- прямые методы.

Основная трудность динамического программирования состоит в табулировании функций многих переменных, что приводит к так называемому "проклятию размерности".

Проблема не прямых методов в том, что не существует универсальных способов решения краевых задач для обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений.

Прямые методы основаны на сведении задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования посредством параметризации функций управления.

Последняя группа методов является самой распространенной в практических приложениях, поэтому далее описываются два представителя класса прямых методов: Direct Single Shooting(DSS) и Direct Multiple Shooting(DMS).

#### 1.3.1 Direct Single Shooting

Опишем основные принципы метода DSS на примере задачи управления нелинейной стационарной системой с критерием качества типа Больца, со смешанными и терминальными ограничениями:

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t))dt + \varphi(x(t_f)) \rightarrow \min_{x, u},$$

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0, \\
\dot{x} &= f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f], \\
h(x(t), u(t)) &\leq 0, \quad t \in [0, t_f], \\
r(x(t_f)) &\leq 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Обозначим через  $q \in \mathbb{R}^{rN}$  вектор параметров управления; само управление будем обозначать  $u(t, q)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , подчеркивая его зависимость от параметра  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ . В большинстве случаев параметризация является кусочно-постоянной: выбирается фиксированная сетка  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  и  $N$  параметров  $q_i \in \mathbb{R}^r$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ ; тогда

$$u(t, q) = q_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}[ , \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Direct Single Shooting является последовательным методом, это означает, что переменная  $x$  исключается из задачи (1.8). При выбранном векторе  $q$  состояние  $x(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ , выражается как

$$x(t_i, q) = x(t_i | t_{i-1}, x(t_{i-1}, q), q_{i-1}), \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$x(t_0, q) = x_0.$$

Ограничения на траекторию при выбранной параметризации, как правило, проверяют в узлах выбранной сети, т.е. требуют выполнения:

$$h(x(t_i, q), u(t_i, q)) \leq 0, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

В результате получим задачу конечномерной оптимизации:

$$\begin{aligned}
J(q) &= \int_0^{t_f} f_0(x(t, q), u(t, q)) dt + \varphi(x(t_f, q)) \rightarrow \min_q, \\
h(x(t_i, q), u(t_i, q)) &\leq 0, \quad i = \overline{0, N-1}, \\
r(x(t_f, q)) &\leq 0, \quad q \in \mathbb{R}^{rN}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Данный метод позволяет обойти проблему "проклятия размерности".

### 1.3.2 Direct Multiple Shooting

Опишем основные принципы метода DMS на примере задачи управления нелинейной стационарной системой с критерием качества типа Больца, со смешанными и терминальными ограничениями (1.8). Так же как и в DSS



введем  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ , получим:

$$u(t, q) = q_i, t \in [t_i, t_{i+1}[ , i = \overline{0, N-1}.$$

Затем решаем ОДУ на каждом интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}[ , i = \overline{0, N-1}$ , начиная с искусственных начальных значений  $s_i$ :

$$\dot{x}_i(t, s_i, q_i) = f(x_i(t|s_i, q_i), q_i), t \in [t_i, t_{i+1}[ ,$$

$$x_i(t_i|s_i, q_i) = s_i.$$

Таким образом, получим отрезки траектории  $x_i(t|s_i, q_i)$ .

Аналогично, численно вычисляем интегралы

$$F_i(s_i, q_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(x_i(t, s_i, q_i), q_i) dt.$$

Выберем сетку, в которой проверяем ограничения неравенства; здесь подчеркиваем зависимость от параметра  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ . В большинстве случаев параметризация является кусочно-постоянной: выбирается фиксированная сетка. Получим задачу:

$$J(q) = \sum F_i(s_i, q_i) + \varphi(s_N) \rightarrow \min_{q, s},$$

$$x_0 - s_0 = 0,$$

$$x_i(t_{i+1}|s_i, q_i) - s_{i+1} = 0, i = \overline{0, N-1},$$

$$h(s_i, q_i) \leq 0, i = \overline{0, N},$$

$$r(s_N) \leq 0.$$

Обратим внимание, что выбрав  $f_i(s_i, q_i) = x_i(t_{i+1}|s_i, q_i)$  условия непрерывности могут быть интерпретированы как динамическая система с дискретным временем

$$s_{i+1} = f_i(s_i, q_i),$$

и вышеупомянутая задача оптимального управления имеет точно такую же структуру, что и задача оптимального управления с дискретным временем.

Отличие Direct Single Shooting от Direct Multiple Shooting состоит в том, что в первом случае траектория вычисляется последовательно, во втором - одновременно. В главе 4 будет представлена программная реализация прямых методов на примере конкретной задачи оптимального управления.

## ГЛАВА 2

### УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

В этой главе описываются основные положения теории управления по прогнозирующей модели — MPC (Model Predictive control) [5, 6]. MPC — это один из современных подходов к построению управлений типа обратной связи (MPC-регулятора) в задачах управления линейными и нелинейными системами с ограничениями. Методы MPC получили широкое распространение на практике благодаря простоте реализации, возможности учитывать ограничения на управляющие и фазовые переменные, требования к качеству процессов, нелинейности систем.

В настоящей главе описывается основной алгоритм построения MPC-регулятора, некоторые подходы к обеспечению устойчивости системы, замкнутой построенной обратной связью, и модификация, которая носит название экономического MPC — EMPC (Economic MPC).

#### 2.1 Основные положения теории MPC

Рассмотрим нелинейный объект управления с ограничениями на управляющие воздействия, поведение которого при  $s \geq t$  описывается (прогнозируется, предсказывается) следующей математической моделью:

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t, \quad (2.1)$$

$$u(s) \in U(s), \quad s \geq t,$$

где, как и ранее,  $x(s) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(s) \in \mathbb{R}^r$  — состояния и управления модели (2.1).

В модели (2.1) считаются заданными:

- множество  $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ , содержащее все возможные начальные состояния объекта управления в начальный момент времени  $t_0$  ( $t \geq t_0$ );
- $n$ -вектор  $x_t$  (при  $t \geq t_0$ ), который описывает состояние физического объекта в момент времени  $t$ ;
- функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , обеспечивающая существование и единственность решений  $x(s)$ ,  $s \geq t$ , уравнения (2.1) при любых кусочно-непрерывных управлениях  $u(s)$ ,  $s \geq t$ , и начальных состояниях  $x_t \in X_0$ ;

- множества допустимых управлений  $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$ ,  $t \geq t_0$ .

Предположим, что система (2.1) асимптотически управляема [6] на  $X_0$ .

Относительно параметров прогнозирующей модели сделаем следующие предположения

**Предположение 2.1** Для всех  $t \in \mathbb{R}$  множество  $U(t)$  содержит начало координат и  $f(0, 0, t) = 0$ ,  $t \geq t_0$ .

**Предположение 2.2** Функция  $f$  непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$  для любой фиксированной пары  $(t, u)$ .

**Предположение 2.3** Множество  $U(t)$  компактно для всех  $t$  и для каждой пары  $(t, x)$  множество  $f(x, U(t), t)$  выпукло.

**Предположение 2.4** Для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$ , множество  $\{\|f(x, u, t)\|, t \in \mathbb{R}, x \in X, u \in U(t)\}$  — компакт.

Предположение 2.1 не является ограничительным, поскольку его можно удовлетворить заменой переменных системы. Предположения 2.2 и 2.3 необходимы для того, чтобы гарантировать существование решения задачи оптимального управления для системы (2.1). Условия предположения (2.4) автоматически выполняются для стационарных систем, так как образ компактного множества для непрерывной функции компактен.

Цель управления объектом, представленным математической моделью (2.1), состоит в том, чтобы построить управление типа обратной связи (обратную связь), которое переводит объект в начало координат (в асимптотическом смысле), т.е.  $x_t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Одним из популярных подходов для достижения поставленной цели является МРС-регулятор.

Для достижения указанной цели будем использовать методы МРС.

Выберем горизонт управления  $T > 0$  и зададим фиксированную сетку  $0 = t_0 < t_1 < \dots$ , с шагом  $\delta$  ( $0 < \delta < T$ ), т.е.  $t_i = t_0 + i\delta$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Обратная связь (стратегия МРС) строится на основе решения в каждый момент времени  $t_i$  так называемой *прогнозирующей задачи оптимального управления* на конечном промежутке времени  $[t_i, t_i + T]$ :

$$\mathcal{P}(t, x_t, T) = \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s) ds + W(t + T, x(t + T)), \quad (2.2)$$

при условиях

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t,$$

$$u(s) \in U(s), \quad s \in [t, t + T],$$

$$x(t + T) \in S,$$

где  $t$  обозначает реальное физическое время,  $t_i$  — текущий момент времени, в то время как  $s$  используется для обозначения переменной времени в прогнозирующей модели. Как уже отмечалось выше, вектор  $x_t$  обозначает состояние объекта в момент времени  $t$ .

Понятия допустимого и оптимального управления в задаче оптимального управления (2.2) вводятся стандартно (см. главу 1). Класс управляющих воздействий, в котором рассматривается задача (2.2) может быть классом измеримых, кусочно-непрерывных функций или дискретных управляющих воздействий, т.е. таких функций, что

$$u(t_k) \equiv u(s), \quad s \in [t_k, t_k + \delta].$$

Теоретические результаты ниже получены в [5] для измеримых функций. Однако, принимая во внимание тот факт, что прогнозирующая задача, как правило, требует решения с привлечением вычислительных методов, при реализации алгоритмов МРС разумно принять класс дискретных управляющих воздействий. Условия, которые необходимо заменить в [5] для учета данной особенности, будут приведены ниже.

Параметрами МРС-регулятора (параметрами настройки) являются параметры задачи оптимального управления, которые не связаны с системой управления. Понятно, что здесь они представлены:

1. горизонтом управления  $T$ ;
2. функциями текущей и конечной (терминальной) стоимостей  $L$  и  $W$ ;
3. терминальным множеством  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

Алгоритм МРС заключается в выполнении следующих шагов для каждого момента времени  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ :

1. Измеряется текущего состояния объекта  $x_{t_i}$ .
2. Вычисляется оптимального (программного) управления  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i + T]$ , — решения задачи оптимального управления  $\mathcal{P}(t_i, x_{t_i}, T)$ .
3. Управление  $u^*(t) := u^0(t)$  при  $t \in [t_i, t_i + \delta]$  подается на вход объекта управления (остальные значения оптимального программного управления  $u^0(t)$ ,  $t \geq t_i + \delta$  отбрасываются либо используются в качестве начальных приближений в следующий момент  $t_i + \delta$ ).

4. Процедура повторяется для следующего момента  $t_{i+1}$ .

На рис. 2.1 приведена иллюстрация описанного выше алгоритма.

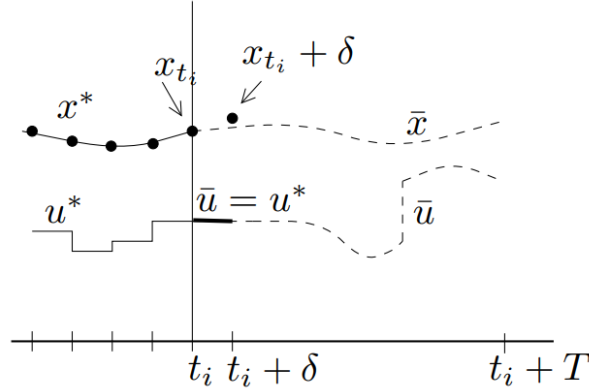


Рис. 2.1: Стратегия МРС

В результате применения алгоритма МРС будет получено управление, которое является управлением типа обратной связи, поскольку в течение каждого интервала  $[t_i, t_i + \delta]$  управление  $u^*(t) = u^*(t|x_{t_i})$  определяется, как функция состояния  $x_{t_i}$ .

Для фиксированного конечного горизонта  $T$  траектория замкнутой системы не обязательно совпадают с траекторией разомкнутого контура — решением прогнозирующей задачи оптимального управления  $x^0(s)$ ,  $s \in [t_i, t_i + T]$ . Следовательно, нет гарантии, что МРС-регулятор обеспечит устойчивость замкнутой системы. На самом деле свойство устойчивости значительно зависит от перечисленных выше параметров настройки алгоритма МРС.

Условия на параметры задачи (2.2), гарантирующие устойчивость замкнутого контура, будем называть условиями устойчивости. Обсудим их в следующем разделе.

## 2.2 Условия устойчивости

В работе [5] приведены обобщающие условия устойчивости, которым удовлетворяют все предложенные до сих пор алгоритмы МРС, построенные на основе прогнозирующих задач вида (2.2).

Основной результат работы [5] утверждает, что обратная связь, полученная в результате применения стратегии МРС, является стабилизирующей при условии, что горизонт планирования  $T$ , функции стоимостей  $L$  и  $W$  и терминальное множество ограничений  $S$  удовлетворяют следующим условиям устойчивости:

1. Множество  $S$  замкнуто и содержит начало координат.
2. Функция  $L$  непрерывна,  $L(\cdot, 0, 0) = 0$ , и существует непрерывная положительно определенная неограниченная функция  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , такая что  $L(t, x, u) \geq M(x)$  для всех  $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ . Более того, «расширенное множество скоростей»  $\{(v, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : v = f(t, x, u), l \geq L(t, x, u), u \in U(t)\}$  является выпуклым при любых  $(t, x)$ .
3. Функция  $W$  положительно полуопределена и непрерывно дифференцируема.
4. Временной горизонт  $T$  таков, что множество  $S$  достижимо за время  $T$  из любого начального состояния и из любой точки в сгенерированных траекториях, т.е. существует множество  $X \supseteq X_0$ , такое что для каждой пары  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$  существует управляющее воздействие  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , переводящее модель (2.1) на терминальное множество  $S$ :

$$x(t_0 + T | t_0, x_0, u) \in S,$$

при этом траектории не покидают множества  $X$ :

$$x(t | t_0, x_0, u) \in X, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

5. Существует скаляр  $\epsilon > 0$  такой, что при любых  $t \in [T, \infty)$  и  $x_t \in S$ , найдется управляющее воздействие  $\tilde{u}(s) \in U(s)$ ,  $s \in [t, t + \epsilon]$ , удовлетворяющее условию

$$W_t(t, x_t) + W_x(t, x_t) \cdot f(t, x_t, \tilde{u}(t)) \leq -L(t, x_t, \tilde{u}(t)), \quad (2.3)$$

а также

$$x(t + r | t, x_t, \tilde{u}) \in S, \quad r \in [0, \epsilon]. \quad (2.4)$$

Обсудим приведенные условия. Условия 1 необходимы для того, чтобы гарантировать существование решения прогнозирующей задачи оптимального управления. Первая часть условий устойчивости 2 и условия 3 тривиально удовлетворяются для квадратичных функций стоимости  $L(x, u) = x^T Q x + u^T R u$  и  $W(x) = x^T P x$ , где  $Q > 0$  и  $R, P \geq 0$ . Вторая часть условия устойчивости 2 о выпуклости «расширенного множества скоростей» — это общеизвестное требование существования решения в задаче оптимального управления с интегральным критерием. Учитывая 2.3, оно автоматически выполняется, если  $L$  выпуклая и  $f$  линейна по  $u$ , или если  $L$  не зависит от

и. Последнее является следствием того, что  $f(x, U(t), t)$  и  $l : l \geq L(t, x)$  — выпуклые множества.

Условие устойчивости 4 необходимо, чтобы гарантировать существование допустимого управляющего воздействия в последовательности прогнозирующих задач оптимального управления. В предположениях 2.1–2.4 не было утверждения о допустимости этих задач. Эти предположения могут быть использованы априори для проверки реализуемости алгоритма МРС, так как они включают только параметры математической модели объекта. На более позднем этапе, при построении прогнозирующих задач, можно попытаться удовлетворить желаемым свойствам допустимости и устойчивости с помощью выбора соответствующих параметров настройки.

Условие (2.3) является важнейшим элементом условий устойчивости. Оно требует, чтобы для всех состояний  $x$ , принадлежащих терминальному множеству  $S$ , существовало значение управления  $\tilde{u}$  такое, что выполняется неравенство (2.3), которое интерпретируется как существование управления, который переводит систему к внутренним множествам уровня  $W$  со скоростью  $L$ . В случае квадратичных функций  $W$ , их множества уровня — эллипсоиды с центром в начале координат, и вектор скорости должен указывать внутрь. Условие (2.4) просто утверждает, что траектория связанный с  $\tilde{u}$  не покидает множество  $S$  сразу. Условие (2.3) используется при доказательстве того факта, что некоторая функция  $V^\delta$ , построенная по оптимальным значениям прогнозирующих задач оптимального управления «уменьшается». Тогда используя аргументы Ляпунова, удастся доказать устойчивость замкнутой системы.

Приведем важный результат, гарантирующий, что алгоритм МРС реализуем, т.е. в каждый момент  $t_i, i = 0, 1, \dots$ , найдется решение соответствующей прогнозирующей задачи, будет найдено нужное значение обратной связи для подачи его на объект управления.

**Утверждение 2.1** [5] Пусть выполняются предположения 2.1 – 2.4 и параметры настройки удовлетворяют условиям устойчивости 1–5. Тогда для любого  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X_0$  задача оптимального управления  $\mathcal{P}(t_0, x_0, T)$  имеет решение.

Рассмотрим последовательность позиций  $(t_i, x_i)$  такую, что  $x_i = x^0(t_i | t_{i-1}, x_{i-1}, u^0)$  — значение в момент времени  $t_i$  оптимальной траектории  $\mathcal{P}(t_{i-1}, x_{i-1}, T)$ . Тогда решение  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  для всех  $i \geq 1$  также существует.

Кроме того, построенная алгоритмом МРС траектория продолжима вправо при всех  $t \geq t_0$ .

Утверждение 2.2 в литературе называют результатом о *начальной и рекуррентной допустимости* прогнозирующих задач оптимального управления.

Доказательство этого факта достаточно тривиально. Поскольку выполняются предположения 2.1 – 2.4, и существует допустимое управление, переводящее систему (2.1) на терминальное множество  $S$  (согласно условию 4), то задача  $\mathcal{P}(t_0, x_0, T)$  удовлетворяет известным теоремам существования решений в задачах оптимального управления в классе измеримых управляющих воздействий. Далее, при  $x_i = x^0(t_i | t_{i-1}, x_{i-1}, u^0)$  в задаче  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  выберем управляющее воздействие  $u(t) = u^0(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i + T - \delta]$ , и дополним его на промежутке  $[t_i + T - \delta, t_i + T]$  управлением  $\tilde{u}$ , о котором идет речь в условии 5. Построенное управляющее воздействие допустимо в задаче  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$ , поскольку оно удовлетворяет всем ограничениям задачи. Снова прибегая к условиям существования решений в задачах оптимального управления, получим, что оптимальное программное управление в задаче  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  существует.

Если прогнозирующие задачи оптимального управления  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  решаются в классе дискретных управляющих воздействий, то, как было описано в главе 1, они фактически сводятся к задачам нелинейного программирования. Соответственно, предположения 2.1 – 2.4 ослабляются таким образом, чтобы задача нелинейного программирования имела решение, а начальная допустимость задачи  $\mathcal{P}(t_0, x_0, T)$  выводится в одно из основных требований условий устойчивости.

Основной результат по устойчивости дает следующая теорема.

**Теорема 2.1** [5] Пусть выполняются предположения 2.1 – 2.4, а параметры настройки удовлетворяют условиям устойчивости 1–5. Тогда для достаточно периода квантования  $\delta$  система, замкнутая обратной связью МРС, асимптотически устойчива в том смысле, что  $\|x^*(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.3 Экономический МРС

В последние годы фокус исследований в рамках МРС сместился в сторону приложений, в которых экономика процесса (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска, прибыли) важнее стабилизации некоторого заданного положения равновесия. Новое направление в теории МРС получило название экономического МРС — Economic Model Predictive Control (ЕМРС) [1, 4, 6].



В силу основных свойств ЕМРС, естественной областью его применения являются задачи управления с экономическими целями и сами задачи микро- и макроэкономики, задачи оптимизации портфелей, экономического роста.

В экономическом МРС функция  $L$ , задается экономическими требованиями к процессу управления, а не выбирается инженерами исходя из условий, обеспечивающих устойчивость. Понятно, что в этом случае не может идти речи о том, что  $L$  — "хорошая" функция, например, выпуклая квадратичная.

Если целью управления системой по-прежнему является стабилизация системы в окрестности некоторого положения равновесия  $(x_1, u_1)$ , то имеют место следующие факты, которые необходимо учитывать:

1. Условие  $L(x_1, u_1) \leq L(x, u)$ , как правило, не выполняется.
2. Положение равновесия  $(x_1, u_1)$  теперь определяется не из условия  $f(x, u) = 0$ , как в стабилизирующем МРС, а из задачи нелинейного программирования [6]

$$\begin{aligned} L(x, u) &\rightarrow \min, \\ f(x, u) &= 0, \\ u &\in U, \quad x \in X. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Устойчивое положение  $(x_1, u_1)$  называется магистралью.

Базовый алгоритм ЕМРС повторяет приведенный выше: для каждого момента времени  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  решается задача (2.2) и первое значение ее оптимального программного управления подается на вход объекта (2.1) до поступления следующего измерения состояния в момент  $t_i + 1$ . Однако, из-за нарушения предположений относительно стоимости этапа  $L$  стандартные рассуждения доказательства устойчивости оказываются неприменимы. Модификация проводится с использованием теории диссипативности динамических систем [1, 4].

Как и в случае задачи стабилизации, использование прогнозирующей задачи (2.2) без дополнительных требований на терминальную стоимость и/или терминальные ограничения может привести к тому, что траектория замкнутой системы в асимптотике не достигает магистрали. Этот эффект в данной работе будет продемонстрирован (глава 4) на примере задачи оптимального роста экономического последователя, которая будет описана в главе 3. После этого будут предложены две прогнозирующие задачи оптимального управления, которые обеспечат асимптотическую устойчивость магистрали в замкнутом контуре с ЕМРС-регулятором.

## ГЛАВА 3

# ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

В данной главе будет рассматриваться задача об оптимизации экономического роста страны-последователя. Математическая модель роста технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера, приводится согласно идеям работы [9]. Для рассматриваемой модели формулируется задача оптимального управления, которая решается с использованием Принципа максимума. Численно эта задача будет решена в главе 4.

### 3.1 Математическая модель

Рассмотрим процесс экономического развития двух стран  $A$  и  $B$ . Предполагаем, что страна  $A$  — автаркический технологический лидер, а страна  $B$  — технологический последователь.

Каждая из стран динамически перераспределяет некоторый имеющийся у нее трудовой ресурс ( $L$ ) между производственным и научно-исследовательским секторами экономики. Производственный сектор осуществляет производство потребляемых продуктов, а научно-исследовательский сектор генерирует новые технологии для производственного сектора.

Особенность рассматриваемой модели в том, что научно-исследовательский сектор страны-последователя может частично заимствовать технологии у страны-лидера.

Пусть,  $L^A$  и  $L^B$  — постоянные размеры трудовых ресурсов стран  $A$  и  $B$ ,  $L_N^A$  ( $L_N^B$ ) — доля трудовых ресурсов, направляемых в научно-исследовательский сектор экономики страны. Эта величина играет роль управления. Следовательно,  $L^A - L_N^A$  ( $L^B - L_N^B$ ) выделяется в производственный сектор.

Через  $a^A$  и  $a^B$  обозначим показатели продуктивности научно-исследовательских секторов стран, а  $\rho^A$  и  $\rho^B$  — параметры дисконтирования в странах  $A$  и  $B$ .

Далее пусть  $N^A(t)$  и  $N^B(t)$  — количество технологий накопленных и доступных до момента времени  $t$  в странах  $A$  и  $B$  — положительные дей-

ствительные числа.

Будем считать что приращение количества накопленных технологий в единицу времени, следующую за произвольным моментом времени  $t \geq 0$ , пропорционально:

- размеру  $N(t)$  имеющегося к моменту  $t$  запаса технологий,
- текущей величине  $L_N(t)$  трудового ресурса, направляемого в научно-исследовательский сектор экономики:

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t). \quad (3.1)$$

Здесь  $a > 0$  — параметр, характеризующий продуктивность научно-исследовательского сектора.

Будем считать, что величина  $N^B(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), \quad L_N^B(t) \in [0, L^B], \quad (3.2)$$

где  $\gamma \in (0, 1)$  — постоянный параметр, характеризующий емкость абсорбции страны  $B$ , а  $L_N^B(t)$  — доля трудовых ресурсов, направляемых в момент времени  $t$  в научно-исследовательский сектор экономики страны  $B$ ; эта величина играет роль управления.

Уравнение (3.2) для страны-последователя предполагает, что в каждый момент времени  $t$  технологический последователь абсорбирует часть  $\gamma N^A(t)$  полного объема  $N^A(t)$  технологий, произведенных страной-лидером.

Стоит отметить, что в соответствии с (3.2) такое заимствование происходит лишь при  $L_N^B(t) > 0$ , т.е. обязательное условие при осуществлении страной-последователем  $B$  собственных научно-исследовательских разработок.

## 3.2 Задача оптимального управления

Пусть количество продуктов, выпускаемых каждой отдельно взятой отраслью производства в единицу времени, следующую за моментом времени  $t \geq 0$ , пропорционально размеру трудовых ресурсов, используемых в этой отрасли в момент  $t$ . Считая, что коэффициент пропорциональности постоянен и один и тот же для всех отраслей, положим его равным единице. Тогда

плотность  $Y(t)$  распределения размера выпуска в отраслях производства в единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ :

$$Y(t) = \frac{L - L_N(t)}{N(t)}.$$

Считаем, что все произведенные продукты потребляются. Следовательно за критерий успешности экономики в единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ , возьмем индекс потребления Диксита-Штиглица, представляющий собой агрегированную характеристику общего количества потребляемых продуктов и их разнообразия за единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ :

$$D(t) = \left\{ \int_0^{N(t)} [Y(t)]^\alpha dj \right\}^{1/\alpha} = (L - L_N(t)) [N(t)]^{1/\alpha - 1}.$$

где  $\alpha \in (0, 1)$  — преобразованный параметр  $\varepsilon$  эластичности замещения между различными продуктами:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \alpha} > 1.$$

Пусть теперь  $\rho$  — субъективно выбранный положительный параметр дисконтирования. Полезность для страны пары  $\{N, L_N\}$ , где  $N: t \mapsto N(t)$  — траектория технологического запаса страны и  $L_N: t \mapsto L_N(t)$  — ее программа инвестирования трудовых ресурсов в научно-исследовательский сектор, будем оценивать интегралом  $J(N, L_N)$  от умноженной на весовой множитель  $e^{-\rho t}$ , удельной скорости роста  $\dot{D}(t)/D(t)$  индекса потребления по переменной времени  $t$ , пробегающей бесконечный полуинтервал  $[0, \infty)$ . Также предположим, что полученный несобственный интеграл сходится абсолютно:

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln D(t) dt,$$

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \right\} dt. \quad (3.3)$$

Зададим положительное начальное значение:

$$N(0) = N_0. \quad (3.4)$$

Объединяя дифференциальное уравнение (3.1), начальное условие (3.4) и выражение (3.3) для функционала полезности  $J$ , получаем следующую задачу

оптимального управления:

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \{ (1/\alpha - 1) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t),$$

$$N(0) = N_0.$$
(3.5)

Здесь  $L_N(t)$  — значение управления в момент времени  $t \geq 0$ ,  $N(t)$  — значение фазовой переменной в этот момент,  $N_0 > 0$  — начальное состояние,  $L > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\rho > 0$  и  $\alpha \in (0, 1)$  — постоянные параметры.

Решение задачи (3.5) легко получается непосредственно: для любой допустимой пары  $(N, L_N)$  имеем для  $\forall t \geq 0$ :

$$\frac{d}{dt}(\ln N(t)) = \frac{L_N(t)}{a}.$$

Поэтому, интегрируя по частям интеграл в (3.3), получаем:

$$J(N, L_N) = (1/\alpha - 1) \frac{\ln N_0}{\rho} + \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ (1/\alpha - 1) \frac{L_N(t)}{a} + \ln(L - L_N(t)) \right\} dt.$$

Поскольку в последнем равенстве подынтегральное выражение не зависит от траектории  $N$ , то функционал полезности принимает свое максимальное значение при постоянном управлении  $L_N^*$ , доставляющем максимум подынтегральному выражению. Следовательно, оптимальное управление  $L_N^*$  в задаче (3.5) постоянно и определяется следующим образом:

$$L_N^* = \begin{cases} L - \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha}, & \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L, \\ 0, & \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} \geq L. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) вытекает, что в автаркическом случае при эффективности научно-исследовательского сектора экономики и малом параметре дисконтирования:

$$\frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L,$$

то оптимальная доля трудовых ресурсов, занятых в научно-исследовательском секторе, отлична от нуля и возрастает с увеличением эффективности научно-исследовательского сектора (с уменьшением отношения  $a\alpha/(1-\alpha)$ ) и с уменьшением параметра дисконтирования  $\rho$ .

Из (3.1) и (3.6) получим, что количество технологий накопленных стра-

ной А:

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t), \quad (3.7)$$

где

$$g^A = \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ (1 - \alpha) \frac{L^A}{a^A} - \alpha \rho^A \right\}.$$

т.к. предполагаем, что научно-исследовательский сектор страны А обладает необходимой эффективностью, то  $g^A > 0$ .

Теперь рассмотрим страну В и определим функционал полезности для неё:

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max. \quad (3.8)$$

Объединим (3.2), (3.7), (3.8), получим задачу оптимального управления:

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), \quad L_N^B(t) \in [0, L^B[, \quad (3.9)$$

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t),$$

$$N^A(0) = N_0^A, \quad N^B(0) = N_0^B.$$

Здесь  $g^A$ ,  $L^B$ ,  $a^B$ ,  $\gamma$  — положительные параметры,  $n_0^A > 0$ ,  $N_0^B > 0$  — заданные начальные состояния.

Для упрощения будем использовать следующие обозначения:

$$x(t) = N^B(t), \quad b = \frac{L^B}{a^B},$$

$$u(t) = \frac{L_N^B(t)}{a^B}, \quad \rho = \rho^B,$$

$$y(t) = N^A(t), \quad \nu = g^A,$$

$$\kappa = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Используя обозначения выше перепишем задачу (3.9):

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \\
x(0) &= x_0, \\
\dot{y}(t) &= \nu y(t), \\
y(0) &= y_0, \quad u(t) \in [0, b[,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где  $b, \gamma, \rho, \nu, \kappa$  — положительные параметры,  $\gamma < 1$ ;  $x_0$  и  $y_0$  — положительные начальные состояния фазовых переменных.

Заметим, что задача (3.10) не вкладывается полностью в постановку общей задачи оптимального управления из-за присутствия открытого интервала в ограничениях на управления. Поэтому модифицируем эти ограничения, ослабив верхнее на величину  $\varepsilon$ :

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon].$$

### 3.3 Редуцированная задача

Для упрощения формулировки задачи (3.10), понизим размерность фазового вектора до единицы. Обозначим:

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0, \quad z_0 = \frac{x_0}{y_0}.$$

Тогда для любой допустимой тройки  $(x, y, u)$  из (3.10) получим дифференциальное уравнение для изменения переменной  $z$  во времени:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \frac{1}{y(t)} \dot{x}(t) - \frac{x(t)}{y^2(t)} \dot{y}(t) = \\
&= \frac{u(t)(x(t) + \gamma y(t))}{y(t)} - \frac{x(t)}{y^2(t)} \nu y(t) = \\
&= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t),
\end{aligned}$$

и вычислим значение критерия качества:

$$\begin{aligned}
J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln(z(t)y(t)) + \ln(b - u(t))] dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \kappa \ln y(t) + \ln(b - u(t))] dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \kappa \ln(y_0 e^{\nu t}) + \ln(b - u(t))] dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt + C,
\end{aligned}$$

где константа  $C$  вычисляется по формуле:

$$C = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln y_0 + \kappa \nu t] dt.$$

Получим задачу:

$$\begin{aligned}
I(z, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
\dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \quad z(0) = z_0, \\
u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Отсюда следует заключение об эквивалентности двух задач оптимального управления.

**Лемма 3.1** [9] Задачи оптимального управления (3.10) и (3.11) эквивалентны. Именно справедливы следующие утверждения:

- допустимое управление  $u^0$ , оптимально в задаче (3.10) тогда и только тогда, когда оно оптимально в задаче (3.11);
- оптимальные значения функционалов  $J^0$  и  $I^0$  в задачах (3.10) и (3.11) связаны равенством  $J^0 = I^0 + C$

Далее для анализа решения задачи (3.10) будем использовать эквивалентную ей редуцированную задачу (3.11).

### 3.4 Решение редуцированной задачи

Для решения данной задачи значение текущей сопряжённой переменной будет  $p(t) = e^{\rho t} \psi(t)$ , а также используется принцип максимума Л.С. Понтрягина, который для случая задач на бесконечном полуинтервале доказан в работе [9]:

**Теорема 3.1** Пусть  $u^0(t)$ ,  $t \geq 0$ , — оптимальное управление в задаче (3.11) и  $z^0$ ,  $t \geq 0$ , — соответствующая оптимальная траектория. Тогда суще-



ствует такая (локально) абсолютно непрерывная положительная функция  $p$ , определенная на  $[0, \infty)$ , что выполняются следующие условия:

- функция  $p$  является решением сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -(u^0(t) - \nu - \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z^0(t)};$$

- при  $t \in [0, \infty)$  выполняется условие максимума

$$u^0(t)p(t)(z^0(t) + \gamma) + \ln(b - u^0(t)) = \max_{u \in [0, b-\varepsilon]} (up(t)(z^0(t) + \gamma) + \ln(b - u));$$

- выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z^0(t)p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0;$$

более того,

$$p(t)z^0(t) \leq \frac{\kappa}{\rho}, \quad \forall t \geq 0;$$

- выполняется условие стационарности

$$M(z^0(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z^0(s) + \ln(b - u^0(s))] ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Теорема 3.1 является необходимым условием оптимальности допустимой пары  $(z^0, u^0)$  для задачи (3.11).

Для решения задачи оптимального управления (3.11) необходимо построить гамильтонову систему принципа максимума.

Введем функцию  $\bar{h} : \mathbb{R}_{++} \mapsto \mathbb{R}_{++}$  для любого  $z > 0$ :

$$\bar{h}(z) = \frac{1}{b(z + \gamma)},$$

а также множества  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_1 = \{(z, p) \in \mathbb{R}^2 : z > 0, p \geq \bar{h}(z)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(z, p) \in \mathbb{R}^2 : z > 0, 0 < p < \bar{h}(z)\},$$

где  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \mathbb{R}_{++}^2$ .

Определим функции  $\varphi_1 : \mathbb{R}_{++}^2 \mapsto \mathbb{R}$  и  $\varphi_2 : \mathbb{R}_{++}^2 \mapsto \mathbb{R}$ :

$$\varphi_1(z, p) = \begin{cases} (b - \nu)z + b\gamma - \frac{1}{p}, & (z, p) \in \Gamma_1, \\ -\nu z, & (z, p) \in \Gamma_2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(z, p) = \begin{cases} -(b - \nu - \rho)p - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{(z + \gamma)z}, & (z, p) \in \Gamma_1, \\ (\nu + \rho)p - \frac{\kappa}{z}, & (z, p) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Заметим что эти функции непрерывны.

**Следствие 3.1** Пусть  $(z^0, u^0)$  — оптимальная пара в задаче (3.11). Тогда

- существует такая положительная (локально) абсолютно непрерывная функция  $p$  на  $[0, \infty)$ , что пара  $(z^0, u^0)$  есть решение на  $[0, \infty)$  системы дифференциальных уравнений (в  $\mathbb{R}_{++}^2$ )

$$\dot{z}(t) = \varphi_1(z(t), p(t)),$$

$$\dot{p}(t) = \varphi_2(z(t), p(t)),$$

- при  $t \geq 0$  имеем

$$u^0(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p(t)(z^0(t) + \gamma)}, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

- выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z^0(t) p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0;$$

более того,

$$p(t) z^0(t) \leq \frac{\kappa}{\rho}, \quad \forall t \geq 0;$$

- выполняется условие стационарности

$$M(z^0(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z^0(s) + \ln(b - u^0(s))] ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Уравнения для  $\dot{z}$  и  $\dot{p}$  являются гамильтоновой системой принципа максимума для задачи (3.11).

Поскольку при различных соотношениях между параметрами  $\nu$ ,  $b$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  и  $\gamma$  векторное поле гамильтоновой системы  $\mathbb{R}_{++}^2$  устроено по-разному, будет удобно разделить эту систему уравнений на два случая.

Случай удовлетворяющий невырожденным уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= (b - \nu)z(t) + b\gamma - \frac{1}{p(t)}, \\ \dot{p}(t) &= -(b - \nu - \rho)p(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa + 1)z(t)}{z(t) + \gamma z(t)}, \\ (z(t), p(t)) &\in \Gamma_1,\end{aligned}\tag{3.12}$$

и вырожденным уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -\nu z(t), \\ \dot{p}(t) &= (\nu + \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z(t)}, \\ (z(t), p(t)) &\in \Gamma_2,\end{aligned}\tag{3.13}$$

Поскольку некоторые комбинации параметров встречаются наиболее часто введем сокращения:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \rho + \nu - b, \\ \beta_1 &= \rho + \nu - \kappa b, \\ \beta_2 &= \rho + \kappa\nu - \kappa b.\end{aligned}$$

Для выделения кривой  $V_0^{11}$  переключения знака  $z$ -координаты и кривой  $V_0^{12}$  переключения знака  $p$ -координаты, рассмотрим невырожденные уравнения (3.12). На кривых  $V_0^{11}$  и  $V_0^{12}$  обращаются в нуль соответственно скорости  $\dot{z}(t)$  и  $\dot{p}(t)$  переменных  $z(t)$  и  $p(t)$ , изменяющихся в силу невырожденных уравнений (3.12).

Введем функцию  $h_{11}(z)$  вида

$$h_{11}(z) = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z},$$

определенная на

$$E_{11} = \begin{cases} (0, z_{11}), & \nu > b, \\ (0, \infty), & \nu \leq b, \end{cases}$$

где

$$z_{11} = \frac{b\gamma}{\nu - b},$$

и функции

$$h_{12}(z) = \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z},$$

определенную при  $\beta_0 \neq 0$  на  $(0, \infty)$ .

Нас интересуют решения, которые сходятся к некоторой точке покоя  $(z_1, p_1)$ . Такие случаи называются невырожденными. Точка покоя  $(z_1, p_1)$  находится из системы алгебраических уравнений:

$$p = h_{11}(z),$$

$$h_{11}(z) = h_{12}(z),$$

Наборы параметров можно разделить по трём классификациям:

- А, классификация видов множества  $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$  точек покоя, таких вариантов 9;
- В, классификация видов  $z$ -проекции пересечения  $pr_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$ , таких вариантов 2;
- С, классификация видов  $z$ -проекции пересечения  $pr_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$ , таких вариантов 10.

Совмещенным случаем назовём такое расположение параметров, при котором одновременно имеют место три каких-либо выбранных случая — по одному из наборов каждой классификации. Для случаев что мы будем рассматривать  $z$ -проекция  $pr_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$  пересечения кривой переключения знака  $z$ -координаты в  $\Gamma_1$  с зоной трансверсальности будет  $(0, \widehat{z}_{11})$ .

Невырожденным совмещенным случаем будем называть случай с непустым множеством  $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$  точек покоя гамильтоновой системы.

В таблице 3.1 представлены реализуемые неособые невырожденные совмещенные случаи. Далее рассмотрим только такие случаи.

Таблица 3.1: Реализуемые неособые невырожденные совмещенные случаи

| Случай № | $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$           | $pr_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$  | Параметрическая область                                |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| A1B1C1   | $\{(z_1, p_1)\}$                   | $[\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$ | $\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu < b$       |
| A1B1C2   | $\{(z_1, p_1)\}$                   | $[\widehat{z}_{12}, \infty]$       | $\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu < b$    |
| A1B1C3   | $\{(z_1, p_1)\}$                   | $[0, \bar{z}_{12}]$                | $\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$    |
| A1B1C4   | $\{(z_1, p_1)\}$                   | $[0, \infty]$                      | $\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$ |
| A1B1C7   | $\{(z_1, p_1)\}$                   | $[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$ | $\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$                |
| A9B1C10  | $\{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\}$ | $\{\bar{z}_{12}\}$                 | $\beta_0 = 0, \kappa < 1$                              |

Векторное поле гамильтоновой системы в неособых невырожденных совмещенных случаях изображено на рисунках 3.1–3.8. Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество  $\Gamma_2$ .

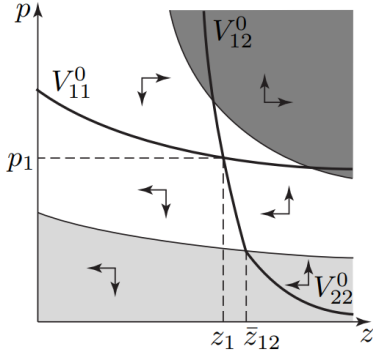


Рис. 3.1: A1B1C1

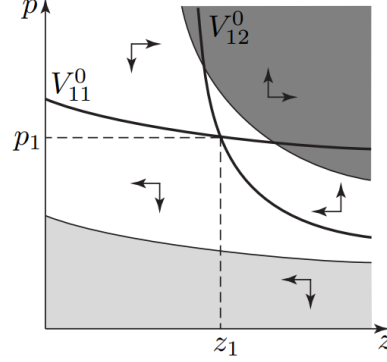


Рис. 3.2: A1B1C2

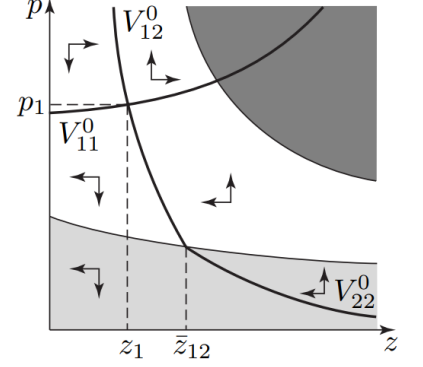


Рис. 3.3: A1B1C3,  $\nu > b$

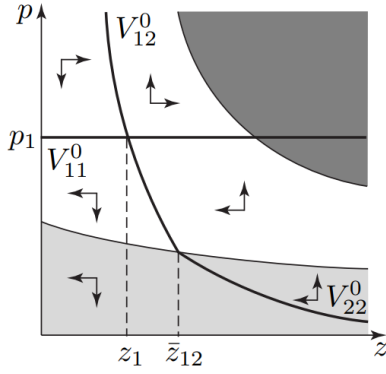


Рис. 3.4: A1B1C3,  $\nu = b$

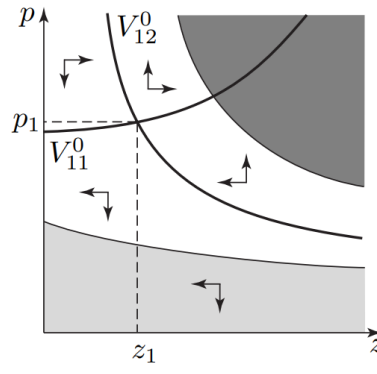


Рис. 3.5: A1B1C4,  $\nu > b$

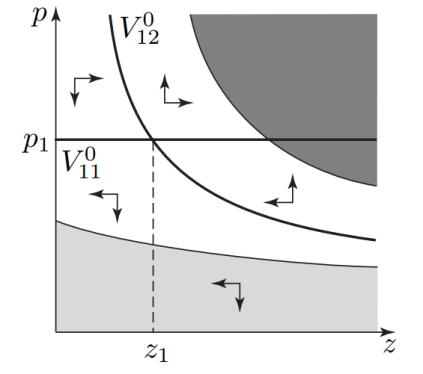


Рис. 3.6: A1B1C4,  $\nu = b$

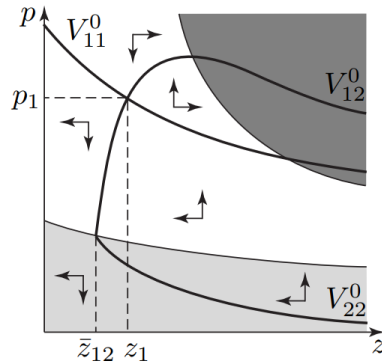


Рис. 3.7: A1B1C7

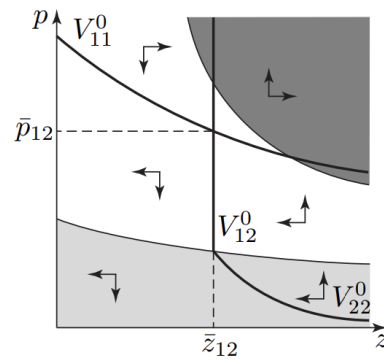


Рис. 3.8: A9B1C10

Из рисунков (3.1)–(3.8) можем заметить что во всех неособых невырожденных совмещенных случаях векторное поле имеет, "стандартный" харак-

тер: кривые переключения знака  $z$ - и  $p$ -координат пересекаются трансверсально в единственной точке покоя и при обходе этой точки по часовой стрелке зоны роста (убывания) координат гамильтоновой системы, как видно из рисунков следуют друг за другом в одном и том же порядке.

Обобщающий эти случаи вид фазовой плоскости приведен на рис. 3.9. Трансверсальные решения, как видно из рис. 3.9, сходятся к точке покоя  $(z_1, p_1)$ . Все остальные решения нетрансверсальны. Затененная область — внешность зоны трансверсальности.

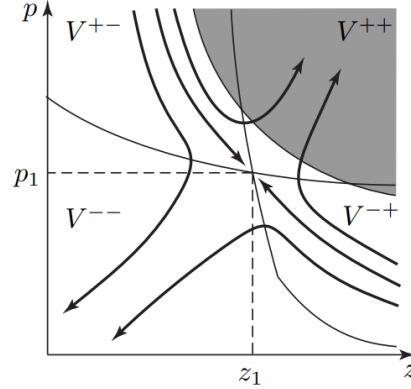


Рис. 3.9: Фазовые траектории решений гамильтоновой системы в неособых невырожденных случаях.

**Теорема 3.2** Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев. Тогда

- для задачи (3.11) существуют единственная оптимальная траектория  $z^0$  и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное управление  $u^0$ ;
- оптимальная траектория  $z^0$  есть компонента равновесного решения  $(z^0, p^0)$  гамильтоновой системы, определяемого начальным состоянием  $z_0$  управляемой системы задачи (3.11);
- оптимальное управление  $u^0$  имеет вид

$$u^0(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p(t)(z^0(t)+\gamma)}, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

В следующей главе на примере рассмотренной задачи оптимального роста технологического последователя будем демонстрировать метод экономического МРС из главы 2, применяя различные прогнозирующие задачи оптимального управления.

## ГЛАВА 4

# ПРИМЕНЕНИЕ ЕМРС К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РОСТЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

В настоящей главе применим метод ЕМРС к решению задачи об оптимальном росте технологического последователя из главы 3. При этом рассмотрим три подхода:

1. базовый ЕМРС без дополнительных ограничений (неограниченный ЕМРС) [6];
2. ЕРМС с терминальным ограничением-равенством [7];
3. подход, в котором критерий качества дополняется специальной выбранной терминальной стоимостью.

Последний подход — новый, предлагается в данной работе впервые. Цель — упростить задачу оптимального управления с точки зрения численного решения, поскольку задачи без жестких ограничений-равенств проще с вычислительной точки зрения. В главе проводится сравнение решений, полученных всеми тремя подходами, а также сравнение с решением задачи (3.11) на основе Принципа максимума из главы 3.

### 4.1 Прогнозирующие задачи оптимального управления

В данной главе будем сравнивать результаты решения задачи об оптимальном росте технологического последователя методом ЕМРС с тремя различными прогнозирующими задачами. Ниже приводятся формулировки этих задач. Напомним, что прогнозирующие задачи в текущий момент  $\tau$  имеют конечный горизонт управления  $[\tau, \tau + T]$ , а в качестве начального состояния для прогнозирующей модели выбирается текущее состояние, которое для редуцированной системы будет иметь вид  $x(\tau)/y(\tau)$ , где  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  измеряемые текущие значения накопленных технологий стран  $B$  и  $A$ , соответственно.

1) Прогнозирующая задача оптимального управления без дополнительных ограничений и терминальной стоимости, применяемая в так называемом неограниченном ЕМРС, имеет вид (см. [6]):

$$\begin{aligned}
I_1(z, u) &= \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
\dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \\
z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \\
u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Недостаток этого вида задачи состоит в том, что требуется достаточно длинный горизонт управления. Но даже несмотря на это, траектория замкнутой системы может не выходить к магистрали и стабилизируется в окрестности некоторой точки. Увеличение горизонта, как правило, позволяет добиться того, чтобы траектория замкнутой системы асимптотически приближалась к магистрали. Однако, при этом заметно растет трудоемкость численного решения задачи оптимального управления (4.1). Возможна ситуация, когда решение (4.1) уже невозможно построить в реальном времени, т.е. за время, не превосходящее  $h$ .

2) Прогнозирующую задачу оптимального управления (4.1) дополним терминальным ограничением-равенством:

$$\begin{aligned}
I_2(z, u) &= \int_t^{t+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
\dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \\
z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \quad z(\tau + T) = z_1, \\
u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T],
\end{aligned} \tag{4.2}$$

т.е. добавим  $z_1 = \frac{x_1}{y_1}$  требование, чтобы  $z$  к моменту  $\tau + T$  равнялась магистральному значению. Однако, вычислительные трудности не исчезают, может возникнуть ситуация, когда не существует ни одного допустимого управления, переводящего систему в состояние  $z_1$ .

3) В подходе, предлагаемом в данной дипломной работе дополним критерий качества задачи (4.1) специально подобранной линейной (по фазовой



переменной  $z$ ) терминальной стоимостью:

$$\begin{aligned}
I_3(z, u) &= \alpha e^{-\rho(\tau+T)} z(\tau + T) + \int_t^{\tau+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
\dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \\
z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \\
u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где  $\alpha$  — весовой коэффициент, выбор которого будет обоснован ниже.

В отличие от (4.2) задача (4.3) имеет решение при любом значении горизонта  $T$ . Далее в вычислительных экспериментах также покажем, что, в отличие от (4.1), она обеспечивает асимптотическую устойчивость магистрали при небольших  $T$ .

## 4.2 Оптимальное программное решение с применением Direct Single Shooting

Для реализации алгоритма MPC из раздела 2.1 необходимо на шаге 2 решать прогнозирующую задачу оптимального управления, т.е. находить программное решение задач (4.1), (4.2), (4.3).

Прогнозирующие задачи будут решаться численно с применением метода DSS из раздела 1.3, поэтому дальнейшее изложение будет посвящено программной реализации численных методов для решения задач (4.1), (4.2), (4.3).

Приведем реализацию в Matlab использованием CasADi для самой простой задачи, коей является (4.1). Для начала зададим начальные условия:

```

y0=1;
x0=0.1;
z0 = x0/y0;

```

Находим  $z_1$ ,  $p_1$  и проверяем какому случаю из таблицы 3.1 соответствует задача с выбранными параметрами для этого создали функцию SteadyState. В ней мы находим  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $z_1$ :

```

function [z_1,p_1] = SteadyState
    beta0 = rho + nu - b;
    beta1 = rho + nu - kappa*b;

```

```

beta2 = rho + kappa*nu - kappa*b;

if (beta0>0) && (beta1>0) && (beta2>0) && (nu<b)
    fprintf( 'A1B1C1\n' );
end
if (beta0>0) && (beta1<=0) && (beta2>0) && (nu<b)
    fprintf( 'A1B1C2\n' );
end
if (beta0>0) && (beta1>0) && (beta2>0) && (nu>=b)
    fprintf( 'A1B1C3\n' );
end
if (beta0>0) && (beta1<=0) && (beta2>0) && (nu>=b)
    fprintf( 'A1B1C4\n' );
end
if (beta0<0) && (beta1>0) && (beta2>0)
    fprintf( 'A1B1C7\n' );
end
sol = fsolve( @(x) [phi_1(x(1),x(2));
    phi_2(x(1),x(2))], [1;1] );
z_1 = sol(1); p_1 = sol(2);

```

Объявим переменные и параметры модели, с которыми будем работать:

Переменные и параметры модели

```

t = SX.sym( 't' );
x1 = SX.sym( 'x1' );
u = SX.sym( 'u' );
xdot = (x1 + gamma)*u - nu*x1;

```

Подинтегральная функция критерия качества, так как у нас задача на максимум, а встроенный алгоритм решает задачи на минимум в подынтегральную функцию возьмем с минусом:

```

f0 = -exp(-rho*t)*(kappa*log(z1)+log(b-u));

```

Применим алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка для решения ОДУ:

```

DT = T/N;
f = Function( 'f', {x1, u, t}, {xdot, f0} );
X0 = MX.sym( 'X0', n );
U = MX.sym( 'U' );
tt = MX.sym( 'tt' );

```

```

X = X0;
Q = 0;
[k1, k1_q] = f(X, U, tt);
[k2, k2_q] = f(X + DT/2 * k1, U, tt+DT/2);
[k3, k3_q] = f(X + DT/2 * k2, U, tt+DT/2);
[k4, k4_q] = f(X + DT * k3, U, tt+DT);
X=X+DT/6*(k1 +2*k2 +2*k3 +k4);
Q = Q + DT/6*(k1_q + 2*k2_q + 2*k3_q + k4_q);

```

```

F = Function( 'F', {X0, U, tt}, {X, Q},
    { 'x0', 'p', 't' }, { 'xf', 'qf' });

```

Собираем переменные и ограничения задачи (4.1):

```

u = MX.sym( 'u', N);
z = MX.sym( 'z', n);
J = 0;
G = [];
x = z;
for k = 1:N
    res = F( 'x0', x, 'p', u(k), 't', (k-1)*DT);
    x    = res.xf;
    J    = J + res.qf;

```

Для решения (4.2) здесь добавляется:

```

g    = x-z_1;

```

Для решения (4.3) здесь добавляется:

```

if k==N
    J=J-exp(-rho*T)*p_1*x;
end
end

```

После формулировки задачи нелинейного программирования и ограничений, для решения задачи создается solver — процедура решения, в данном случае — на основе встроенного алгоритма IPOPT.

```

nlp = struct( 'f', J, 'x', [z(:); u(:)], 'g', []);
solver = nlpsol( 'solver', 'ipopt', nlp);

```

```

lbw = zeros(N, r);
ubw = (b-eps)*ones(N, r);
w0 = zeros(N, r);

```

```

xtau = z0;
tic
sol = solver('x0', [xtau; w0], 'lbg', [], 'ubg', [], ...
            'lbx', [xtau; lbw], 'ubx', [xtau; ubw]);
t_Elapsed = toc;

```

Восстанавливаем управление:

```

J_opt = full(sol.f);
primal = full(sol.x);
u_opt = reshape(primal(n+1:end), r, N);

```

Для восстановления двойственных переменных будет с помощью пи-системы:

```

function [X,P] = PIsystem(T,x0,pT,ud)
    ud = [ud ud(end)];
    u = @(t) ud(floor(t/DT)+1);
    sys_z = @(t,z) u(t)*(z+gamma) - nu*z;
    sol_z = ode45(sys_z, T, x0, odeopt);
    X = deval(sol_z,T);

    sys_p = @(t,p) (rho+nu-u(t))*p - kappa/deval(sol_z,t);
    sol_p = ode45(sys_p, flip(T), pT, odeopt);
    P = deval(sol_p,T);

end

```

Для восстановления двойственных переменных задачи (4.1) передаем следующие параметры:

```
[x_opt, p_opt] = PIsystem(0:DT:T, xtau, 0, u_opt);
```

Для задачи (4.2) параметры для восстановления двойственных переменных выглядят следующим образом:

```

dual = exp(rho*DT*N)*abs(full(sol.lam_g));
[x_opt, p_opt] = PIsystem(0:DT:T, xtau, dual, u_opt);

```

Для восстановления двойственных переменных задачи (4.3) передаем следующие параметры:

```
[x_opt, p_opt] = PIsystem(0:DT:T, xtau, p_1, u_opt);
```

Для вывода результата была написала функция results которая выводит графики:

```
results(0:DT:T, x_opt, u_opt, p_opt, J_opt, t_Elapsed, 1)
```

В следующем разделе рассмотрим результаты работы приведенной реализации.

### 4.3 Результаты численных экспериментов

Рассмотрим различные решения задач (4.1)–(4.3) в зависимости от изменений параметров:

- $b$  – размеры трудовых ресурсов, пропорциональна размеру  $L^B$  трудовых ресурсов страны-последователя,
- $\gamma$  – емкость абсорбции, т.к при описании параметрических областей, соответствующих всем реализуемым совмещенным случаям, не участвует емкость абсорбции  $\gamma$  страны-последователя, изменение емкости абсорбции в пределах допустимого интервала  $(0,1)$  не меняет общую схему выбора страной-последователем оптимальной стратегии технологического роста в зависимости от начального соотношения  $z_0$  запасов технологий.
- $\rho$  – параметр дисконтирования,
- $\nu$  – удельная скорость роста запаса технологий страны-лидера, линейно зависит от размера  $L^A$  трудовых ресурсов страны-лидера,
- $\kappa$  – параметр эластичности замещения. При больших  $\kappa$  значение эластичности замещения мало и наоборот, малые значения  $\kappa$  соответствуют – большим значениям эластичности замещения.

Возможности страны-последователя описывают: ”ресурсный” параметр – верхняя граница  $b$  для значений управления и ”информационный” параметр – емкость  $\gamma$  абсорбции.

При соотношении параметров, отвечающих неособым невырожденным совмещенным случаям, схема выбора оптимального пути технологического развития для страны-последователя может быть выражена условной формулой: ”начальный запас технологий мал по отношению к стране-лидеру (у  $z_0$  малое значение) — опережение с выравниванием, начальный запас технологий велик — отставание с выравниванием”. Опережение с выравниванием – это оптимальный режим технологического развития страны-последователя, когда на старте процесса удельная скорость ее технологического роста, превосходит удельную скорость роста страны-лидера, она постепенно снижается, при этом все время больше  $\nu$ , в пределе на бесконечность сравнивается с  $\nu$ .

Полный экономический анализ ситуаций можно найти в работе [9]. В настоящей работе нас будет в основном интересовать обоснование выбора прогнозирующей задачи для МРС в разд. 4.5.

Таблица 4.1: Значения параметров при решении задач (4.1)–(4.3)

| № | $\gamma$ | $\nu$ | $b$  | $\rho$ | $\kappa$ | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | Случай | $z_1$ | $p_1$ |
|---|----------|-------|------|--------|----------|-----------|-----------|-----------|--------|-------|-------|
| 1 | 0.5      | 0.7   | 0.7  | 0.1    | 1.3      | 0.1       | -0.11     | 0.1       | A1B1C4 | 1.81  | 2.86  |
| 2 | 0.3      | 0.3   | 0.3  | 0.14   | 0.5      | 0.14      | 0.29      | 0.14      | A1B1C3 | 0.13  | 11.11 |
| 3 | 0.1      | 0.5   | 0.55 | 0.15   | 1.5      | 0.1       | -0.175    | 0.075     | A1B1C2 | 0.54  | 12.21 |
| 4 | 0.3      | 0.3   | 0.4  | 0.14   | 0.5      | 0.04      | 0.24      | 0.09      | A1B1C1 | 0.23  | 6.99  |
| 5 | 0.5      | 0.3   | 0.4  | 0.14   | 1        | 0.04      | 0.04      | 0.04      | A1B1C1 | 2     | 2.5   |
| 6 | 0.5      | 0.3   | 0.5  | 0.14   | 0.05     | -0.06     | 0.19      | 0.04      | A1B1C7 | 0.81  | 2.43  |

Значения параметров при решении задач будем выбирать согласно таблице 4.1. В таблице указан случай из таблицы 3.1, которому соответствует данный набор параметров, а также магистральные значения прямой  $z_1$  и сопряженной  $p_1$  переменных. Выбрано начальное состояние  $z_0 = 0.1$  для всех решений.

На рисунках 4.1 – 4.18 изображены полученные результаты для всех наборов параметров и всех трех рассматриваемых задач. В таблице 4.2 представлено соответствие рисунков результатам решения задач (4.1)–(4.3).

Таблица 4.2: Соответствие рисунков результатам решения задач (4.1)–(4.3)

| № | задача (4.1) | задача (4.2) | задача (4.3) |
|---|--------------|--------------|--------------|
| 1 | рис. 4.1     | рис. 4.7     | рис. 4.13    |
| 2 | рис. 4.2     | рис. 4.8     | рис. 4.14    |
| 3 | рис. 4.3     | рис. 4.9     | рис. 4.15    |
| 4 | рис. 4.4     | рис. 4.10    | рис. 4.16    |
| 5 | рис. 4.5     | рис. 4.11    | рис. 4.17    |
| 6 | рис. 4.6     | рис. 4.12    | рис. 4.18    |

На каждом рисунке изображены четыре графика. Они соответствуют:

- оптимальному программному управлению;
- соответствующей оптимальной траектории;
- оптимальной котраектории;
- фазовому портрету гамильтоновой системы, где серая область — множество  $\Gamma_2$ , на котором оптимальное управление равно нулю, красные штриховые кривые — это особые направления, точка их пересечения — особая точка  $(z_1, p_1)$  (магистраль).

Далее проведем анализ полученных результатов для каждой задачи.

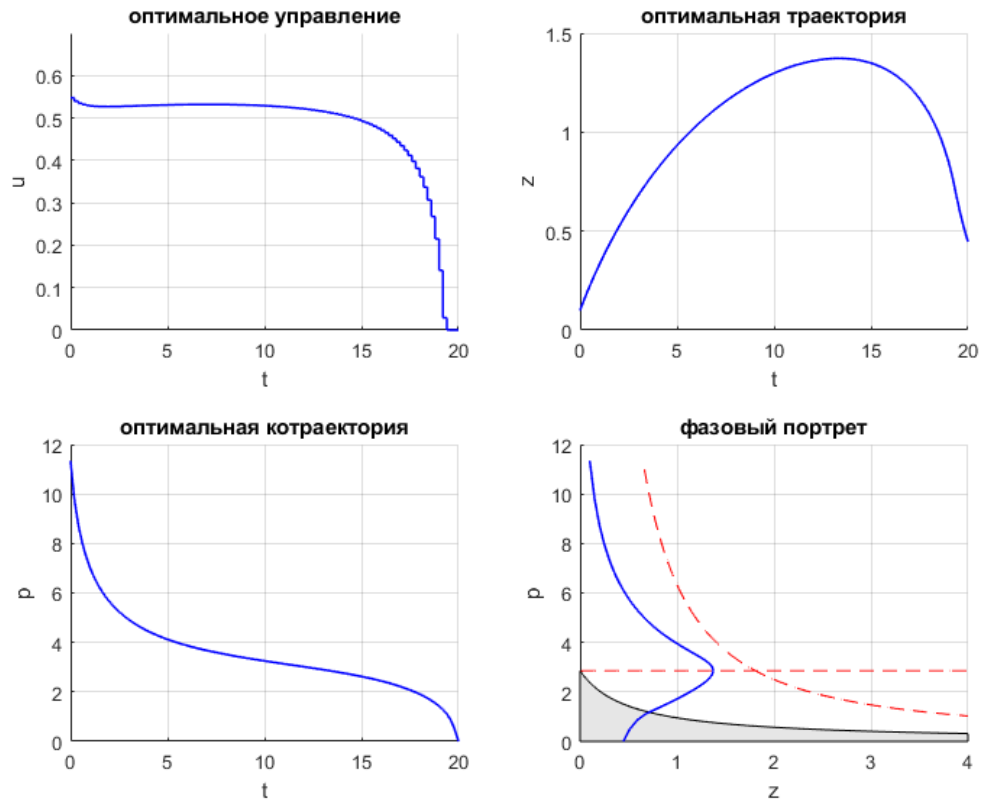


Рис. 4.1: Набор параметров № 1, подход 1, случай A1B1C4

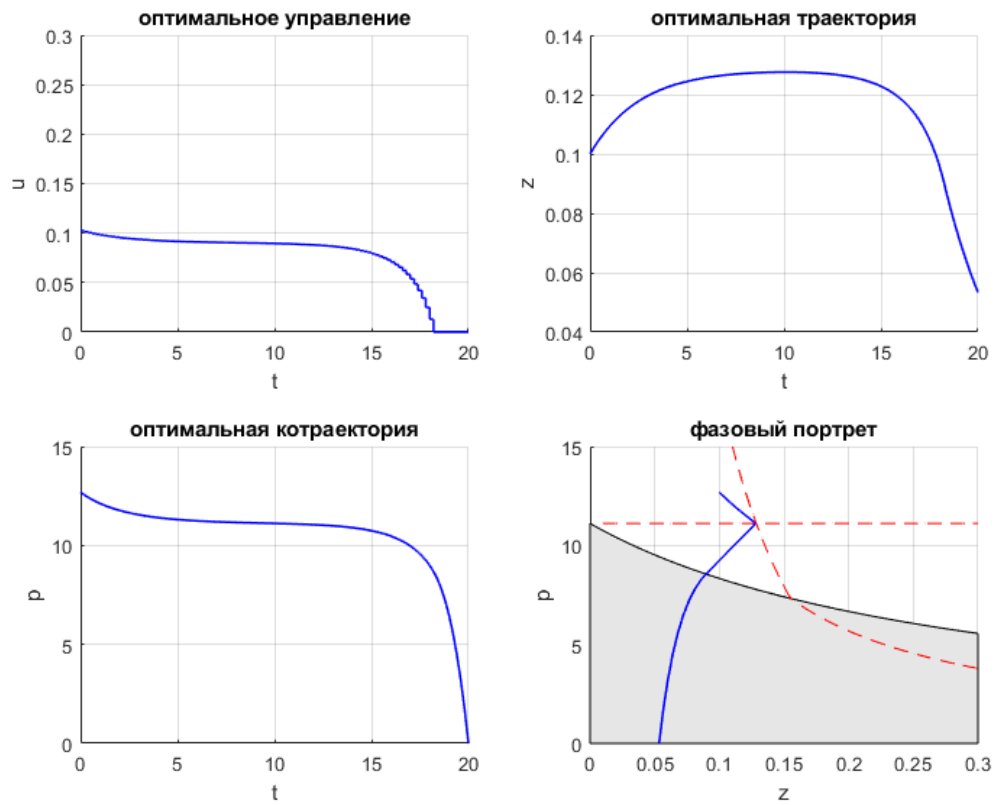


Рис. 4.2: Набор параметров № 2, подход 1, случай A1B1C3,  $\nu = b$

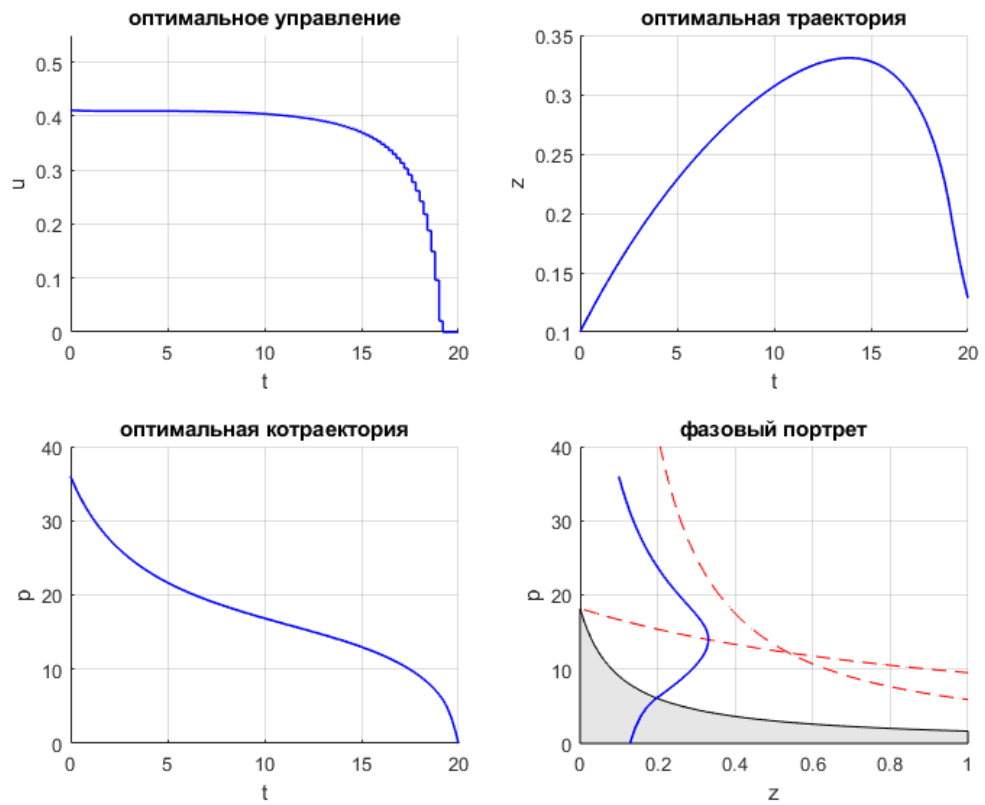


Рис. 4.3: Набор параметров № 3, подход 1, случай A1B1C2

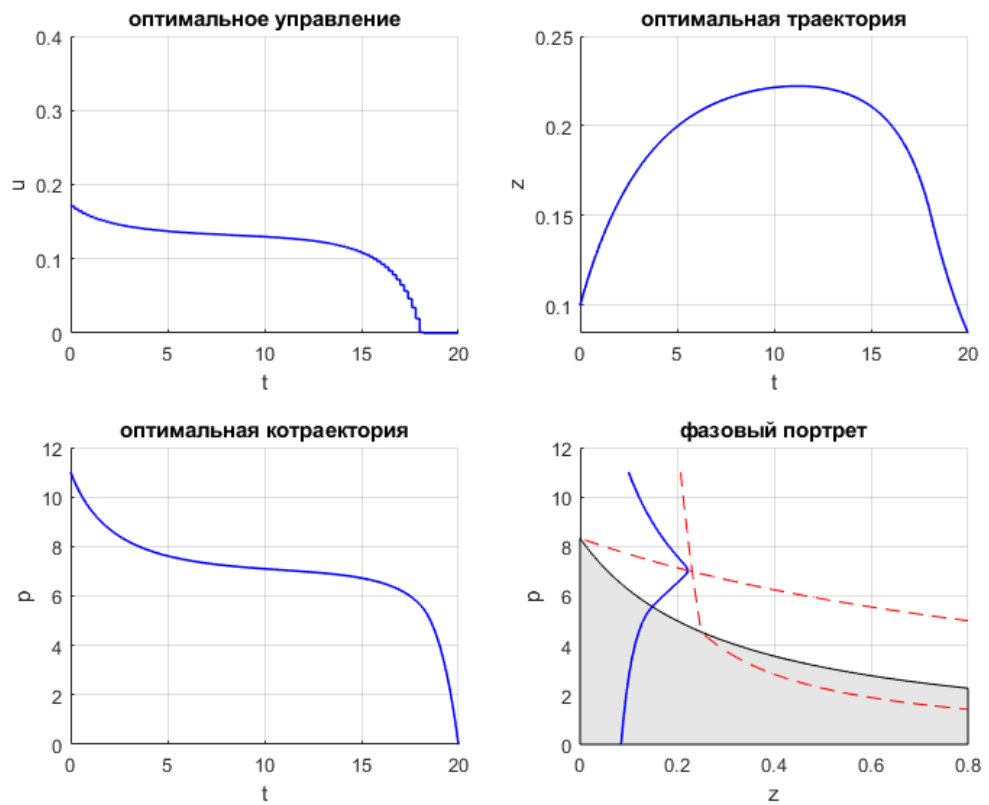


Рис. 4.4: Набор параметров № 4, подход 1, случай A1B1C1



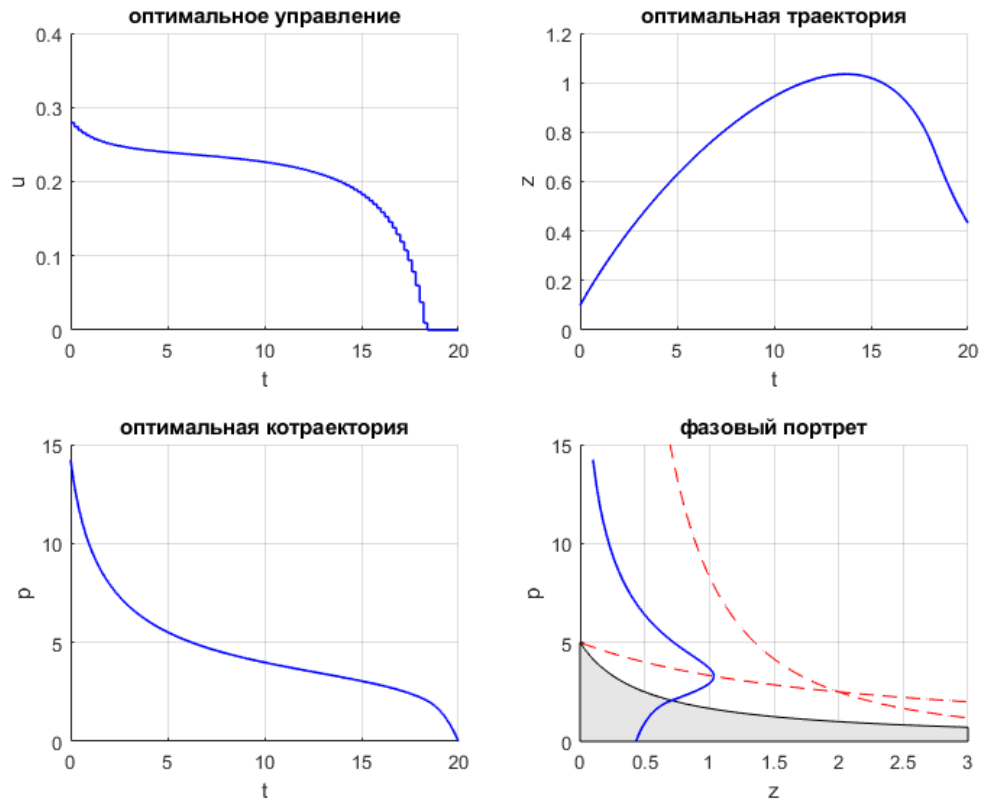


Рис. 4.5: Набор параметров № 5, подход 1, случай A1B1C1

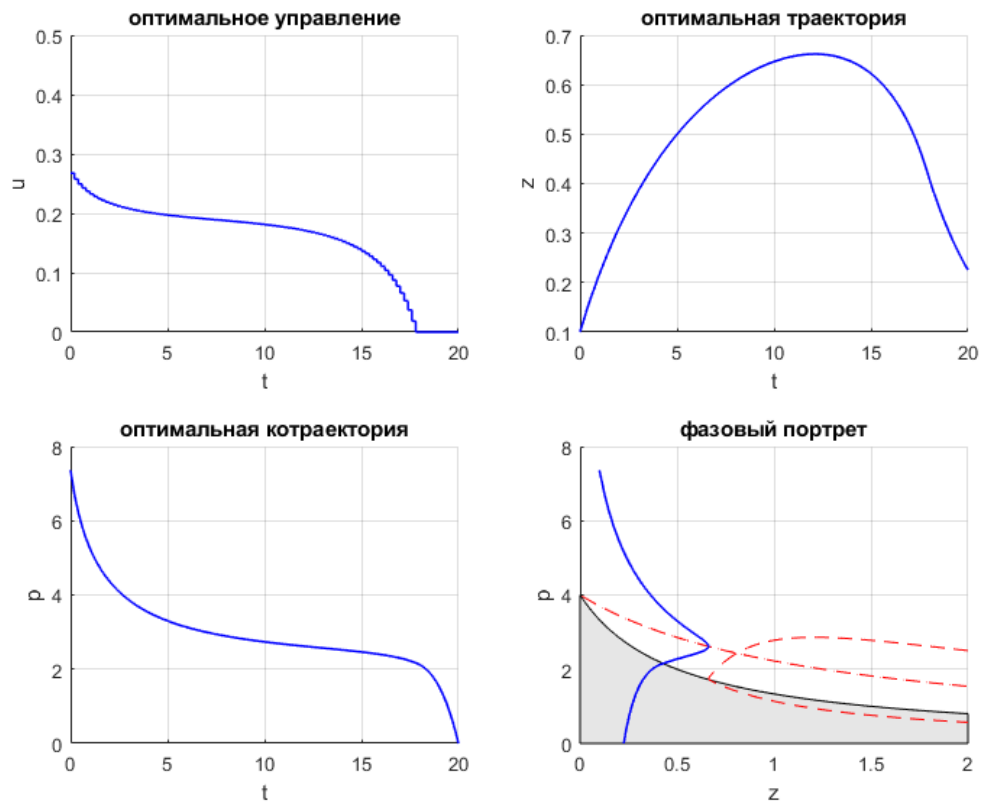


Рис. 4.6: Набор параметров № 6, подход 1, случай A1B1C7

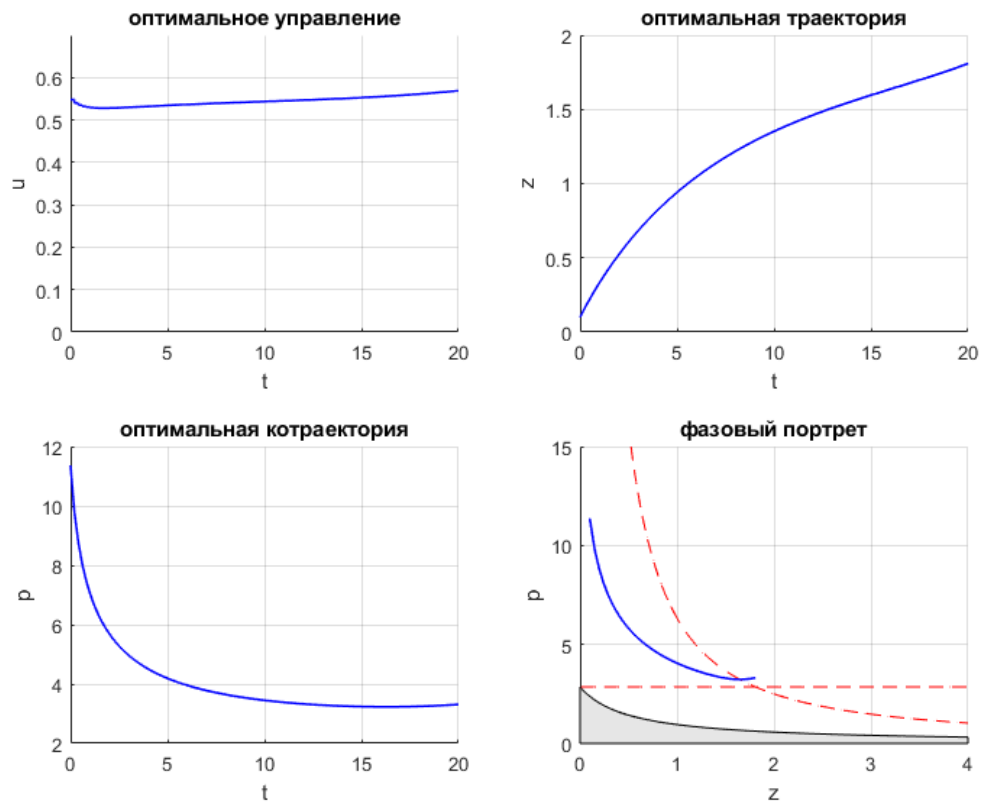


Рис. 4.7: Набор параметров № 1, подход 2, случай A1B1C4

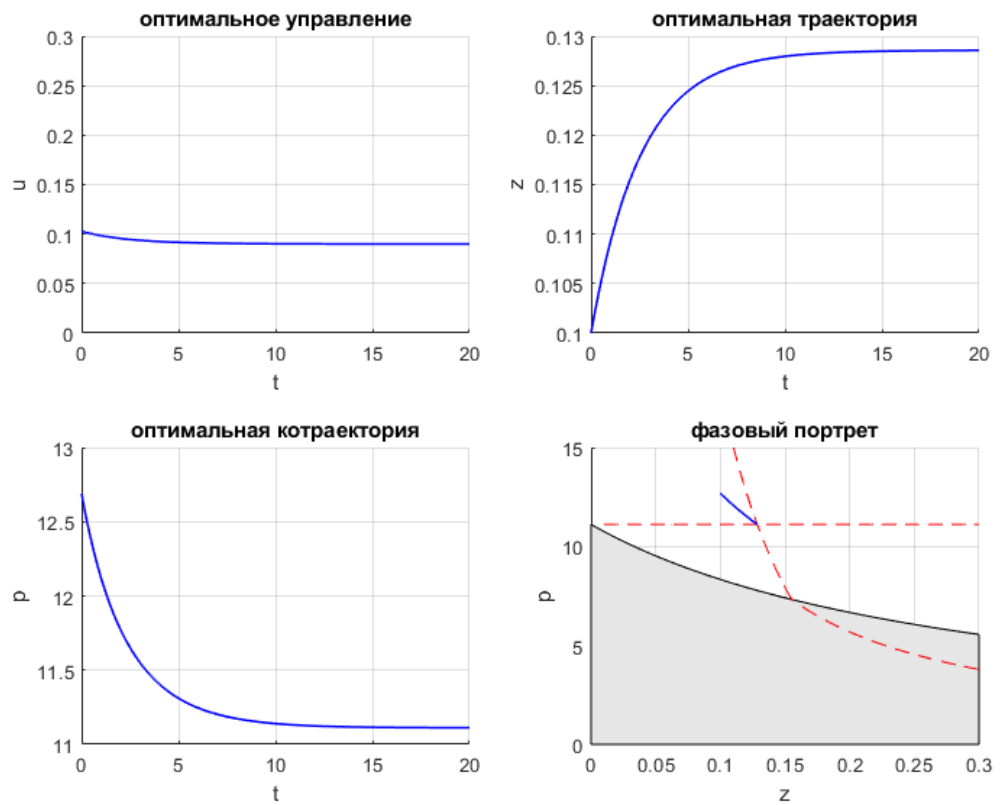


Рис. 4.8: Набор параметров № 2, подход 2, случай A1B1C3,  $\nu = b$

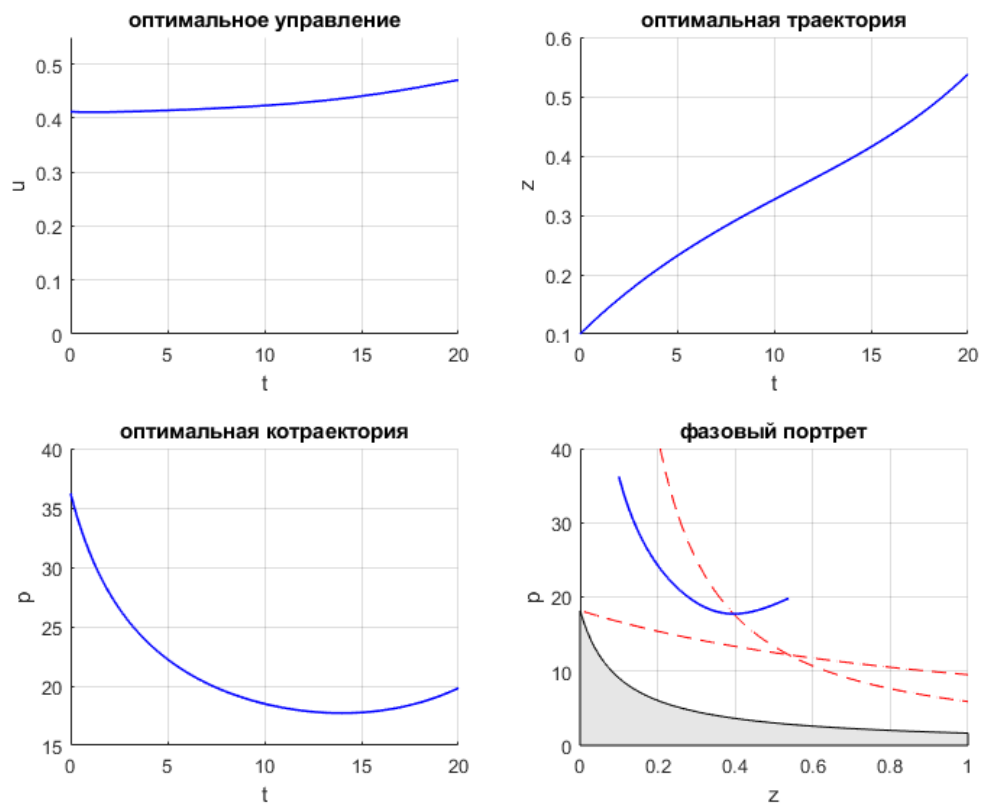


Рис. 4.9: Набор параметров № 3, подход 2, случай A1B1C2

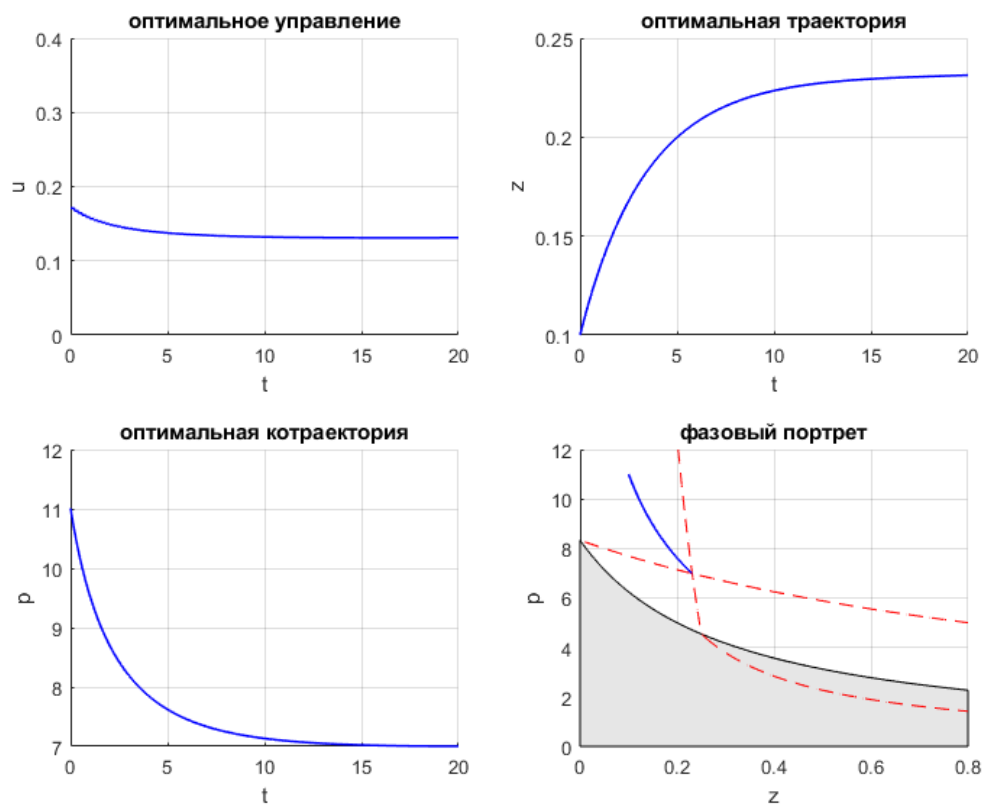


Рис. 4.10: Набор параметров № 4, подход 2, случай A1B1C1

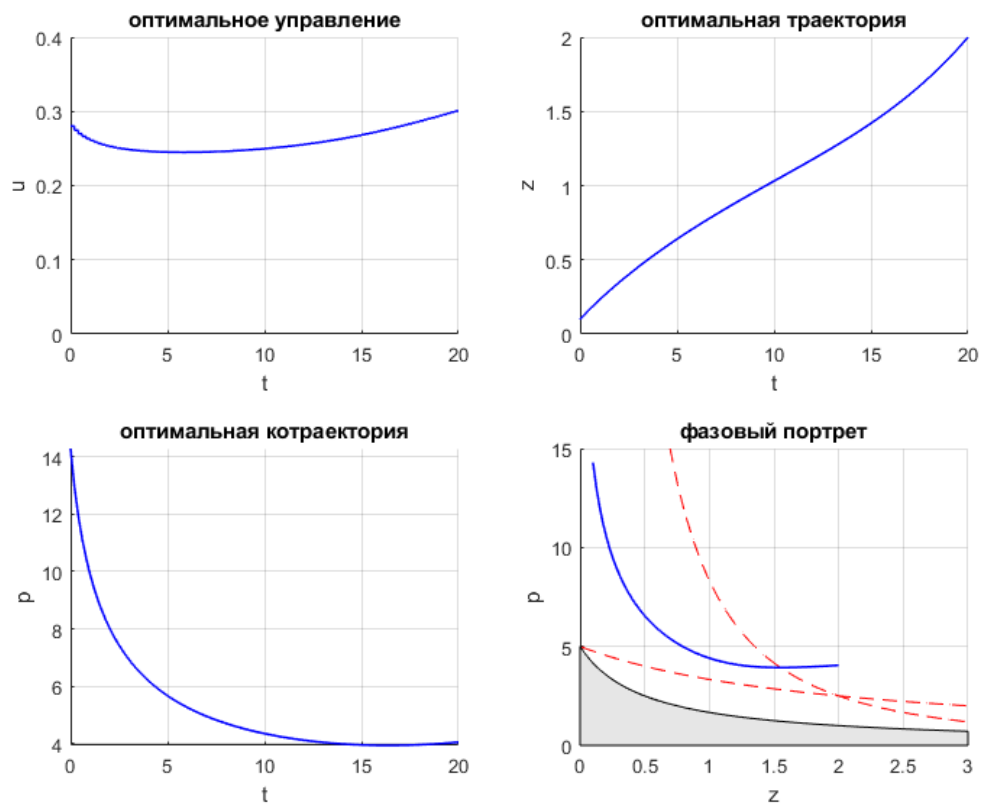


Рис. 4.11: Набор параметров № 5, подход 2, случай A1B1C1

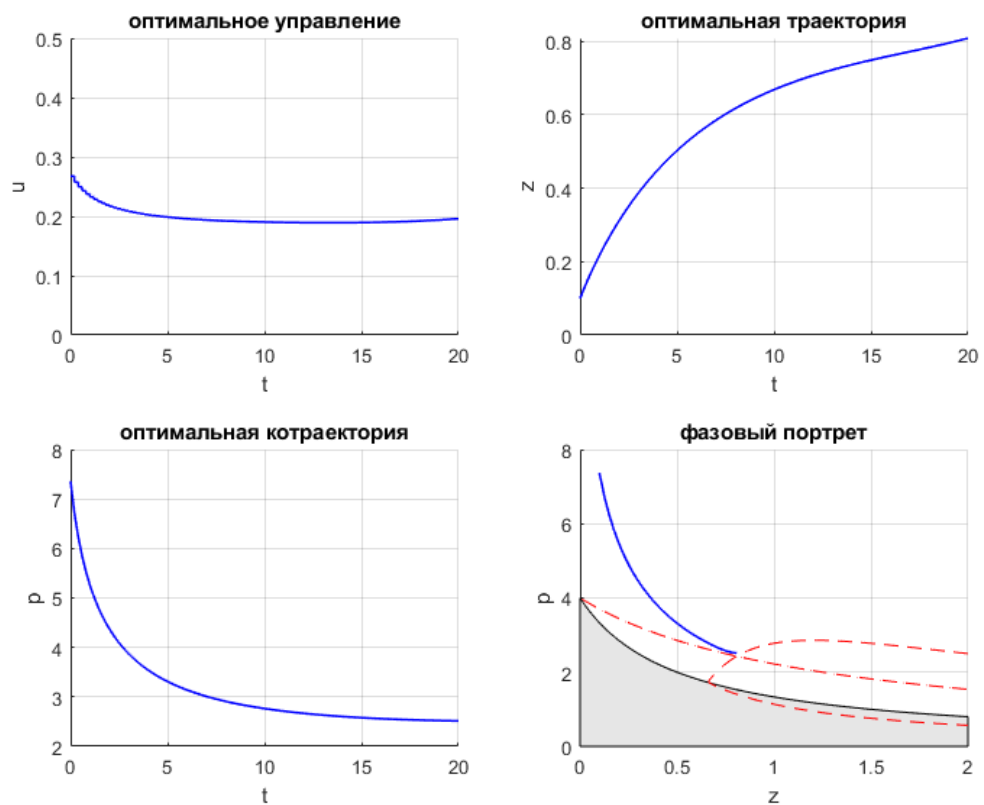


Рис. 4.12: Набор параметров № 6, подход 2, случай A1B1C7

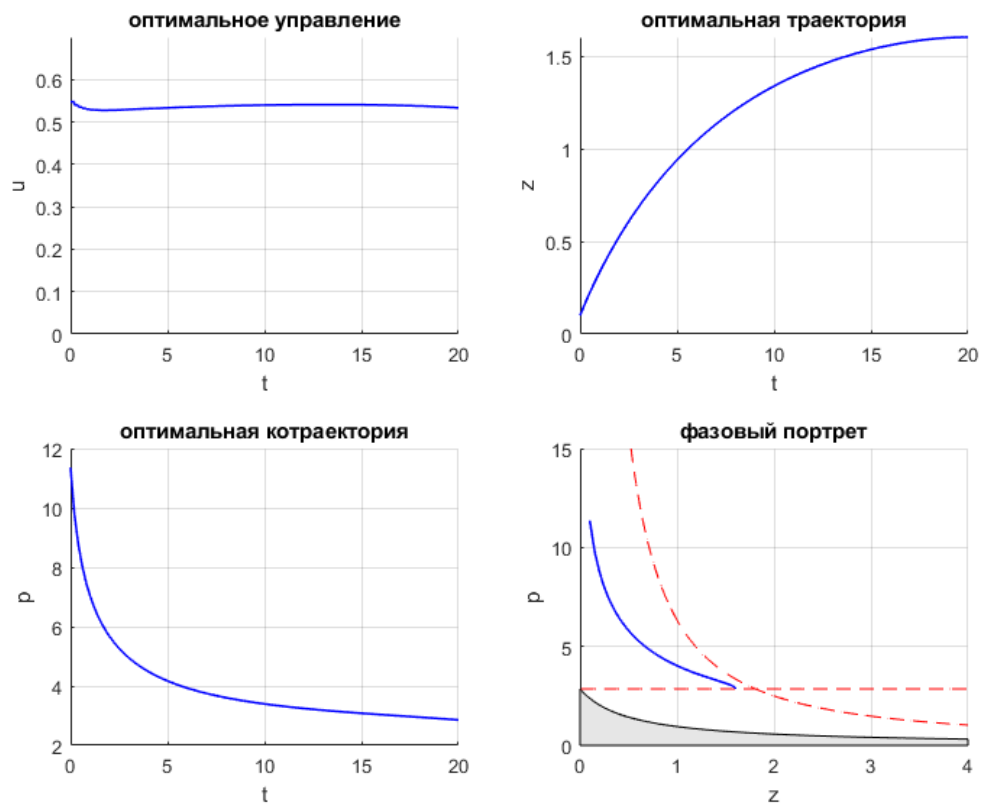


Рис. 4.13: Набор параметров № 1, подход 3, случай A1B1C4

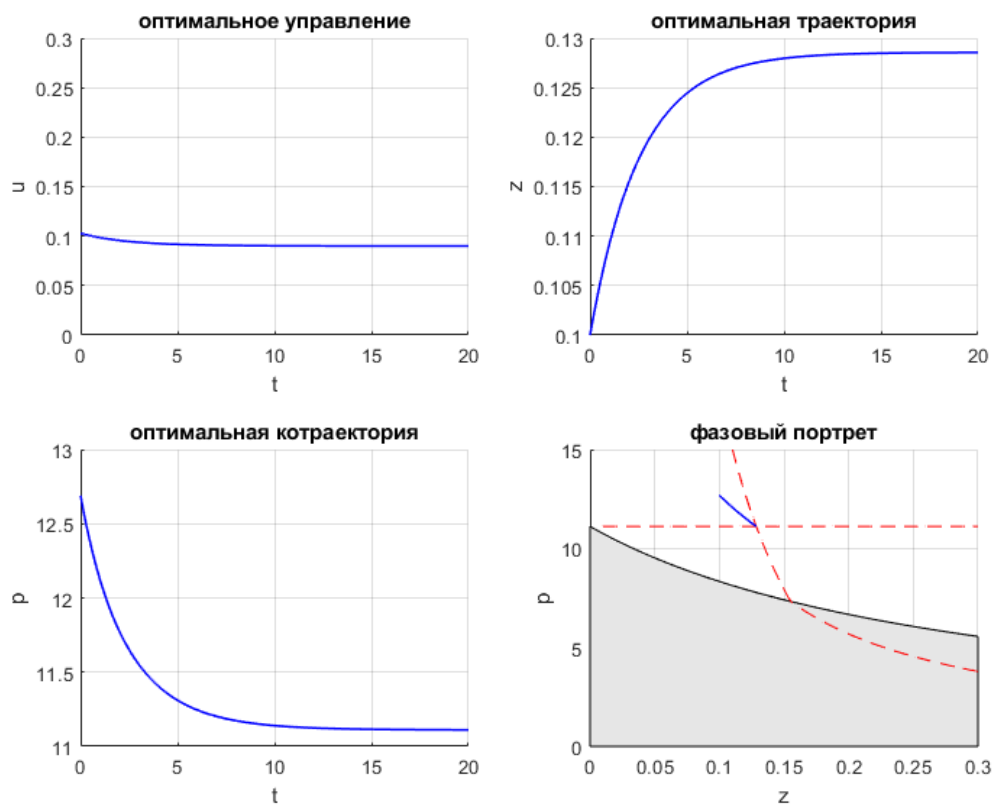


Рис. 4.14: Набор параметров № 2, подход 3, случай A1B1C3,  $\nu = b$

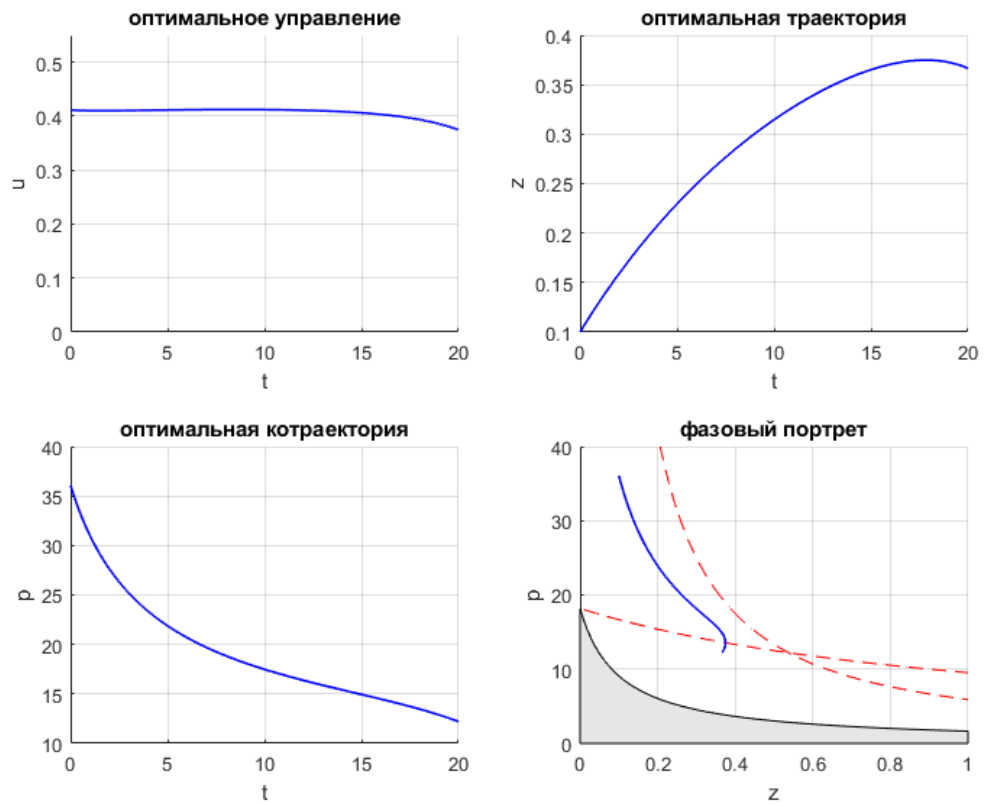


Рис. 4.15: Набор параметров № 3, подход 3, случай A1B1C2

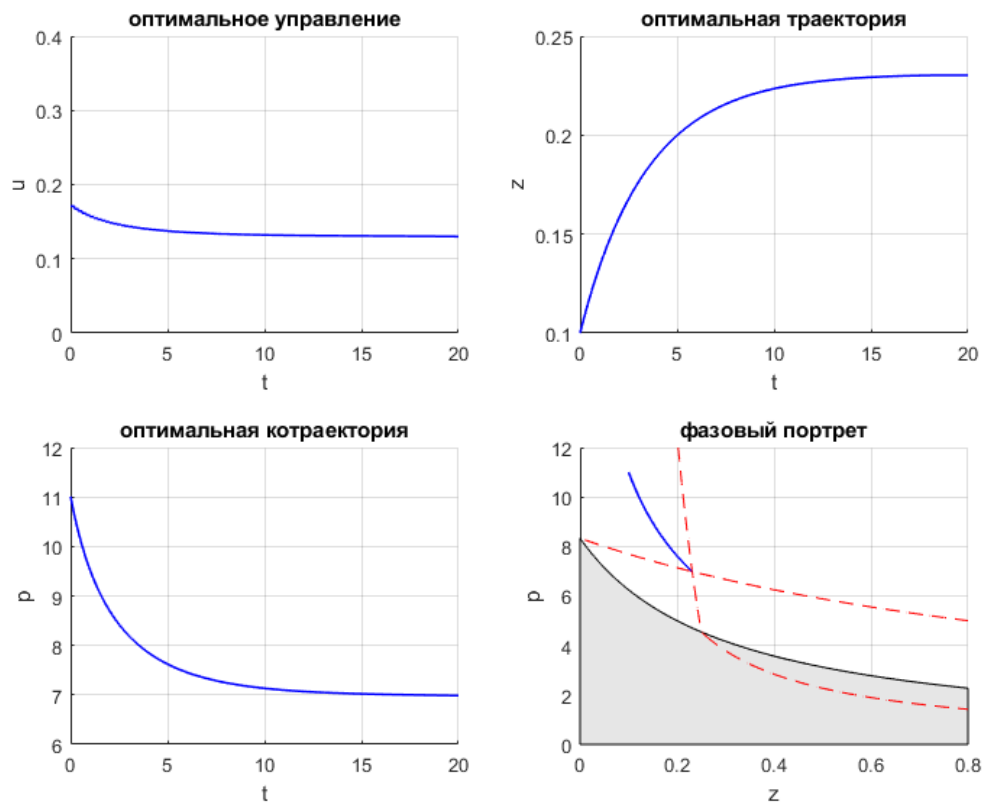


Рис. 4.16: Набор параметров № 4, подход 3, случай A1B1C1

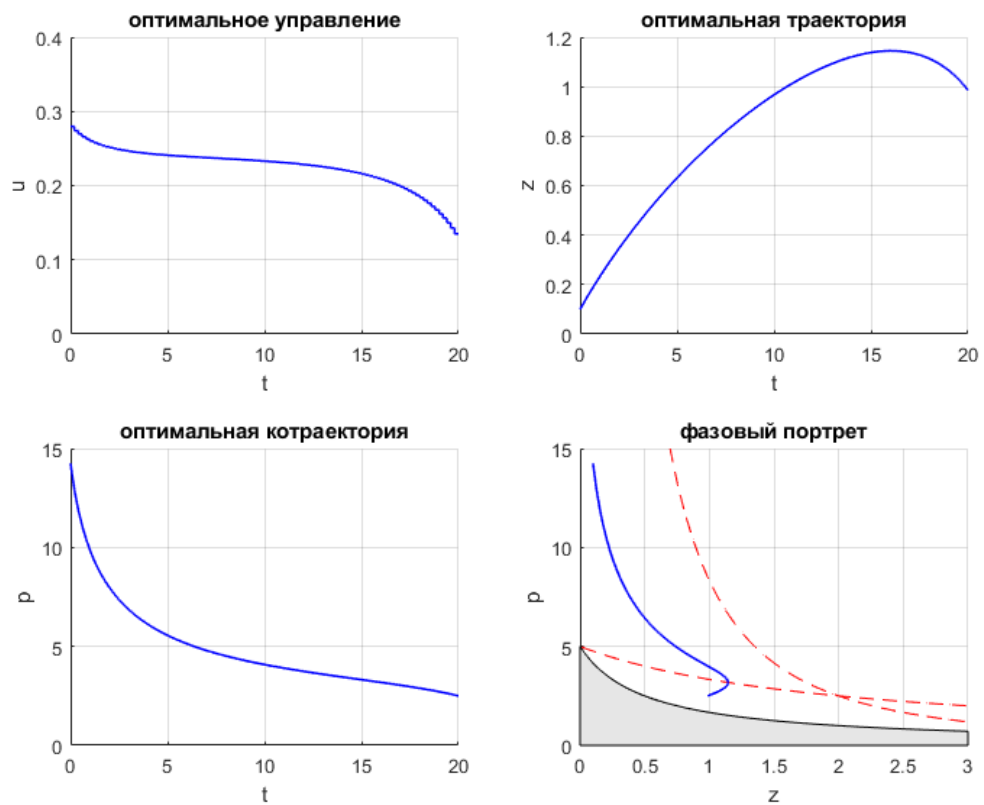


Рис. 4.17: Набор параметров № 5, подход 3, случай A1B1C1

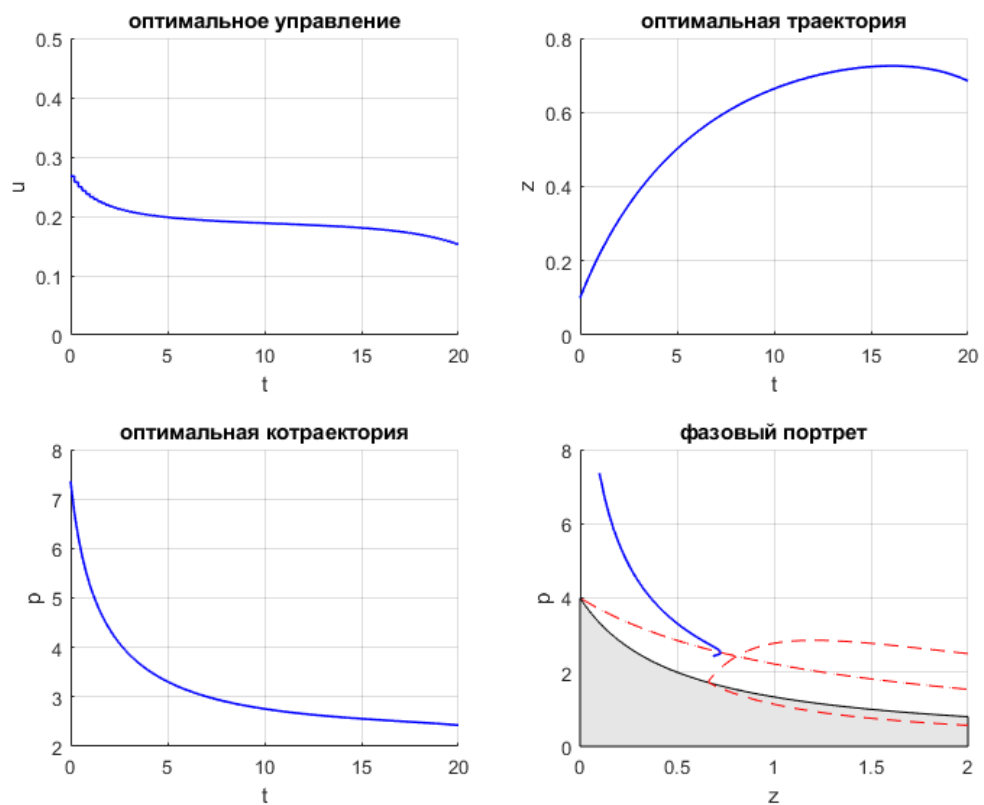


Рис. 4.18: Набор параметров № 6, подход 3, случай A1B1C7

### 4.3.1 Подход 1: Прогнозирующая задача для неограниченного ЕМРС

Заметим, что все решения задачи (4.1) обладают одной общей особенностью: оптимальная траектория является вогнутой, она сначала возрастает в направлении магистрального значения, а затем убывает. Насколько близко траектория подходит к магистральному значению, зависит от близости к нему начального состояния, которое во всех рассматриваемых случаях равно  $z_0 = 0.1$  и оказывается меньше магистрального.

Заметим, что во всех случаях терминальное значение состояния  $z(T)$  оказывается достаточно далеко от магистрали. При этом оптимальная ко-траектория в терминальный момент времени равна нулю:

$$p(T) = 0.$$

Напомним, что решение задачи получено с помощью прямых методов, которые сводят задачу оптимального управления к задаче нелинейного программирования. Тот факт, что значение сопряженной траектории в последний момент оказалось равным нулю во всех случаях сложно объяснить из задачи нелинейного программирования, но легко следует из условий оптимальности для задачи (4.1) в форме принципа максимума.

Эти условия имеют вид:

$$H(z^0(t), p^0(t), u^0(t)) = \max_{0 \leq u \leq b-\varepsilon} H(z^0(t), p^0(t), u), \quad t \in [0, T],$$

где  $p^0(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — решение сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -(u^0(t) - \nu - \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z^0(t)}$$

с условием трансверсальности  $p(T) = 0$ .

С экономической точки зрения  $p$  — теневая цена ресурса. Условие трансверсальности означает, что к моменту  $T$  отношение накопленных технологий теряет стоимость и его сохранение в окрестности равновесного значения нецелесообразно. Соответственно, часть промежутка  $[0, T]$  тратится на то, чтобы экономика страны последователя "отстала", а теневая цена упала до нуля. Эта ситуация всегда возникает, если на терминальное значение  $z$  не накладываются ограничений и в критерии качества отсутствует слагаемое, которое зависит от значения  $z$  в терминальный момент времени.

Среднее время решения задачи 0.82 секунды.



### 4.3.2 Подход 2: с терминальным ограничением

Рассмотрим решения (4.2), при тех же наборах параметров что и (4.1). Решения представлены на рис. 4.7 – 4.12.

Как видно из рисунков, при добавлении в задачу терминального ограничения-равенства, решение в терминальный момент оказывается ближе к магистрали, а то и вовсе выходит в малую ее окрестность.

Значение сопряженной переменной в терминальный момент также не равно нулю, т.е. прямая переменная  $z$  к концу управления не теряет свою стоимость. Тот же результат следует из условий оптимальности в форме принципа максимума, который для задачи (4.2) имеет вид:

$$H(z^0(t), p^0(t), u^0(t)) = \max_{0 \leq u \leq b-\varepsilon} H(z^0(t), p^0(t), u), \quad t \in [0, T],$$

где  $p^0(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — решение сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -(u^0(t) - \nu - \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z^0(t)}$$

с условием трансверсальности  $p(T) = \nu$ . Здесь получается, что  $\nu > 0$  — теневая цена в терминальный момент.

Участков убывания прямой траектории  $z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , в решениях задачи (4.2) не наблюдается. Однако, в среднем время решения задачи (4.2) составляет 1.33 секунды, что на 61% больше времени решения задачи (4.1), и обусловлено наличием дополнительного жесткого ограничения-равенства.

### 4.3.3 Подход 3: с терминальной стоимостью

Решения задачи (4.3), при тех же наборах параметров что и в (4.1) – (4.2) приведены на рис. 4.13 – 4.18. В качестве значения параметра  $\alpha$  выберем соответствующее магистральное значение  $p_1$ . Такой выбор обоснуем в разд. 4.5.

Здесь условия оптимальности имеют вид

$$H(z^0(t), p^0(t), u^0(t)) = \max_{0 \leq u \leq b-\varepsilon} H(z^0(t), p^0(t), u), \quad t \in [0, T],$$

где  $p^0(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — решение сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -(u^0(t) - \nu - \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z^0(t)}$$

с условием трансверсальности

$$p(T) = \alpha = p_1.$$

Таким образом, в задаче (4.3) сопряженная траектория в момент  $T$  попадает в магистральное значение. Для сравнения, в предыдущей задаче (4.2) прямая траектория попадает в магистральное значение. Это основное различие двух последних задач. Отметим, что в среднем время решения задачи (4.3) равно 1.07 сек., что меньше, чем у (4.2).

Например, сравним фазовые графики для задач (4.1), (4.2), (4.3) при параметрах (случай A1B1C2):

$$\gamma = 0.1, \nu = 0.5, b = 0.55, \rho = 0.15, \kappa = 1.5, z_0 = 0.1.$$

Фазовые портреты приведены на рис. 4.19–4.21. Еще раз обратим внимание на тот факт, что использование задач (4.2), (4.3) позволяет к терминальному моменту привести траектории ближе к магистрали. Напомним, что магистраль  $(z_1, p_1)$  находится на пересечении штриховых линий.

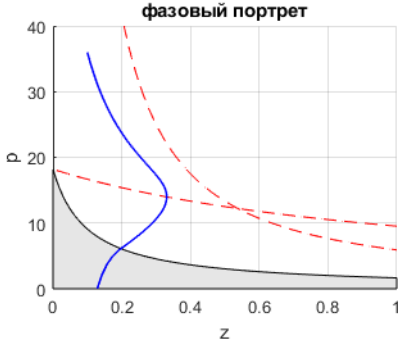


Рис. 4.19: Задача (4.1)

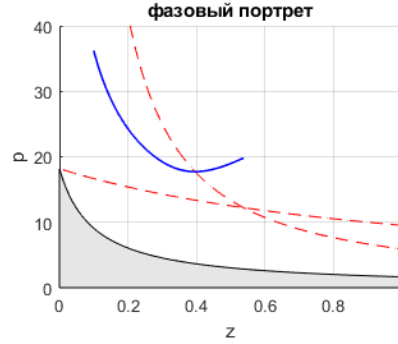


Рис. 4.20: Задача (4.2)

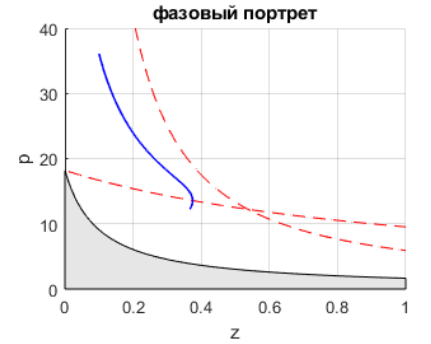


Рис. 4.21: Задача (4.3)

Этот случай будем использовать для анализа сходимости схем МРС.

## 4.4 Реализация алгоритма ЕМРС

Реализуем алгоритм ЕМРС для задач (4.1)–(4.3), с использованием Direct Single Shooting из предыдущего раздела.

В данной реализации  $x_{\tau}$  — состояние системы в измеряемый момент времени,  $w_0$  — начальное приближение для управления в момент  $\tau + 1$ . В цикле по  $\tau$  от 0 до  $N_{\text{mpc}}$  выполнить:

```
sol = solver('x0', [xtau; w0], 'lbg', [], 'ubg', [], ...
            'lbx', [xtau; lbw], 'ubx', [xtau; ubw]);
```

Выделяем решение.

```
xu = full(sol.x);
u_opt = reshape(xu(n+1:end), r, N);
J_opt = full(sol.f);
```

Ищем следующее состояние системы.

```
res = F('x0', xtau, 'p', u_opt(1));
xtau = full(res.xf);
```

Запоминаем текущее управление и состояние  $X$ .

```
U = [U u_opt(1)];
X = [X xtau];
```

Изменяем начальное приближение:

```
w0 = [u_opt(2:end) zeros(1)]';
end;
```

В следующем разделе рассмотрим результаты работы приведенной реализации.

## 4.5 Применение ЕМРС для решения задачи роста

Для численного эксперимента возьмем набор параметров № 3:

$$\gamma = 0.1, \nu = 0.5, b = 0.55, \rho = 0.15, \kappa = 1.5.$$

Тогда  $z_1 = 0.54$ ,  $p_1 = 12.21$ .

Выберем горизонт управления  $T = 10$ , и начальное состояние  $z_0 = 0.1$ . Для представления результатов будем останавливать алгоритм ЕМРС в момент времени  $\tau = N_{\text{mрс}} = 50$ .

### 4.5.1 Подход 1: Неограниченный ЕМРС

Решение задачи с применением базового алгоритма ЕМРС (неограниченного ЕМРС) на основе прогнозирующей задачи (4.1), представлено на рис. 4.22, где

- на рисунке 4.22 а) штриховые линии соответствуют оптимальным программным решениям  $z^0(t|x(\tau))$ ,  $t \in [\tau, \tau + T]$ , задачи; сплошная линия — реализующаяся траектория замкнутой системы;
- на рисунке 4.22 б) представлена реализация  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, 50]$ ;
- на рисунке 4.22 в) — траектория замкнутой системы на фазовой плоскости гамильтоновой системы.

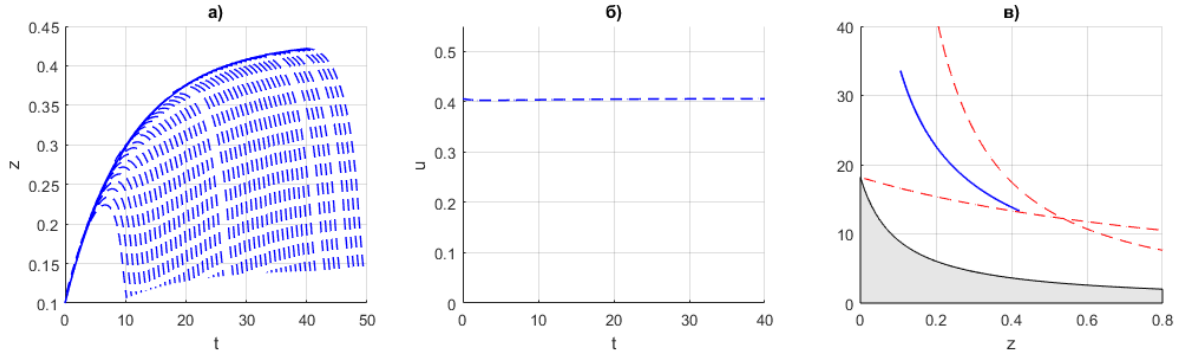


Рис. 4.22: Результаты ЕМРС с прогнозирующей задачей (4.1)

Напомним, что оптимальные траектории задачи (4.1) имеют продолжительные участки убывания — на рисунке 4.22 а) они видны в виде ряда убывающих штриховых линий. Это означает, что значительная (около половины) часть промежутка управления тратится на участок, на котором траектория удаляется от магистрального значения. В результате траектория замкнутой системы  $z^*(t)$ ,  $t \geq 0$  не выходит на магистраль (сплошная линия на рис. а)), а лишь достигает значения 0.422.

При увеличении  $N_{\text{mpc}}$  в 2 раза ( $N_{\text{mpc}} = 100$ ) траектория замкнутой системы достигает лишь значения 0.432.

Из работ Л.Грюне (см., например, [6]) известно, что добиться требуемого поведения замкнутой системы (асимптотической устойчивости в случае стабилизации, или удовлетворения магистрального свойства для ЕМРС) можно при достаточно больших значениях горизонта управления  $T$ . Нижнюю оценку на  $T$  можно найти согласно [6].

В настоящей работе для задачи (4.1) экспериментальным путем установлено, что для того, чтобы траектория начала достигать окрестности магистрали, нужно выбрать значение  $T = 30$ . При этом для сохранения точности численного решения задачи оптимального управления необходимо выбрать  $N = 150$  (чтобы период квантования для дискретизации сохранился). В результате время решения прогнозирующей задачи существенно возрастает и в среднем составляет 5.87 сек., что в 7.15 раз превышает среднее время решения задачи при  $T = 10$ .

### 4.5.2 Подход 2: ЕМРС с ограничениями-равенствами

На рисунке 4.23 представлены результаты решения задачи методом ЕМРС с использованием прогнозирующей задачи с терминальным ограничением-равенством (4.2).

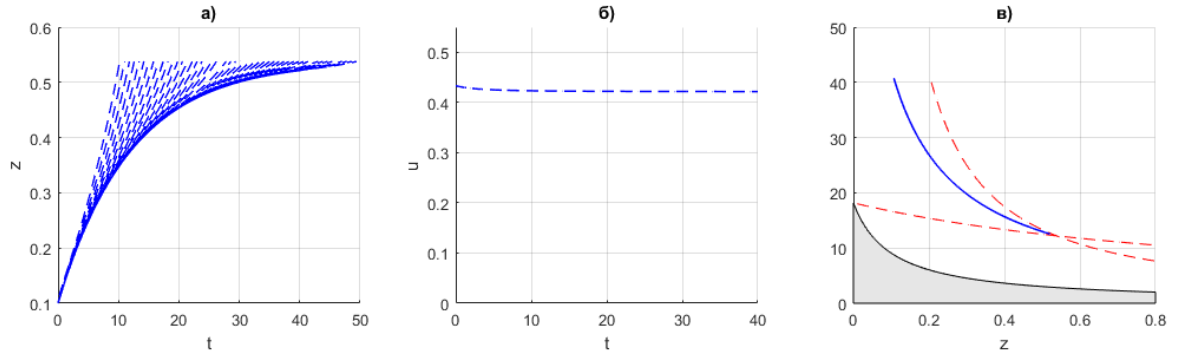


Рис. 4.23: Результаты ЕМРС с прогнозирующей задачей (4.2)

Как ожидалось из анализа программных решений, функции  $z^0(t|x(\tau))$ ,  $t \in [\tau, \tau + T]$ , при всех  $\tau$  являются возрастающими. Траектории замкнутой системы и значения управления стремятся к магистральным значениям. Как следует из результатов теории МРС (глава 2), это требование всегда выполняется при условии, что задача (4.2) имеет решение в позиции  $(0, z_0)$ .

Следует отметить, что указанное условие является достаточно жестким: возможны такие наборы параметров  $T, z_0$ , при которых задача (4.2) недопустима, т.е. не существует ни одного допустимого управления, переводящего систему в состояние  $z_1$ .

В рассматриваемой задаче экспериментально установлено, что при  $T \leq 6$  решения задачи (4.2) не существует.

Таким образом, применение ЕМРС с использованием прогнозирующей задачи с терминальным ограничением-равенством (4.2) имеет два недостатка:

- трудоемкость решения задачи (4.2),
- начальная недопустимость задачи с ограничением-равенством.

Далее покажем, что эти недостатки устраняет подход 3.

### 4.5.3 Подход 3: ЕМРС с терминальной стоимостью

Решение задачи методом ЕМРС с использованием прогнозирующей задачи с терминальной стоимостью (4.3) представлено на рис. 4.24.

Как и ожидалось из анализа программных решения, участки убывания функций  $z^0(t|x(\tau))$ ,  $t \in [\tau, \tau + T]$ , в сравнении с задачей (4.1) значительно со-

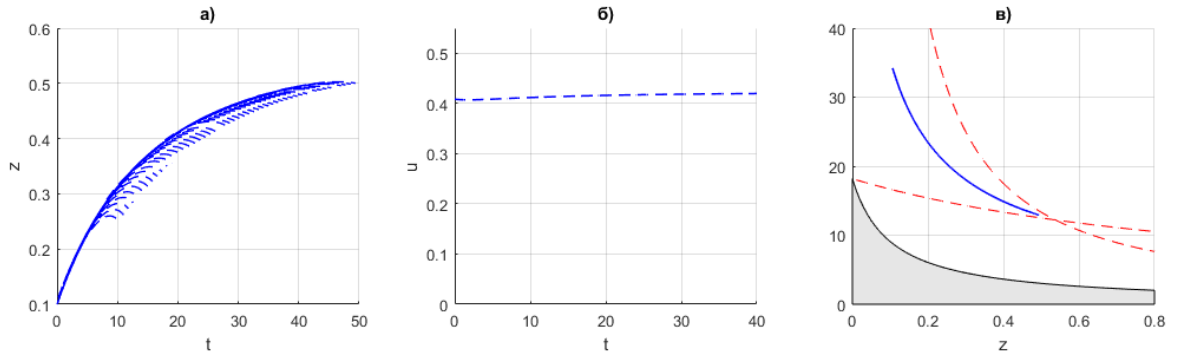


Рис. 4.24: Результаты решения задачи (4.3)

кратились. Траектории замкнутой системы и значения управления стремятся к магистральным значениям.

Как следует из решения задач (4.1), (4.2), а также с точки зрения реализации алгоритмов в реальном времени и трудоемкости решения прогнозирующих задач, желательно иметь как можно меньший горизонт управления и не включать в задачу терминальные ограничения. Задача (4.3) удовлетворяет этим требованиям. Важное свойство — она имеет решение при любом горизонте  $T$ .

Алгоритм ЕМРС на основе задачи (4.3) также был реализован при  $T = 5$ . Напомним, что задача (4.2) при таком значении горизонта управления не имеет решения, а задача (4.1) не позволяет асимптотически достичь магистрали. Задача (4.3), напротив, позволяет достичь магистрали и удовлетворить практическим требованиям — время решения прогнозирующей задачи в среднем составило 0.545 сек.

Обоснуем теперь выбор значения  $\alpha$  — параметра в терминальной стоимости в задаче (4.3).

Рассмотрим общую прогнозирующую задачу для ЕМРС с терминальной стоимостью в виде

$$\min_u \int_{\tau}^{\tau+T} L(x(t), u(t)) dt + W(x(\tau + T)), \quad (4.4)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x(\tau) = x_{\tau}, \\ u(t) &\in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [\tau, \tau + T]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы выбрать подходящую терминальную стоимость  $W$ , рассмотрим гамильтонову систему для прогнозирующей задачи оптимального

управления в общем виде (4.4):

$$\dot{p} = -(\partial f(x(t), u(t))/\partial x)^T p(t) + \partial L(x(t), u(t))/\partial x, \quad (4.5)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in [\tau, \tau + T].$$

Предполагаем, что задача (4.4) имеет магистраль, с магистральными значениями  $(x_1, u_1, p_1)$ . Управление  $u(t) \equiv u_1, t \in [\tau, \tau + T]$ , соответствующая ему прямая траектория  $x(t) \equiv x_1, t \in [\tau, \tau + T]$ , и сопряженная траектория  $p(t) \equiv p_1, t \in [\tau, \tau + T]$ , является решением гамильтоновой системы принципа максимума при начальном условии  $x(\tau) = x_1$ , и условии трансверсальности  $p(\tau + T) = p_1$ .

Для того, чтобы получить в прогнозирующей задаче условие трансверсальности

$$p(\tau + T) = p_1,$$

выберем линейную терминальную стоимость  $W(x) = p_1^T x$ .

Тогда в общей задаче на минимум (4.4):

$$p(\tau + T) \equiv -\partial W(z(\tau + T))/\partial x = p_1.$$

Естественно, нас интересует нахождение магистрального значения  $p_1$  без решения задачи оптимального управления, точно так же, как магистральное значение  $(x_1, u_1)$  находилось из задачи нелинейного программирования (2.5):

$$L(x, u) \rightarrow \min,$$

$$f(x, u) = 0,$$

$$u \in U, x \in X.$$

Запишем условия оптимальности (условия Каруша-Куна-Таккера — ККТ [2]) для задачи нелинейного программирования (2.5). Ограничения  $u \in U, x \in X$  опустим, поскольку чаще всего  $(x_1, u_1) \in \text{int } X \times U$ . Условия имеют вид:

$$\partial L(x, u)/\partial x + (\partial f(x, u)/\partial x)^T \lambda = 0,$$

$$f(x, u) = 0.$$

Этим условиям необходимо удовлетворяет пара  $(z_1, u_1)$  вместе с некоторым (оптимальным) множителем Лагранжа  $\lambda_1$ .

Теперь рассмотрим гамильтонову систему (4.5) на магистральных значениях. Очевидно, что на стационарных значениях  $(x_1, u_1, p_1)$  правая часть

гамильтоновой системы равна нулю, т.е. имеем

$$-(\partial f(z_1, u_1)/\partial x)^T p_1 + \partial L(z_1, u_1)/\partial x = 0,$$

$$f(z_1, u_1) = 0.$$

Сравнивая с условиями ККТ, устанавливаем, что  $p_1 = -\lambda_1$ .

Таким образом,

$$W(x) = -\lambda_1^T x.$$

В случае задачи оптимального экономического роста, в которой критерий качества содержит дисконтирование, критерий качества максимизируется, магистраль находится из условий (3.12)–(3.13), терминальная стоимость также содержит дисконтирующий множитель:

$$W(z(\tau + T)) = e^{-\rho(\tau+T)} p_1 z(\tau + T).$$

Таким образом, из трех исследованных прогнозирующих задач, задача (4.3):

- имеет решение при любом значении горизонта  $T$ , даже при малых значениях, что предпочтительно при применении численных методов (в отличие от задачи (4.2));
- обеспечивает асимптотический выход траекторий замкнутой системы к магистрали при небольших горизонтах  $T$  (в отличие от задачи (4.2)).

Кроме того, в работе предложен простой подход к выбору терминальной стоимости в задаче (4.3). Для этого нужно только решить задачу нелинейного программирования (2.5) и найти соответствующий оптимальному решению множитель Лагранжа.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзорной части данной дипломной работы (главы 1 и 2) приведены основные результаты теории оптимального управления, наиболее часто применяемые на практике численные методы решения задач оптимального управления [3], даны основные положения теории управления по прогнозирующей модели [5, 6], алгоритм построения МРС-регулятора, некоторые подходы к обеспечению устойчивости системы, замкнутой построенной обратной связью, и экономический МРС (ЕМРС), который является модификацией МРС.

В основной части работы (главы 3 и 4) методами оптимального управления и методами ЕМРС исследуется задача оптимального роста технологического последователя. Для данной задачи построена математическая модель роста технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера. Модель приводится согласно идеям работы [9]. Для рассматриваемой модели роста сформулирована задача оптимального управления, которая решается с использованием принципа максимума.

Существует множество экономических задач оптимального управления с бесконечным горизонтом, решение которых представляет практический интерес, однако не может быть получено аналитически, с использованием результатов [9]. На примере задачи роста технологического последователя в работе предлагается подход к решению, основанный на использовании методов управления по прогнозирующей модели, в частности методов ЕМРС.

В дипломной работе сравниваются три варианта ЕМРС: 1. неограниченный ЕМРС, 2. ЕМРС с терминальным ограничением типа равенства, 3. ЕМРС с терминальной стоимостью. Исследуются параметры, позволяющие получить решение, асимптотически приближающее магистральное решение, установленное аналитически с помощью принципа максимума.

Программное решение прогнозирующих задач оптимального роста технологического последователя для всех трех подходов было построено с помощью прямого метода Direct Single Shooting, который реализован в MatLab с помощью пакета CasADi.

В результате численных экспериментов продемонстрировано превосходство третьего подхода. Для него также предложен простой вариант выбора линейной терминальной стоимости. ЕМРС с терминальной стоимостью упрощает задачу оптимального управления с точки зрения численного решения, поскольку задачи без жестких ограничений-равенств проще с вычислительной точки зрения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Angeli, D. On average performance and stability of economic model predictive control / D. Angeli, R. Amrit, J.B. Rawlings // IEEE transactions on automatic control. – 2011. – Vol. 57, № 7. – P. 1615-1626.
- 2 Boyd, S. Convex optimization / S.P. Boyd, L. Vandenberghe – Cambridge university press, 2004.
- 3 Diehl M. Lecture Note on Optimal control and Estimation / M. Diehl – Springer, 2014.
- 4 Ellis, M. A tutorial review of economic model predictive control methods / M. Ellis, H. Durand, P.D. Christofides // Journal of Process Control. – 2014. – Vol. 24, № 8. – P. 1156-1178.
- 5 Fontes, F.A.C.C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers / F.A.C.C. Fontes // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42, № 2. – P. 127-143.
- 6 Grune, L. Nonlinear model predictive control. / L. Grune, J. Pannek – Springer, 2011.
- 7 Rawlings, J.B. Model predictive control: Theory and design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne – Nob Hill Pub., 2009.
- 8 Методы оптимизации: учеб. пособие / В. Альсевич [и др]. – Минск: «Четыре четверти», 2011.
- 9 Асеев, С.М. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста / С.М. Асеев, А.В. Кряжимский // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2007. – Т. 257. – 271 с.
- 10 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
- 11 Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Физматгиз, 1961. 392 с.