ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РОСТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

Готовец Мария Алексеевна

Цели работы

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Задача оптимального роста технологического последователя

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ (\frac{1}{\alpha} - 1) ln N^B(t) + ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \to \max$$

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B}(N^B(t) + \gamma N^A(t)),\ \ L_N^B(t) \in [0, L^B[$$

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t)$$

$$N^A(0) = N_0^A,\ \ N^B(0) = N_0^B$$

где $g^A,\ L^B,\ a^B,\ \gamma > 0,\ n_0^A > 0,\ \ N_0^B > 0$ — заданные начальные состояния.

Задача оптимального роста технологического последователя

$$J(x,u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}[\kappa ln x(t) + ln(b - u(t))]dt \to \max$$

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t))$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t)$$

$$y(0) = y_0, \;\; u(t) \in [0, b - \varepsilon]$$

где $b, \; \gamma, \; \rho, \; \nu, \; \kappa > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma < 1$; x_0, $y_0 > 0$

Редуцированная задача

- Замена переменных с целью понижения размерности:

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \ t \geq 0, \ z_0 = \frac{x_0}{y_0}$$

- Редуцированная задача

$$I(z,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))]dt \to \max$$

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \ z(0) = z_0 \tag{1}$$

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon], \ t \geq 0$$

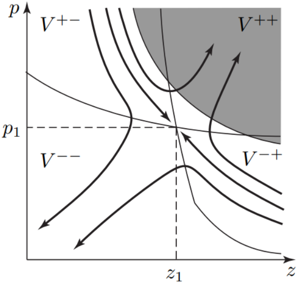
$z \in \mathbb{R}$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}$ — управление.

- Задача оптимального управления нелинейной системы с критерием Лагранджа.

Решение редуцированной задачи

- Типичные фазовые траектории решений гамильтоновой системы в неособых невырожденных случаях
- Гамильтонова система:

$$\dot{z}(t) = (b-\nu)z(t)+b\gamma-\frac{1}{p(t)},$$



$$\dot{p}(t) = -(b-\nu-\rho)p(t)-\frac{\gamma\kappa+(\kappa+1)z(t)}{z(t)+\gamma)z(t)}$$

$$(z(t),p(t)) \in \Gamma_1$$

- Уравнения для (z_1, p_1):

$$p = h_{11}(z)$$

$$h_{11}(z) = h_{12}(z)$$

Стабилизация нелинейной системы

Прогнозирующая задача оптимального управления

$$\mathcal{P}(t, x_t, T) = \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s) ds + W(t+T, x(t+T))$$

при условиях

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \ \ x(t) = x_t$$

$$u(s) \in U(s), \ \ s \in [t, t+T]$$

$$x(t+T) \in S$$

1. горизонт управления T
2. функции текущей и конечной (терминальной) стоимостей L и W
3. терминальное множество $S \subset \mathbb{R}^n$

Прогнозирующая задача оптимального управления

$$\mathcal{P}(t, x_t, T) = \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s)ds + W(t+T, x(t+T))$$

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s),\ \ x(t) = x_t$$

$$u(s) \in U(s),\ \ s \in [t, t+T]$$

$$x(t+T) \in S$$

Алгоритм MPC

1. Измерить текущего состояния объекта x_{t_i}.
2. Вычисляется оптимального (программного) управления $u^0(t)$, $t \in [t_i, t_i + T]$, — задачи $\mathcal{P}(t_i, x_{t_i}, T)$.
3. Управление $u^*(t) := u^0(t)$ при $t \in [t_i, t_i + \delta]$ подается на вход объекта управления.
4. Процедура повторяется для следующего момента t_{i+1}.

Подход 1: Прогнозирующая задача для неограниченного EMPC

- В задаче (1) заменим бесконечный горизонт управления конечным
- Дополнительные условия на правый конец траектории не накладываем

$$
\begin{gathered}
I_1(z,u) = \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b-u(t))]dt \to \max \\
\dot{z}(t) = u(t)(z(t)+\gamma) - \nu z(t) \\
z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)} \\
u(t) \in [0, b-\varepsilon],\ t \in [\tau, \tau+T]
\end{gathered} \tag{2}
$$

Подход 2: с терминальным ограничением

- В прогнозирующую задачу добавим терминальное ограничение-равенство
- Потребуем, чтобы в терминальный момент состояние равнялось магистральному значению z_1

$$I_2(z,u) = \int_t^{t+T} e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))]dt \to \max$$

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t)+\gamma) - \nu z(t) \tag{3}$$

$$z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)},\ z(\tau+T) = z_1$$

$$u(t) \in [0, b-\varepsilon],\ t \in [\tau, \tau+T]$$

Подход 3: с терминальной стоимостью

- В прогнозирующую задачу добавим терминальную стоимость
- В качестве значения параметра α выберем соответствующее магистральное значение p_1

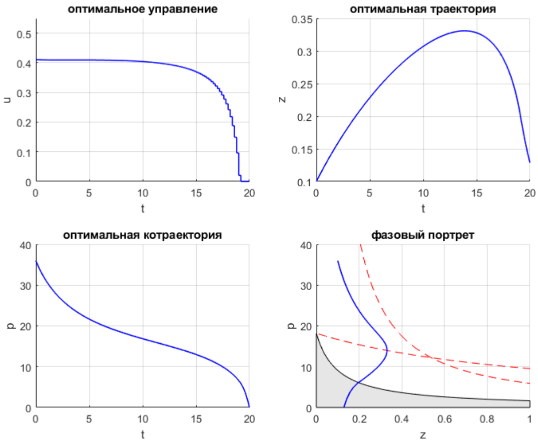
$$I_3(z,u) = \alpha e^{-\rho(\tau+T)} z(\tau+T) + \int_t^{t+T} e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b-u(t))]dt \to \max$$

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t)+\gamma) - \nu z(t) \tag{4}$$

$$z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)}$$

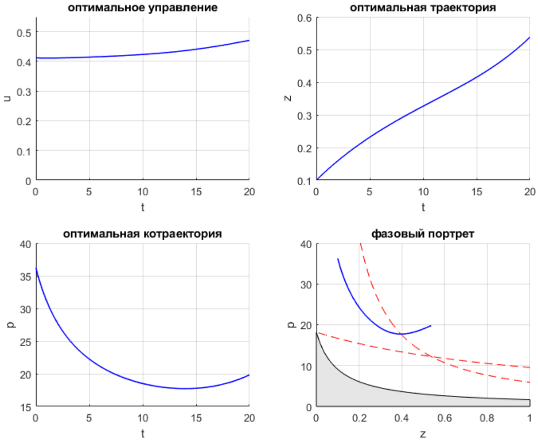
$$u(t) \in [0, b-\varepsilon],\ \ t \in [\tau, \tau+T]$$

Подход 1: Программное решение



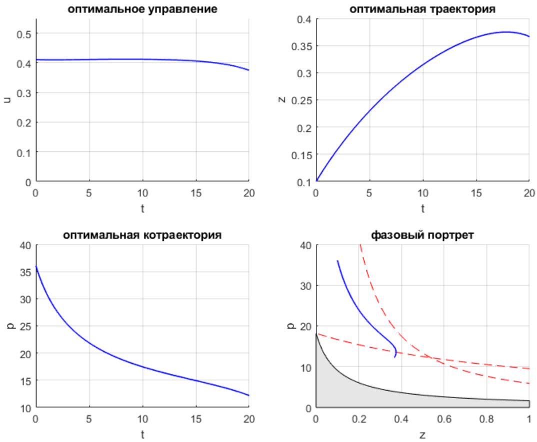
- Оптимальные траектории имеют продолжительные промежутки убывания и далеки от магистрали

Подход 2: Программное решение



- Участков убывания оптимальной траектории нет и значения уже ближе к магистральным, но время решения на 61% больше

Подход 3: Программное решение



- Участки убывания оптимальной траектории значительно сократились, значения стремятся к магистральным

Сравнения программных решений в подходах 1-3

кафедра методов оптимального управления

Рис.: Подход 1

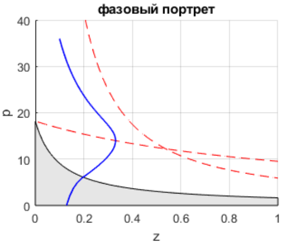


Рис.: Подход 2

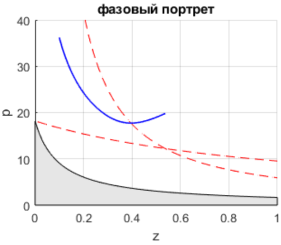
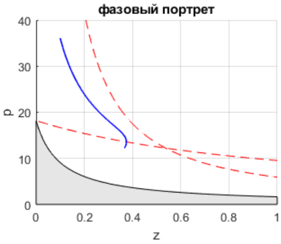


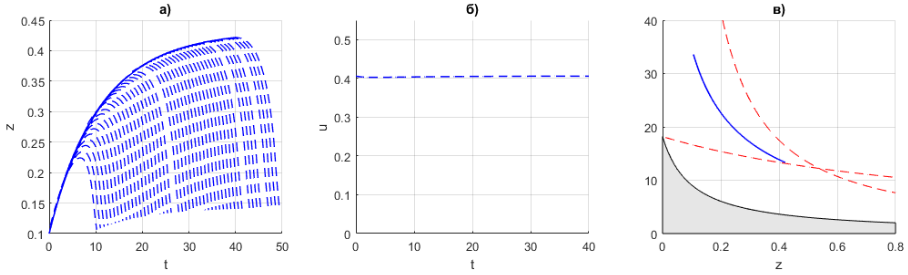
Рис.: Подход 3



Параметры:

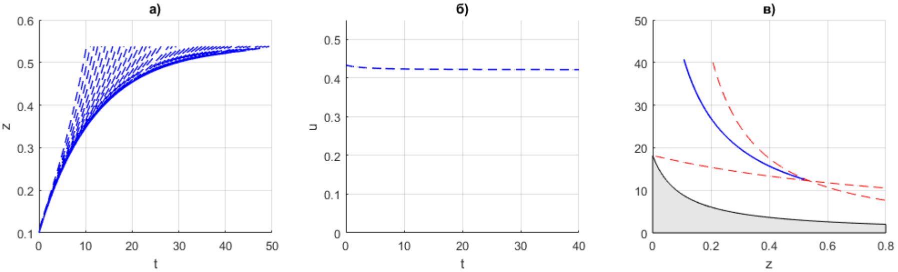
$$\gamma = 0.1,\ \nu = 0.5,\ b = 0.55,\ \rho = 0.15,\ \kappa = 1.5,\ z_0 = 0.1$$

Подход 1: Неограниченный EMPC



- Оптимальные траектории задачи имеют продолжительные участки убывания
- При увеличении T с 10 до 30 с сохранением точности траектория достигает магистрали, однако время решения прогнозирующей задачи возрастает в 7.15 раз

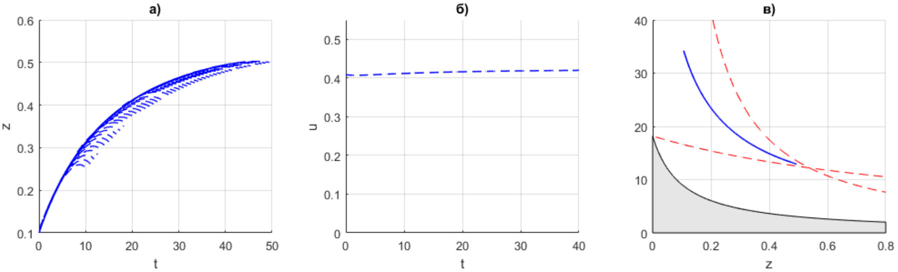
Подход 2: EMPC
с ограничениями-равенствами



Использование задачи с терминальным ограничением-равенством имеет два недостатка:

- трудоемкость решения задачи
- начальная недопустимость задачи с ограничением-равенством

Подход 3: EMPC с терминальной стоимостью



- Достигает магистрального значения
- Имеет решение при любом горизонте T

Терминальная стоимость

Общая прогнозирующая задача для EMPC с терминальной стоимостью

$$\min_u \int_{\tau}^{\tau+T} L(x(t), u(t))dt + W(x(\tau+T))$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ x(\tau) = x_\tau$$

$$u(t) \in U,\ x(t) \in X,\ t \in [\tau, \tau+T]$$

Гамильтоновая система для прогнозирующей задачи в общем виде:

$$\dot{p} = -(\partial f(x(t), u(t))/\partial x)^T p(t) + \partial L(x(t), u(t))/\partial x$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in [\tau, \tau+T]$$

Необходимое условие трансверсальности:

$$p(\tau+T) = p_1$$

Выберем линейную терминальную стоимость $W(x) = p_1^T x$

- Тогда:

$$p(\tau+T) \equiv -\partial W(z(\tau+T))/\partial x = p_1$$

- Условия оптимальности имеют вид:

$$\partial L(x,u)/\partial x + (\partial f(x,u)/\partial x)^T \lambda = 0$$

$$f(x,u) = 0$$

- Гамильтоновая система на магистральных значениях:

$$-(\partial f(z_1,u_1)/\partial x)^T p_1 + \partial L(z_1,u_1)/\partial x = 0$$

$$f(z_1,u_1) = 0$$

Сравнив гамильтонову систему с условиями оптимальности установим $p_1 = -\lambda_1$

$$W(x) = -\lambda_1^T x$$

В случае нашей задачи терминальная стоимость содержит ещё и ремонтирующий множитель

$$W(z(\tau+T)) = e^{-\rho(\tau+T)} p_1 z(\tau+T)$$

Заключение

- Сравнивались три варианта EMPC
  - неограниченный EMPC
  - EMPC с терминальным ограничением типа равенства
  - EMPC с терминальной стоимостью
- Построено программное решение прогнозирующих задач оптимального роста технологического последователя для всех трех подходов
- Исследовались параметры, позволяющие получить решение асимптотически приближающие магистральное значение, установленное с помощью принципа максимума
- В результате численных экспериментов продемонстрировано преимущества третьего подхода
  - Простой вариант выбора терминальной стоимости
  - Задача оптимального управления проще с точки зрения численного решения
  - Задача проще с вычислительной точки зрения
  - Имеет решение при любом горизонте T

Спасибо за внимание!