ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РОСТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

Готовец Мария Алексеевна

Объект исследования и цели работы

- Объект исследования
  - Процесс экономического развития страны технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера
  - Задача оптимального управления распределением трудовых ресурсов станы-последователя
- Цели работы
  - Проанализировать решение задачи оптимального экономического роста страны-последователя при различных параметрах
  - Применить методы управления по прогнозирующей модели с целью аппроксимации решения задачи с бесконечным горизонтом последовательным решением прогнозирующих задач с конечным горизонтом
  - Исследовать три различных подхода к построению прогнозирующих задач

Задача оптимального роста технологического последователя

- A — страна-лидер, выделяет в исследовательский сектор долю $L_N^A(t)$ трудовых ресурсов
- B — страна-последователь, выделяет в исследовательский сектор долю $L_N^B(t)$ трудовых ресурсов, заимствует технологии у A

$$\int_0^\infty e^{-\rho^B t}\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln N^B(t)+\ln(L^B-L_N^B(t))\right\}dt \to \max_{L_N^B} \qquad (1)$$

$$\dot{N}^A(t)=g^A N^A(t), \quad N^A(0)=N_0^A$$

$$\dot{N}^B(t)=\frac{L_N^B}{a^B}(N^B(t)+\gamma N^A(t)), \; N^B(0)=N_0^B, \; L_N^B(t)\in[0,L^B[$$

- $g^A, \; L^B, \; a^B, \; \gamma>0$ — заданные параметры
- $N_0^A>0, \; N_0^B>0$ — заданные начальные состояния

Задача оптимального роста технологического последователя

- Замена переменных

$$x(t) = N^B(t),\ b = \frac{L^B}{a^B},\ u(t) = \frac{L^B_N(t)}{a^B},\ \rho = \rho^B$$

$$y(t) = N^A(t),\ \nu = g^A,\ \kappa = \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))]dt \to \max \qquad (2)$$

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \quad x(0) = x_0$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t), \quad y(0) = y_0$$

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon]$$

- $b,\ \gamma,\ \rho,\ \nu,\ \kappa > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma < 1$; x_0, $y_0 > 0$

Редуцированная задача

- Замена переменных с целью понижения размерности:

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \; t \geq 0, \; z_0 = \frac{x_0}{y_0}$$

- Редуцированная задача

$$I(z,u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))]dt \to \max \tag{3}$$

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \; z(0) = z_0$$

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon], \; t \geq 0$$

$z \in \mathbb{R}$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}$ — управление

- (3) — задача оптимального управления нелинейной системой с критерием качества типа Лагранжа, бесконечный горизонт

Решение редуцированной задачи

- На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина устанавливается, что решение удовлетворяет гамильтоновой системе:

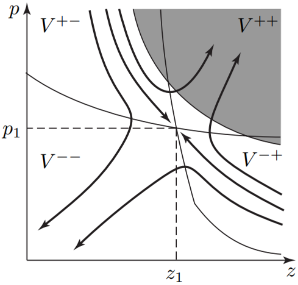
$$\dot{z}(t) = (b-\nu)z(t) + b\gamma - \frac{1}{p(t)} \quad (4)$$

$$\dot{p}(t) = -(b-\nu-\rho)p(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa+1)z(t)}{z(t)+\gamma)z(t)}$$

- Уравнения для (z_1, p_1):

$$p = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z}$$

$$\frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z} = \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z+\gamma)z}$$



Типичные фазовые траектории решений гамильтоновой системы

- Модель объекта управления

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \;\; x(t) = x_t, \;\; s \geq t \tag{5}$$

$x(s) \in \mathbb{R}^n$, $u(s) \in \mathbb{R}^r$ — состояния и управления модели (5)

- В модели (5) считаются заданными:
  - множество $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ всех возможных начальных состояний объекта управления в начальный момент времени t_0 $(t \geq t_0)$
  - n-вектор x_t (при $t \geq t_0$) — состояние физического объекта в момент времени t
  - функция $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, обеспечивает существование и единственность решений $x(s)$, $s \geq t$, уравнения (5) при любых кусочно-непрерывных управлениях $u(s)$, $s \geq t$, и начальных состояниях $x_t \in X_0$
  - множества доступных значений управления $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$, $t \geq t_0$

Стабилизация нелинейной системы

МОУ: кафедра методов оптимального управления

Предположение

- *Для всех* $t \in \mathbb{R}$ *множество* $U(t)$ *содержит начало координат и* $f(0,0,t) = 0$, $t \geq t_0$
- *Функция* f *непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по переменной* x *для любой фиксированной пары* (t,u)
- *Множество* $U(t)$ *компактно для всех* t *и для каждой пары* (t,x) *множество* $f(x,U(t),t)$ *выпукло*
- *Для любого компакта* $X \subset \mathbb{R}^n$, *множество* $\{\|f(x,u,t)\|,\ t \in \mathbb{R},\ x \in X,\ u \in U(t)\}$ *— компакт*

Управление по прогнозирующей модели
Model Predictive Control (MPC)

Прогнозирующая задача оптимального управления

$$
\mathcal{P}(t, x_t, T): \qquad \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s)ds + W(t+T, x(t+T)) \to \min
$$
$$
\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \;\; x(t) = x_t \tag{6}
$$
$$
u(s) \in U(s), \;\; s \in [t, t+T]
$$
$$
x(t+T) \in S
$$

Параметры MPC-регулятора:

1. горизонт управления T
2. функции текущей и конечной (терминальной) стоимостей L и W
3. терминальное множество $S \subset \mathbb{R}^n$

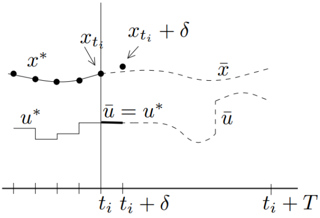
Алгоритм MPC

1. Измерить текущее состояние объекта x_{t_i}
2. Вычислить оптимальное (программное) управление $u^0(t)$, $t \in [t_i, t_i + T]$, задачи $\mathcal{P}(t_i, x_{t_i}, T)$
3. Управление

$$u^*(t) := u^0(t), t \in [t_i, t_i + \delta] \qquad (7)$$

подать на вход объекта управления

4. Процедуру повторить для следующего момента $t_{i+1} = t_i + \delta$



При выполнении предположений, ряда условий устойчивости и для достаточно малого периода квантования δ система, замкнутая обратной связью (7), асимптотически устойчива

Экономический MPC

1. Условие $L(x_1, u_1) \leq L(x, u)$, как правило, не выполняется
2. Положение равновесия (x_1, u_1) теперь определяется не из условия $f(x, u) = 0$, как в стабилизирующем MPC, а из задачи нелинейного программирования

$$
\begin{gathered}
L(x, u) \to \min \\
f(x, u) = 0 \\
u \in U,\ x \in X
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Устойчивое положение (x_1, u_1) называется магистралью.

Подход 1: Прогнозирующая задача для неограниченного EMPC

- В задаче экономического роста (3) заменим бесконечный горизонт управления конечным
- Дополнительные условия на правый конец траектории не накладываем

$$
\begin{gathered}
I_1(z,u) = \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))]dt \to \max \\
\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t) \\
z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)} \\
u(t) \in [0, b - \varepsilon],\ t \in [\tau, \tau + T]
\end{gathered} \tag{9}
$$

Подход 2: с терминальным ограничением

- В прогнозирующую задачу добавим терминальное ограничение-равенство
- Потребуем, чтобы в терминальный момент состояние равнялось магистральному значению z_1

$$
\begin{gathered}
I_2(z,u) = \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))]dt \to \max \\
\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t) \\
z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \ z(\tau + T) = z_1 \\
u(t) \in [0, b - \varepsilon], \ t \in [\tau, \tau + T]
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Подход 3: с терминальной стоимостью

- В прогнозирующую задачу добавим терминальную стоимость
- В работе обосновывается, что в качестве терминальной стоимости необходимо выбрать

$$W(z(\tau+T), \tau+T) = e^{-\rho(\tau+T)} p_1 z(\tau+T) \tag{11}$$

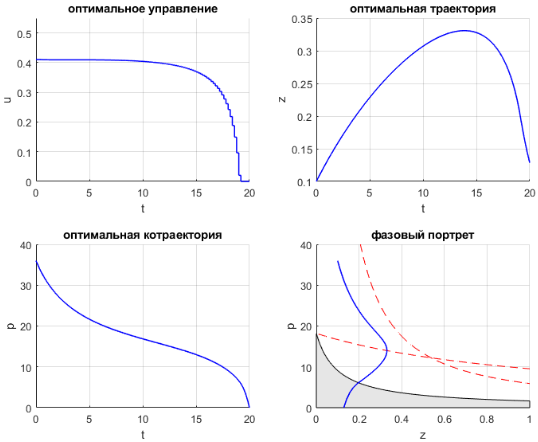
p_1 — магистральное значение сопряженной переменной

$$I_3(z,u) = e^{-\rho(\tau+T)} p_1 z(\tau+T) + \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t}[\kappa \ln z(t) + \ln(b-u(t))]dt \to \max$$

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t)+\gamma) - \nu z(t), \quad z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)} \tag{12}$$

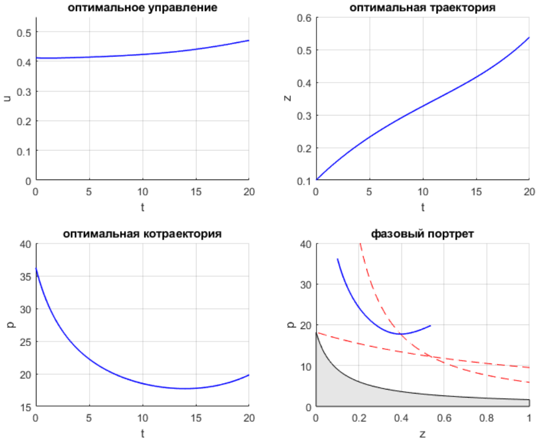
$$u(t) \in [0, b-\varepsilon], \ t \in [\tau, \tau+T]$$

Подход 1: Программное решение



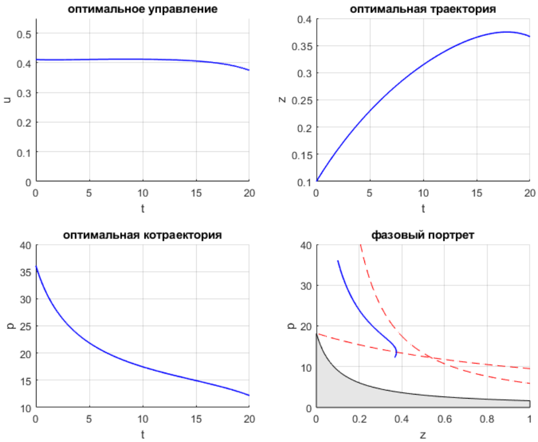
- Оптимальные траектории имеют продолжительные промежутки убывания и далеки от магистрали

Подход 2: Программное решение



- Участков убывания оптимальной траектории нет и значения уже ближе к магистральным, но время решения на 61% больше

Подход 3: Программное решение



- Участки убывания оптимальной траектории сократились

Сравнения программных решений в подходах 1-3

Рис.: Подход 1

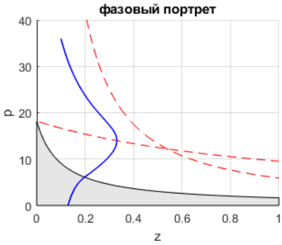


Рис.: Подход 2

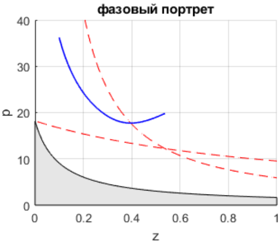
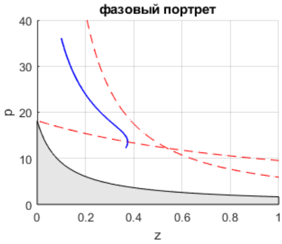


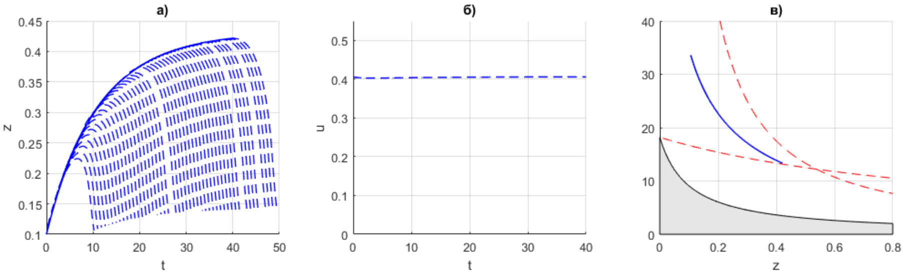
Рис.: Подход 3



Параметры:

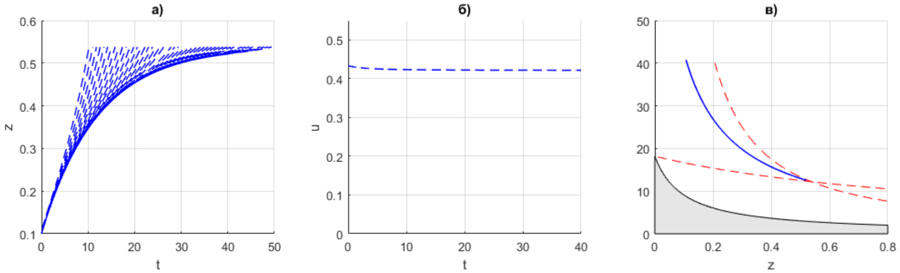
$$\gamma = 0.1,\ \nu = 0.5,\ b = 0.55,\ \rho = 0.15,\ \kappa = 1.5,\ z_0 = 0.1$$

Подход 1: Неограниченный EMPC



- При $T = 10$ траектория замкнутой системы не достигает магистрали
- При увеличении T до 30 траектория достигает магистрали, однако время решения прогнозирующей задачи возрастает в 7.15 раз

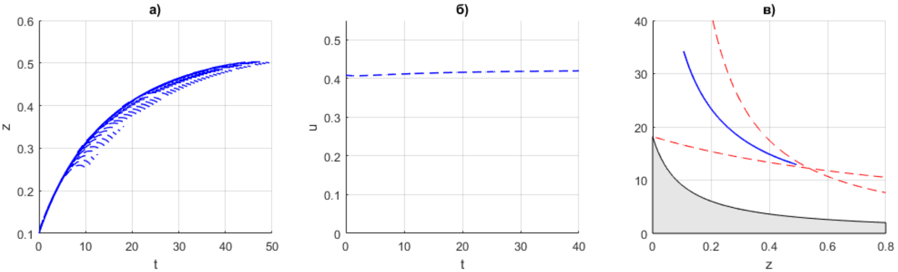
Подход 2: EMPC
с ограничениями-равенствами



Недостатки задачи с терминальным ограничением-равенством:

- трудоемкость решения задачи
- начальная недопустимость задачи с ограничением-равенством

Подход 3: EMPC с терминальной стоимостью



- Траектория замкнутой системы достигает магистрального значения
- Прогнозирующая задача имеет решение при любом горизонте T

Заключение

- Проведено сравнение трех вариантов метода EMPC
  - неограниченный EMPC
  - EMPC с терминальным ограничением типа равенства
  - EMPC с терминальной стоимостью
- Исследованы параметры, позволяющие получить решение асимптотически приближающие магистральное значение
- В результате численных экспериментов продемонстрированы преимущества третьего подхода
  - Простой выбор терминальной стоимости
  - Задача оптимального управления проще с точки зрения численного решения
  - Задача проще с вычислительной точки зрения
  - Имеет решение при любом горизонте T

Спасибо за внимание!