Оптимальное управление и управление по прогнозирующей модели для задачи роста технологического последователя

- Меня зовут Готовец Мария и тема моей дипломной работы Оптимальное управление и управление по прогнозирующей модели для задачи роста технологического последователя

- Цели работы...

- Будет решаться задача оптимального технологического последователя которая продемонстрирована на слайде, где $b,\ \gamma,\ \rho,\ \nu,\ \kappa$ — положительные параметры, $\gamma < 1$; x_0 и y_0 — положительные начальные состояния страны последователя и страны лидера.

- Для упрощения формулировки задачи, понизим размерность фазового вектора до единицы. Обозначим его через z. Получим следующую редуцированную задачу.

  Эта задача эквивалентна первой, будем использовать её для анализа. Для аналитического решения использовался принцип максимума Л.С. Понтрягина для случая задач на бесконечном полуинтервале

- Все рассматриваемые решения, их шесть штук, в принципе имею следующий вид который изображен на слайде: трансверсальные решения, как видно из рис., сходятся к точке покоя (z_1, p_1). Все остальные решения нетрансверсальны. Затененная область — внешность зоны трансверсальности.

  Существует множество экономических задач оптимального управления с бесконечным горизонтом, решение которых представляет практический интерес, однако не может быть получено аналитически. На примере задачи роста технологического последователя в работе предлагается подход к решению, основанный на использовании методов управления по прогнозирующей модели, в частности методов EMPC.

- Рассмотрим алгоритм MPC. У нас есть прогнозирующая задача: с горизонтом управления T, функциями текущей и конечной (терминальной) стоимостей L и W и терминальным множеством $S \subset R^n$.

  На горизонте управления $T > 0$ и зададим фиксированную сетку с шагом δ $(0 < \delta < T)$, т.е. $t_i = t_0 + i\delta$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Обратная связь (стратегия MPC) строится на основе решения в каждый момент времени t_i прогнозирующей задачи оптимального управления на конечном промежутке времени $[t_i, t_i + T]$:

  Если обозначить оптимальную программу задачи $\mathcal{P}(t, x_t, T)$ как $u^0(t)$, то алгоритм MPC можно описать следующим образом: в каждый момент времени регулятор решает задачу оптимального управления $\mathcal{P}(t, x_t, T)$ и подает на объект управления первое значение $u^0(t)$ ее оптимальной программы на промежутке $[t_i, t_i + \delta]$, т.е. до поступления следующего измерения состояния $x^*(t_i + \delta)$.

- Существует три подхода экономического MPC: базовый EMPC без дополнительных ограничений (неограниченный EMPC);

- EMPC с терминальным ограничением-равенством, добавляется чтобы z к моменту $\tau + T$ равнялась магистральному значению.;

- подход, в котором критерий качества дополняется специальной выбранной терминальной стоимостью, где α — весовой коэффициент.

  В докладе будет продемонстрирован один случай решенный тремя подходами, в дипломе решены и проанализированы шесть случаев.

- На рисунке вы можете видеть графики:

  – оптимального программного управления;

  – соответствующей оптимальной траектории;

  – оптимальной котраектории;

  – фазовый портрет гамильтоновой системы, где серая область — множество Γ_2, на котором оптимальное управление равно нулю, красные штриховые кривые — это особые направления, точка их пересечения — особая точка (z_1, p_1) (магистраль).

  Можем видеть, что этом оптимальная котраектория в терминальный момент времени равна нулю: С экономической точки зрения p — теневая цена ресурса. Условие трансверсальности означает, что к моменту T отношение накопленных технологий теряет стоимость и его сохранение в окрестности равновесного значения нецелесообразно. Соответственно, часть промежутка $[0, T]$ тратится на то, чтобы экономика страны последователя "отстала", а теневая цена упала до нуля. Эта ситуация всегда возникает, если на терминальное значение z не накладывается ограничений и в критерии качества отсутствует слагаемое, которое зависит от значения z в терминальный момент времени. Среднее время решения задачи 0.82 секунды.

- При решении прогнозирующей задачи с терминальным ограничением, значение сопряженной переменной в терминальный момент не равно нулю, т.е. прямая переменная z к концу управления не теряет свою стоимость.

  Участков убывания прямой траектории $z(t)$, $t \in [0, T]$, в решениях задачи 2 не наблюдается. Однако, в среднем время решения задачи составляет 1.33 секунды, что на 61% больше времени решения задачи 1, и обусловлено наличием дополнительного жесткого ограничения-равенства.

- При подходе 3, сопряженная траектория в момент T попадает в магистральное значение. Для сравнения, в подходе 2 прямая траектория попадает в магистральное значение. Это основное различие двух последних задач. Отметим, что в среднем время решения задачи 3 равно 1.07 сек., что меньше, чем у 2.

- Рассмотрим фазовые графики трёх подходов вместе. В подходе 1 терминальное значение состояния $z(T)$ оказывается достаточно далеко от магистрали. При этом оптимальная котраектория в терминальный момент времени равна нулю При подходе 2 как видно из рисунка, при добавлении в задачу терминального ограничения-равенства, решение в терминальный момент оказывается ближе к магистрали.

  При подходе 3 решение оказывается ещё ближе к магистрали, а время решения меньше.

  Рассмотрим решение с помощью EMPC

- На рисунках изображены:

  – на рисунке a) штриховые линии соответствуют оптимальным программным решениям $z^0(t|x(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + T]$, задачи; сплошная линия — реализующаяся траектория замкнутой системы;

- на рисунке б) представлена реализация $u^*(t)$, $t \in [0, 50]$;
- на рисунке в) — траектория замкнутой системы на фазовой плоскости гамильтоновой системы.

Оптимальные траектории задачи 1 имеют продолжительные участки убывания — на рисунке а) они видны в виде ряда убывающих штриховых линий. Это означает, что значительная часть промежутка управления тратится на участок, на котором траектория удаляется от магистрального значения. В результате траектория замкнутой системы $z^*(t)$, $t \geq 0$ не выходит на магистраль

При увеличении Nmpc в 2 раза траектория замкнутой системы немного приблизиться к магистрали, но не достигнет её. Так же чтобы добиться требуемого поведения замкнутой системы, т.е. удовлетворения магистрального свойства для EMPC, можно при увеличении T.

Экспериментальным путем установлено, что для того, чтобы траектория начала достигать окрестности магистрали, нужно выбрать значение $T = 30$. При этом для сохранения точности численного решения выбрать $N = 150$. В результате время решения прогнозирующей задачи существенно возрастает и в среднем в 7.15 раз превышает среднее время решения задачи при $T = 10$.

- Рассмотрим подход 2:

  Как ожидалось из анализа программных решений, функции $z^0(t|x(\tau))$, $t \in [\tau, \tau+T]$, при всех τ являются возрастающими. Траектории замкнутой системы и значения управления стремятся к магистральным значениям. Это требование всегда выполняется при условии, что задача 2 имеет решение в позиции $(0, z_0)$.

  Следует отметить, что указанное условие является достаточно жестким: возможны такие наборы параметров T, z_0, при которых задача 2 недопустима, т.е. не существует ни одного допустимого управления, переводящего систему в состояние z_1.

  Экспериментально установлено, что при $T \leq 6$ решения задачи 2 не существует.

  Таким образом, применение EMPC с использованием прогнозирующей задачи с терминальным ограничением-равенством имеет два недостатка:

  - трудоемкость решения задачи,
  - начальная недопустимость задачи с ограничением-равенством.

- В подходе 3 как и ожидалось из анализа программных решения, участки убывания функций $z^0(t|x(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + T]$, в сравнении с задачей 1 значительно сократились. Траектории замкнутой системы и значения управления стремятся к магистральным значениям. Время решения прогнозирующей задачи в среднем составило 0.54 сек.

  Для этого необходимо выбрать терминальную стоимость. Для того чтобы выбрать параметр терминальной стоимости в задаче 3 нужно только решить задачу нелинейного программирования и найти соответствующий оптимальному решению множитель Лагранжа.

  Как следует из решения задач 1 и 2, а также с точки зрения реализации алгоритмов в реальном времени и трудоемкости решения прогнозирующих задач, желательно иметь как можно меньший горизонт управления и не включать в задачу терминальные ограничения. Задача 3 удовлетворяет этим требованиям. Важное свойство — она имеет решение при любом горизонте T.

- Подведем итоги. В результате численных экспериментов продемонстрировано превосходство третьего подхода. Для него также предложен простой вариант выбора линейной терминальной стоимости. EMPC с терминальной стоимостью упрощает задачу оптимального управления с точки зрения численного решения, поскольку задачи без жестких ограничений-равенств проще с вычислительной точки зрения.