

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ  
ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ  
РОСТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ**

Курсовой проект

Готовец Мария Алексеевна  
студента 4 курса,  
специальность «экономическая  
кибернетика»

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> . . . . .	4
1.1 Задачи оптимального управления . . . . .	4
1.2 Принцип максимума и динамическое программирование . . . . .	7
1.3 Классификация численных методов решения. Прямые методы . . .	10
<b>ГЛАВА 2 УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ</b> . . . . .	13
2.1 Управление по прогнозирующей модели . . . . .	13
<b>ГЛАВА 3 ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ</b> . . . . .	19
3.1 Математическая модель . . . . .	19
3.2 Задача оптимального управления . . . . .	20
<b>ГЛАВА 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ</b> . . . . .	25
4.1 Оптимальное программное решение с применением Direct Single Shooting . . . . .	25
4.2 Результаты численных экспериментов Direct Single Shooting . . . .	27
4.3 Оптимальное программное решение с применением алгоритма MPC . . . . .	32
4.4 Результаты численных экспериментов алгоритма MPC . . . . .	33
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .	37
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	38

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Экстремальные задачи исследовались с древнейших времен. Постановка зависела от запросов общества. Со временем задачи усложнились и потребовались новые методы их решения. Так во второй половине XX в. получили развитие задачи оптимального управления.

К настоящему моменту сформулированы фундаментальные принципы теории оптимального управления: принцип максимума Л.С. Понтрягина [4]. и метод динамического программирования [3]. Для решения задачи оптимального управления необходимо построить математическую модель объекта или процесса, описывающая его поведение с течением времени под влиянием управляющих воздействий и текущего состояния.

Многие оптимизационные задачи очень сложные, для их решения необходимо применять численные методы. Численные методы решения задач оптимального управления разделяются на: динамическое программирование, непрямые методы, основанные на принципе максимума и прямые методы.

В современном мире для стран возникает задача об оптимизации распределения трудовых ресурсов, направляемых в научно-исследовательский сектор экономики. Данная задача возникает в теории эндогенного экономического роста при обращении к процессам обмена технологиями между странами. Сопряженная с необходимостью оптимизировать технологическую динамику с учетом потока "внешних" знаний, моделируется как задача об оптимизации экономического роста технологического последователя – страны, научно-исследовательский сектор которой во многом ориентирован на заимствование части знаний, производимых страной – технологическим лидером. Именно эта задача в центре внимания.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе приводится обзор основных результатов теории оптимального управления. Сначала обсуждаются формулировки задач, возникающих при оптимизации динамических систем управления. Затем приводятся основные результаты качественной теории - принцип максимума Л.С. Понтрягина [4] и динамическое программирование Р. Беллмана. [3]

Наконец, рассматриваются наиболее часто применяемые на практике численные методы решения задач оптимального управления [5].

### 1.1 Задачи оптимального управления

Постановка любой конкретной задачи оптимального управления включает в себя 5 необходимых элементов: промежуток управления, математическую модель управляемого объекта, класс управлений и ограничений на них, ограничения на фазовую траекторию, критерий качества. Рассмотрим их подробнее.

1) Промежуток управления. Прежде всего задачи оптимального управления разделяются на непрерывные, рассматриваемые на некотором промежутке времени  $T = [t_0, t_f]$ , и дискретные, в которых динамический процесс рассматривается в дискретные моменты времени  $k = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  — натуральное число.

По продолжительности процесса различаются задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания процесса. Выделяются также задачи на бесконечном интервале.

В экономических приложениях динамические процессы, как правило, стационарны, поэтому процесс стартует в момент времени  $t = 0$ . В задачах с конечным промежутком времени момент окончания процесса  $t = z$  называется горизонтом планирования.

2) Математическая модель. Динамика изучаемого процесса моделируется, как правило, дифференциальными

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f], \quad (1.1)$$

или разностными уравнениями

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), k = 0, 1, \dots,$$

где  $n$ -вектор  $x$  называется состоянием системы,  $r$ -вектор  $u$  называется управлением, функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  задана.

Число переменных состояния  $n$  называется порядком системы управления, число  $r$  — числом входов.

Далее будем рассматривать непрерывные системы вида (1.1).

3) Класс управлений и ограничения на них. Для непрерывного процесса управления указывается класс функций, из которого выбираются управления. Это могут быть: измеримые, дискретные, кусочно-непрерывные, гладкие, импульсные функции и т.д.

Кроме класса доступных управлений задается множество  $U \subset \mathbb{R}^r$  — множество допустимых значений управления. Как правило,  $U$  — компакт в  $\mathbb{R}^r$ .

Далее будем рассматривать управление в классе кусочно-непрерывных функций.

**Определение 1.1** Кусочно-непрерывная функция  $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$  называется доступным управлением, если  $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$ .

4) Ограничения на фазовую траекторию. Ограничения на переменные состояния могут накладываться:

- в начальный момент времени  $t_0$ :

$$x(t_0) \in X_0;$$

- в конечный момент времени  $t_f$ , такие ограничения называются терминальными:

$$x(t_f) \in X_f;$$

- в изолированные моменты  $t_i \in [t_0, t_f], i = \overline{1, m}$ , из промежутка управления — промежуточные фазовые ограничения:

$$X(t_i) \in X_i, i = \overline{1, m},$$

- на всем промежутке управления — фазовые ограничения:

$$x(t) \in X(t), t \in [t_0, t_f],$$

где  $X_0, X_f, X_i, i = \overline{1, m}, X(t), t \in [t_0, t_f]$ , — заданные подмножества пространства состояний.

Задача управления с  $x(t_f) \in X_f$  называется:

- задачей со свободным правым концом траектории, если  $X_f = \mathbb{R}^n$ ,
- задачей с закрепленным правым концом траектории, если  $X_f = \{x_f\}$ ,
- задачей с подвижным правым концом траектории, если  $X_f$  содержит более одной точки и не совпадает с  $\mathbb{R}^n$ .

Аналогичная классификация имеет место для задач с ограничениями на левый конец траектории  $x_0 \in X_0$ .

Выделяют также смешанные ограничения, учитывающие связи между переменными состояния и переменными управления:

$$(u(t), x(t)) \in S \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_f[.$$

**Определение 1.2** Доступное управление  $u(\cdot)$  называется допустимым (или, программой), если оно порождает траекторию  $x(\cdot) = (x(t), t \in [t_0, t_f]$ , удовлетворяющую всем заданным ограничениям задачи.

5) Критерий качества. Качество допустимого управления оценивается так называемым критерием качества

Существуют четыре типа критерия качества:

i) критерий качества Майера (терминальный критерий)

$$J(u) = \varphi(x(t_f)),$$

ii) критерий качества Лагранжа (интегральный критерий)

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

iii) критерий качества Больца

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

iv) задачи быстрогодействия (являются задачами с нефиксированной продолжительностью процесса).

$$J(u) = t_f - t_0 \rightarrow \min .$$

**Определение 1.3** Допустимое управление  $u^0(\cdot)$  называется оптимальным управлением (оптимальной программой), если на нем критерий качества достигает экстремального значения ( $\min$  или  $\max$ ):

$$J(u^0) = \text{extr } J(u),$$

где минимум (максимум) берется по всем допустимым управлениям.

В экономических приложениях наиболее часто встречающимися являются: критерий качества типа Больца — для задач с конечным горизонтом планирования; критерий качества типа Лагранжа — в задачах с бесконечным горизонтом. Нестационарность функции  $f$  выражается наличием множителя дисконтирования  $e^{-\rho t}$ .

## 1.2 Принцип максимума и динамическое программирование

В теории оптимального управления существует два фундаментальных результата: принцип максимума Л.С. Понтрягина [4] и динамическое программирование Р. Беллмана. [3] Приведем эти результаты на примере простейшей задачи оптимального управления.

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0, \\ u(t) &\in U, t \in [t_0, t_f]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

### 1.2.1 Принцип максимума Понтрягина

Принципом максимума называется основное необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, связанное с максимизацией гамильтониана:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - f_0(x, u, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x, u, t) - f_0(x, u, t).$$

Здесь  $\psi = \psi(t) \in \mathbb{R}^r$  — сопряженная переменная.

**Теорема 1.1** Пусть  $u^0(\cdot), x^0(\cdot)$  — оптимальное управление и траектория в задаче (1.2)  $\psi^0(\cdot)$  — соответствующее решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}^0(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t),$$

с начальным условием

$$\psi^0(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0(t_f)).$$

Тогда для любого  $t \in [t_0, t_f]$ , управление  $u^0(t)$  удовлетворяет условию:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{v \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), v, t), t \in [t_0, t_f].$$

Для того чтобы решить задачу с помощью принципа максимума обычно поступают следующим образом. Функцию  $H(x, \psi, u, t)$  рассматривают как функцию  $r$  переменных  $u = (u_1, \dots, u_r)$ . Далее проводят поточечную оптимизацию для каждого фиксированного набора  $(x, \psi, t)$

$$U(x, \psi, t) = \arg \max_{v \in U} H(x, \psi, v, t). \quad (1.3)$$

Если исходная задача (1.2) имеет решение, функция (1.3) определена на непустом множестве значений  $(x, \psi, t)$ .

Пусть  $u$  в виде (1.3) найдена, тогда можно рассмотреть следующую систему с граничными условиями:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(x, \psi, u(x, \psi, t), t) = f(x, \psi, u(x, \psi, t), t), x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, \psi, u(x, \psi, t), t), \psi(t_f) = -\frac{\partial \varphi(x(t_f))}{\partial x}.$$

Таким образом получена специальная краевая задача, которая называется краевой задачей принципа максимума.

Можно ожидать, что имеются лишь отдельные изолированные пары функций  $x(\cdot), \psi(\cdot)$ , удовлетворяющие краевой задаче принципа максимума. Подставив одну такую пару в (1.3), получим:

$$u(t) = u(x(t), \psi(t), t), t \in [t_0, t_f],$$

которая удовлетворяет принципу максимума и, значит, может претендовать на роль оптимального управления, а функция  $x(t) = x(t \mid t_0, x_0, u(\cdot)), t \in [t_0, t_f]$ , — на роль оптимальной траектории в задаче.



Отметим, что принцип максимума в задаче (1.2) является лишь необходимым условием оптимальности, поэтому построенное управление не может быть оптимальным. Построенная функция называется экстремалью Понтрягина.

### 1.2.2 Динамическое программирование

Рассмотрим задачу (1.2) и предположим, что она имеет решение. Следуя динамическому программированию [3], погрузим задачу (1.2) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_{\tau,z}(u) &= \varphi(x(t_f)) + \int_{\tau}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= f(x, u), x(\tau) = z, x(t_f) \in X, \\ u(t) &\in U, t \in T = [\tau, t_f], \end{aligned} \quad (1.4)$$

зависящих от скаляра  $\tau \in T$  и  $n$ -вектора  $z$ .

Пару  $(\tau, z)$  назовем позицией в задаче (1.2). Обозначим через

$$B(\tau, z) = \min_{u(t|\tau,z)} J_{\tau,z}(u)$$

минимальное значение критерия качества в задаче (1.4) для позиции  $(\tau, z)$ . Если для позиции  $(\tau, z)$  задача (1.4) не имеет решения, то положим  $B(\tau, z) = +\infty$ . Пусть

$$X_{\tau} = \{z \in \mathbb{R}^n : B(\tau, z) < +\infty\}.$$

Функцию

$$B(\tau, z), z \in X_{\tau}, \tau \in T, \quad (1.5)$$

называют функцией Беллмана.

Уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция (1.5), называют уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \left\{ \frac{\partial B(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \right\}, z \in X_{\tau}, \tau \in T. \quad (1.6)$$

Выделяя из семейства (1.4) задачу с  $\tau = t_f$ , находим граничное условие для уравнения Беллмана

$$B(t_f, z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in X, \\ +\infty, & z \notin X. \end{cases} \quad (1.7)$$

Схема применения динамического программирования состоит в следующем:

- Для задач составляется уравнение Беллмана.
- По решению уравнения строится позиционное решение.

Эффективно строить уравнения Беллмана удастся в редких случаях. В общем случае необходимо привлекать численные методы.

### 1.3 Классификация численных методов решения. Прямые методы

Численные методы решения задач оптимального управления можно разделить на три категории:

- динамическое программирование;
- не прямые методы, основанные на принципе максимума;
- прямые методы.

Основная трудность динамического программирования состоит в табулировании функций многих переменных, что приводит к так называемому "проклятию размерности".

Проблема не прямых методов в том, что не существует универсальных способов решения краевых задач для обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений.

Прямые методы основаны на сведении задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования посредством параметризации функций управления.

Последняя группа методов является самой распространенной в практических приложениях, поэтому далее описываются два представителя класса прямых методов: Direct Single Shooting(DSS) и Direct Multiple Shooting(DMS).

#### 1.3.1 Direct Single Shooting

Опишем основные принципы метода DSS на примере задачи управления нелинейной стационарной системой с критерием качества типа Больца, со смешанными и терминальными ограничениями:

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t))dt + \varphi(x(t_f)) \rightarrow \min_{x, u},$$

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0, \\
\dot{x} &= f(x(t), u(t)), t \in [0, t_f], \\
h(x(t), u(t)) &\leq 0, t \in [0, t_f], \\
r(x(t_f)) &\leq 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Обозначим через  $q \in \mathbb{R}^{rN}$  вектор параметров управления; само управление будем обозначать  $u(t, q), t \in [t_0, t_f]$ , подчеркивая его зависимость от параметра  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ . В большинстве случаев параметризация является кусочно-постоянной: выбирается фиксированная сетка  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  и  $N$  параметров  $q_i \in \mathbb{R}^r, i = \overline{0, N-1}$ ; тогда

$$u(t, q) = q_i, t \in [t_i, t_{i+1}[ , i = \overline{0, N-1}.$$

Direct Single Shooting является последовательным методом, это означает, что переменная  $x$  исключается из задачи (1.8). При выбранном векторе  $q$  состояние  $x(t), t \in [0, t_f]$ , выражается как

$$x(t_i, q) = x(t_i | t_{i-1}, x(t_{i-1}, q), q_{i-1}), i = \overline{0, N-1},$$

$$x(t_0, q) = x_0.$$

Ограничения на траекторию при выбранной параметризации, как правило, проверяют в узлах выбранной сети, т.е. требуют выполнения:

$$h(x(t_i, q), u(t_i, q)) \leq 0, i = \overline{0, N-1}.$$

В результате получим задачу конечномерной оптимизации:

$$\begin{aligned}
J(q) &= \int_0^{t_f} f_0(x(t, q), u(t, q)) dt + \varphi(x(t_f, q)) \rightarrow \min_q, \\
h(x(t_i, q), u(t_i, q)) &\leq 0, i = \overline{0, N-1}, \\
r(x(t_f, q)) &\leq 0, q \in \mathbb{R}^{rN}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Данный метод позволяет обойти проблему "проклятия размерности".

### 1.3.2 Direct Multiple Shooting

Опишем основные принципы метода DMS на примере задачи управления нелинейной стационарной системой с критерием качества типа Больца, со смешанными и терминальными ограничениями (1.8). Так же как и в DSS

введем  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ , получим:

$$u(t, q) = q_i, t \in [t_i, t_{i+1}[ , i = \overline{0, N-1}.$$

Затем решаем ОДУ на каждом интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}[ , i = \overline{0, N-1}$ , начиная с искусственных начальных значений  $s_i$ :

$$\dot{x}_i(t, s_i, q_i) = f(x_i(t; s_i, q_i), q_i), t \in [t_i, t_{i+1}[ ,$$

$$x_i(t_i; s_i, q_i) = s_i.$$

Таким образом, получим отрезки траектории  $x_i(t; s_i, q_i)$ .

Аналогично, численно вычисляем интегралы

$$F_i(s_i, q_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(x_i(t, s_i, q_i), q_i) dt.$$

Выберем сетку, в которой проверяем ограничения неравенства; здесь подчеркиваем зависимость от параметра  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ . В большинстве случаев параметризация является кусочно-постоянной: выбирается фиксированная сетка. Получим задачу:

$$J(q) = \sum F_i(s_i, q_i) + \varphi(s_N) \rightarrow \min_{q, s},$$

$$x_0 - s_0 = 0,$$

$$x_i(t_{i+1}; s_i, q_i) - s_{i+1} = 0, i = \overline{0, N-1},$$

$$h(s_i, q_i) \leq 0, i = \overline{0, N},$$

$$r(s_N) \leq 0.$$

Обратим внимание, что выбрав  $f_i(s_i, q_i) = x_i(t_{i+1}; s_i, q_i)$  условия непрерывности могут быть интерпретированы как динамическая система с дискретным временем

$$s_{i+1} = f_i(s_i, q_i),$$

и вышеупомянутая задача оптимального управления имеет точно такую же структуру, что и задача оптимального управления с дискретным временем.

Отличие Direct Single Shooting от Direct Multiple Shooting состоит в том, что в первом случае траектория вычисляется последовательно, во втором - одновременно.

## ГЛАВА 2

### УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

В этой главе описывается метод управления по прогнозирующей модели – MPC (Model Predictive control) [6], для построения управления обратной связи нелинейных систем. Описываются основные свойства и алгоритм построения стратегии MPC.

#### 2.1 Управление по прогнозирующей модели

Рассмотрим нелинейный объект управления с ограничением на управляющее воздействие, поведение которого при  $s \geq t$  описывается следующей математической моделью:

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t, \quad (2.1)$$

$$u(s) \in U(s), \quad s \geq t.$$

В модели (2.1) которой считаются заданными:

- множество  $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ , содержащий все возможные начальные состояния объекта управления в начальный момент времени  $t_0$ ,
- $n$ -вектор  $x_t$  (для  $t \geq t_0$ ), который описывает состояние физического объекта в момент времени  $t$ ,
- функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , обеспечивающая существование и единственность решений  $x(s)$  уравнения (2.1) при любых кусочно-непрерывных управлениях  $u(s)$   $s \geq t$  и начальных состояниях  $x(t) \in X_0$ ,
- множество допустимых управлений  $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$ .

Предположим, что система (2.1) асимптотически управляема на  $X_0$ .

Цель управления объектом состоит в том построить обратную связь которая переводит объект в начало координат (в асимптотическом смысле). Одним из популярных подходов для достижения поставленной цели является стратегия MPC.

Выберем фиксированную сетку  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ ,  $i = \overline{0, N}$  с шагом  $\delta$ . Обратная связь (стратегия МРС) строится на основе решения в каждый момент времени  $t_i$ . Задача оптимального управления:

$$P(t_i, x_{t_i}, T) = \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s) ds + W(t + T, x(t + T)), \quad (2.2)$$

при условиях:

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), s \geq [t, t + T],$$

$$x(t) = x_t,$$

$$u(s) \in U(s),$$

$$x(t + T) \in S,$$

где переменной  $t$  обозначается текущий момент времени, в то время как  $s$  используется для обозначения переменной времени в модели прогнозирования. Вектор  $x_t$  обозначает фактическое состояние объекта, в момент времени  $t$ . Процесс  $(x, u)$  представляет собой пару решения системы. Пара  $(\bar{x}, \bar{u})$  обозначает наше оптимальное решение для разомкнутого контура задачи оптимального управления. Пара  $(x^*, u^*)$  является замкнутым контуром траектории и управления в стратегии МРС.

Решение задачи (2.2) является множество допустимых пар  $(x, u)$ , содержащие измеримую функцию управления  $u$  и непрерывную траекторию состояния  $x$ , которые удовлетворяют ограничениям  $P(t_i, x_{t_i}, T)$ . Задача считается решаемой если существует хотя бы один допустимое решение. Пара  $(\bar{x}, \bar{u})$  называется решением  $P(t_i, x_{t_i}, T)$ , если он является глобальным минимумом (2.2) среди всех пар.

Параметрами МРС-метода (параметрами настройки) являются параметры задачи оптимального управления, которые не связаны с системой управления. Понятно, что здесь они представлены:

1. горизонтом управления  $T$ ;
2. функции текущих и конечных затрат  $L$  и  $W$ ;
3. набором терминальных ограничений  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

Алгоритм МРС заключается в выполнении следующих шагов в определенный момент времени  $t_i$ :

1. Измерение текущего состояния объекта  $x_{t_i}$ .

2. Вычисление управления обратной связи - это программное управление, решение задачи оптимального управления в виде функции времени  $\bar{u}$ :  $[t_i, t_{i+T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  для задачи  $P(t_i, x_{t_i}, T)$ .
3. Управление  $u^*(t) := \bar{u}(t)$  на интервале  $[t_i, t_i + \delta]$  применяется к объекту, (оставшийся управление  $\bar{u}(t)$ ,  $t \geq t_i + \delta$  отбрасывается).
4. Процедура повторяется, как показано на рисунке (2.1), для следующего момента  $t_{i+1}$  (индекс  $i$  увеличивается на одну единицу).

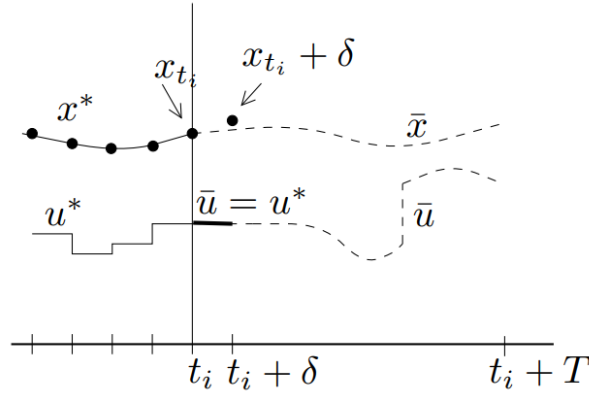


Рис. 2.1: Стратегия МРС

Результирующее управление является управлением обратной связи, так как в течение каждого интервала выборки управление  $u^*$  определяется от состояния  $x_{t_i}$ .

Для фиксированного конечного горизонта замкнутая траектория системы ( $x^*$ ) не обязательно совпадают с траекторией разомкнутого контура ( $\bar{x}$ ) решения задачи оптимального управления. Следовательно, нет гарантии, что МРС приведет к стабилизации замкнутой системы и сильно зависит от параметров настройки стратегии МРС.

Можно гарантировать (2.2) устойчивость замкнутого контура, выбирая параметры настройки, удовлетворяющие определенному условию устойчивости. Важнейшим элементом условия устойчивости является требование, чтобы параметры настройки были выбраны в такими, что для всех состояний  $x$ , принадлежащих множеству возможных конечных состояний задачи оптимального управления (то есть, подмножество  $S$ ), существует такое значение  $\tilde{u}$ :

$$W_x(x) \cdot f(x, \tilde{u}, t) \leq -L(x, \tilde{u}, t). \quad (2.3)$$

Это условие важно для определения того, что некоторая функция  $V^\delta$ , построенная из функций значения вовлеченных ЗОУ «уменьшается». Затем,

используя аргументы типа Ляпунова, для доказательства устойчивости замкнутой системы. Определили, что если  $W$  - контрольная функция Ляпунова (следовательно, удовлетворяющая условию (2.3) для  $S = \mathbb{R}^n$ ), тогда стабильность может быть достигнута. Здесь мы также показываем, как стабильность других МРС схемы можно проверить с помощью (2.3). Важным следствием является то, что это обобщение позволяет нам строить схемы МРС гарантируя стабильность для новых важных классов нелинейных систем.

**Предположение 2.1** Для всех  $t \in \mathbb{R}^n$  множество  $U(t)$  содержит начало координат, и  $f(0, 0, t) = 0$ .

**Предположение 2.2** Функция  $f$  непрерывна, и  $x \mapsto f(x, u, t)$  локально липшицева непрерывна для каждой пары  $(t, u)$ .

**Предположение 2.3** Множество  $U(t)$  компактно для всех  $t$  и для каждой пары  $(t, x)$  множество  $f(x, U(t), t)$  выпукло.

**Предположение 2.4** Функция  $f$  компактна на компакте  $x$  точнее, для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$ , множество  $\{\|f(x, u, t)\|, t \in \mathbb{R}, x \in X, u \in U(t)\}$  компакт.

Предположение (2.1) не рассматривается как ограничивающее, так как большинство систем возможно построить, чтобы удовлетворять ему после изменения координат. Предположение (2.3) и (2.2) необходимы чтобы гарантировать существование решения ЗОУ. Условия предположения (2.4) автоматически выполняются для инвариантных по времени системы, так как образ компактного множества для непрерывной функции компактен.

Основной результат устойчивости утверждает, что управление обратной связи в результате применение стратегии МРС является стабилизирующим управлением, при условии, что параметры настройки удовлетворяют условиям устойчивости ниже. Рассмотрим следующее условия устойчивости: в системе (2.1) параметры настройки: горизонт планирования  $T$ , целевые функции  $L$  и  $W$  и терминальное множество ограничений  $S$  должны удовлетворять следующим условиям:

1. Множество  $S$  замкнуто и содержит начало координат.
2. Функция  $L$  непрерывна,  $L(\cdot, 0, 0) = 0$ , и есть непрерывное положительно определенное неограниченная функция  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая что  $L(t, x, u) \geq M(x)$  для всех  $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ . Более того, «расширенное множество скоростей»  $\{(v, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : v = f(t, x, u), l \geq L(t, x, u), u \in U(t)\}$  является выпуклым для всех  $(t, x)$ .



3. Функция  $W$  положительно полуопределена и непрерывно дифференцируема.
4. Временной горизонт  $T$  таков, что множество  $S$  достижимо за время  $T$  из любого начального состояния и из любой точки в сгенерированных траекториях: что есть множество  $X$ , содержащее  $X_0$  такое, что для каждой пары  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$  существует управление  $u : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющие

$$x(t_0 + T; t_0, x_0, u) \in S.$$

Кроме того, для всех функций управления и в условии:

$$x(t; t_0, x_0, u) \in X \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

5. Существует скаляр  $\epsilon > 0$  такой, что для каждого времени  $t \in [T, \infty)$  и каждого  $x_t \in S$ , мы можем выбрать функцию управления  $\tilde{u} : [t, t + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , причем  $\tilde{u}(s) \in U(s)$  для всех  $s \in [t, t + \epsilon]$ , удовлетворяющих

$$W_t(t, x_t) + W_x(t, x_t) \cdot f(t, x_t, \tilde{u}(t)) \leq -L(t, x_t, \tilde{u}(t)), \quad (2.4)$$

а также

$$(t + r; t, x_t, \tilde{u}) \in S, \quad r \in [0, \epsilon]. \quad (2.5)$$

**Предположение 2.5** Допустим выполняется (2.1 – 2.4). Предположим также, что параметры настройки удовлетворяют условиям устойчивости. Тогда для любого  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X_0$  решение открытого цикла существует задача оптимального управления  $P(t_0, x_0, T)$ .

Рассмотрим последовательность пар  $t_i, x_i$  такую, что  $x_i$  - значение в момент времени  $t_i$  решения траектории  $P(t_{i-1}, x_{i-1}, T)$ . Тогда решение  $P(t_i, x_i, T)$  для всех  $i \geq 1$  также существует. Кроме того, построенная МРС траектория  $x^*$  имеет конечный временной интервал.

Основной результат по устойчивости заключается в следующем.

**Теорема 2.1** . Предположим, что выполняются предположения (2.1 – 2.4). Выберите параметры настройки, чтобы удовлетворить SC, Тогда для достаточно малого времени между выборками  $\delta$ , система с обратной связью в результате применения стратегии МРС асимптотически устойчиво  $\|x^*(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Замечание 2.1** Условия устойчивости 1, необходимы чтобы гарантировать существование решения задачи оптимального управления обратной

связи. Первая часть условия условий устойчивости 2 и условия условий устойчивости 3 тривиально удовлетворяются для обычной квадратичной задачи функция  $L(x, u) = x^T Qx + u^T Ru$ , для  $Q > 0$  и  $R \geq 0$  и  $W(x) = x^T Px$ , при  $P \geq 0$ . Вторая часть условия устойчивости 2 о выпуклости «расширенной скорости набора» - это общеизвестное требование существования решения в ЗОУ с интегральным критерием. Учитывая (2.3), оно автоматически выполняется, если  $L$  выпуклая и  $f$  линейно зависима от  $u$ , или если  $L$  не зависит от  $u$ . Последнее является следствием как  $f(x, U(t), t)$ , так и  $l : l \geq L(t, x)$  - выпуклые множества.

Условие устойчивости 4 необходимо, чтобы гарантировать существование допустимого процесса в последовательности ЗОУ. В предположения (2.1-2.4) не было утверждения о целесообразности ЗОУ. Эти предположения могут быть использованы в первоначальном тесте на адекватность метода, так как они включают только данные модели системы, которая, как правило, моделируется или имеет мало свободы для изменения. На более позднем этапе моделирования можно попытаться удовлетворить желаемым свойствам осуществимости и стабильности соответствующим выбором параметров настройки. Условие (2.4) является ключевым требованием для установления существования «убывающей» ляпуновоподобной функции, из этого следует асимптотическая устойчивость. Это может быть представлено как существованием элемента управления, который управляет состояниями к внутренним уровням наборов  $W$  со скоростью  $L$ . В случае квадратичных функций  $W$  множества уровней с центром в начале координат и вектор скорости должны указывать внутрь. Тем не менее,  $W$  не нужно повторно ограничивать квадратичными функциями, и эта свобода может использоваться в наших интересах. Условие (2.5) просто утверждает, что траектория связанный с  $\tilde{u}$  не покидает множество  $S$  сразу.

## ГЛАВА 3

# ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

В данной главе будет рассматриваться задача об оптимизации экономического роста страны-последователя. Математическая модель роста технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера, приводится согласно идеям работы [2]. Для рассматриваемой модели формулируется задача оптимального управления, которая решается с использованием одного из методов раздела 1.3.

### 3.1 Математическая модель

Рассмотрим процесс экономического развития двух стран  $A$  и  $B$ . Предполагаем, что страна  $A$  — автаркический технологический лидер, а страна  $B$  — технологический последователь.

Каждая из стран динамически перераспределяет некоторый имеющийся у нее трудовой ресурс ( $L$ ) между производственным и научно-исследовательскими секторами экономики. Производственный сектор осуществляет производство потребляемых продуктов, а научно-исследовательский сектор генерирует новые товары — новые технологии для производственного сектора.

Особенность рассматриваемой модели в том, что научно-исследовательский сектор страны-последователя может частично заимствовать (абсорбировать) технологии у страны-лидера.

Пусть,  $L^A$  и  $L^B$  — постоянные размеры трудовых ресурсов стран  $A$  и  $B$ ,  $L_N^A(L_N^B)$  — доля трудовых ресурсов, направляемых в научно-исследовательский сектор экономики страны. Эта величина играет роль управления. Следовательно,  $L^A - L_N^A$  ( $L^B - L_N^B$ ) выделяется в производственный сектор.

Через  $a^A$  и  $a^B$  обозначим показатели продуктивности научно-исследовательских секторов стран, а  $\rho^A$  и  $\rho^B$  — параметры дисконтирования в странах  $A$  и  $B$ .

Далее пусть  $N^A(t)$  и  $N^B(t)$  — количество технологий накопленных и доступных до момента времени  $t$  в странах  $A$  и  $B$  — положительные дей-

ствительные числа.

Будем считать что приращение количества накопленных технологий в единицу времени, следующую за произвольным моментом времени  $t \geq 0$ , пропорционально:

- размеру  $N(t)$  имеющегося к моменту  $t$  запаса технологий,
- текущей величине  $L_N(t)$  трудового ресурса, направляемого в научно-исследовательский сектор экономики:

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t). \quad (3.1)$$

Здесь  $a > 0$  параметр, характеризующий продуктивность научно-исследовательского сектора.

Будем считать, что величина  $N^B(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), L_N^B(t) \in [0, L^B[, \gamma \in (0, 1), \quad (3.2)$$

где  $\gamma \in (0, 1)$  – постоянный параметр, характеризующий емкость абсорбции страны  $B$ , а  $L_N^B(t)$  – доля трудовых ресурсов, направляемых в момент времени  $t$  в научно-исследовательский сектор экономики страны  $B$ ; эта величина играет роль управления.

Уравнение (3.2) для страны-последователя предполагает, что в каждый момент времени  $t$  технологический последователь абсорбирует часть  $\gamma N^A(t)$  полного объема  $N^A(t)$  технологий, произведенных страной-лидером.

Стоит отметить, что в соответствии с (3.2) такая заимствование происходит лишь при  $L_N^B(t) > 0$ , т.е. обязательное условие при осуществлении страной-последователем  $B$  собственных научно-исследовательских разработок.

## 3.2 Задача оптимального управления

Пусть количество продуктов, выпускаемых каждой отдельно взятой отраслью производства в единицу времени, следующую за моментом времени  $t \geq 0$ , пропорционально размеру трудовых ресурсов, используемых в этой отрасли в момент  $t$ . Считая, что коэффициент пропорциональности постоянен и один и тот же для всех отраслей, положим его равным единице. Тогда

плотность  $Y(t)$  распределения размера выпуска в отраслях производства в единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ :

$$Y(t) = \frac{L - L_N(t)}{N(t)}.$$

Считаем, что все произведенные продукты потребляются. Следуя, за критерий успешности экономики в единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ , возьмем индекс потребления Диксита-Штиглица, представляющий собой агрегированную характеристику общего количества потребляемых продуктов и их разнообразия за единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ :

$$D(t) = \left\{ \int_0^{N(t)} [Y(t)]^\alpha dj \right\}^{1/\alpha} = (L - L_N(t)) [N(t)]^{1/\alpha - 1}.$$

где  $\alpha \in (0, 1)$  – преобразованный параметр  $\varepsilon$  эластичности замещения между различными продуктами:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \alpha} > 1.$$

Пусть теперь  $\rho$  – субъективно выбранный положительный параметр дисконтирования. Полезность для страны пары  $\{N, L_N\}$ , где  $N: t \mapsto N(t)$  – траектория технологического запаса страны и  $L_N: t \mapsto L_N(t)$  – ее программа инвестирования трудовых ресурсов в научно-исследовательский сектор, будем оценивать интегралом  $J(N, L_N)$  от умноженной на весовой множитель  $e^{-\rho t}$ , удельной скорости роста  $\dot{D}(t)/D(t)$  индекса потребления по переменной времени  $t$ , пробегающей бесконечный полуинтервал  $[0, \infty)$ . Также предположим, что полученный несобственный интеграл сходится абсолютно:

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln D(t) dt,$$

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \right\} dt. \quad (3.3)$$

Зададим положительное начальное значение:

$$N(0) = N_0. \quad (3.4)$$

Объединяя дифференциальное уравнение (3.1), начальное условие (3.4) и выражение (3.3) для функционала полезности  $J$ , получаем следующую задачу

оптимального управления:

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \{ (1/\alpha - 1) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t),$$

$$N(0) = N_0.$$
(3.5)

Здесь  $L_N(t)$  – значение управления в момент времени  $t \geq 0$ ,  $N(t)$  – значение фазовой переменной в этот момент,  $N_0 > 0$  – начальное состояние,  $L > 0, a > 0, \rho > 0$  и  $\alpha \in (0, 1)$  – постоянные параметры.

Решение задачи (3.5) легко получается непосредственно: для любой допустимой пары  $(N, L_N)$  имеем для  $\forall t \geq 0$ :

$$\frac{d}{dt}(\ln N(t)) = \frac{L_N(t)}{a}.$$

Поэтому, интегрируя по частям интеграл в (3.3), получаем:

$$J(N, L_N) = (1/\alpha - 1) \frac{\ln N_0}{\rho} + \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ (1/\alpha - 1) \frac{L_N(t)}{a} + \ln(L - L_N(t)) \right\} dt.$$

Поскольку в последнем равенстве подынтегральное выражение не зависит от траектории  $N$ , то функционал полезности принимает свое максимальное значение при постоянном управлении  $L_N^*$ , доставляющем максимум подынтегральному выражению. Следовательно, оптимальное управление  $L_N^*$  в задаче (3.5) постоянно и определяется следующим образом:

$$L_N^* = \begin{cases} L - \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha}, & \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L, \\ 0, & \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} \geq L. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) вытекает, что в автаркическом случае при эффективности научно-исследовательского сектора экономики и малом параметре дисконтирования:

$$\frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L,$$

то оптимальная доля трудовых ресурсов, занятых в научно-исследовательском секторе, отлична от нуля и возрастает с увеличением эффективности научно-исследовательского сектора (с уменьшением отношения  $a\alpha/(1-\alpha)$ ) и с уменьшением параметра дисконтирования  $\rho$ .

Из (3.1) и (3.6) получим, что количество технологий накопленных стра-

ной А:

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t), \quad (3.7)$$

где

$$g^A = \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ (1 - \alpha) \frac{L^A}{a^A} - \alpha \rho^A \right\}.$$

т.к. предполагаем, что научно-исследовательский сектор страны А обладает необходимой эффективностью, то  $g^A > 0$ .

Теперь рассмотрим страну В и определим функционал полезности для неё:

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max. \quad (3.8)$$

Объединим (3.2), (3.7), (3.8), получим задачу оптимального управления:

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), L_N^B(t) \in [0, L^B[, \quad (3.9)$$

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t),$$

$$N^A(0) = N_0^A, N^B(0) = N_0^B.$$

Здесь  $g^A, L^B, a^B, \gamma$  — положительные параметры,  $n_0^A > 0, N_0^B > 0$  — заданные начальные состояния.

Для упрощения будем использовать следующие обозначения:

$$x(t) = N^B(t), b = \frac{L^B}{a^B},$$

$$u(t) = \frac{L_N^B(t)}{a^B}, \rho = \rho^B,$$

$$y(t) = N^A(t), \nu = g^A,$$

$$\kappa = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Используя обозначения выше перепишем задачу (3.9):

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \\
x(0) &= x_0, \\
\dot{y}(t) &= \nu y(t), \\
y(0) &= y_0, u(t) \in [0, b[,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где  $b, \gamma, \rho, \nu, \kappa$  — положительные параметры,  $\gamma < 1$ ;  $x_0$  и  $y_0$  — положительные начальные состояния фазовых переменных.

Заметим, что задача (3.10) не вкладывается полностью в постановку общей задачи оптимального управления из-за присутствия открытого интервала в ограничениях на управления. Поэтому модифицируем эти ограничения, ослабив верхнее на величину  $\varepsilon$ :

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon].$$



## ГЛАВА 4

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данной главе будут приведены программные реализации и результаты численных экспериментов задачи об оптимизации экономического роста страны-последователя, с помощью Direct Single Shooting и алгоритма MPC, а также проводиться их анализ.

#### 4.1 Оптимальное программное решение с применением Direct Single Shooting

В подходе, который будет использоваться далее (на 4 курсе) решение задачи (3.10) будет приближаться последовательным решением ряда задач оптимального управления специального вида с конечным горизонтом планирования  $z$ . Эти задачи будем называть прогнозирующими задачами оптимального управления.

Конкретный вид прогнозирующих задач будет выбран позднее. Отметим, что в литературе такие задачи, как правило, отличаются от (3.10) некоторыми модификациями в критерии качества и дополнительными терминальными ограничениями [7].

Прогнозирующие задачи будут решаться численно, с применением метода Direct Single Shooting раздела 1.3, поэтому дальнейшее изложение будет посвящено программной реализации численных методов для решения задачи:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_0^z e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \\ x(0) &= x_0, \\ \dot{y}(t) &= \nu y(t), \\ y(0) &= y_0, u(t) \in [0, b - \varepsilon]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

После определения конкретного вида прогнозирующей задачи программная реализация достаточно просто модифицируется.

Для начала объявим переменные и уравнения с которыми будем рабо-

тать:

```
x1 = SX.sym( 'x' );  
x2 = SX.sym( 'y' );  
t = SX.sym( 't' );  
x = [x1; x2];  
u = SX.sym( 'u' );
```

```
xdot = [(x1 + gamma*x2)*u; x2*nu];
```

Подинтегральная функция критерия качества:

```
f0 = -exp(-rho*t)*(каппа*log(x1)+log(b-u));
```

Применим алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка для решения ОДУ:

```
M = 4;  
DT = T/N/M;  
f = Function( 'f', {x, u, t}, {xdot, f0});  
X0 = MX.sym( 'X0', 2);  
U = MX.sym( 'U' );  
tt = MX.sym( 'tt' );  
X = X0  
Q = 0;  
for j=1:M  
    [k1, k1_q] = f(X, U, tt);  
    [k2, k2_q] = f(X + DT/2 * k1, U, tt+DT/2);  
    [k3, k3_q] = f(X + DT/2 * k2, U, tt+DT/2);  
    [k4, k4_q] = f(X + DT * k3, U, tt+DT);  
    X=X+DT/6*(k1 +2*k2 +2*k3 +k4);  
    Q = Q + DT/6*(k1_q + 2*k2_q + 2*k3_q + k4_q);  
end  
F = Function( 'F', {X0, U, tt}, {X, Q},  
    {'x0', 'p', 't'}, {'xf', 'qf'});
```

После формулировки задачи нелинейного программирования и задача (4.1) решается стандартной процедурой solver :

```
nlp = struct( 'f', J, 'x', w{:}', 'g', g{:}')  
solver = nlpsol( 'solver', 'ipopt', nlp);  
  
sol = solver( 'x0', w0, 'lbx', lbw, 'ubx', ubw, ...
```

'lbg', lbg, 'ubg', ubg);

w\_opt = full(sol.x);

## 4.2 Результаты численных экспериментов Direct Single Shooting

Рассмотрим различные решения задачи (4.2) в зависимости от изменений параметров:

- $b$  – размеры трудовых ресурсов,
- $\gamma$  – емкость абсорбции,
- $\rho$  – параметр дисконтирования,
- $\nu$  – рост научно-исследовательского сектора страны А,
- $\kappa$  – параметр эластичности замещения.

Пусть начальное количество технологий страны лидера( $y_0$ ) в три раза превышает страны последователя( $x_0$ ). Для начала положим  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.6$   $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$ .

Полученный результат изображен на рисунке 4.1. Из рисунка видно, что страна-последователь при таких параметрах может приблизиться к начальному уровню страны лидера, но не более того.

Положим  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.5$   $b = 1$   $\rho = 0.5$   $\kappa = 0.5$  изменения отображены на рисунке 4.2. За счет увеличения  $\gamma$  показатели страны В временно росли с той же скоростью, что и страны лидера

Изменим параметры:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.4$   $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$ ,  $b = 2$  . На рисунке 4.3 видно при данных параметрах страна-последователь может даже обогнать страну лидер. Упор в данной плане идет не на заимствование ресурсов, а на собственный трудовые ресурсы. Поэтому рассмотрим другие варианты.

Изменим параметр  $\kappa = 0.5$  . Результат отображен на рисунке 4.4. Можем видеть, что при таких условиях на короткий промежуток страна В может догнать и находиться на уровне со страной А, но в последующем начнет сильно отставать.

Положим параметры  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.6$   $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$  рисунок 4.5. Довольно быстро страна последователь может обогнать лидера и какое-то время развиваться быстрее, но с определенного момента времени развитие страны В прекращается, в то время как страна А продолжает развиваться.

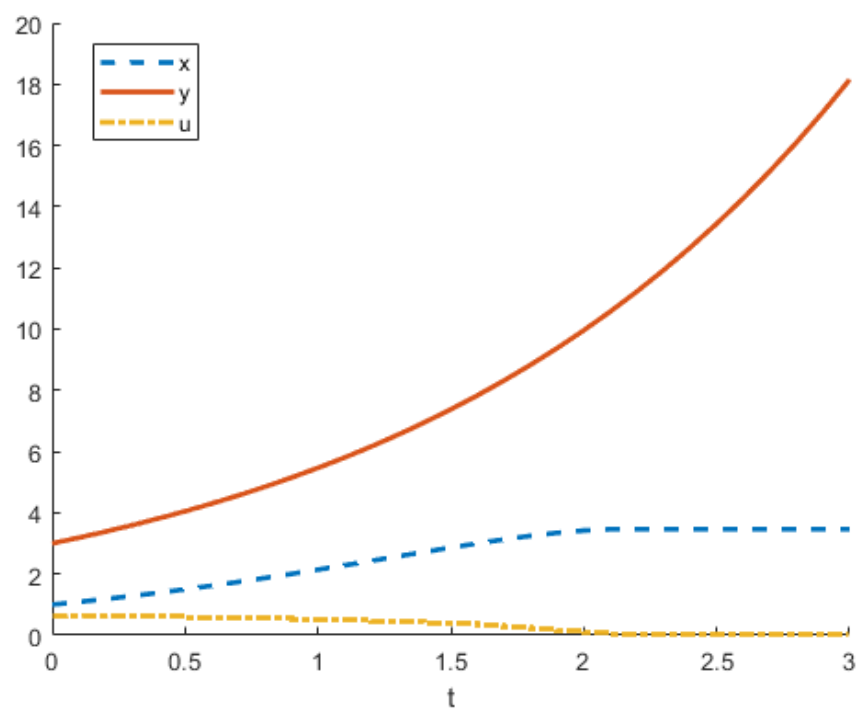


Рис. 4.1: Решение для параметров:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

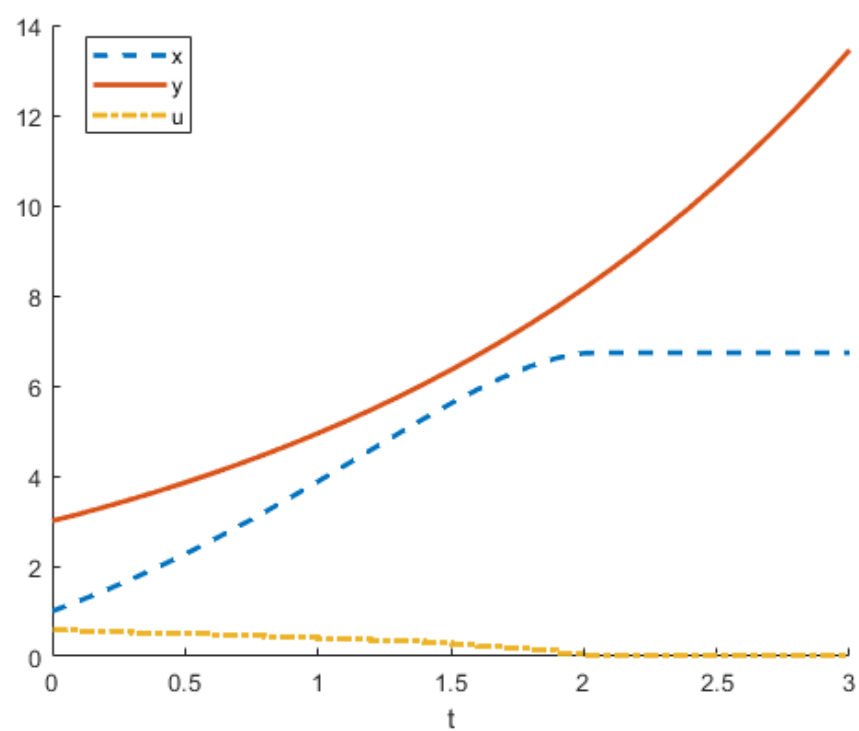


Рис. 4.2: Решение для параметров:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.5$

Если параметр  $\nu = 0.4$ . Уменьшение научно-исследовательского страны А ведет к тому, что страна В медленнее догоняет страну-лидера.

Изменим  $\kappa = 1.1$ . Результаты на рисунке 4.7 во многом походят на слу-

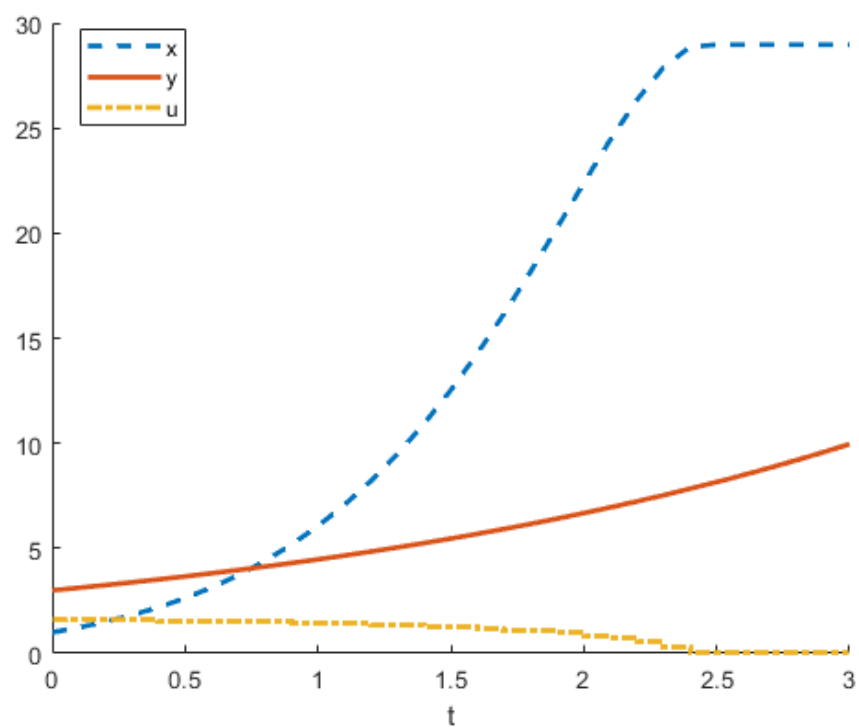


Рис. 4.3: Решение для параметров:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.4$   $b = 2$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

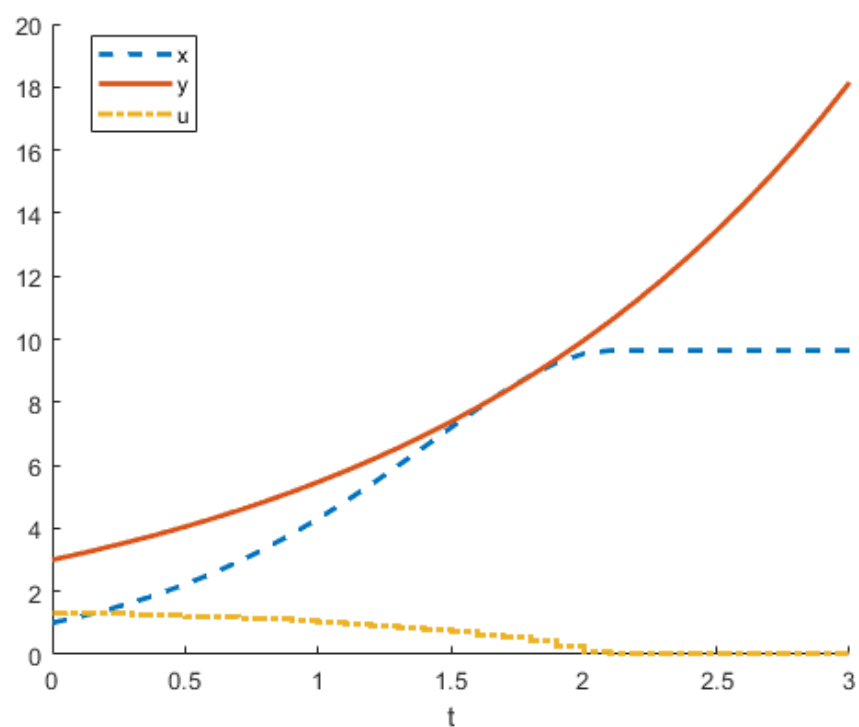


Рис. 4.4: Решение для параметров:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.6$   $b = 2$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.5$

чай из рисунка 4.5, разница в том, что лидирующие позиции страна В удерживает дольше и к концу горизонта планирования практически на уровне со страной лидером.

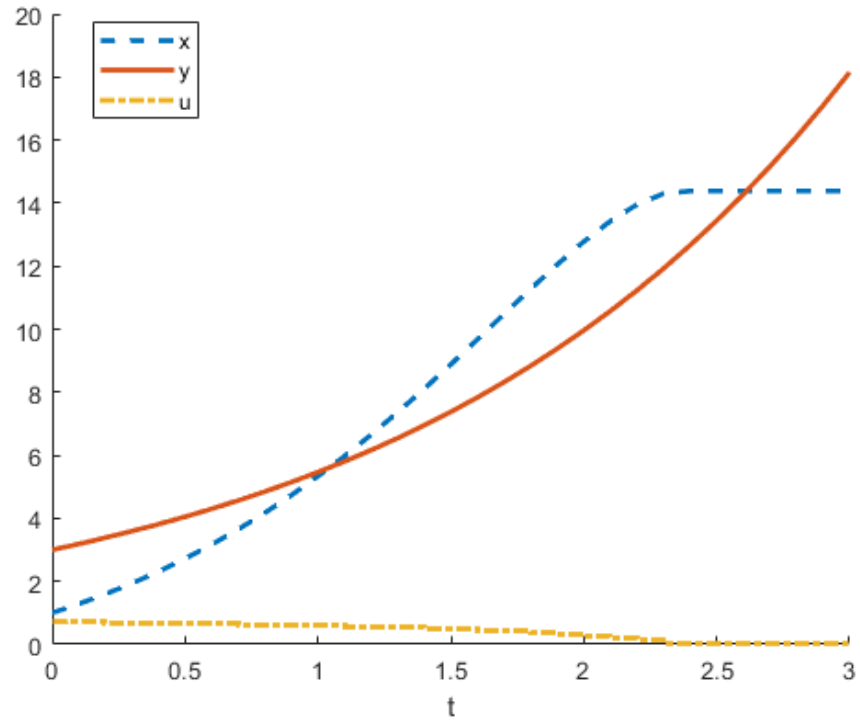


Рис. 4.5: Решение для параметров:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

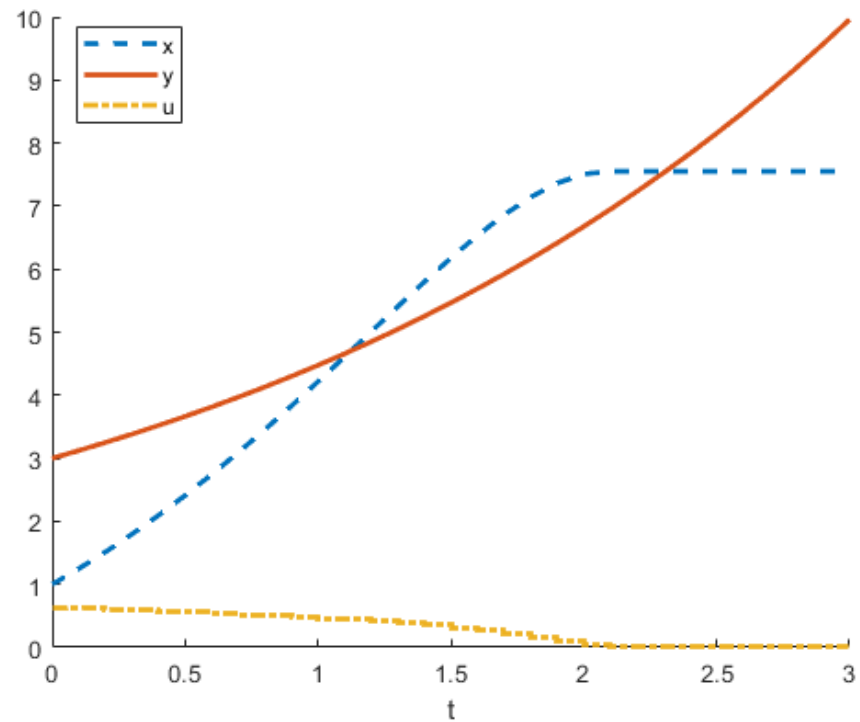


Рис. 4.6: Решение для параметров:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.6$

Положим  $\nu = 1$ ,  $\kappa = 0.9$  рисунок 4.8. Несмотря на то, что показатели страны А высоки, рост страны В не отличается от прогноза описанного выше(рисунок 4.7).

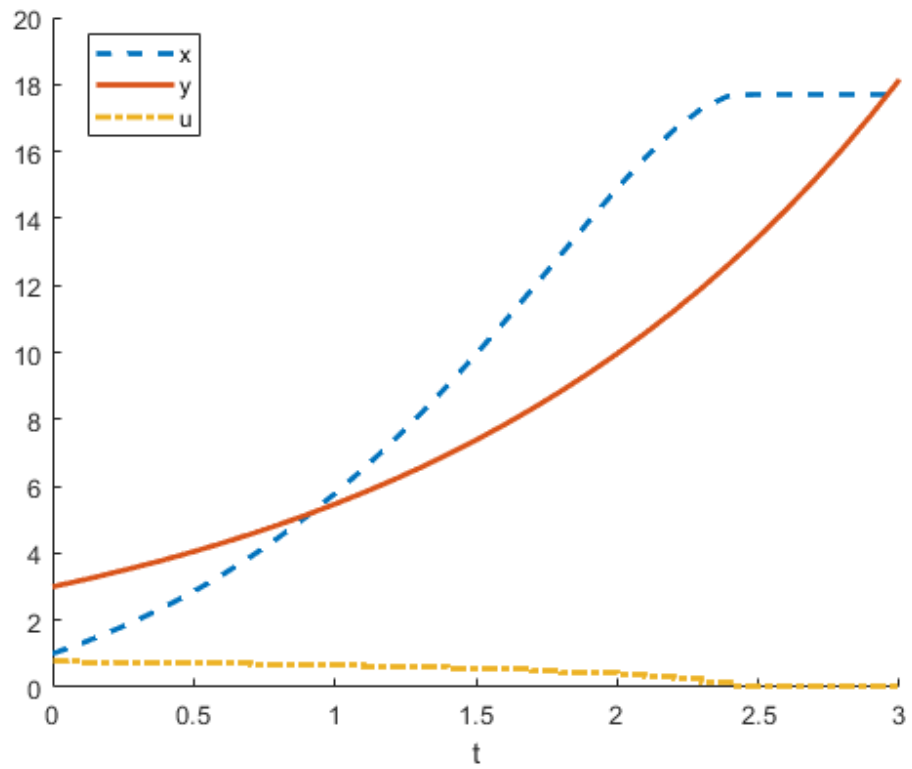


Рис. 4.7: Решение для параметров:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 1.1$

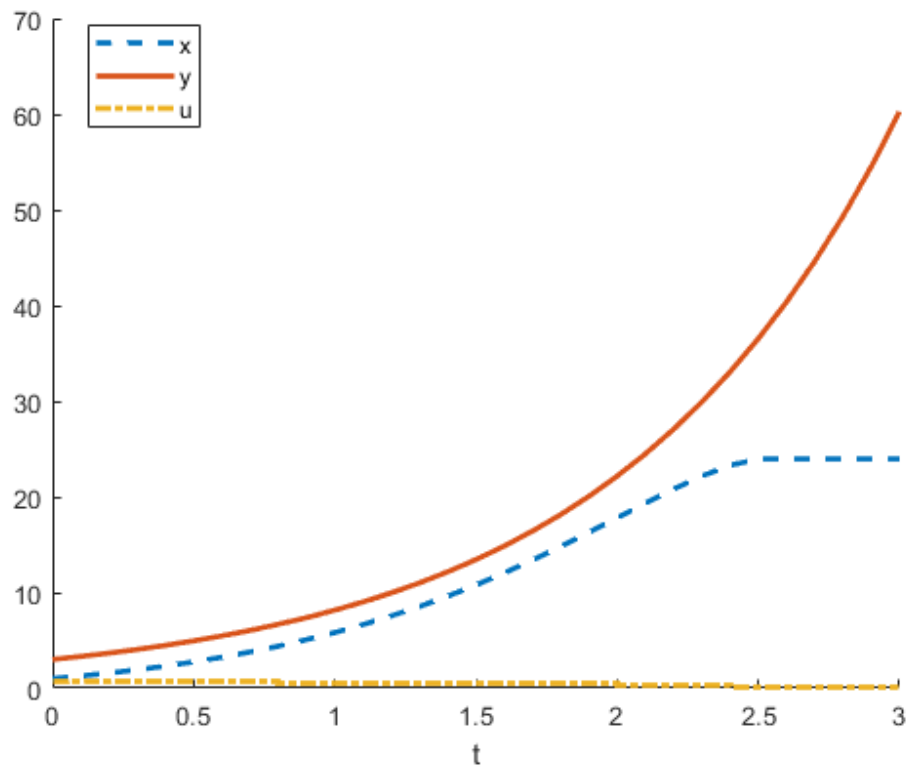


Рис. 4.8: Решение для параметров:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

Решение задачи с помощью только Direct Single Shooting не является эффективным, так как система переходит в стационарное состояние до окончания интервала планирования.

### 4.3 Оптимальное программное решение с применением алгоритма MPC

Реализуем алгоритм MPC для задачи:

$$\begin{aligned}
 J(x, u) &= \int_0^z e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
 \dot{x}(t) &= u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \\
 x(0) &= x_0, \\
 \dot{y}(t) &= \nu y(t), \\
 y(0) &= y_0, u(t) \in [0, b - \varepsilon].
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В данной реализации  $x_{tau}$  состояние системы в измеряемый момент времени,  $w_0$  начальное приближение. Решаем систему для  $tau \in [t_0, T]$ . В начале  $tau = t_0$ :

```
sol = solver('x0', [xtau; w0], 'lbg', [], 'ubg', [], ...
            'lbx', [xtau; lbw], 'ubx', [xtau; ubw]);
```

Выделяем решение.

```
xu = full(sol.x);
u_opt = reshape(xu(n+1:end), r, N);
J_opt = full(sol.f);
```

Ищем следующее состояние системы.

```
res = F('x0', xtau, 'p', u_opt(1));
xtau = full(res.xf);
```

Запоминаем текущее управление и состояние  $X$ .

```
U = [U u_opt(1)];
X = [X xtau];
```



Изменяем начальное приближение:

```
w0 = [u_opt(2:end) zeros(1)]';
```

Переходим на  $\tau = \tau + 1$ .

## 4.4 Результаты численных экспериментов алгоритма MPC

Рассмотрим различные решения задачи (4.1) в зависимости от изменений параметров:

- $b$  – размеры трудовых ресурсов,
- $\gamma$  – емкость абсорбции,
- $\rho$  – параметр дисконтирования,
- $\nu$  – рост научно-исследовательского сектора страны А,
- $\kappa$  – параметр эластичности замещения.

Пусть начальное количество технологий страны лидера ( $y_0$ ) в три раза превышает страны последователя ( $x_0$ ). Для начала положим  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$ . Полученный результат изображен на рисунке 4.9. Из рисунка видно, что страна-последователь при таких параметрах может приблизиться к начальному уровню страны лидера, но не более того.

Положим  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.5$  изменения отображены на рисунке 4.10. За счет увеличения  $\gamma$  показатели страны В растут с той же скоростью, что и страны лидера.

Изменим параметры:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$ ,  $b = 2$ . На рисунке 4.11 видно при данных параметрах страна-последователь обгоняет страну лидера. Упор в данной плане идет не на заимствование ресурсов, а на собственный трудовые ресурсы. Поэтому рассмотрим другие варианты.

Изменим параметр  $\kappa = 0.5$ . Результат отображен на рисунке 4.12. Скорость развития страны В ниже, чем у страны А, но она всё отстает от страны А.

Если параметр  $\nu = 0.4$  (4.13). Уменьшение научно-исследовательского страны А ведет к тому, что экономический рост страны В в разы медленнее. Положим параметры  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$  рисунок 4.14. Довольно быстро страна последователь может обогнать лидера и какое-то время развиваться быстрее и далее развиваться быстрее.

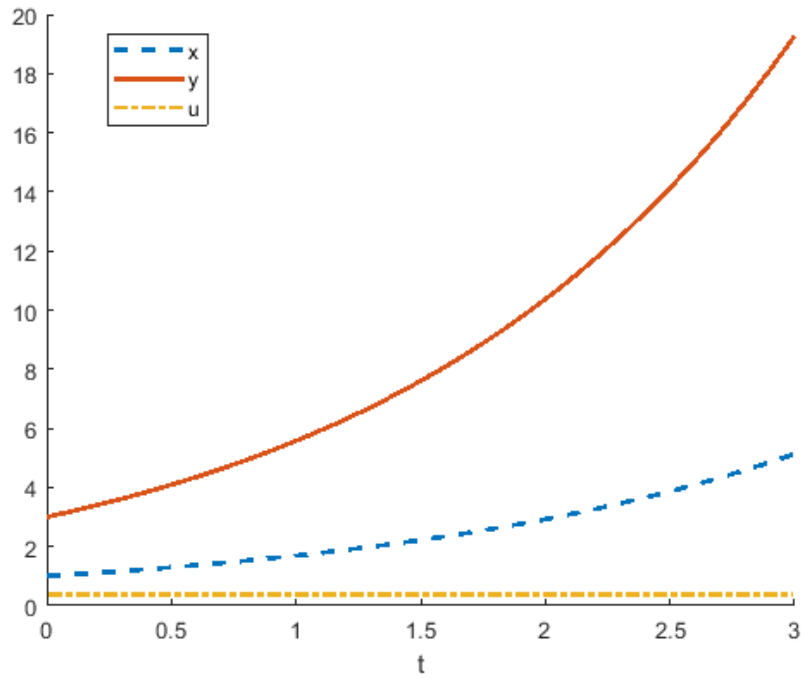


Рис. 4.9: МРС с параметрами:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

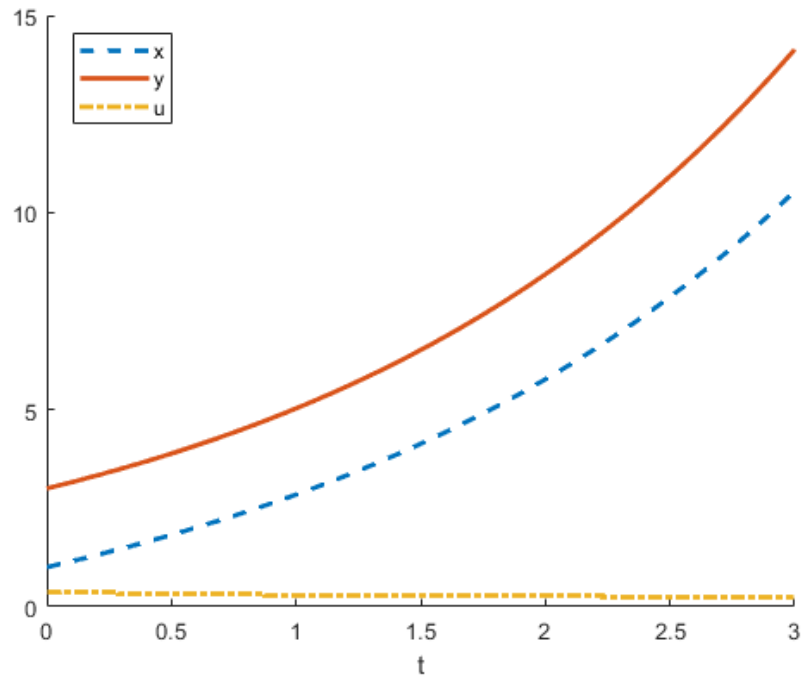


Рис. 4.10: МРС с параметрами:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.5$

Основное влияние на рост показателей страны-последователя оказывает емкость абсорбции, эластичности замещения, размеры трудовых ресурсов страны-последователя и удачный выбор страны-лидера. Благодаря тому, что рост технологического последователя зависит от множества параметров, до-

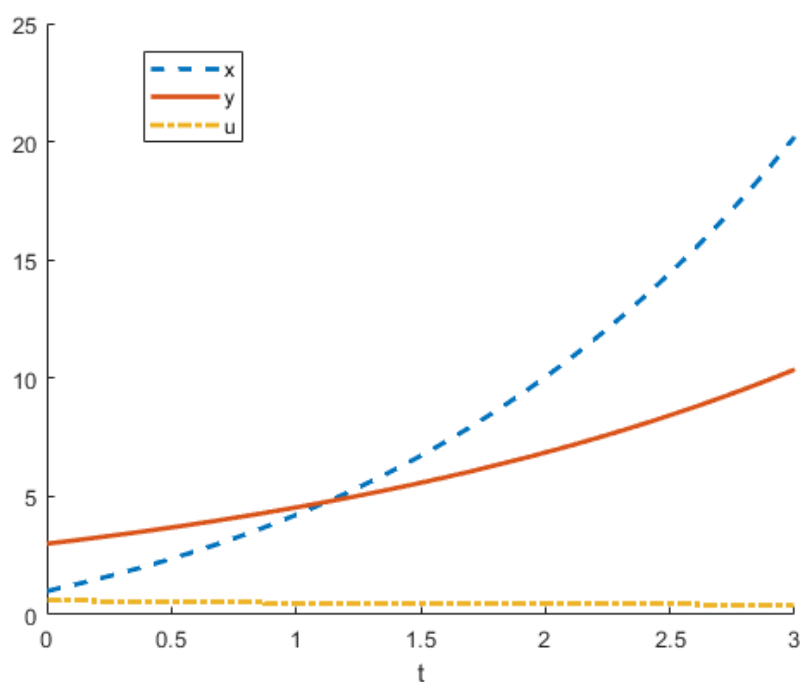


Рис. 4.11: MPC с параметрами:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $b = 2$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

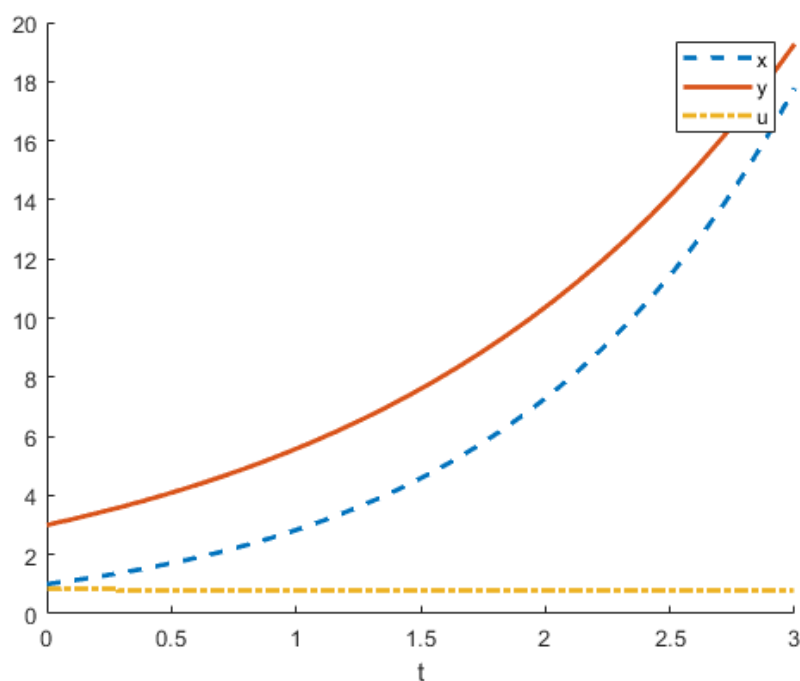


Рис. 4.12: MPC с параметрами:  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 2$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.5$

ступно множество способов достижения нужного уровня развития страны. Во многих случаях недостаток емкости абсорбции или эластичности замещения замещения можно возместит (при наличии) трудовыми ресурсами и наоборот.

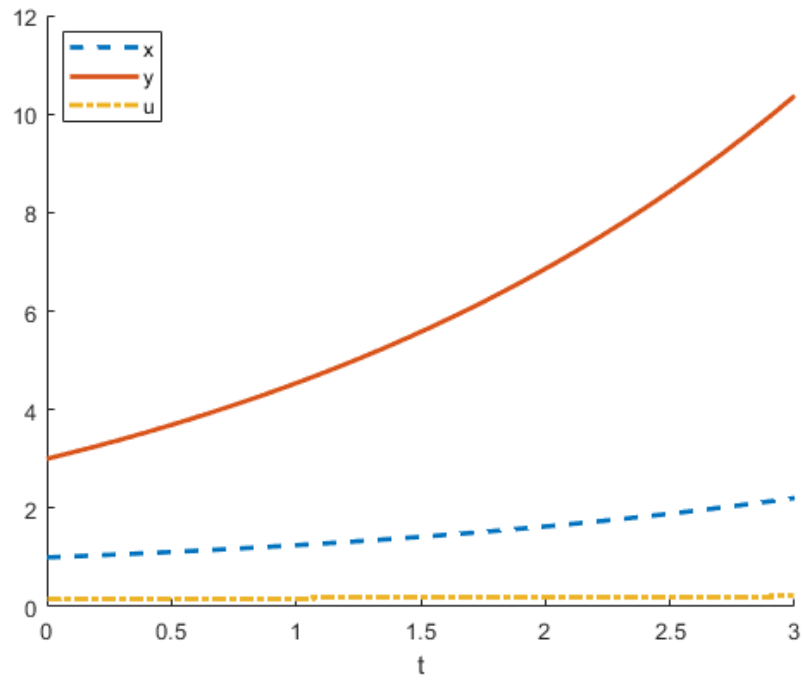


Рис. 4.13: MPC с параметрами:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.6$

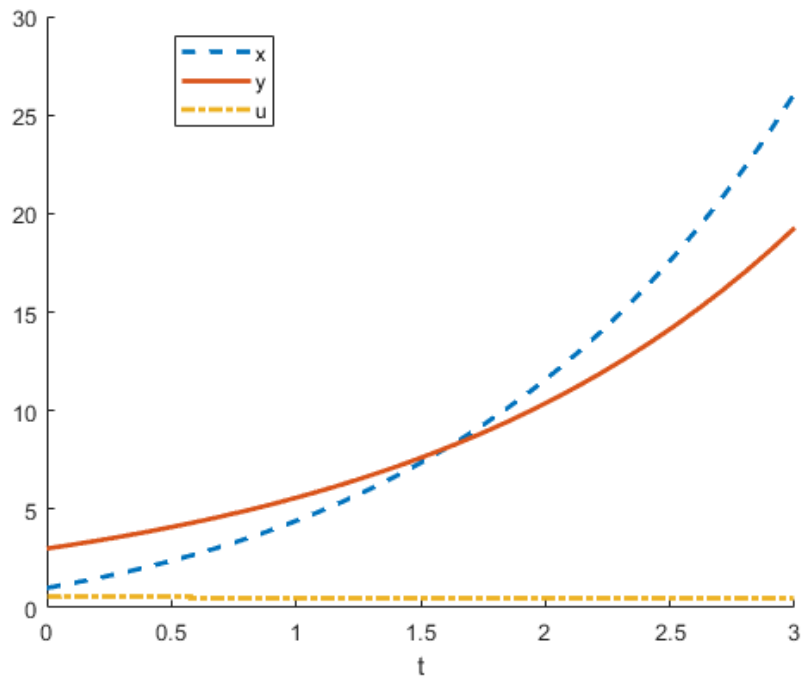


Рис. 4.14: MPC с параметрами:  $\gamma = 0.9$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\kappa = 0.9$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсовой работе рассмотрены: основные результаты качественной теории, наиболее часто применяемые на практике численные методы решения задач оптимального управления [5].

Исследовалась задача оптимального управления специального вида с конечным горизонтом планирования  $z$ . Решение задачи было осуществлено с помощью прямого численного метода Direct Single Shooting и с помощью стратегии МРС. Алгоритмы решения задачи оптимального управления были реализованы в MatLab. Проведен анализ решения задачи.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Альсевич В. В. Методы оптимизаций. Учебное пособие /Габасов Р. Ф., М.Калинин А. И., Кириллова Ф. , Крахотко В. В., Павленок Н.С. , — Изд-во «Четыре четверти», 2011.

2 Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.

3 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Иностранная литература, 1960. – 400 с.

4 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

5 Diehl M. Lecture Note on Optimal control and Estmation. – Springer, 2014.

6 Fontes, F.A.C.C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers / F.A.C.C. Fontes // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – No. 2. – P. 127–143.

7 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.