

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

ГОТОВЕЦ Мария Алексеевна

**МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ  
ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ**

Дипломная работа

Научный руководитель  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Допущена к защите

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ</b> . . . . .	4
1.1 Задачи оптимального управления . . . . .	4
1.2 Принцип максимума и динамическое программирование . . . . .	7
1.3 Классификация численных методов решения. Прямые методы . . . . .	10
<b>ГЛАВА 2 УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ</b> . . . . .	13
2.1 Основные положения теории МРС . . . . .	13
2.2 Условия устойчивости . . . . .	16
2.3 Экономический МРС . . . . .	19
<b>ГЛАВА 3 ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ</b> . . . . .	21
3.1 Математическая модель . . . . .	21
3.2 Задача оптимального управления . . . . .	22
3.3 Редуцированная задача . . . . .	26
3.4 Решение редуцированной задачи . . . . .	27
<b>ГЛАВА 4 ПРИМЕНЕНИЕ ЕМРС К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РОСТЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ</b> . . . . .	34
4.1 Прогнозирующие задачи оптимального управления. . . . .	34
4.2 Оптимальное программное решение с применением Direct Single Shooting . . . . .	36
4.3 Оптимальное программное решение с применением алгоритма МРС. . . . .	38
4.4 Результаты численных экспериментов. . . . .	39
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .	56
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	57

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Экстремальные задачи исследовались с древнейших времен. Постановка зависела от запросов общества. Со временем задачи усложнились и потребовались новые методы их решения. Так во второй половине XX в. получили развитие задачи оптимального управления.

К настоящему моменту сформулированы фундаментальные принципы теории оптимального управления: принцип максимума Л.С. Понтрягина [4]. и метод динамического программирования [3]. Для решения задачи оптимального управления необходимо построить математическую модель объекта или процесса, описывающая его поведение с течением времени под влиянием управляющих воздействий и текущего состояния.

Многие оптимизационные задачи очень сложные, для их решения необходимо применять численные методы. Численные методы решения задач оптимального управления разделяются на: динамическое программирование, непрямые методы, основанные на принципе максимума и прямые методы.

В современном мире для стран возникает задача об оптимизации распределения трудовых ресурсов, направляемых в научно-исследовательский сектор экономики. Данная задача возникает в теории эндогенного экономического роста при обращении к процессам обмена технологиями между странами. Сопряженная с необходимостью оптимизировать технологическую динамику с учетом потока "внешних" знаний, моделируется как задача об оптимизации экономического роста технологического последователя – страны, научно-исследовательский сектор которой во многом ориентирован на заимствование части знаний, производимых страной – технологическим лидером. Именно эта задача в центре внимания.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе приводится обзор основных результатов теории оптимального управления. Сначала обсуждаются формулировки задач, возникающих при оптимизации динамических систем управления. Затем приводятся основные результаты качественной теории — принцип максимума Л.С. Понтрягина [4] и динамическое программирование Р. Беллмана. [3]

Наконец, рассматриваются наиболее часто применяемые на практике численные методы решения задач оптимального управления [5].

### 1.1 Задачи оптимального управления

Постановка любой конкретной задачи оптимального управления включает в себя 5 необходимых элементов: промежуток управления, математическую модель управляемого объекта, класс управлений и ограничений на них, ограничения на фазовую траекторию, критерий качества. Рассмотрим их подробнее.

1) Промежуток управления. Прежде всего задачи оптимального управления разделяются на непрерывные, рассматриваемые на некотором промежутке времени  $T = [t_0, t_f]$ , и дискретные, в которых динамический процесс рассматривается в дискретные моменты времени  $k = 0, 1, \dots, N$ , где  $N$  — натуральное число.

По продолжительности процесса различаются задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания процесса. Выделяются также задачи на бесконечном интервале.

В экономических приложениях динамические процессы, как правило, стационарны, поэтому процесс стартует в момент времени  $t = 0$ . В задачах с конечным промежутком времени момент окончания процесса  $t = z$  называется горизонтом планирования.

2) Математическая модель. Динамика изучаемого процесса моделируется, как правило, дифференциальными

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (1.1)$$

или разностными уравнениями

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $n$ -вектор  $x$  называется состоянием системы,  $r$ -вектор  $u$  называется управлением, функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  задана.

Число переменных состояния  $n$  называется порядком системы управления, число  $r$  — числом входов.

Далее будем рассматривать непрерывные системы вида (1.1).

3) Класс управлений и ограничения на них. Для непрерывного процесса управления указывается класс функций, из которого выбираются управления. Это могут быть: измеримые, дискретные, кусочно-непрерывные, гладкие, импульсные функции и т.д.

Кроме класса доступных управлений задается множество  $U \subset \mathbb{R}^r$  — множество допустимых значений управления. Как правило,  $U$  — компакт в  $\mathbb{R}^r$ .

Далее будем рассматривать управление в классе кусочно-непрерывных функций.

**Определение 1.1** Кусочно-непрерывная функция  $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$  называется доступным управлением, если  $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$ .

4) Ограничения на фазовую траекторию. Ограничения на переменные состояния могут накладываться:

- в начальный момент времени  $t_0$ :

$$x(t_0) \in X_0;$$

- в конечный момент времени  $t_f$ , такие ограничения называются терминальными:

$$x(t_f) \in X_f;$$

- в изолированные моменты  $t_i \in [t_0, t_f], i = \overline{1, m}$ , из промежутка управления — промежуточные фазовые ограничения:

$$x(t_i) \in X_i, \quad i = \overline{1, m},$$

- на всем промежутке управления — фазовые ограничения:

$$x(t) \in X(t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

где  $X_0, X_f, X_i, i = \overline{1, m}, X(t), t \in [t_0, t_f]$ , — заданные подмножества пространства состояний.

Задача управления с  $x(t_f) \in X_f$  называется:

- задачей со свободным правым концом траектории, если  $X_f = \mathbb{R}^n$ ,
- задачей с закрепленным правым концом траектории, если  $X_f = \{x_f\}$ ,
- задачей с подвижным правым концом траектории, если  $X_f$  содержит более одной точки и не совпадает с  $\mathbb{R}^n$ .

Аналогичная классификация имеет место для задач с ограничениями на левый конец траектории  $x_0 \in X_0$ .

Выделяют также смешанные ограничения, учитывающие связи между переменными состояния и переменными управления:

$$(u(t), x(t)) \in S \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, t_f[.$$

**Определение 1.2** Доступное управление  $u(\cdot)$  называется допустимым (или, программой), если оно порождает траекторию  $x(\cdot) = (x(t), t \in [t_0, t_f]$ , удовлетворяющую всем заданным ограничениям задачи.

5) Критерий качества. Качество допустимого управления оценивается так называемым критерием качества

Существуют четыре типа критерия качества:

i) критерий качества Майера (терминальный критерий)

$$J(u) = \varphi(x(t_f)),$$

ii) критерий качества Лагранжа (интегральный критерий)

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

iii) критерий качества Больца

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

iv) задачи быстрогодействия (являются задачами с нефиксированной продолжительностью процесса).

$$J(u) = t_f - t_0 \rightarrow \min.$$

**Определение 1.3** Допустимое управление  $u^0(\cdot)$  называется оптимальным управлением (оптимальной программой), если на нем критерий качества достигает экстремального значения ( $\min$  или  $\max$ ):

$$J(u^0) = \text{extr } J(u),$$

где минимум (максимум) берется по всем допустимым управлениям.

В экономических приложениях наиболее часто встречающимися являются: критерий качества типа Больца — для задач с конечным горизонтом планирования; критерий качества типа Лагранжа — в задачах с бесконечным горизонтом. Нестационарность функции  $f$  выражается наличием множителя дисконтирования  $e^{-\rho t}$ .

## 1.2 Принцип максимума и динамическое программирование

В теории оптимального управления существует два фундаментальных результата: принцип максимума Л.С. Понтрягина [4] и динамическое программирование Р. Беллмана [3]. Приведем эти результаты на примере простейшей задачи оптимального управления.

$$\begin{aligned} J(u) &= \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

### 1.2.1 Принцип максимума Понтрягина

Принципом максимума называется основное необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, связанное с максимизацией гамильтониана:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - f_0(x, u, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x, u, t) - f_0(x, u, t).$$

Здесь  $\psi = \psi(t) \in \mathbb{R}^n$  — сопряженная переменная.

**Теорема 1.1** Пусть  $u^0(\cdot), x^0(\cdot)$  — оптимальное управление и траектория в задаче (1.2)  $\psi^0(\cdot)$  — соответствующее решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}^0(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t),$$

с начальным условием

$$\psi^0(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^0(t_f)).$$

Тогда для любого  $t \in [t_0, t_f]$ , управление  $u^0(t)$  удовлетворяет условию:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{v \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), v, t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Для того чтобы решить задачу с помощью принципа максимума обычно поступают следующим образом. Функцию  $H(x, \psi, u, t)$  рассматривают как функцию  $r$  переменных  $u = (u_1, \dots, u_r)$ . Далее проводят поточечную оптимизацию для каждого фиксированного набора  $(x, \psi, t)$

$$U(x, \psi, t) = \arg \max_{v \in U} H(x, \psi, v, t). \quad (1.3)$$

Если исходная задача (1.2) имеет решение, функция (1.3) определена на непустом множестве значений  $(x, \psi, t)$ .

Пусть  $u$  в виде (1.3) найдена, тогда можно рассмотреть следующую систему с граничными условиями:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(x, \psi, u(x, \psi, t), t) = f(x, \psi, u(x, \psi, t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, \psi, u(x, \psi, t), t), \quad \psi(t_f) = -\frac{\partial \varphi(x(t_f))}{\partial x}.$$

Таким образом получена специальная краевая задача, которая называется краевой задачей принципа максимума.

Можно ожидать, что имеются лишь отдельные изолированные пары функций  $x(\cdot), \psi(\cdot)$ , удовлетворяющие краевой задаче принципа максимума. Подставив одну такую пару в (1.3), получим:

$$u(t) = u(x(t), \psi(t), t), \quad t \in [t_0, t_f],$$

которая удовлетворяет принципу максимума и, значит, может претендовать на роль оптимального управления, а функция  $x(t) = x(t \mid t_0, x_0, u(\cdot))$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , — на роль оптимальной траектории в задаче.



Отметим, что принцип максимума в задаче (1.2) является лишь необходимым условием оптимальности, поэтому построенное управление может не быть оптимальным. Построенная функция называется экстремалью Понтрягина.

### 1.2.2 Динамическое программирование

Рассмотрим задачу (1.2) и предположим, что она имеет решение. Следуя динамическому программированию [3], погрузим задачу (1.2) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_{\tau,z}(u) &= \varphi(x(t_f)) + \int_{\tau}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= f(x, u), \quad x(\tau) = z, \quad x(t_f) \in X, \\ u(t) &\in, \quad t \in T = [\tau, t_f], \end{aligned} \quad (1.4)$$

зависящих от скаляра  $\tau \in T$  и  $n$ -вектора  $z$ .

Пару  $(\tau, z)$  назовем позицией в задаче (1.2). Обозначим через

$$B(\tau, z) = \min_{u(t|\tau,z)} J_{\tau,z}(u)$$

минимальное значение критерия качества в задаче (1.4) для позиции  $(\tau, z)$ . Если для позиции  $(\tau, z)$  задача (1.4) не имеет решения, то положим  $B(\tau, z) = +\infty$ . Пусть

$$X_{\tau} = \{z \in \mathbb{R}^n : B(\tau, z) < +\infty\}.$$

Функцию

$$B(\tau, z), \quad z \in X_{\tau}, \quad \tau \in T, \quad (1.5)$$

называют функцией Беллмана.

Уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция (1.5), называют уравнением Беллмана

$$-\frac{\partial B(\tau, z)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \left\{ \frac{\partial B(\tau, z)}{\partial z} f(z, v) + f_0(z, v) \right\}, \quad z \in X_{\tau}, \quad \tau \in T. \quad (1.6)$$

Выделяя из семейства (1.4) задачу с  $\tau = t_f$ , находим граничное условие для уравнения Беллмана

$$B(t_f, z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in X, \\ +\infty, & z \notin X. \end{cases} \quad (1.7)$$

Схема применения динамического программирования состоит в следующем:

- Для задачи составляется уравнение Беллмана.
- По решению уравнения строится позиционное решение.

Эффективно строить решение уравнения Беллмана удастся в редких случаях. В общем случае необходимо привлекать численные методы.

## 1.3 Классификация численных методов решения. Прямые методы

Численные методы решения задач оптимального управления можно разделить на три категории:

- динамическое программирование;
- не прямые методы, основанные на принципе максимума;
- прямые методы.

Основная трудность динамического программирования состоит в табулировании функций многих переменных, что приводит к так называемому "проклятию размерности".

Проблема не прямых методов в том, что не существует универсальных способов решения краевых задач для обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений.

Прямые методы основаны на сведении задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования посредством параметризации функций управления.

Последняя группа методов является самой распространенной в практических приложениях, поэтому далее описываются два представителя класса прямых методов: Direct Single Shooting(DSS) и Direct Multiple Shooting(DMS).

### 1.3.1 Direct Single Shooting

Опишем основные принципы метода DSS на примере задачи управления нелинейной стационарной системой с критерием качества типа Больца, со смешанными и терминальными ограничениями:

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t))dt + \varphi(x(t_f)) \rightarrow \min_{x, u},$$

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0, \\
\dot{x} &= f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f], \\
h(x(t), u(t)) &\leq 0, \quad t \in [0, t_f], \\
r(x(t_f)) &\leq 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Обозначим через  $q \in \mathbb{R}^{rN}$  вектор параметров управления; само управление будем обозначать  $u(t, q)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , подчеркивая его зависимость от параметра  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ . В большинстве случаев параметризация является кусочно-постоянной: выбирается фиксированная сетка  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$  и  $N$  параметров  $q_i \in \mathbb{R}^r$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ ; тогда

$$u(t, q) = q_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}[ , \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Direct Single Shooting является последовательным методом, это означает, что переменная  $x$  исключается из задачи (1.8). При выбранном векторе  $q$  состояние  $x(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ , выражается как

$$x(t_i, q) = x(t_i | t_{i-1}, x(t_{i-1}, q), q_{i-1}), \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$x(t_0, q) = x_0.$$

Ограничения на траекторию при выбранной параметризации, как правило, проверяют в узлах выбранной сети, т.е. требуют выполнения:

$$h(x(t_i, q), u(t_i, q)) \leq 0, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

В результате получим задачу конечномерной оптимизации:

$$\begin{aligned}
J(q) &= \int_0^{t_f} f_0(x(t, q), u(t, q)) dt + \varphi(x(t_f, q)) \rightarrow \min_q, \\
h(x(t_i, q), u(t_i, q)) &\leq 0, \quad i = \overline{0, N-1}, \\
r(x(t_f, q)) &\leq 0, \quad q \in \mathbb{R}^{rN}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Данный метод позволяет обойти проблему "проклятия размерности".

### 1.3.2 Direct Multiple Shooting

Опишем основные принципы метода DMS на примере задачи управления нелинейной стационарной системой с критерием качества типа Больца, со смешанными и терминальными ограничениями (1.8). Так же как и в DSS

введем  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ , получим:

$$u(t, q) = q_i, t \in [t_i, t_{i+1}[, i = \overline{0, N-1}.$$

Затем решаем ОДУ на каждом интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}[, i = \overline{0, N-1}$ , начиная с искусственных начальных значений  $s_i$ :

$$\dot{x}_i(t, s_i, q_i) = f(x_i(t|s_i, q_i), q_i), t \in [t_i, t_{i+1}[,$$

$$x_i(t_i|s_i, q_i) = s_i.$$

Таким образом, получим отрезки траектории  $x_i(t|s_i, q_i)$ .

Аналогично, численно вычисляем интегралы

$$F_i(s_i, q_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(x_i(t, s_i, q_i), q_i) dt.$$

Выберем сетку, в которой проверяем ограничения неравенства; здесь подчеркиваем зависимость от параметра  $q \in \mathbb{R}^{rN}$ . В большинстве случаев параметризация является кусочно-постоянной: выбирается фиксированная сетка. Получим задачу:

$$J(q) = \sum F_i(s_i, q_i) + \varphi(s_N) \rightarrow \min_{q, s},$$

$$x_0 - s_0 = 0,$$

$$x_i(t_{i+1}|s_i, q_i) - s_{i+1} = 0, i = \overline{0, N-1},$$

$$h(s_i, q_i) \leq 0, i = \overline{0, N},$$

$$r(s_N) \leq 0.$$

Обратим внимание, что выбрав  $f_i(s_i, q_i) = x_i(t_{i+1}|s_i, q_i)$  условия непрерывности могут быть интерпретированы как динамическая система с дискретным временем

$$s_{i+1} = f_i(s_i, q_i),$$

и вышеупомянутая задача оптимального управления имеет точно такую же структуру, что и задача оптимального управления с дискретным временем.

Отличие Direct Single Shooting от Direct Multiple Shooting состоит в том, что в первом случае траектория вычисляется последовательно, во втором - одновременно. В главе 4 будет представлена программная реализация прямых методов на примере конкретной задачи оптимального управления.

## ГЛАВА 2

### УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

В этой главе описываются основные положения теории управления по прогнозирующей модели — MPC (Model Predictive control) [6, 7]. MPC — это один из современных подходов к построению управлений типа обратной связи (MPC-регулятора) в задачах управления линейными и нелинейными системами с ограничениями. Методы MPC получили широкое распространение на практике благодаря простоте реализации, возможности учитывать ограничения на управляющие и фазовые переменные, требования к качеству процессов, нелинейности систем.

В настоящей главе описывается основной алгоритм построения MPC-регулятора, некоторые подходы к обеспечению устойчивости системы, замкнутой построенной обратной связью, и модификация, которая носит название экономического MPC — EMPC (Economic MPC).

#### 2.1 Основные положения теории MPC

Рассмотрим нелинейный объект управления с ограничениями на управляющие воздействия, поведение которого при  $s \geq t$  описывается (прогнозируется, предсказывается) следующей математической моделью:

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t, \quad (2.1)$$

$$u(s) \in U(s), \quad s \geq t,$$

где, как и ранее,  $x(s) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(s) \in \mathbb{R}^r$  — состояния и управления модели (2.1).

В модели (2.1) считаются заданными:

- множество  $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ , содержащее все возможные начальные состояния объекта управления в начальный момент времени  $t_0$  ( $t \geq t_0$ );
- $n$ -вектор  $x_t$  (при  $t \geq t_0$ ), который описывает состояние физического объекта в момент времени  $t$ ;
- функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , обеспечивающая существование и единственность решений  $x(s)$ ,  $s \geq t$ , уравнения (2.1) при любых кусочно-непрерывных управлениях  $u(s)$ ,  $s \geq t$ , и начальных состояниях  $x_t \in X_0$ ;

- множества допустимых управлений  $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$ ,  $t \geq t_0$ .

Предположим, что система (2.1) асимптотически управляема [7] на  $X_0$ .

Относительно параметров прогнозирующей модели сделаем следующие предположения

**Предположение 2.1** Для всех  $t \in \mathbb{R}$  множество  $U(t)$  содержит начало координат и  $f(0, 0, t) = 0$ ,  $t \geq t_0$ .

**Предположение 2.2** Функция  $f$  непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$  для любой фиксированной пары  $(t, u)$ .

**Предположение 2.3** Множество  $U(t)$  компактно для всех  $t$  и для каждой пары  $(t, x)$  множество  $f(x, U(t), t)$  выпукло.

**Предположение 2.4** Для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$ , множество  $\{\|f(x, u, t)\|, t \in \mathbb{R}, x \in X, u \in U(t)\}$  — компакт.

Предположение 2.1 не является ограничительным, поскольку его можно удовлетворить заменой переменных системы. Предположения 2.2 и 2.3 необходимы для того, чтобы гарантировать существование решения задачи оптимального управления для системы (2.1). Условия предположения (2.4) автоматически выполняются для стационарных систем, так как образ компактного множества для непрерывной функции компактен.

Цель управления объектом, представленным математической моделью (2.1), состоит в том, чтобы построить управление типа обратной связи (обратную связь), которое переводит объект в начало координат (в асимптотическом смысле), т.е.  $x_t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Одним из популярных подходов для достижения поставленной цели является МРС-регулятор.

Для достижения указанной цели будем использовать методы МРС.

Выберем горизонт управления  $T > 0$  и зададим фиксированную сетку  $0 = t_0 < t_1 < \dots$ , с шагом  $\delta$  ( $0 < \delta < T$ ), т.е.  $t_i = t_0 + i\delta$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Обратная связь (стратегия МРС) строится на основе решения в каждый момент времени  $t_i$  так называемой *прогнозирующей задачи оптимального управления* на конечном промежутке времени  $[t_i, t_i + T]$ :

$$\mathcal{P}(t, x_t, T) = \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s) ds + W(t + T, x(t + T)), \quad (2.2)$$

при условиях

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t,$$

$$u(s) \in U(s), \quad s \in [t, t + T],$$

$$x(t + T) \in S,$$

где  $t$  обозначает реальное физическое время,  $t_i$  — текущий момент времени, в то время как  $s$  используется для обозначения переменной времени в прогнозирующей модели. Как уже отмечалось выше, вектор  $x_t$  обозначает состояние объекта в момент времени  $t$ .

Понятия допустимого и оптимального управления в задаче оптимального управления (2.2) вводятся стандартно (см. главу 1). Класс управляющих воздействий, в котором рассматривается задача (2.2) может быть классом измеримых, кусочно-непрерывных функций или дискретных управляющих воздействий, т.е. таких функций, что

$$u(t_k) \equiv u(s), \quad s \in [t_k, t_k + \delta].$$

Теоретические результаты ниже получены в [6] для измеримых функций. Однако, принимая во внимание тот факт, что прогнозирующая задача, как правило, требует решения с привлечением вычислительных методов, при реализации алгоритмов МРС разумно принять класс дискретных управляющих воздействий. Условия, которые необходимо заменить в [6] для учета данной особенности, будут приведены ниже.

Параметрами МРС-регулятора (параметрами настройки) являются параметры задачи оптимального управления, которые не связаны с системой управления. Понятно, что здесь они представлены:

1. горизонтом управления  $T$ ;
2. функциями текущей и конечной (терминальной) стоимостей  $L$  и  $W$ ;
3. терминальным множеством  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

Алгоритм МРС заключается в выполнении следующих шагов для каждого момента времени  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ :

1. Измеряется текущего состояния объекта  $x_{t_i}$ .
2. Вычисляется оптимального (программного) управления  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i + T]$ , — решения задачи оптимального управления  $\mathcal{P}(t_i, x_{t_i}, T)$ .
3. Управление  $u^*(t) := u^0(t)$  при  $t \in [t_i, t_i + \delta]$  подается на вход объекта управления (остальные значения оптимального программного управления  $u^0(t)$ ,  $t \geq t_i + \delta$  отбрасываются либо используются в качестве начальных приближений в следующий момент  $t_i + \delta$ ).

4. Процедура повторяется для следующего момента  $t_{i+1}$ .

На рис. 2.1 приведена иллюстрация описанного выше алгоритма.



Рис. 2.1: Стратегия MPC

В результате применения алгоритма MPC будет получено управление, которое является управлением типа обратной связи, поскольку в течение каждого интервала  $[t_i, t_i + \delta]$  управление  $u^*(t) = u^*(t|x_{t_i})$  определяется, как функция состояния  $x_{t_i}$ .

Для фиксированного конечного горизонта  $T$  траектория замкнутой системы не обязательно совпадают с траекторией разомкнутого контура — решением прогнозирующей задачи оптимального управления  $x^0(s)$ ,  $s \in [t_i, t_i + T]$ . Следовательно, нет гарантии, что MPC-регулятор обеспечит устойчивость замкнутой системы. На самом деле свойство устойчивости значительно зависит от перечисленных выше параметров настройки алгоритма MPC.

Условия на параметры задачи (2.2), гарантирующие устойчивость замкнутого контура, будем называть условиями устойчивости. Обсудим их в следующем разделе.

## 2.2 Условия устойчивости

В работе [6] приведены обобщающие условия устойчивости, которым удовлетворяют все предложенные до сих пор алгоритмы MPC, построенные на основе прогнозирующих задач вида (2.2).

Основной результат работы [6] утверждает, что обратная связь, полученная в результате применения стратегии MPC, является стабилизирующей при условии, что горизонт планирования  $T$ , функции стоимостей  $L$  и  $W$  и терминальное множество ограничений  $S$  удовлетворяют следующим условиям устойчивости:



1. Множество  $S$  замкнуто и содержит начало координат.
2. Функция  $L$  непрерывна,  $L(\cdot, 0, 0) = 0$ , и существует непрерывная положительно определенная неограниченная функция  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , такая что  $L(t, x, u) \geq M(x)$  для всех  $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ . Более того, «расширенное множество скоростей»  $\{(v, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : v = f(t, x, u), l \geq L(t, x, u), u \in U(t)\}$  является выпуклым при любых  $(t, x)$ .
3. Функция  $W$  положительно полуопределена и непрерывно дифференцируема.
4. Временной горизонт  $T$  таков, что множество  $S$  достижимо за время  $T$  из любого начального состояния и из любой точки в сгенерированных траекториях, т.е. существует множество  $X \supseteq X_0$ , такое что для каждой пары  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$  существует управляющее воздействие  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , переводящее модель (2.1) на терминальное множество  $S$ :

$$x(t_0 + T | t_0, x_0, u) \in S,$$

при этом траектории не покидают множества  $X$ :

$$x(t | t_0, x_0, u) \in X, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

5. Существует скаляр  $\epsilon > 0$  такой, что при любых  $t \in [T, \infty)$  и  $x_t \in S$ , найдется управляющее воздействие  $\tilde{u}(s) \in U(s)$ ,  $s \in [t, t + \epsilon]$ , удовлетворяющее условию

$$W_t(t, x_t) + W_x(t, x_t) \cdot f(t, x_t, \tilde{u}(t)) \leq -L(t, x_t, \tilde{u}(t)), \quad (2.3)$$

а также

$$x(t + r | t, x_t, \tilde{u}) \in S, \quad r \in [0, \epsilon]. \quad (2.4)$$

Обсудим приведенные условия. Условия 1 необходимы для того, чтобы гарантировать существование решения прогнозирующей задачи оптимального управления. Первая часть условий устойчивости 2 и условия 3 тривиально удовлетворяются для квадратичных функций стоимости  $L(x, u) = x^T Q x + u^T R u$  и  $W(x) = x^T P x$ , где  $Q > 0$  и  $R, P \geq 0$ . Вторая часть условия устойчивости 2 о выпуклости «расширенного множества скоростей» — это общеизвестное требование существования решения в задаче оптимального управления с интегральным критерием. Учитывая 2.3, оно автоматически выполняется, если  $L$  выпуклая и  $f$  линейна по  $u$ , или если  $L$  не зависит от

и. Последнее является следствием того, что  $f(x, U(t), t)$  и  $l : l \geq L(t, x)$  — выпуклые множества.

Условие устойчивости 4 необходимо, чтобы гарантировать существование допустимого управляющего воздействия в последовательности прогнозирующих задач оптимального управления. В предположениях 2.1–2.4 не было утверждения о допустимости этих задач. Эти предположения могут быть использованы априори для проверки реализуемости алгоритма МРС, так как они включают только параметры математической модели объекта. На более позднем этапе, при построении прогнозирующих задач, можно попытаться удовлетворить желаемым свойствам допустимости и устойчивости с помощью выбора соответствующих параметров настройки.

Условие (2.3) является важнейшим элементом условий устойчивости. Оно требует, чтобы для всех состояний  $x$ , принадлежащих терминальному множеству  $S$ , существовало значение управления  $\tilde{u}$  такое, что выполняется неравенство (2.3), которое интерпретируется как существование управления, который переводит систему к внутренним множествам уровня  $W$  со скоростью  $L$ . В случае квадратичных функций  $W$ , их множества уровня — эллипсоиды с центром в начале координат, и вектор скорости должен указывать внутрь. Условие (2.4) просто утверждает, что траектория связанный с  $\tilde{u}$  не покидает множество  $S$  сразу. Условие (2.3) используется при доказательстве того факта, что некоторая функция  $V^\delta$ , построенная по оптимальным значениям прогнозирующих задач оптимального управления «уменьшается». Тогда используя аргументы Ляпунова, удастся доказать устойчивость замкнутой системы.

Приведем важный результат, гарантирующий, что алгоритм МРС реализуем, т.е. в каждый момент  $t_i, i = 0, 1, \dots$ , найдется решение соответствующей прогнозирующей задачи, будет найдено нужное значение обратной связи для подачи его на объект управления.

**Утверждение 2.1** [6] Пусть выполняются предположения 2.1 – 2.4 и параметры настройки удовлетворяют условиям устойчивости 1–5. Тогда для любого  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X_0$  задача оптимального управления  $\mathcal{P}(t_0, x_0, T)$  имеет решение.

Рассмотрим последовательность позиций  $(t_i, x_i)$  такую, что  $x_i = x^0(t_i | t_{i-1}, x_{i-1}, u^0)$  — значение в момент времени  $t_i$  оптимальной траектории  $\mathcal{P}(t_{i-1}, x_{i-1}, T)$ . Тогда решение  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  для всех  $i \geq 1$  также существует.

Кроме того, построенная алгоритмом МРС траектория продолжима вправо при всех  $t \geq t_0$ .

Утверждение 2.2 в литературе называют результатом о *начальной и рекуррентной допустимости* прогнозирующих задач оптимального управления.

Доказательство этого факта достаточно тривиально. Поскольку выполняются предположения 2.1 – 2.4, и существует допустимое управление, переводящее систему (2.1) на терминальное множество  $S$  (согласно условию 4), то задача  $\mathcal{P}(t_0, x_0, T)$  удовлетворяет известным теоремам существования решений в задачах оптимального управления в классе измеримых управляющих воздействий. Далее, при  $x_i = x^0(t_i | t_{i-1}, x_{i-1}, u^0)$  в задаче  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  выберем управляющее воздействие  $u(t) = u^0(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i + T - \delta]$ , и дополним его на промежутке  $[t_i + T - \delta, t_i + T]$  управлением  $\tilde{u}$ , о котором идет речь в условии 5. Построенное управляющее воздействие допустимо в задаче  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$ , поскольку оно удовлетворяет всем ограничениям задачи. Снова прибегая к условиям существования решений в задачах оптимального управления, получим, что оптимальное программное управление в задаче  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  существует.

Если прогнозирующие задачи оптимального управления  $\mathcal{P}(t_i, x_i, T)$  решаются в классе дискретных управляющих воздействий, то, как было описано в главе 1, они фактически сводятся к задачам нелинейного программирования. Соответственно, предположения 2.1 – 2.4 ослабляются таким образом, чтобы задача нелинейного программирования имела решение, а начальная допустимость задачи  $\mathcal{P}(t_0, x_0, T)$  выводится в одно из основных требований условий устойчивости.

Основной результат по устойчивости дает следующая

**Теорема 2.1** [6] Предположим, что выполняются предположения (2.1 – 2.4), а параметры настройки удовлетворяют условиям устойчивости 1–5. Тогда для достаточно периода квантования  $\delta$  система, замкнутая обратной связью МРС, асимптотически устойчива в том смысле, что  $\|x^*(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.3 Экономический МРС

В последние годы фокус исследований в рамках МРС сместился в сторону приложений, в которых экономика процесса (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска, прибыли) важнее стабилизации некоторого заданного положения равновесия. Новое направление в теории МРС получило название экономического МРС – Economic Model Predictive Control

(ЕМРС). В силу основных свойств ЕМРС, естественной областью его применения являются задачи экономического роста, динамические задачи микро- и макроэкономики, задачи оптимизации портфелей.

В экономическом МРС функция  $L$ , задается экономическими требованиями к процессу управления, тогда условие  $L(x_1, u_1) \leq L(x, u)$ , как правило, не выполняется. Точка  $(x_1, u_1)$  – магистраль - определяется из задачи нелинейного программирования [7]

$$L(x, u) \rightarrow \min, \quad f(x, u) = 0, \quad u \in U, \quad x \in X.$$

Базовый алгоритм ЕМРС повторяет приведенный выше:следующих шагов для каждого момент времени  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  решается задача (2.2) и первое значение ее оптимального программного управления подается на вход объекта (2.1) до поступления следующего измерения состояния в момент  $t_i + 1$ . Однако, из-за нарушения предположений относительно стоимости этапа  $L$  стандартные рассуждения доказательства устойчивости оказываются неприменимы. Модификация проводится с использованием теории диссипативности динамических систем.

Как и в случае задачи стабилизации, использование прогнозирующей задачи (2.2) без дополнительных требований может привести к тому, что траектория замкнутой системы в асимптотике не достигает магистрали.

## ГЛАВА 3

# ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

В данной главе будет рассматриваться задача об оптимизации экономического роста страны-последователя. Математическая модель роста технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера, приводится согласно идеям работы [2]. Для рассматриваемой модели формулируется задача оптимального управления, которая решается с использованием Принципа максимума. Численно эта задача будет решена в главе 4.

### 3.1 Математическая модель

Рассмотрим процесс экономического развития двух стран  $A$  и  $B$ . Предполагаем, что страна  $A$  — автаркический технологический лидер, а страна  $B$  — технологический последователь.

Каждая из стран динамически перераспределяет некоторый имеющийся у нее трудовой ресурс ( $L$ ) между производственным и научно-исследовательским секторами экономики. Производственный сектор осуществляет производство потребляемых продуктов, а научно-исследовательский сектор генерирует новые технологии для производственного сектора.

Особенность рассматриваемой модели в том, что научно-исследовательский сектор страны-последователя может частично заимствовать технологии у страны-лидера.

Пусть,  $L^A$  и  $L^B$  — постоянные размеры трудовых ресурсов стран  $A$  и  $B$ ,  $L_N^A$  ( $L_N^B$ ) — доля трудовых ресурсов, направляемых в научно-исследовательский сектор экономики страны. Эта величина играет роль управления. Следовательно,  $L^A - L_N^A$  ( $L^B - L_N^B$ ) выделяется в производственный сектор.

Через  $a^A$  и  $a^B$  обозначим показатели продуктивности научно-исследовательских секторов стран, а  $\rho^A$  и  $\rho^B$  — параметры дисконтирования в странах  $A$  и  $B$ .

Далее пусть  $N^A(t)$  и  $N^B(t)$  — количество технологий накопленных и доступных до момента времени  $t$  в странах  $A$  и  $B$  — положительные дей-

ствительные числа.

Будем считать что приращение количества накопленных технологий в единицу времени, следующую за произвольным моментом времени  $t \geq 0$ , пропорционально:

- размеру  $N(t)$  имеющегося к моменту  $t$  запаса технологий,
- текущей величине  $L_N(t)$  трудового ресурса, направляемого в научно-исследовательский сектор экономики:

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t). \quad (3.1)$$

Здесь  $a > 0$  параметр, характеризующий продуктивность научно-исследовательского сектора.

Будем считать, что величина  $N^B(t)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), L_N^B(t) \in [0, L^B[, \gamma \in (0, 1), \quad (3.2)$$

где  $\gamma \in (0, 1)$  – постоянный параметр, характеризующий емкость абсорбции страны  $B$ , а  $L_N^B(t)$  – доля трудовых ресурсов, направляемых в момент времени  $t$  в научно-исследовательский сектор экономики страны  $B$ ; эта величина играет роль управления.

Уравнение (3.2) для страны-последователя предполагает, что в каждый момент времени  $t$  технологический последователь абсорбирует часть  $\gamma N^A(t)$  полного объема  $N^A(t)$  технологий, произведенных страной-лидером.

Стоит отметить, что в соответствии с (3.2) такое заимствование происходит лишь при  $L_N^B(t) > 0$ , т.е. обязательное условие при осуществлении страной-последователем  $B$  собственных научно-исследовательских разработок.

## 3.2 Задача оптимального управления

Пусть количество продуктов, выпускаемых каждой отдельно взятой отраслью производства в единицу времени, следующую за моментом времени  $t \geq 0$ , пропорционально размеру трудовых ресурсов, используемых в этой отрасли в момент  $t$ . Считая, что коэффициент пропорциональности постоянен и один и тот же для всех отраслей, положим его равным единице. Тогда

плотность  $Y(t)$  распределения размера выпуска в отраслях производства в единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ :

$$Y(t) = \frac{L - L_N(t)}{N(t)}.$$

Считаем, что все произведенные продукты потребляются. Следовательно за критерий успешности экономики в единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ , возьмем индекс потребления Диксита-Штиглица, представляющий собой агрегированную характеристику общего количества потребляемых продуктов и их разнообразия за единицу времени, следующую за моментом  $t \geq 0$ :

$$D(t) = \left\{ \int_0^{N(t)} [Y(t)]^\alpha dj \right\}^{1/\alpha} = (L - L_N(t)) [N(t)]^{1/\alpha - 1}.$$

где  $\alpha \in (0, 1)$  – преобразованный параметр  $\varepsilon$  эластичности замещения между различными продуктами:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \alpha} > 1.$$

Пусть теперь  $\rho$  – субъективно выбранный положительный параметр дисконтирования. Полезность для страны пары  $\{N, L_N\}$ , где  $N: t \mapsto N(t)$  – траектория технологического запаса страны и  $L_N: t \mapsto L_N(t)$  – ее программа инвестирования трудовых ресурсов в научно-исследовательский сектор, будем оценивать интегралом  $J(N, L_N)$  от умноженной на весовой множитель  $e^{-\rho t}$ , удельной скорости роста  $\dot{D}(t)/D(t)$  индекса потребления по переменной времени  $t$ , пробегающей бесконечный полуинтервал  $[0, \infty)$ . Также предположим, что полученный несобственный интеграл сходится абсолютно:

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln D(t) dt,$$

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \right\} dt. \quad (3.3)$$

Зададим положительное начальное значение:

$$N(0) = N_0. \quad (3.4)$$

Объединяя дифференциальное уравнение (3.1), начальное условие (3.4) и выражение (3.3) для функционала полезности  $J$ , получаем следующую задачу

оптимального управления:

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \{ (1/\alpha - 1) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t),$$

$$N(0) = N_0.$$
(3.5)

Здесь  $L_N(t)$  – значение управления в момент времени  $t \geq 0$ ,  $N(t)$  – значение фазовой переменной в этот момент,  $N_0 > 0$  – начальное состояние,  $L > 0, a > 0, \rho > 0$  и  $\alpha \in (0, 1)$  – постоянные параметры.

Решение задачи (3.5) легко получается непосредственно: для любой допустимой пары  $(N, L_N)$  имеем для  $\forall t \geq 0$ :

$$\frac{d}{dt}(\ln N(t)) = \frac{L_N(t)}{a}.$$

Поэтому, интегрируя по частям интеграл в (3.3), получаем:

$$J(N, L_N) = (1/\alpha - 1) \frac{\ln N_0}{\rho} + \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ (1/\alpha - 1) \frac{L_N(t)}{a} + \ln(L - L_N(t)) \right\} dt.$$

Поскольку в последнем равенстве подынтегральное выражение не зависит от траектории  $N$ , то функционал полезности принимает свое максимальное значение при постоянном управлении  $L_N^*$ , доставляющем максимум подынтегральному выражению. Следовательно, оптимальное управление  $L_N^*$  в задаче (3.5) постоянно и определяется следующим образом:

$$L_N^* = \begin{cases} L - \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha}, & \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L, \\ 0, & \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} \geq L. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) вытекает, что в автаркическом случае при эффективности научно-исследовательского сектора экономики и малом параметре дисконтирования:

$$\frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L,$$

то оптимальная доля трудовых ресурсов, занятых в научно-исследовательском секторе, отлична от нуля и возрастает с увеличением эффективности научно-исследовательского сектора (с уменьшением отношения  $a\alpha/(1-\alpha)$ ) и с уменьшением параметра дисконтирования  $\rho$ .

Из (3.1) и (3.6) получим, что количество технологий накопленных стра-



ной А:

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t), \quad (3.7)$$

где

$$g^A = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ (1-\alpha) \frac{L^A}{a^A} - \alpha \rho^A \right\}.$$

т.к. предполагаем, что научно-исследовательский сектор страны А обладает необходимой эффективностью, то  $g^A > 0$ .

Теперь рассмотрим страну В и определим функционал полезности для неё:

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max. \quad (3.8)$$

Объединим (3.2), (3.7), (3.8), получим задачу оптимального управления:

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), \quad L_N^B(t) \in [0, L^B[, \quad (3.9)$$

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t),$$

$$N^A(0) = N_0^A, \quad N^B(0) = N_0^B.$$

Здесь  $g^A$ ,  $L^B$ ,  $a^B$ ,  $\gamma$  — положительные параметры,  $n_0^A > 0$ ,  $N_0^B > 0$  — заданные начальные состояния.

Для упрощения будем использовать следующие обозначения:

$$x(t) = N^B(t), \quad b = \frac{L^B}{a^B},$$

$$u(t) = \frac{L_N^B(t)}{a^B}, \quad \rho = \rho^B,$$

$$y(t) = N^A(t), \quad \nu = g^A,$$

$$\kappa = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Используя обозначения выше перепишем задачу (3.9):

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \\
x(0) &= x_0, \\
\dot{y}(t) &= \nu y(t), \\
y(0) &= y_0, \quad u(t) \in [0, b[,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где  $b, \gamma, \rho, \nu, \kappa$  — положительные параметры,  $\gamma < 1$ ;  $x_0$  и  $y_0$  — положительные начальные состояния фазовых переменных.

Заметим, что задача (3.10) не вкладывается полностью в постановку общей задачи оптимального управления из-за присутствия открытого интервала в ограничениях на управления. Поэтому модифицируем эти ограничения, ослабив верхнее на величину  $\varepsilon$ :

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon].$$

### 3.3 Редуцированная задача

Для упрощения формулировки задачи (3.10), понизим размерность фазового вектора до единицы. Обозначим:

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0, \quad z_0 = \frac{x_0}{y_0}.$$

Тогда для любой допустимой тройки  $(x, y, u)$  из (3.10) получим дифференциальное уравнение для изменения переменной  $z$  во времени:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \frac{1}{y(t)} \dot{x}(t) - \frac{x(t)}{y^2(t)} \dot{y}(t) = \\
&= \frac{u(t)(x(t) + \gamma y(t))}{y(t)} - \frac{x(t)}{y^2(t)} \nu y(t) = \\
&= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t),
\end{aligned}$$

и вычислим значение критерия качества:

$$\begin{aligned}
J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln(z(t)y(t)) + \ln(b - u(t))] dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \kappa \ln y(t) + \ln(b - u(t))] dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \kappa \ln(y_0 e^{\nu t}) + \ln(b - u(t))] dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt + C,
\end{aligned}$$

где константа  $C$  вычисляется по формуле:

$$C = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln y_0 + \kappa \nu t] dt.$$

Получим задачу:

$$\begin{aligned}
I(z, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
\dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \quad z(0) = z_0, \\
u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Отсюда следует заключение об эквивалентности двух задач оптимального управления.

**Лемма 3.1** [2] Задачи оптимального управления (3.10) и (3.11) эквивалентны. Именно справедливы следующие утверждения:

- допустимое управление  $u^0$ , оптимально в задаче (3.10) тогда и только тогда, когда оно оптимально в задаче (3.11);
- оптимальные значения функционалов  $J^0$  и  $I^0$  в задачах (3.10) и (3.11) связаны равенством  $J^0 = I^0 + C$

Далее для анализа решения задачи (3.10) будем использовать эквивалентную ей редуцированную задачу (3.11).

### 3.4 Решение редуцированной задачи

Для решения данной задачи используется принцип максимума Л.С. Понтрягина, который для случая задач на бесконечном полуинтервале доказан в работе [1]: принципа максимума Понтрягина. Сформулируем его.

**Теорема 3.1** Пусть  $u^0(t)$ ,  $t \geq 0$  – оптимальное управление в задаче (3.11) и  $z^0$ ,  $t \geq 0$  – соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая (локально) абсолютно непрерывная положительная функция  $p$ , определенная на  $[0, \infty)$ , что выполняются следующие условия:

- функция  $p$  является решением сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -(u^0(t) - \nu - \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z^0(t)};$$

- при  $t \in [0, \infty)$  выполняется условие максимума

$$u^0(t)p(t)(z^0(t) + \gamma) + \ln(b - u^0(t)) = \max_{u \in [0, b-\varepsilon]} (up(t)(z^0(t) + \gamma) + \ln(b - u))$$

- выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z^0(t)p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0;$$

более того,

$$p(t)z^0(t) \leq \frac{\kappa}{\rho}, \quad \forall t \geq 0;$$

- выполняется условие стационарности

$$M(z^0(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z^0(s) + \ln(b - u^0(s))] ds, \quad \forall t \geq 0$$

Теорема 3.1 является необходимым условием оптимальности допустимой пары  $(z^0, u^0)$  для задачи (3.11).

Необходимо построить гамильтонову систему принципа максимума для задачи оптимального управления (3.11). Введем функцию  $\bar{h} : \mathbb{R}_{++} \mapsto \mathbb{R}_{++}$  для любого  $z > 0$ :

$$\bar{h}(z) = \frac{1}{b(z + \gamma)},$$

а также множества  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_1 = \{(z, p) \in \mathbb{R}^2 : z > 0, p \geq \bar{h}(z)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(z, p) \in \mathbb{R}^2 : z > 0, 0 < p < \bar{h}(z)\},$$

где  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \mathbb{R}_{++}^2$ :

Определим функции  $\varphi_1 : \mathbb{R}_{++}^2 \mapsto \mathbb{R}$  и  $\varphi_2 : \mathbb{R}_{++}^2 \mapsto \mathbb{R}$ :

$$\varphi_1(z, p) = \begin{cases} (b - \nu)z + b\gamma - \frac{1}{p}, & (z, p) \in \Gamma_1 \\ -\nu z, & (z, p) \in \Gamma_2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(z, p) = \begin{cases} -(b - \nu - \rho)p - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{(z + \gamma)z}, & (z, p) \in \Gamma_1 \\ (\nu + \rho)p - \frac{\kappa}{z}, & (z, p) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Заметим что эти функции непрерывны.

**Следствие 3.1** Пусть  $(z^0, u^0)$  — оптимальная пара в задаче (3.11). Тогда

- существует такая положительная (локально) абсолютно непрерывная функция  $p$  на  $[0, \infty)$ , что пара  $(z^0, u^0)$  есть решение на  $[0, \infty)$  системы дифференциальных уравнений (в  $\mathbb{R}_{++}^2$ )

$$\dot{z}(t) = \varphi_1(z(t), p(t)),$$

$$\dot{p}(t) = \varphi_2(z(t), p(t)),$$

- при  $t \geq 0$  имеем

$$u^0(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p(t)(z^0(t) + \gamma)}, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_1 \\ 0, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

- выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z^0(t) p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0;$$

более того,

$$p(t) z^0(t) \leq \frac{\kappa}{\rho}, \quad \forall t \geq 0;$$

- выполняется условие стационарности

$$M(z^0(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z^0(s) + \ln(b - u^0(s))] ds, \quad \forall t \geq 0$$

Уравнения для  $\dot{z}$  и  $\dot{p}$  являются гамильтоновой системой принципа максимума для задачи (3.11). Поскольку при различных соотношениях между параметрами  $\nu$ ,  $b$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  и  $\gamma$  векторное поле гамильтоновой системы  $\mathbb{R}_{++}^2$  устроено по-разному, будет удобно разделить эту систему уравнений на два случая. Случай удовлетворяющий невырожденным уравнениям:

$$\dot{z}(t) = (b - \nu)z(t) + b\gamma - \frac{1}{p(t)},$$

$$\dot{p}(t) = -(b - \nu - \rho)p(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa + 1)z(t)}{z(t) + \gamma}z(t), \quad (3.12)$$

$$(z(t), p(t)) \in \Gamma_1,$$

и вырожденным уравнениям:

$$\dot{z}(t) = -\nu z(t),$$

$$\dot{p}(t) = (\nu + \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z(t)}, \quad (3.13)$$

$$(z(t), p(t)) \in \Gamma_2,$$

Поскольку некоторые комбинации параметров встречаются наиболее часто введем сокращения:

$$\beta_0 = \rho + \nu - b,$$

$$\beta_1 = \rho + \nu - \kappa b,$$

$$\beta_2 = \rho + \kappa\nu - \kappa b.$$

Для выделения кривой  $V_0^{11}$  переключения знака  $z$ -координаты и кривой  $V_0^{12}$  переключения знака  $p$ -координаты, рассмотрим невырожденные уравнения (3.12). На кривых  $V_0^{11}$  и  $V_0^{12}$  обращаются в нуль соответственно скорости  $\dot{z}(t)$  и  $\dot{p}(t)$  переменных  $z(t)$  и  $p(t)$ , изменяющихся в силу невырожденных уравнений (3.12).

Введем функцию  $h_{11}(z)$  вида

$$h_{11}(z) = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z},$$

определенная на

$$E_1 1 = \begin{cases} (0, z_{11}), & \nu > b, \\ (0, \infty), & \nu \leq b, \end{cases}$$

где

$$z_{11} = \frac{b\gamma}{\nu - b},$$

и функции

$$h_{12}(z) = \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z},$$

определенную при  $\beta_0 \neq 0$  на  $(0, \infty)$ . Нас интересуют решения, которые сходятся к точке покоя  $(z_1, p_1)$ . Такие случаи называются невырожденными. Точка

Случай №	$V_{11}^0 \cap V_{12}^0$	$pr_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$	Параметрическая область
A1B1C1	$\{(z_1, p_1)\}$	$[\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu < b$
A1B1C2	$\{(z_1, p_1)\}$	$[\widehat{z}_{12}, \infty]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu < b$
A1B1C3	$\{(z_1, p_1)\}$	$[0, \bar{z}_{12}]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$
A1B1C4	$\{(z_1, p_1)\}$	$[0, \infty]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$
A1B1C7	$\{(z_1, p_1)\}$	$[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$
A9B1C10	$\{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\}$	$\{\bar{z}_{12}\}$	$\beta_0 = 0, \kappa < 1$

Таблица 3.1: Реализуемые невырожденные совмещенные случаи

покоя находится из системы алгебраических уравнений:

$$p = h_{11}(z),$$

$$h_{11}(z) = h_{12}(z),$$

Наборы параметров можно разделить по трём классификациям:

- А, классификация видов множества  $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$  точек покоя, таких вариантов 9;
- В, классификация видов  $z$ -проекции пересечения  $pr_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$ , таких вариантов 2;
- С, классификация видов  $z$ -проекции пересечения  $pr_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$ , таких вариантов 10.

Совмещенным случаем назовём такое расположение параметров, при котором одновременно имеют место три каких-либо выбранных случая — по одному из наборов каждой классификации. Для случаев что мы будем рассматривать  $z$ -проекция  $pr_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$  пересечения кривой переключения знака  $z$ -координаты в  $\Gamma_1$  с зоной трансверсальности будет  $(0, \widehat{z}_{11})$ . Невырожденным совмещенным случаем будем называть случай с непустым множеством  $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$  точек покоя гамильтоновой системы.

В таблице 3.1 представлены реализуемые невырожденные совмещенные случаи.

Векторное поле гамильтоновой системы в неособых невырожденных совмещенных случаях изображено на рисунках (3.1)-(3.8). Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество  $\Gamma_2$ .

На рисунках (3.1)-(3.8) векторное поле имеет, "стандартный" характер: кривые переключения знака  $z$ -и  $p$ -координат пересекаются трансверсально в единственной точке покоя и при обходе этой точки по часовой стрелке зоны

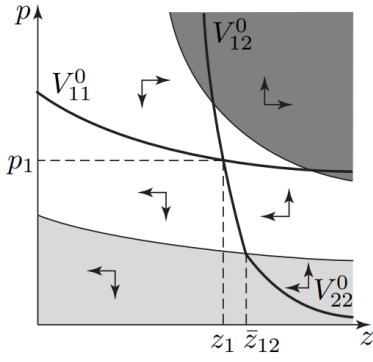


Рис. 3.1: №1

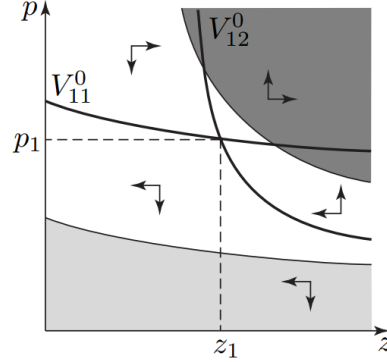


Рис. 3.2: №2

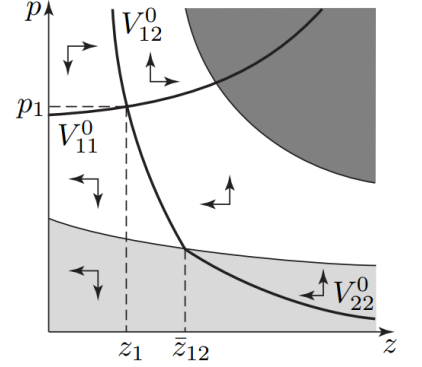


Рис. 3.3: №3,  $\nu > b$

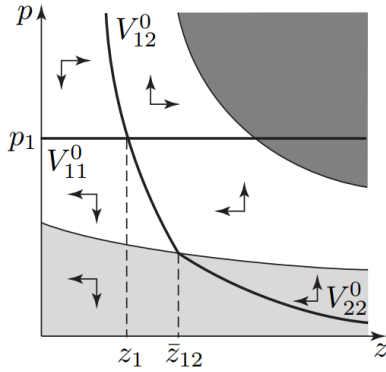


Рис. 3.4: №3,  $\nu = b$

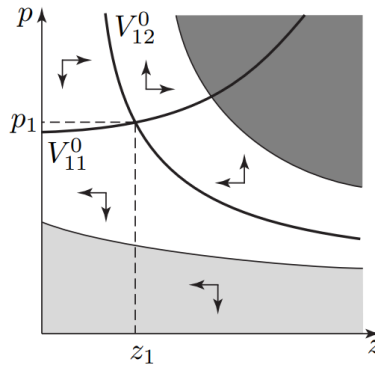


Рис. 3.5: №4,  $\nu > b$

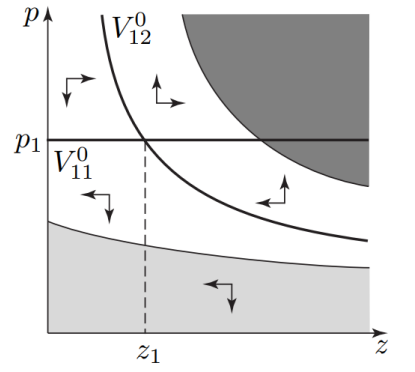


Рис. 3.6: №4,  $\nu = b$

роста (убывания) координат гамильтоновой системы следуют друг за другом в одном и том же порядке. Эти случаи назовём неособыми.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НЕОСОБЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ СОВМЕЩЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Трансверсальные решения как видно на рисунке 3.9 сходятся к точке покоя  $(z_1, p_1)$ . Все остальные решения нетрансверсальны. Затененная область – внешность зоны трансверсальности.

**Теорема 3.2** Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев. Тогда

- для задачи (3.11) существуют единственная оптимальная траектория  $z^0$  и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное управление  $u^0$ ;
- оптимальная траектория  $z^0$  есть компонента равновесного решения  $(z^0, p^0)$  гамильтоновой системы, определяемого начальным состоянием  $z_0$  управляемой системы задачи (3.11);



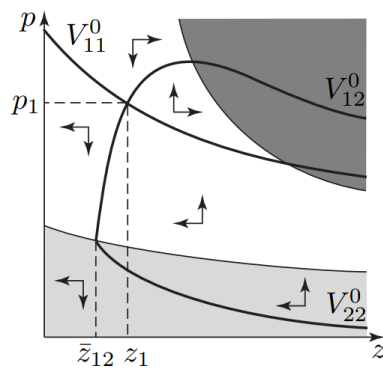


Рис. 3.7: №5

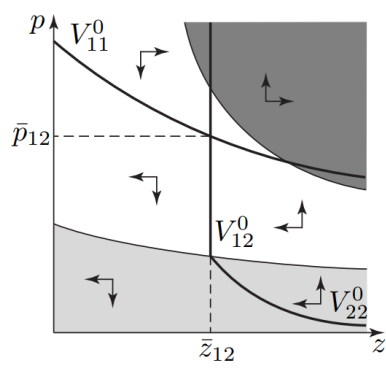


Рис. 3.8: №6

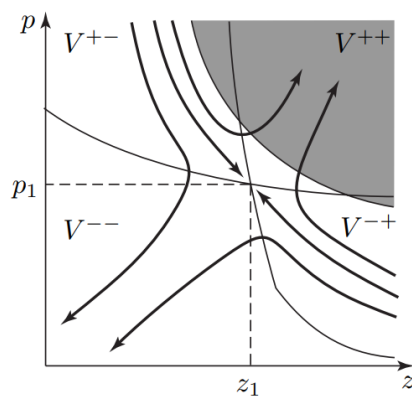


Рис. 3.9: Фазовые траектории решений гамильтоновой системы в неособых невырожденных случаях.

- оптимальное управление  $u^0$  имеет вид

$$u^0(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p(t)(z^0(t)+\gamma)}, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_1 \\ 0, & (z^0(t), p(t)) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

## ГЛАВА 4

# ПРИМЕНЕНИЕ ЕМРС К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РОСТЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

В настоящей главе применим метод ЕМРС к решению задачи об оптимальном росте технологического последователя. При этом рассмотрим три подхода:

1. базовый ЕМРС без дополнительных ограничений (неограниченный ЕМРС) [7];
2. ЕРМС с терминальным ограничением-равенством;
3. подход, в котором критерий качества дополняется специальной выбранной терминальной стоимостью.

Последний подход — новый, предлагается в данной работе впервые. Цель — упростить задачу оптимального управления с точки зрения численного решения, поскольку задачи без жестких ограничений-равенств проще с вычислительной точки зрения. В главе проводится сравнение решений, полученных всеми тремя подходами, а также сравнение с решением задачи (3.11) на основе Принципа максимума из главы 3.

### 4.1 Прогнозирующие задачи оптимального управления

В данной главе будем сравнивать результаты решения задачи об оптимальном росте технологического последователя методом ЕМРС с тремя различными прогнозирующими задачами. Ниже приводятся формулировки этих задач. Напомним, что прогнозирующие задачи в текущий момент  $\tau$  имеют конечный горизонт управления  $[\tau, \tau + T]$ , а в качестве начального состояния для прогнозирующей модели выбирается текущее состояние, которое для редуцированной системы будет иметь вид  $x(\tau)/y(\tau)$ , где  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  измеряемые текущие значения накопленных технологий стран  $B$  и  $A$ , соответственно.

1) Прогнозирующая задача оптимального управления без дополнительных ограничений и терминальной стоимости, применяемая в так называемом неограниченном ЕМРС, имеет вид (см. [7]):

$$\begin{aligned}
 I_1(z, u) &= \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
 \dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \\
 z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \\
 u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Недостаток этого вида задачи состоит в том, что требуется достаточно длинный горизонт управления. Но даже несмотря на это, траектория замкнутой системы может не выходить к магистрали и стабилизируется в окрестности некоторой точки. Увеличение горизонта, как правило, позволяет добиться того, чтобы траектория замкнутой системы асимптотически приближалась к магистрали. Однако, при этом заметно растет трудоемкость численного решения задачи оптимального управления (4.1). Возможна ситуация, когда решение (4.1) уже невозможно построить в реальном времени, т.е. за время, не превосходящее  $h$ .

2) Прогнозирующую задачу оптимального управления (4.1) дополним терминальным ограничением-равенством:

$$\begin{aligned}
 I_2(z, u) &= \int_t^{t+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
 \dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \\
 z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \quad z(\tau + T) = \frac{x_1}{y_1}, \\
 u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T],
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

т.е. добавим требование, чтобы  $z$  к моменту  $\tau + T$  равнялась магистральному значению. Однако, вычислительные трудности не исчезают, может возникнуть ситуация, когда не существует ни одного допустимого управления, переводящего систему в состояние  $x_1/y_1$ .

3) В подходе, предлагаемом в данной дипломной работе дополним критерий качества задачи (4.1) специально подобранной линейной (по фазовой

переменной  $z$ ) терминальной стоимостью:

$$\begin{aligned}
I_3(z, u) &= e^{-\rho(\tau+T)} \psi_s z(\tau+T) + \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max, \\
\dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \\
z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \\
u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где  $\psi_s$  — весовой коэффициент, выбор которого будет обоснован

В отличие от (4.2) задача (4.3) имеет решение при любом значении горизонта  $T$ . Далее в вычислительных экспериментах также покажем, что, в отличие от (4.1), она обеспечивает асимптотическую устойчивость магистрали при небольших  $T$ .

## 4.2 Оптимальное программное решение с применением Direct Single Shooting

Для реализации алгоритма MPC из раздела 2.1 необходимо на шаге 2 решать прогнозирующую задачу оптимального управления, т.е. находить программное решение задач (4.1), (4.2), (4.3).

Прогнозирующие задачи будут решаться численно с применением метода DSS из раздела 1.3, поэтому дальнейшее изложение будет посвящено программной реализации численных методов для решения задач (4.1), (4.2), (4.3).

Приведем реализацию в Matlab использованием CasADi для са мой простой задачи, коей является (4.1). Для начала объявим переменные и уравнения, с которыми будем работать:

```

z1 = SX.sym( 'z1' );
t  = SX.sym( 't' );
u  = SX.sym( 'u' );

```

```

zdot = [ (z1 + gamma)*u - nu*z1 ];

```

Подинтегральная функция критерия качества:

```

f0 = -exp(-rho*t)*(kappa*log(z1)+log(b-u));

```

Применим алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка для решения ОДУ:

```

M = 4;
DT = T/N/M;
f = Function( 'f' , {z1 , u , t} , {zdot , f0} );
X0 = MX.sym( 'X0' , 1 );
U = MX.sym( 'U' );
tt = MX.sym( 'tt' );
X = X0;
Q = 0;
for j=1:M
    [k1 , k1_q] = f( X , U , tt );
    [k2 , k2_q] = f( X + DT/2 * k1 , U , tt+DT/2 );
    [k3 , k3_q] = f( X + DT/2 * k2 , U , tt+DT/2 );
    [k4 , k4_q] = f( X + DT * k3 , U , tt+DT );
    X=X+DT/6*(k1 +2*k2 +2*k3 +k4);
    Q = Q + DT/6*(k1_q + 2*k2_q + 2*k3_q + k4_q);
end
F = Function( 'F' , {X0 , U , tt} , {X , Q} ,
    { 'x0' , 'p' , 't' } , { 'xf' , 'qf' } );

```

В цикле по  $k$  от 0 до N-1:

- создаем переменную управления и задаем её ограничения;

```

Uk = MX.sym( [ 'U_' num2str(k) ] );
w = {w{:} , Uk};
lbw = [lbw , 0];
ubw = [ubw , b-epsloonn];
w0 = [w0 , 0];

```

- интегрируем на конце интервала;

```

Fk = F( 'x0' ,Xk , 'p' , Uk );
Xk = Fk.xf;
J = J+Fk.qf;

```

- добавим ограничения неравенства.

```

g = {g{:} , Xk(1)};
lbg = [lbg ; 0];
ubg = [ubg ; inf];

```

Для того чтобы решить (4.2) необходимо добавить:

$$\begin{aligned} \text{lb}g(N) &= \lfloor x_s / y_s \rfloor; \\ \text{ub}g(N) &= \lceil x_s / y_s \rceil; \end{aligned}$$

Для решения (4.2) нужно добавить после данного блока (не уверена что это так, но других идей нет)

$$J = J - \exp(-\rho * T) * \text{psis} * z(N)$$

После формулировки задачи нелинейного программирования и ограничений, для решения задачи создается solver — процедура решения, в данном случае — на основе встроенного алгоритма IPOPT.

```
nlp = struct('f', J, 'x', w{:}', 'g', g{:}');
solver = nlpsol('solver', 'ipopt', nlp);
```

Затем solver вызывается с заданными параметрами и восстанавливает

```
sol = solver('x0', w0, 'lbx', lbw, 'ubx', ubw, ...
            'lb', lb, 'ub', ub);
w_opt = full(sol.x);
```

В следующем разделе рассмотрим результаты работы приведенной реализации.

### 4.3 Оптимальное программное решение с применением алгоритма MPC

Реализуем алгоритм MPC для задачи (4.1)-(4.3), с использованием Direct Single Shooting из предыдущего раздела.

В данной реализации  $x_{tau}$  состояние системы в измеряемый момент времени,  $w_0$  начальное приближение. Решаем систему для  $tau \in [t_0, T]$ . В начале  $tau = t_0$ :

```
sol = solver('x0', [xtau; w0], 'lb', [], 'ub', [], ...
            'lbx', [xtau; lbw], 'ubx', [xtau; ubw]);
```

Выделяем решение.

```
xu = full(sol.x);
```

```
u_opt = reshape(xu(n+1:end), r, N);
J_opt = full(sol.f);
```

Ищем следующее состояние системы.

```
res = F('x0', xtau, 'p', u_opt(1));
xtau = full(res.xf);
```

Запоминаем текущее управление и состояние  $X$ .

```
U = [U u_opt(1)];
X = [X xtau];
```

Изменяем начальное приближение:

```
w0 = [u_opt(2:end) zeros(1)]';
```

Переходим на  $\tau = \tau + 1$ .

В следующем разделе рассмотрим результаты работы приведенной реализации.

## 4.4 Результаты численных экспериментов

Рассмотрим различные решения задач (4.1)-(4.3) в зависимости от изменений параметров:

- $b$  – размеры трудовых ресурсов, пропорциональна размеру  $L^B$  трудовых ресурсов страны-последователя,
- $\gamma$  – емкость абсорбции, т.к при описании параметрических областей, соответствующих всем реализуемым совмещенным случаям, не участвует емкость абсорбции  $\gamma$  страны-последователя, изменение емкости абсорбции в пределах допустимого интервала  $(0,1)$  не меняет общую схему выбора страной-последователем оптимальной стратегии технологического роста в зависимости от начального соотношения  $z_0$  запасов технологий.
- $\rho$  – параметр дисконтирования,
- $\nu$  – удельная скорость роста запаса технологий страны-лидера, линейно зависит от размера  $L^A$  трудовых ресурсов страны-лидера,
- $\kappa$  – параметр эластичности замещения. При больших  $\kappa$  значение эластичности замещения мало и наоборот, малые значения  $\kappa$  соответствуют – большим значениям значениям эластичности замещения.

Возможности страны-последователя описывают: ”ресурсный” параметр – верхняя граница  $b$  для значений управления и ”информационный” параметр – емкость  $\gamma$  абсорбции.

При соотношении параметров, отвечающих неособым невырожденным совмещенным случаям, схема выбора оптимального пути технологического развития для страны-последователя может быть выражена условной формулой: ”начальный запас технологий мал по отношению к стране-лидеру (у  $z_0$  малое значение) — опережение с выравниванием, начальный запас технологий велик — отставание с выравниванием”. Опережение с выравниванием — это оптимальный режим технологического развития страны-последователя, когда на старте процесса удельная скорость ее технологического роста, превосходит удельную скорость роста страны-лидера, она постепенно снижается, при этом все время больше  $\nu$ , в пределе на бесконечность сравнивается с  $\nu$ .

#### 4.4.1 Подход 1: Неограниченный ЕМРС

Рассмотрим решения для задачи (4.1). Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.1):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.7$ ,  $b = 0.7$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\kappa = 1.3$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.11$ ,  $\beta_2 = 0.1$ ,  $\nu = b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C4 из таблицы 3.1.

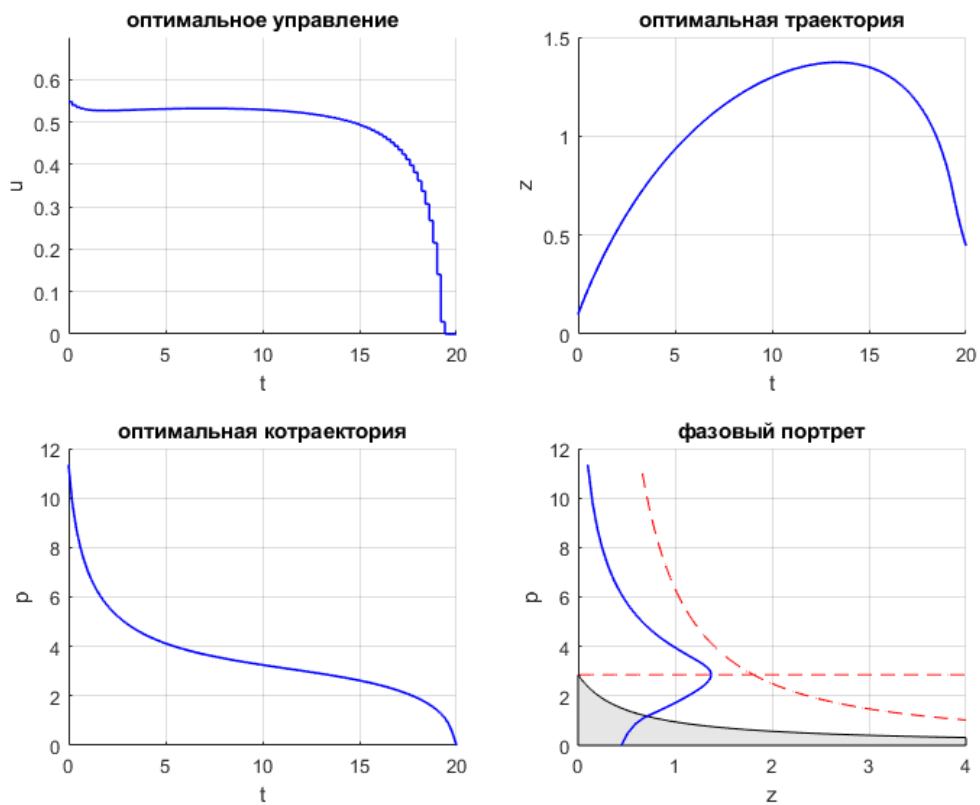


Рис. 4.1: A1B1C4



Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.2):  $\gamma = 0.6$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.2$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.3$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.34$ ,  $\beta_1 = 0.66$ ,  $\beta_2 = 0.18$ ,  $\nu > b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C3 из таблицы 3.1.

При приближении  $\gamma$  к допустимой верхней границе (единице) предельное отношение технологических запасов ( $\bar{z}$ ) двух стран стремится к вполне определенной конечной верхней границе, и наоборот при приближении емкости абсорбции  $\gamma$  страны-последователя к нулю предел технологических запасов страны-последователя и страны-лидера стремится к нулю. Эти эффекты, выполняются при относительной малости трудовых ресурсов страны-последователя, чаще всего это значит выполнение  $b \leq \nu$ .

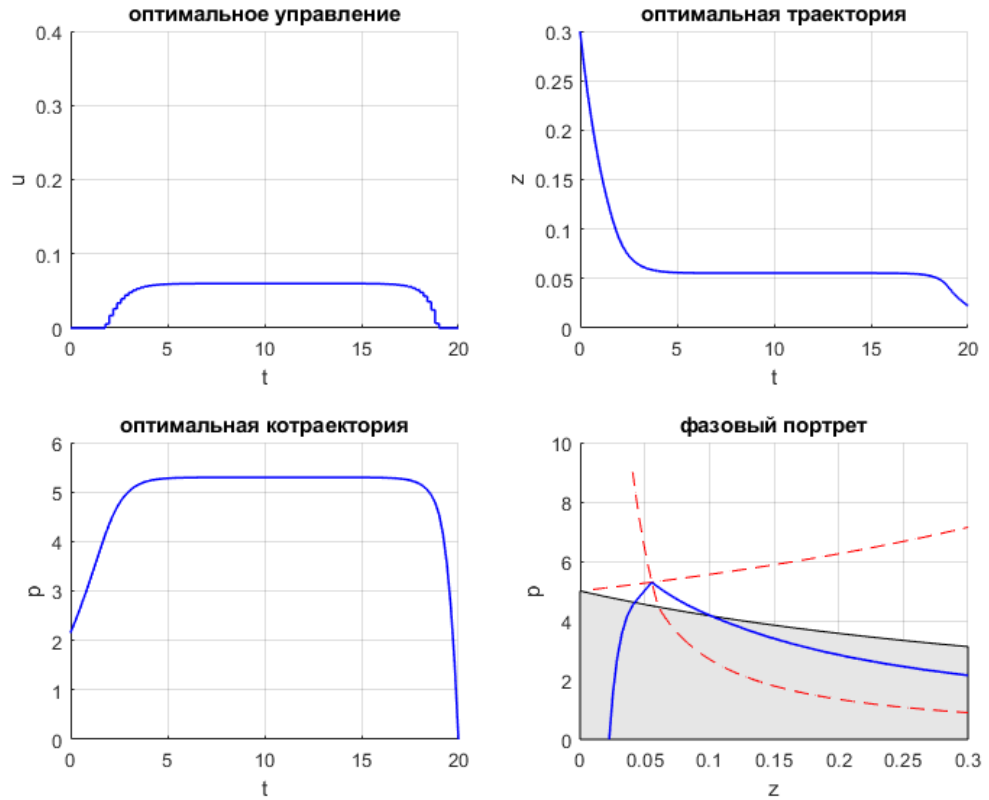


Рис. 4.2: A1B1C3,  $\nu > b$

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.3):  $\gamma = 0.3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.3$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.14$ ,  $\beta_1 = 0.29$ ,  $\beta_2 = 0.14$ ,  $\nu = b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C3 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.4):  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $b = 0.55$ ,  $\rho = 0.15$ ,  $\kappa = 1.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.175$ ,  $\beta_2 = 0.075$ ,  $\nu < b$  такой набор параметров соответствует случаю A1B1C2 из таблицы 3.1.

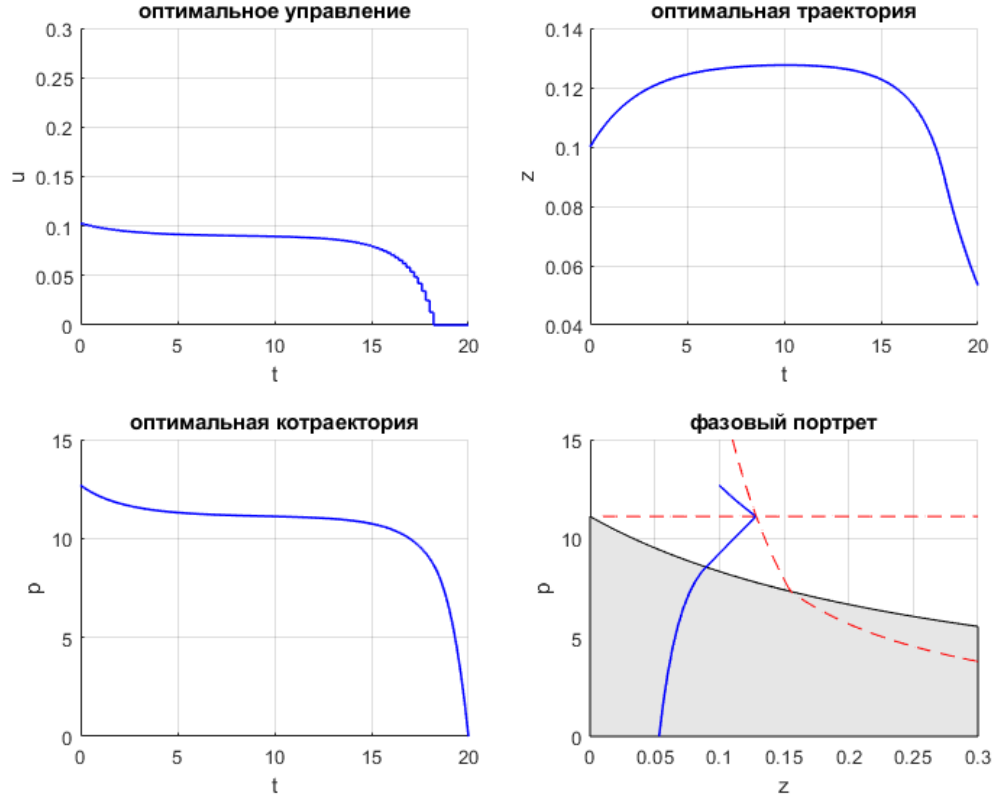


Рис. 4.3: A1B1C3,  $\nu = b$

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.5):  $\gamma = 0.3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = 0.24$ ,  $\beta_2 = 0.09$ ,  $\nu < b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C1 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.6):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 1$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = 0.04$ ,  $\beta_2 = 0.04$ ,  $\nu < b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C1 из таблицы 3.1.

Примечательно, что при таких параметрах, страна последователь накопит в два раза больше технологий, чем страна-лидер. Страна-последователь, при оптимальном развитии, может расти в технологическом отношении быстрее, чем страна-лидер, при опережении с выравниванием.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.7):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.5$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = -0.06$ ,  $\beta_1 = 0.19$ ,  $\beta_2 = 0.04$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C7 из таблицы 3.1.

В отличие от других неособых невырожденных совмещенных случаев, A1B1C7 предполагает  $\beta_0 < 0$ , это можно трактовать как то, что трудовой ресурс  $b$  страны-последователя мал в сравнении с трудовым ресурсом

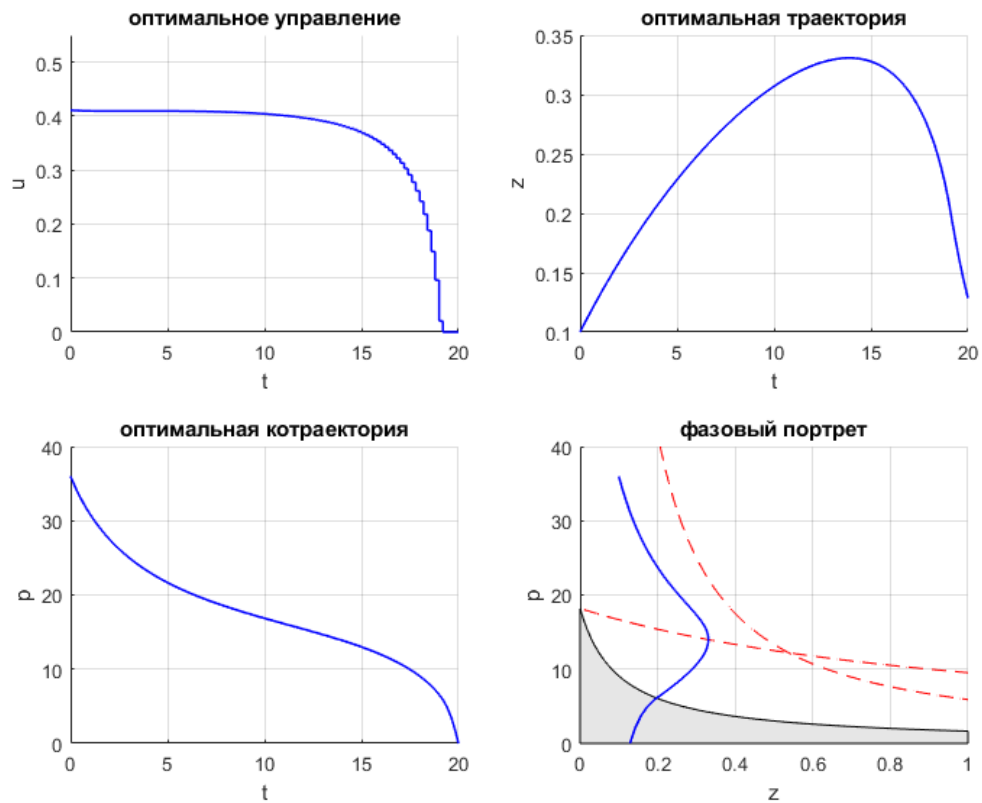


Рис. 4.4: A1B1C2

страны-лидера. В то же время неравенства  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  накладывают верхние ограничения на ресурс страны-последователя. Таким образом, при малом трудовой ресурсе страны-последователя, оптимальный режим ее роста характеризуется для неособых невырожденных совмещенных случаев также как говорилось ранее: "малый начальный запас технологий – опережение с выравниванием, наоборот – отставание с выравниванием".

Рассмотрев ситуации, когда трудовые ресурсы страны-последователя относительно велики, т.е.  $b > \nu$ . Изменения оптимального режима технологического роста страны-последователя при изменении ее параметра  $\rho$  дисконтирования от нуля до бесконечности. Близость  $\rho$  к нулю может толковаться так: страна-последователь следует пути "долгосрочного планирования". В противном случае, большие значения параметра дисконтирования означают, что страна-последователь следует пути "краткосрочного планирования".

Значит, при "краткосрочной" ориентации пути технологического развития потенциально мощная страна-последователь, выравниваясь в перспективе со страной-лидером по скорости технологического роста, начинает катастрофически отставать от нее по запасу накопленных технологий.

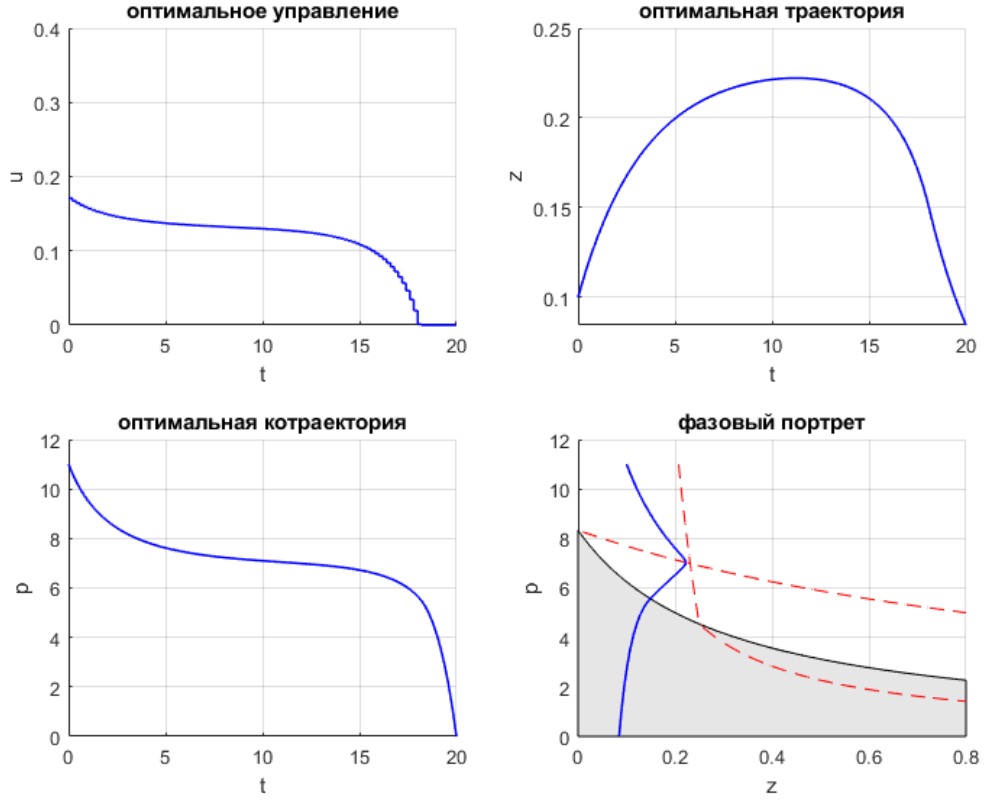


Рис. 4.5: A1B1C1

#### 4.4.2 Подход 2: с терминальным ограничением

Рассмотрим решения (4.2), при тех же наборах параметров что и (4.1), для сравнения. Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.8):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.7$ ,  $b = 0.7$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\kappa = 1.3$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.11$ ,  $\beta_2 = 0.1$ ,  $\nu = b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C4 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.9):  $\gamma = 0.6$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.2$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.3$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.34$ ,  $\beta_1 = 0.66$ ,  $\beta_2 = 0.18$ ,  $\nu > b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C3 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.10):  $\gamma = 0.3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.3$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.14$ ,  $\beta_1 = 0.29$ ,  $\beta_2 = 0.14$ ,  $\nu = b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C3 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.11):  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $b = 0.55$ ,  $\rho = 0.15$ ,  $\kappa = 1.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.175$ ,  $\beta_2 = 0.075$ ,  $\nu < b$  такой набор параметров соответствует случаю A1B1C2 из таблицы 3.1.

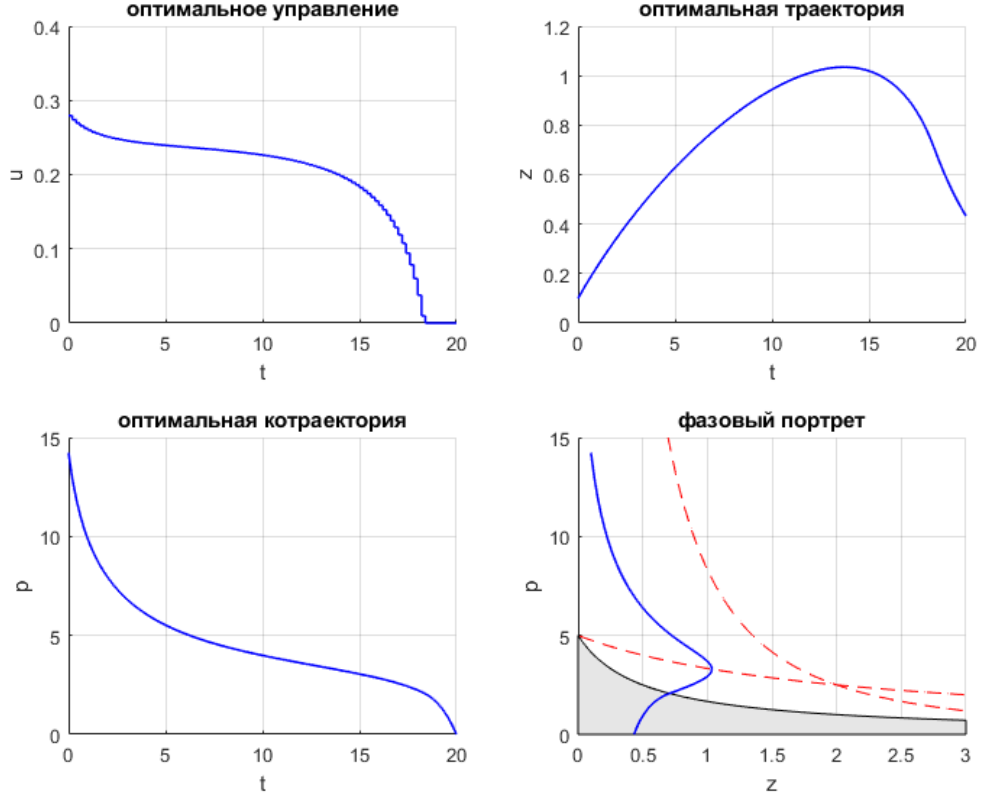


Рис. 4.6: A1B1C1

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.12):  $\gamma = 0.3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = 0.24$ ,  $\beta_2 = 0.09$ ,  $\nu < b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C1 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.13):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 1$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = 0.04$ ,  $\beta_2 = 0.04$ ,  $\nu < b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C1 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.14):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.5$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = -0.06$ ,  $\beta_1 = 0.19$ ,  $\beta_2 = 0.04$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C7 из таблицы 3.1.

#### 4.4.3 Подход 3: с терминальной стоимостью

Рассмотри решения (4.3), при тех же наборах параметров что и (4.1), для сравнения.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.15):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.7$ ,  $b = 0.7$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\kappa = 1.3$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:

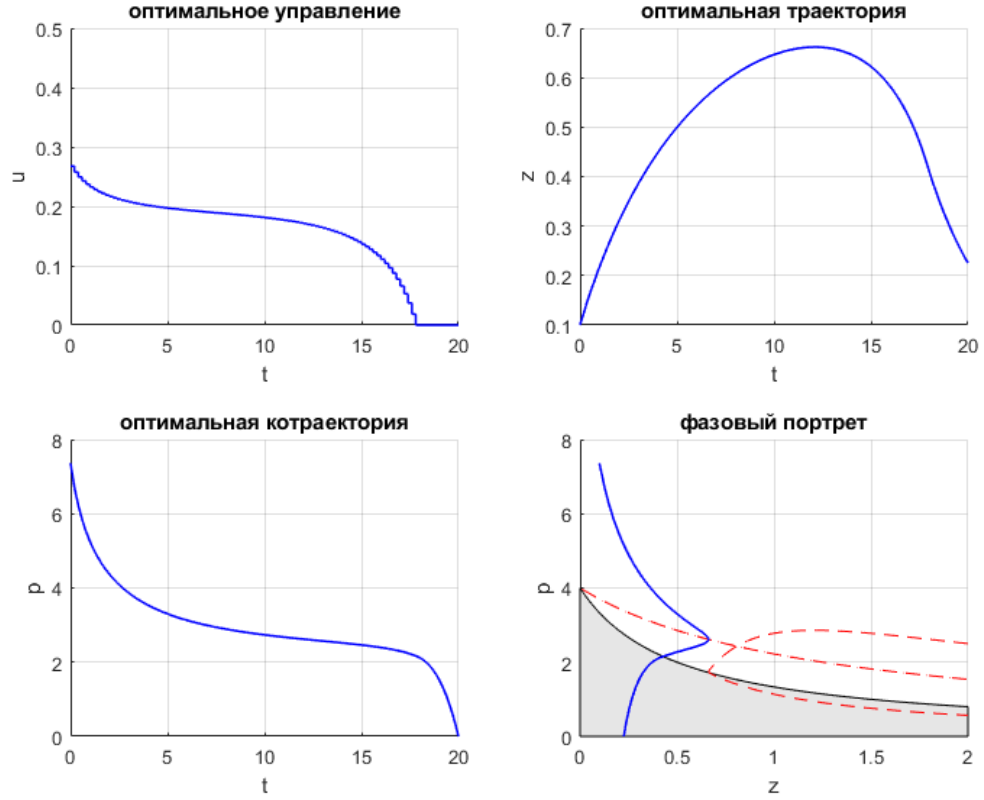


Рис. 4.7: A1B1C7

$\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.11$ ,  $\beta_2 = 0.1$ ,  $\nu = b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C4 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.16):  $\gamma = 0.6$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.2$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.3$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.34$ ,  $\beta_1 = 0.66$ ,  $\beta_2 = 0.18$ ,  $\nu > b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C3 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.17):  $\gamma = 0.3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.3$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.14$ ,  $\beta_1 = 0.29$ ,  $\beta_2 = 0.14$ ,  $\nu = b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C3 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.18):  $\gamma = 0.1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $b = 0.55$ ,  $\rho = 0.15$ ,  $\kappa = 1.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.175$ ,  $\beta_2 = 0.075$ ,  $\nu < b$  такой набор параметров соответствует случаю A1B1C2 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.19):  $\gamma = 0.3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = 0.24$ ,  $\beta_2 = 0.09$ ,  $\nu < b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C1 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.20):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,

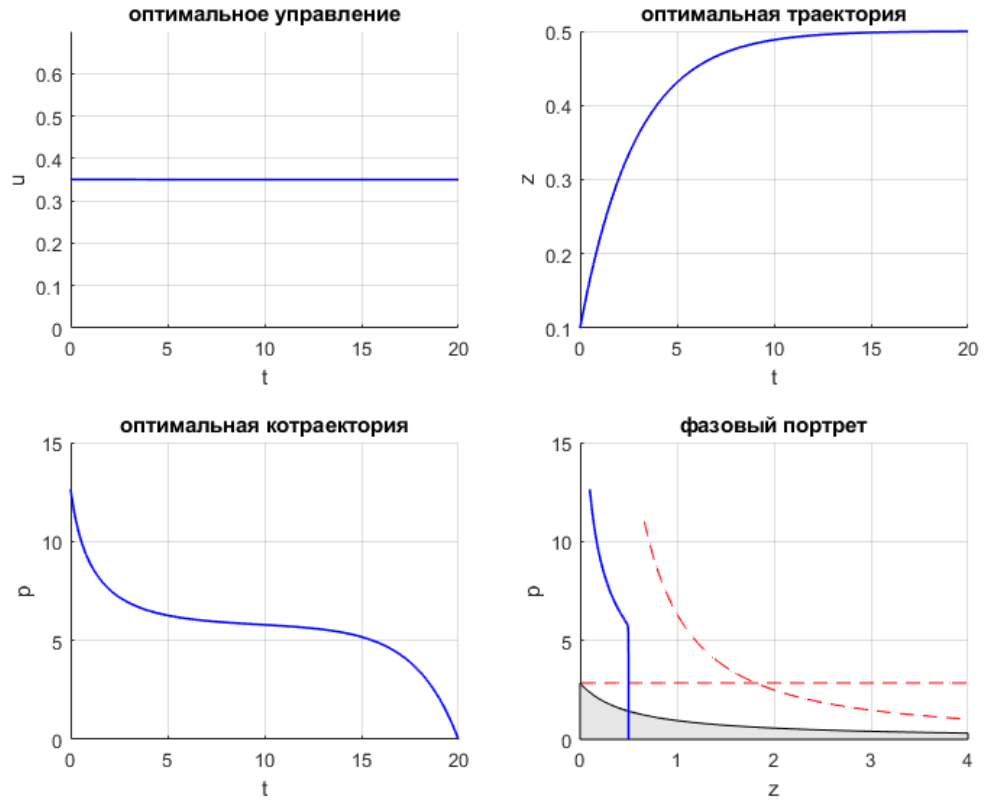


Рис. 4.8: A1B1C4

$b = 0.4$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 1$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = 0.04$ ,  $\beta_1 = 0.04$ ,  $\beta_2 = 0.04$ ,  $\nu < b$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C1 из таблицы 3.1.

Возьмем параметры (изображено на рисунке 4.21):  $\gamma = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $b = 0.5$ ,  $\rho = 0.14$ ,  $\kappa = 0.5$ , с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ . Для данного набора:  $\beta_0 = -0.06$ ,  $\beta_1 = 0.19$ ,  $\beta_2 = 0.04$ , такой набор параметров соответствует случаю A1B1C7 из таблицы 3.1.

Сравним фазовые графики для задач (4.1), (4.2) (4.3) при параметрах (случай A1B1C3):

- $\gamma = 0.3$ ,
- $\nu = 0.3$ ,
- $b = 0.4$ ,
- $\rho = 0.14$ ,
- $\kappa = 0.5$ ,
- с начальной точкой  $z_0 = 0.1$ .

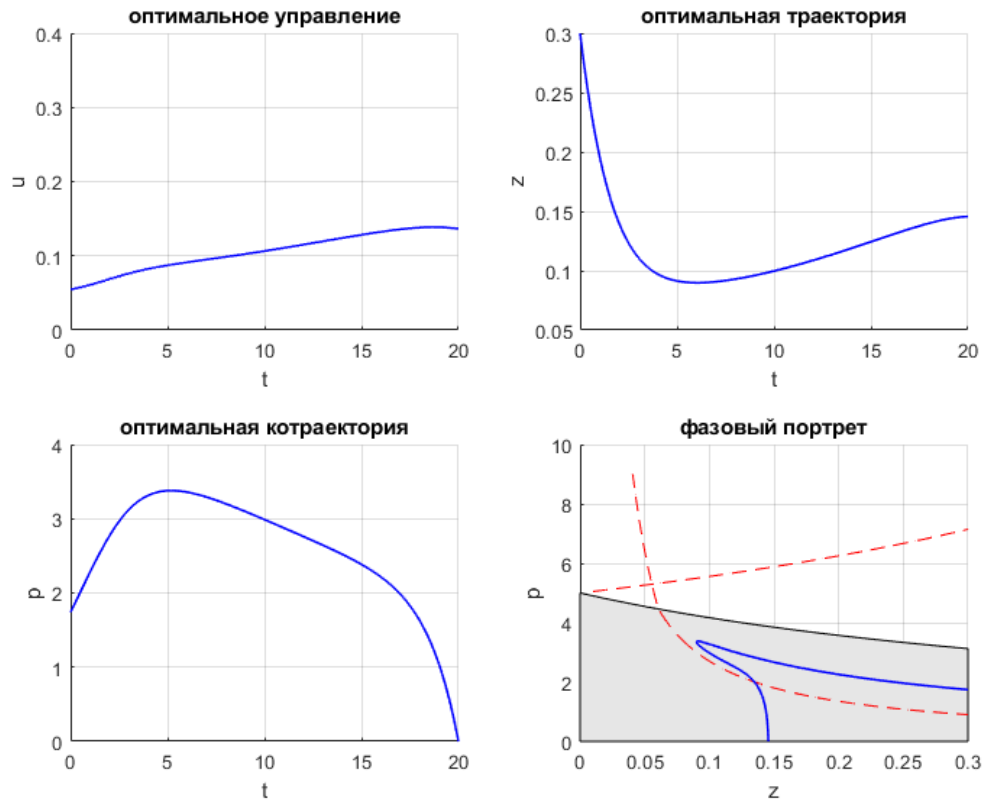


Рис. 4.9: A1B1C3,  $\nu > b$

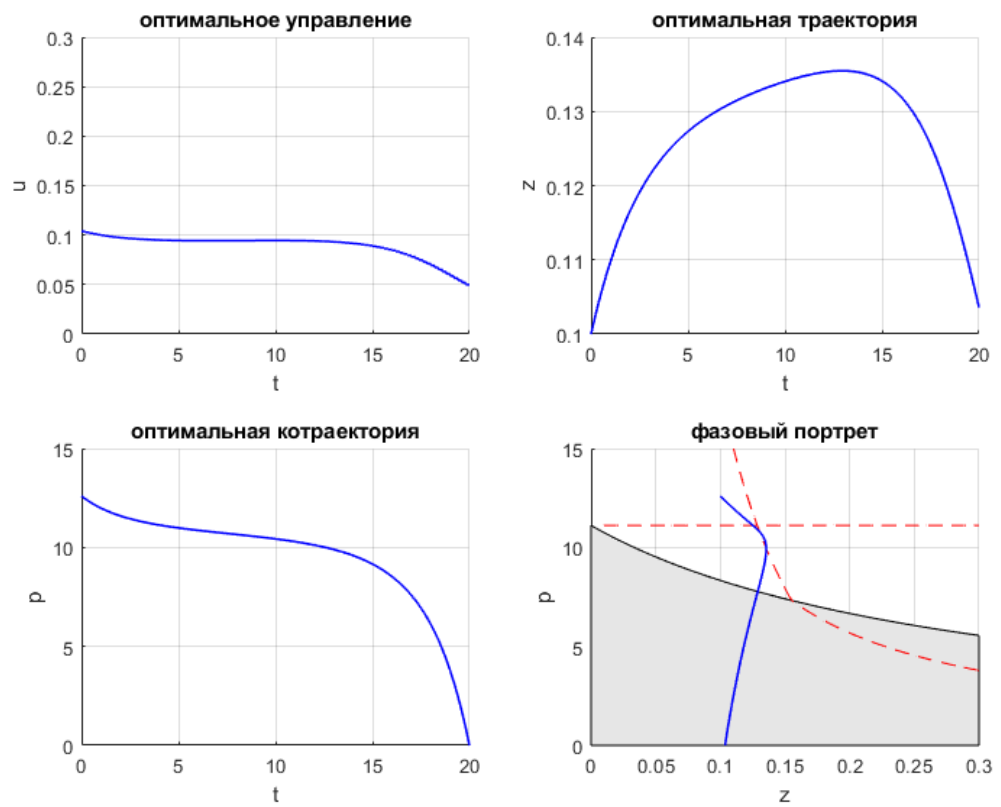


Рис. 4.10: A1B1C3,  $\nu = b$



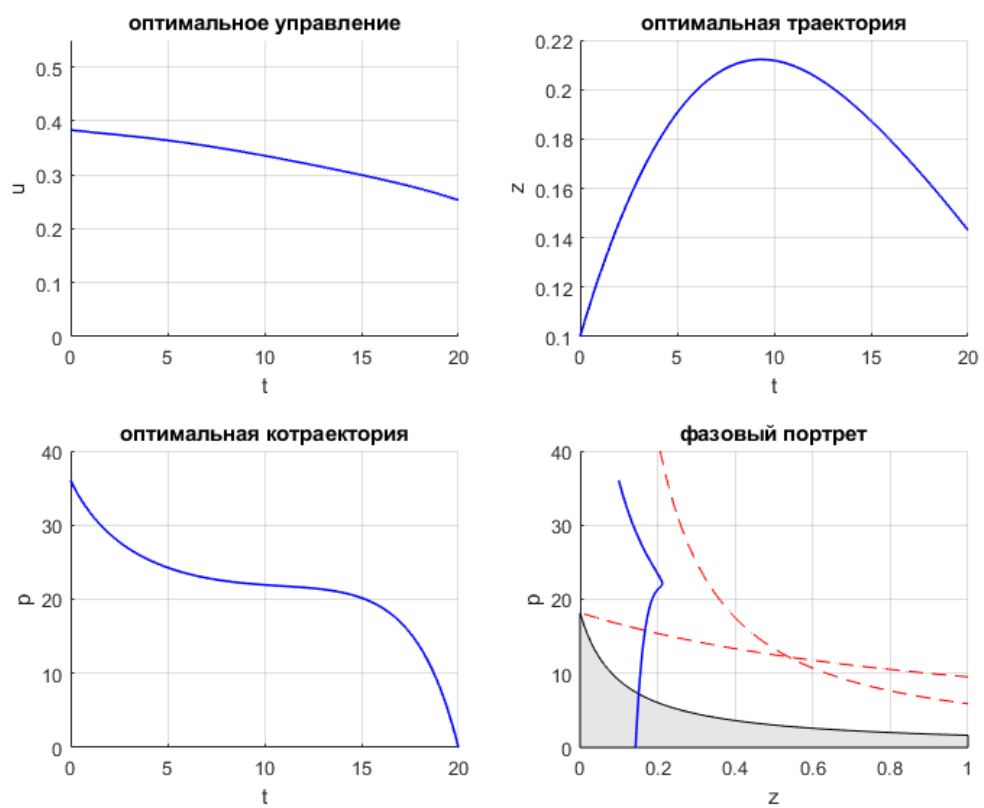


Рис. 4.11: A1B1C2

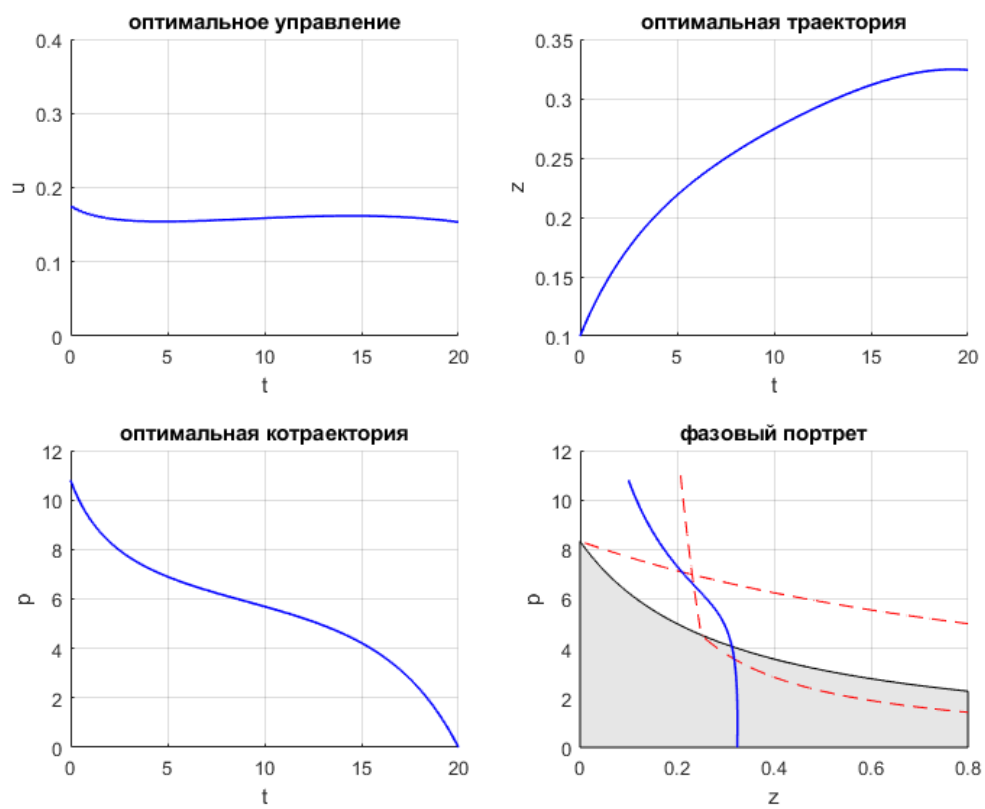


Рис. 4.12: A1B1C1

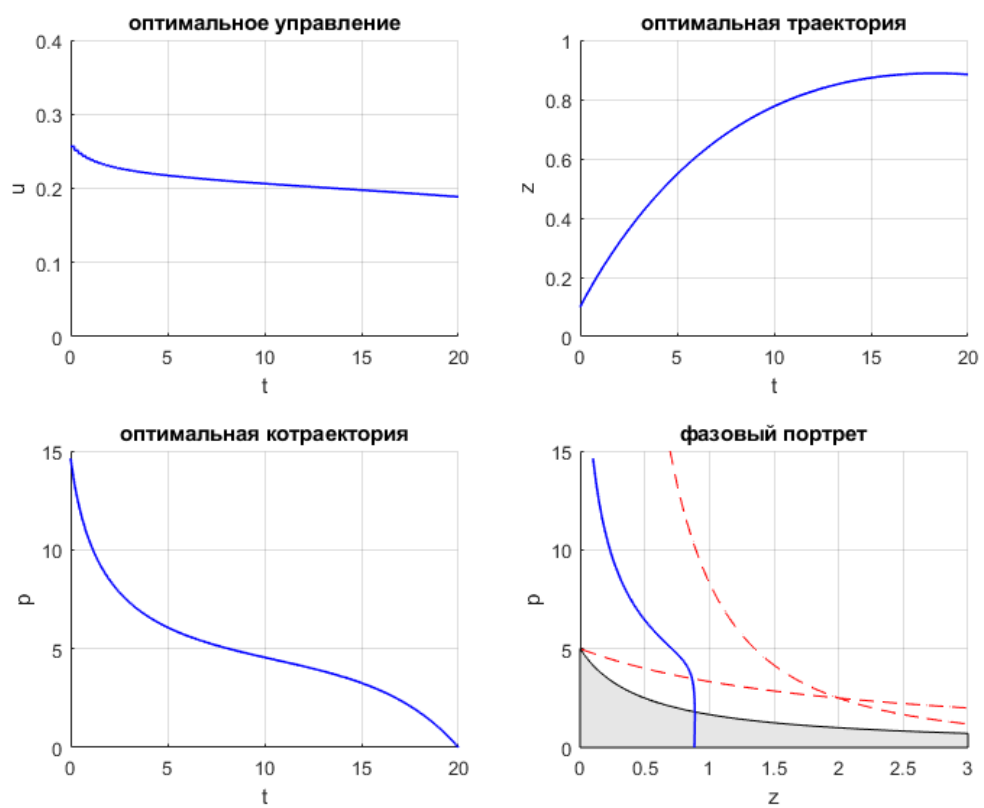


Рис. 4.13: A1B1C1

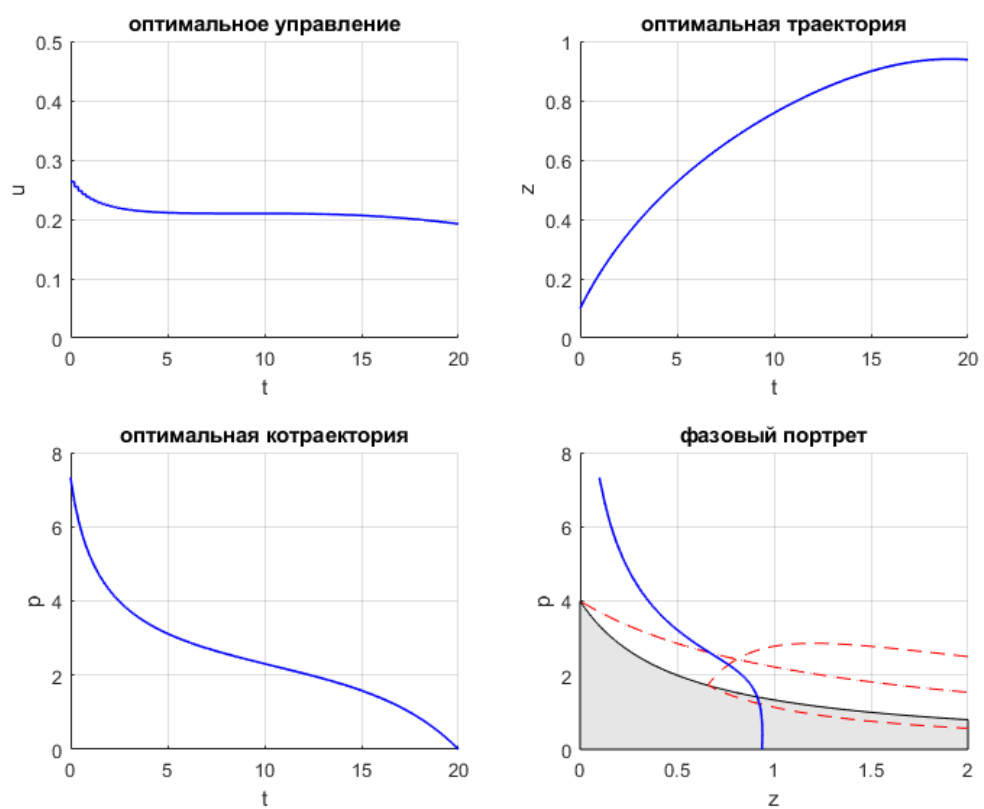


Рис. 4.14: A1B1C7

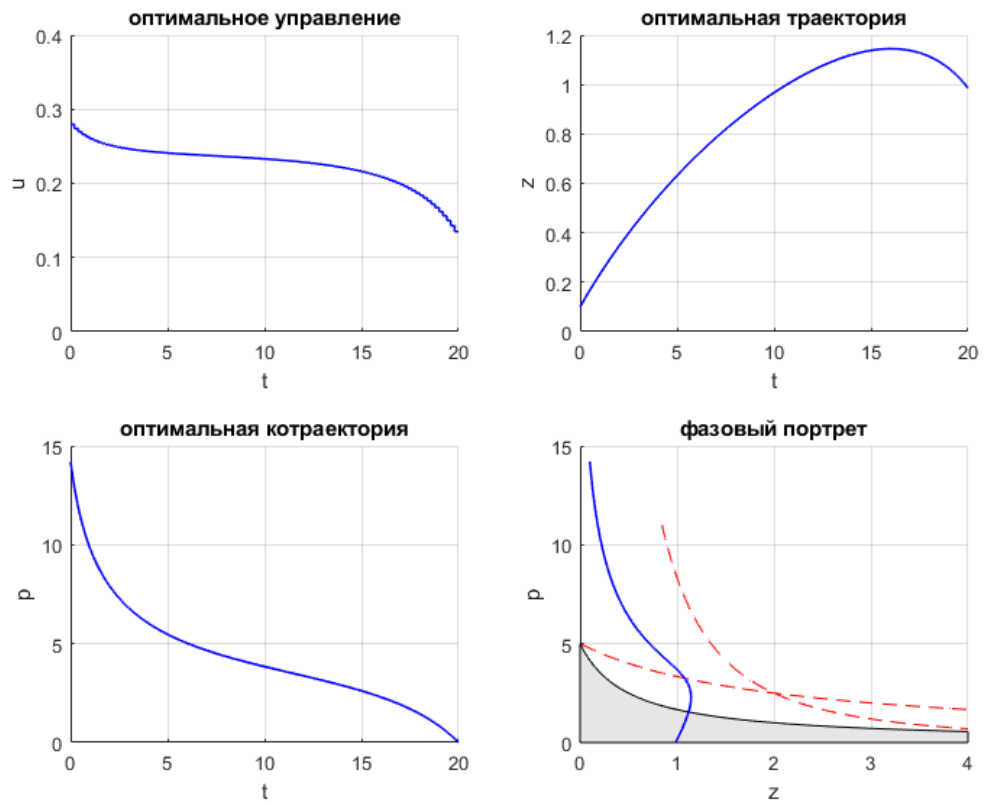


Рис. 4.15: A1B1C4

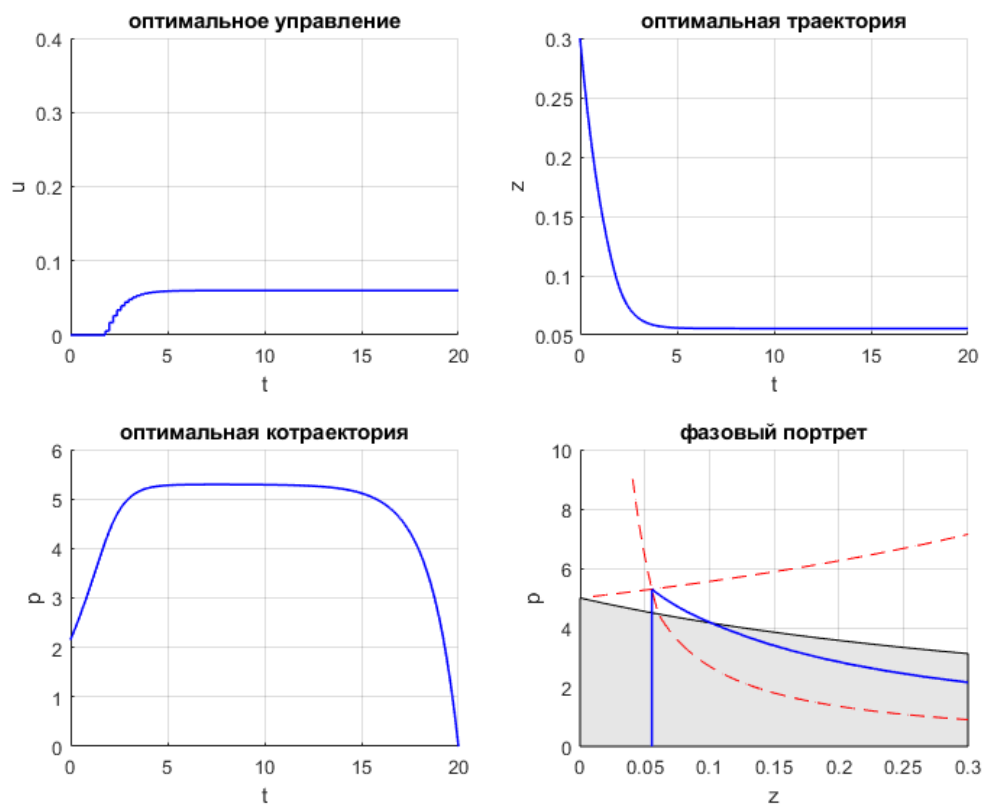


Рис. 4.16: A1B1C3,  $\nu > b$

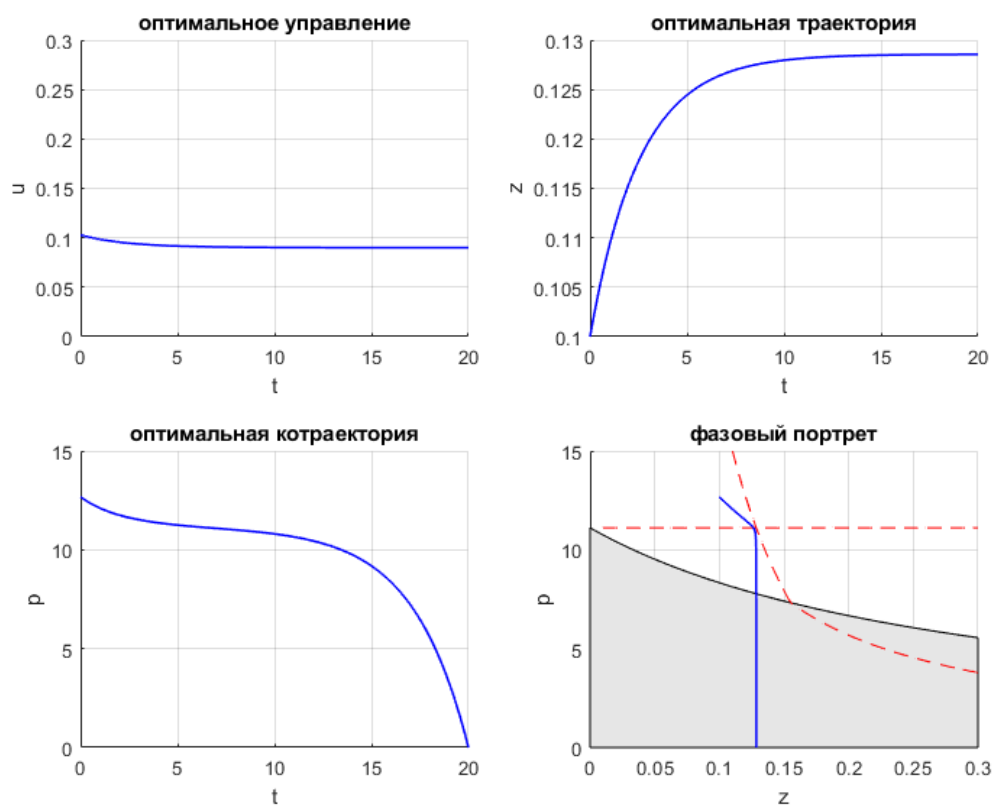


Рис. 4.17: A1B1C3,  $\nu = b$

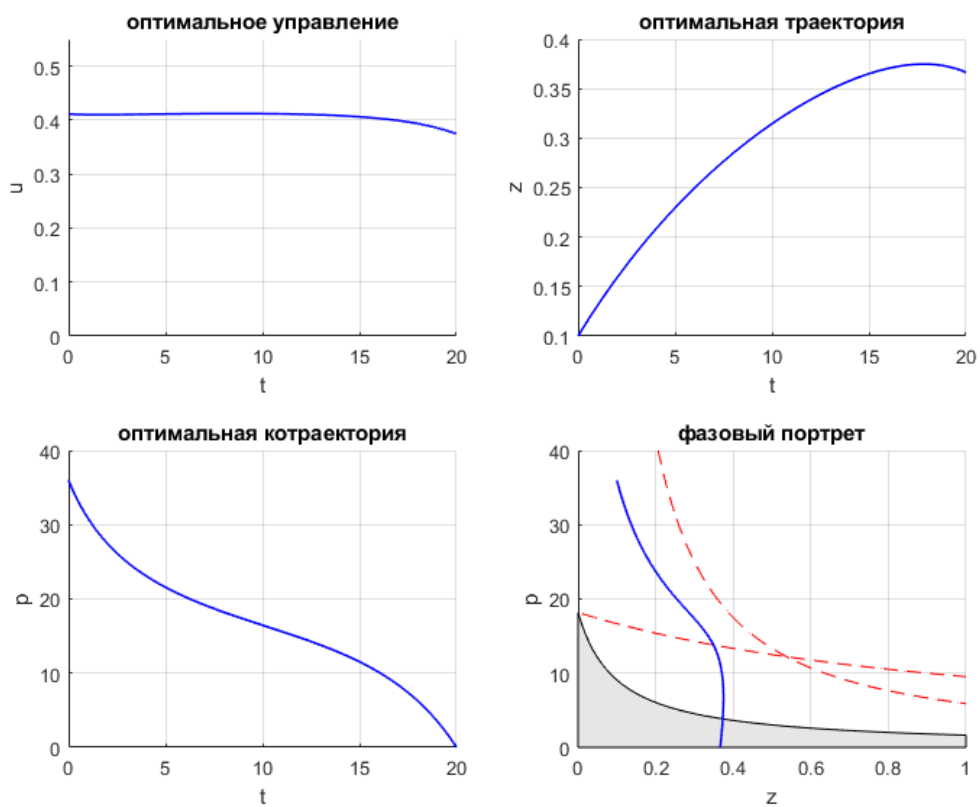


Рис. 4.18: A1B1C2

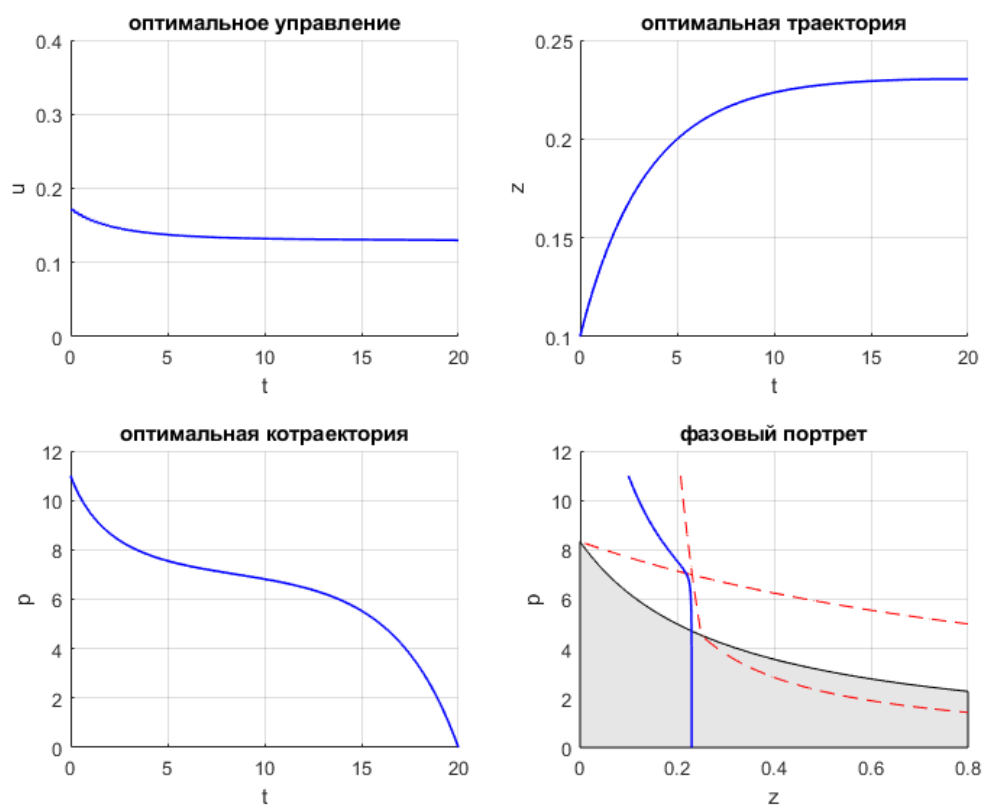


Рис. 4.19: A1B1C1

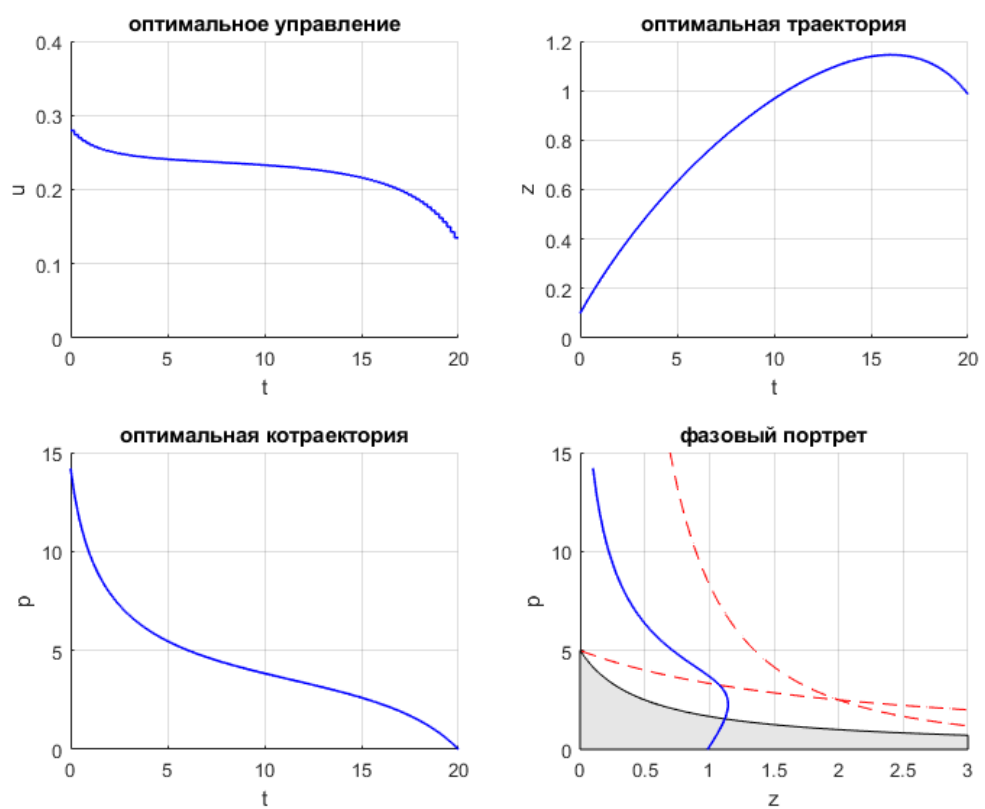


Рис. 4.20: A1B1C1

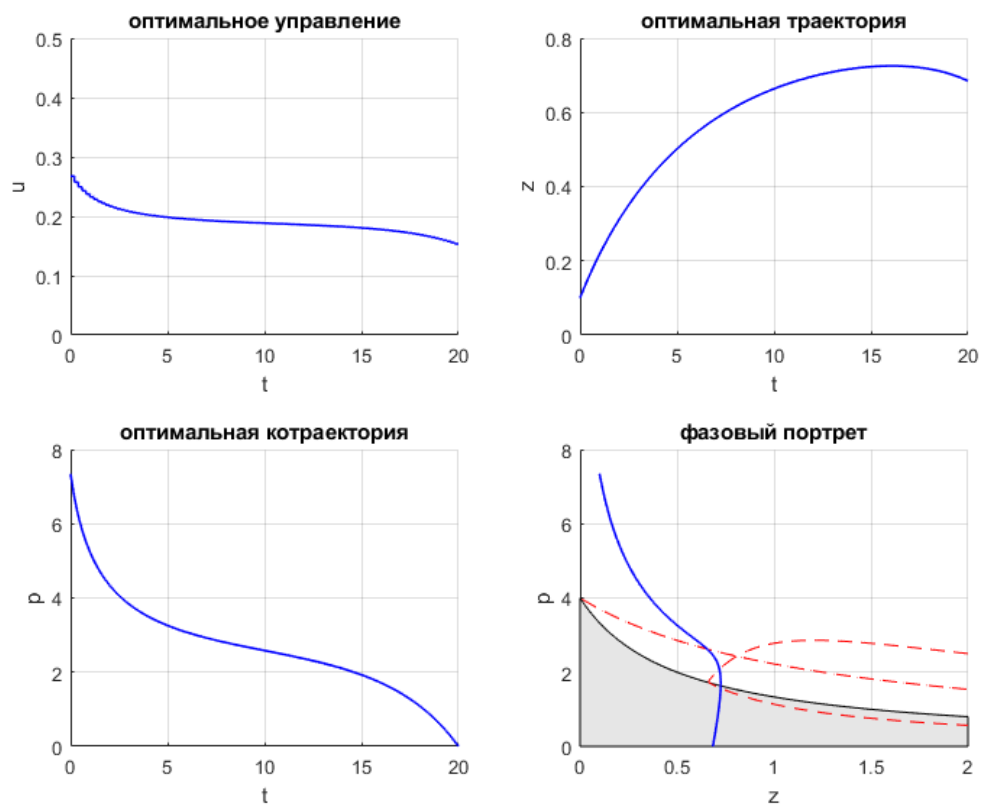


Рис. 4.21: A1B1C7

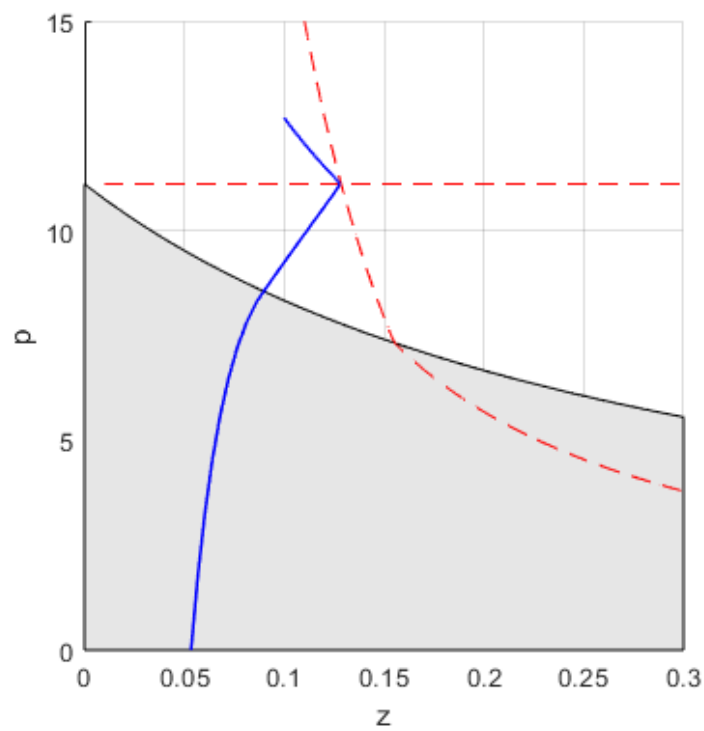


Рис. 4.22: Фазовый портрет (4.1)

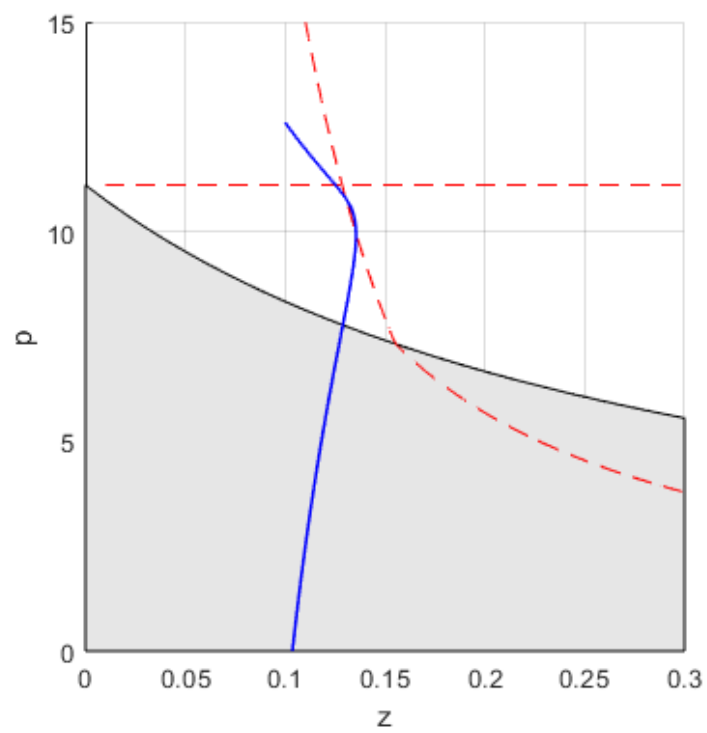


Рис. 4.23: Фазовый портрет (4.2)

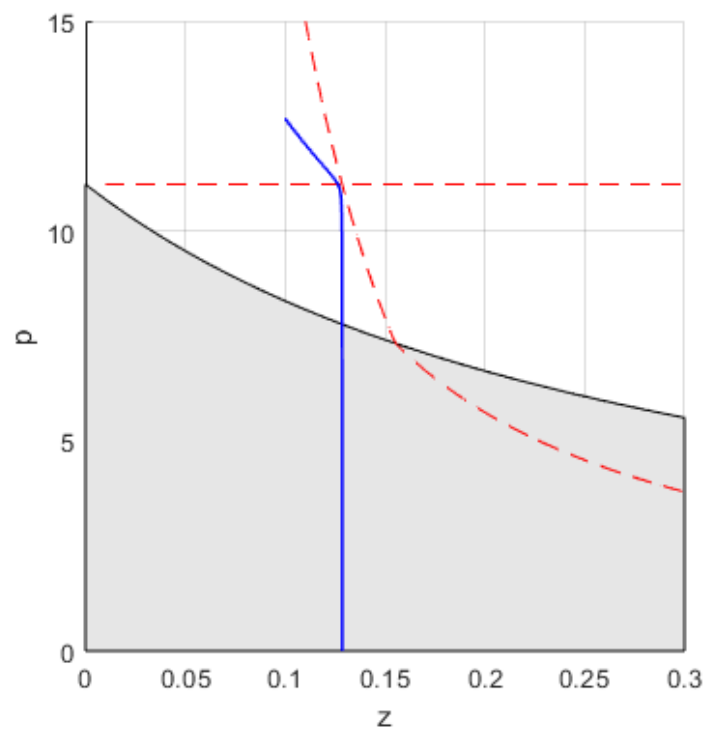


Рис. 4.24: Фазовые портрет (4.3)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсовой работе рассмотрены: основные результаты качественной теории, наиболее часто применяемые на практике численные методы решения задач оптимального управления [5].

Исследовалась задача оптимального управления специального вида с конечным горизонтом планирования  $z$ . Решение задачи было осуществлено с помощью прямого численного метода Direct Single Shooting и с помощью стратегии МРС. Алгоритмы решения задачи оптимального управления были реализованы в MatLab. Проведен анализ решения задачи.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Альсевич В. В. Методы оптимизаций. Учебное пособие /Габасов Р. Ф., М.Калинин А. И., Кириллова Ф. , Крахотко В. В., Павленок Н.С. , — Изд-во «Четыре четверти», 2011.

2 Асеев С. М., Кряжковский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.

3 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Иностранная литература, 1960. – 400 с.

4 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

5 Diehl M. Lecture Note on Optimal control and Estmation. – Springer, 2014.

6 Fontes, F.A.C.C. A general framework to design stabilizing nonlinear model predictive controllers / F.A.C.C. Fontes // Systems & Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – No. 2. – P. 127–143.

7 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.