

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РОСТА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

Готовец Мария Алексеевна

## ● Объект исследования

- ▶ Процесс экономического развития страны технологического последователя, заимствующего технологии страны-лидера
- ▶ Задача оптимального управления распределением трудовых ресурсов страны-последователя

## ● Цели работы

- ▶ Проанализировать решение задачи оптимального экономического роста страны-последователя при различных параметрах
- ▶ Применить методы управления по прогнозирующей модели с целью аппроксимации решения задачи с бесконечным горизонтом последовательным решением прогнозирующих задач с конечным горизонтом
- ▶ Исследовать три различных подхода к построению прогнозирующих задач

# Задача оптимального роста технологического последователя

- $A$  — страна-лидер, выделяет в исследовательский сектор долю  $L_N^A(t)$  трудовых ресурсов
- $B$  — страна-последователь, выделяет в исследовательский сектор долю  $L_N^B(t)$  трудовых ресурсов, заимствует технологии у  $A$

$$\int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right\} dt \rightarrow \max_{L_N^B}$$

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), \quad L_N^B(t) \in [0, L^B[$$

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t)$$

$$N^A(0) = N_0^A, \quad N^B(0) = N_0^B$$

- ▶  $g^A, L^B, a^B, \gamma > 0$  — заданные параметры
- ▶  $N_0^A > 0, N_0^B > 0$  — заданные начальные состояния

# Задача оптимального роста технологического последователя

- Замена переменных

$$x(t) = N^B(t), \quad b = \frac{L^B}{a^B}, \quad u(t) = \frac{L_N^B(t)}{a^B}, \quad \rho = \rho^B$$

$$y(t) = N^A(t), \quad \nu = g^A, \quad \kappa = \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max$$

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t))$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t)$$

$$y(0) = y_0, \quad u(t) \in [0, b - \varepsilon]$$

- Замена переменных с целью понижения размерности:

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0, \quad z_0 = \frac{x_0}{y_0}$$

- Редуцированная задача

$$\begin{aligned} I(z, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max \\ \dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \quad z(0) = z_0 \\ u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$z \in \mathbb{R}$  — состояние системы,  $u \in \mathbb{R}$  — управление.

- Задача оптимального управления нелинейной системы с критерием Лагранжа.

- Гамильтонова система:

$$\dot{z}(t) = (b - \nu)z(t) + b\gamma - \frac{1}{p(t)}$$

$$\dot{p}(t) = -(b - \nu - \rho)p(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa + 1)z(t)}{z(t) + \gamma z(t)}$$

- Уравнения для  $(z_1, p_1)$ :

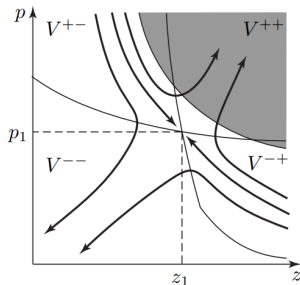
$$p = h_{11}(z)$$

$$h_{11}(z) = h_{12}(z)$$

$$h_{11}(z) = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z},$$

$$h_{12}(z) = \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z},$$

- Типичные фазовые траектории решений гамильтоновой системы в неособых невырожденных случаях



- Модель объекта управления

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t, \quad s \geq t$$

- Стоимость этапа

$$L(x, u)$$

- Полная стоимость процесса (с конечным горизонтом)

$$J_T(x_0, u) := \int_0^T L(x(s|x_0, u), u(s))$$

- Задача минимизации полной стоимости на бесконечно горизонте

$$J_\infty(x_0, u) \rightarrow \min_u$$

## Прогнозирующая задача оптимального управления

$$\mathcal{P}(t, x_t, T) = \int_t^{t+T} L(x(s), u(s), s) ds + W(t+T, x(t+T))$$

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x_t$$

$$u(s) \in U(s), \quad s \in [t, t+T]$$

$$x(t+T) \in S$$

## Алгоритм MPC

- ❶ Измерить текущего состояния объекта  $x_{t_i}$ .
- ❷ Вычисляется оптимального (программного) управления  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i + T]$ , — задачи  $\mathcal{P}(t_i, x_{t_i}, T)$ .
- ❸ Управление  $u^*(t) := u^0(t)$  при  $t \in [t_i, t_i + \delta]$  подается на вход объекта управления.
- ❹ Процедура повторяется для следующего момента  $t_{i+1}$ .



# Подход 1: Прогнозирующая задача для неограниченного ЕМРС

- В задаче (1) заменим бесконечный горизонт управления конечным
- Дополнительные условия на правый конец траектории не накладываем

$$\begin{aligned} I_1(z, u) &= \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max \\ \dot{z}(t) &= u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t) \\ z(\tau) &= \frac{x(\tau)}{y(\tau)} \\ u(t) &\in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T] \end{aligned} \quad (2)$$

- В прогнозирующую задачу добавим терминальное ограничение-равенство
- Потребуем, чтобы в терминальный момент состояние равнялось магистральному значению  $z_1$

$$I_2(z, u) = \int_t^{t+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max$$

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t) \quad (3)$$

$$z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)}, \quad z(\tau + T) = z_1$$

$$u(t) \in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T]$$

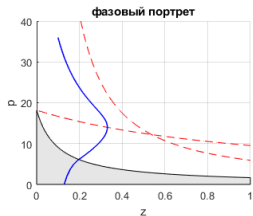
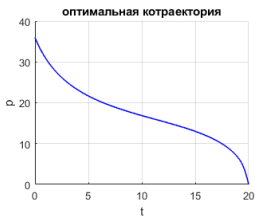
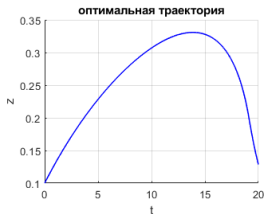
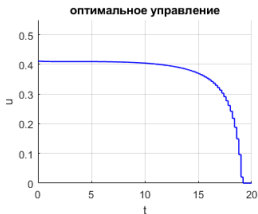
- В прогнозирующую задачу добавим терминальную стоимость
- В качестве значения параметра  $\alpha$  выберем соответствующее магистральное значение  $p_1$

$$I_3(z, u) = \alpha e^{-\rho(\tau+T)} z(\tau+T) + \int_t^{\tau+T} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max$$

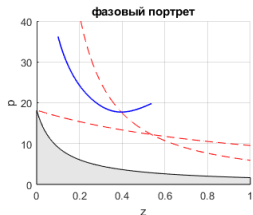
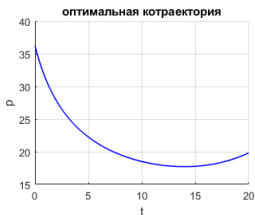
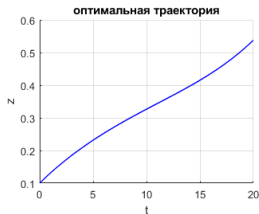
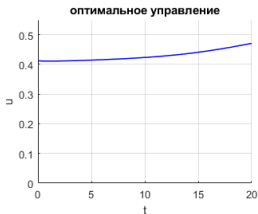
$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t) \quad (4)$$

$$z(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)}$$

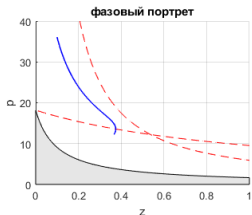
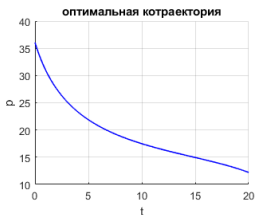
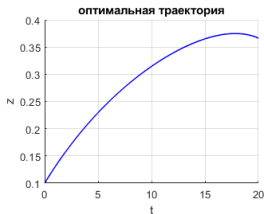
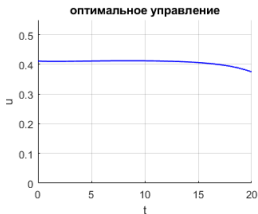
$$u(t) \in [0, b - \varepsilon], \quad t \in [\tau, \tau + T]$$



- Оптимальные траектории имеют продолжительные промежутки убывания и далеки от магистрали



- Участков убывания оптимальной траектории нет и значения уже ближе к магистральным, но время решения на 61% больше



- Участки убывания оптимальной траектории значительно сократились, значения стремятся к магистральным

# Сравнения программных решений в подходах 1-3

Рис.: Подход 1

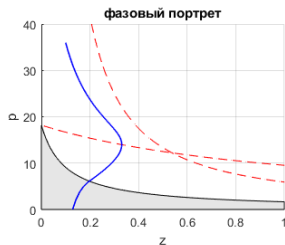


Рис.: Подход 2

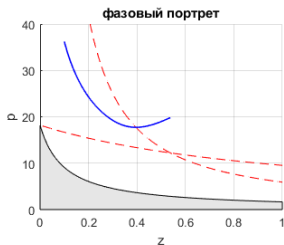
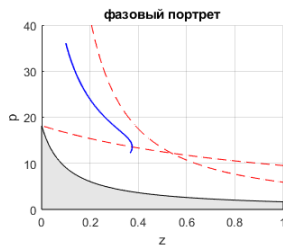
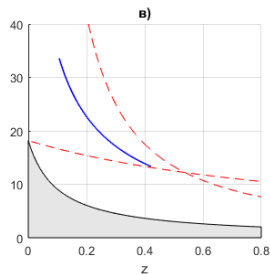
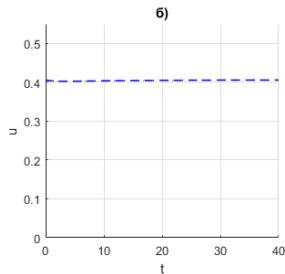
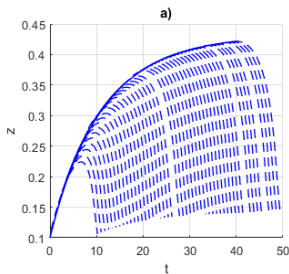


Рис.: Подход 3



Параметры:

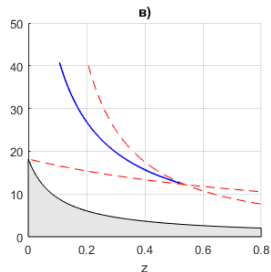
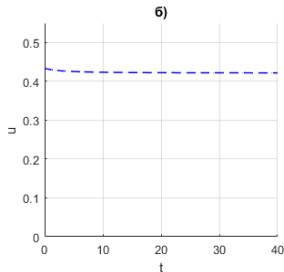
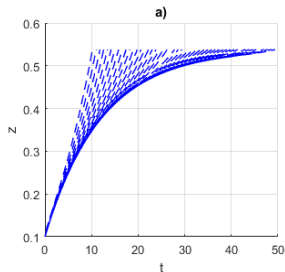
$$\gamma = 0.1, \nu = 0.5, b = 0.55, \rho = 0.15, \kappa = 1.5, z_0 = 0.1$$



- Оптимальные траектории задачи имеют продолжительные участки убывания
- При увеличении  $T$  с 10 до 30 с сохранением точности траектория достигает магистрали, однако время решения прогнозирующей задачи возрастает в 7.15 раз



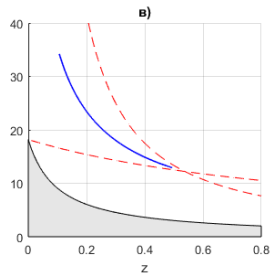
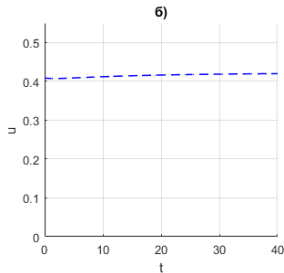
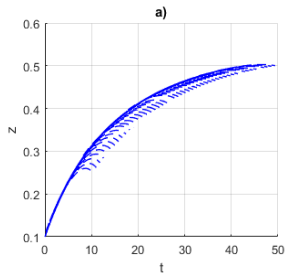
## Подход 2: EMPC с ограничениями-равенствами



Недостатки задачи с терминальным ограничением-равенством:

- трудоемкость решения задачи
- начальная недопустимость задачи с ограничением-равенством

## Подход 3: ЕМРС с терминальной стоимостью



- Достигает магистрального значения
- Имеет решение при любом горизонте  $T$

## Общая прогнозирующая задача для ЕМРС с терминальной стоимостью

$$\begin{aligned} \min_u \int_{\tau}^{\tau+T} L(x(t), u(t)) dt + W(x(\tau + T)) \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(\tau) = x_{\tau} \\ u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [\tau, \tau + T] \end{aligned}$$

- Гамильтонова система для прогнозирующей задачи в общем виде:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -(\partial f(x(t), u(t))/\partial x)^T p(t) + \partial L(x(t), u(t))/\partial x \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad t \in [\tau, \tau + T] \end{aligned}$$

- Условие трансверсальности:

$$p(\tau + T) = p_1$$

- Выберем линейную терминальную стоимость  $W(x) = p_1^T x$
- Тогда:

$$p(\tau + T) \equiv -\partial W(z(\tau + T))/\partial x = p_1$$

- Условия оптимальности имеют вид:

$$\partial L(x, u)/\partial x + (\partial f(x, u)/\partial x)^T \lambda = 0$$

$$f(x, u) = 0$$

- Гамильтонова система на магистральных значениях:

$$-(\partial f(z_1, u_1)/\partial x)^T p_1 + \partial L(z_1, u_1)/\partial x = 0, \quad f(z_1, u_1) = 0$$

- Установим, что  $p_1 = -\lambda_1$  удовлетворяет гамильтоновой системе, тогда  $W(x) = -\lambda_1^T x$

В задаче роста терминальная стоимость содержит дисконтирование:

$$W(z(\tau + T)) = e^{-\rho(\tau+T)} p_1 z(\tau + T)$$

- Сравнивались три варианта ЕМРС
  - ▶ неограниченный ЕМРС
  - ▶ ЕМРС с терминальным ограничением типа равенства
  - ▶ ЕМРС с терминальной стоимостью
- Построено программное решение прогнозирующих задач оптимального роста технологического последователя для всех трех подходов
- Исследовались параметры, позволяющие получить решение асимптотически приближающие магистральное значение
- В результате численных экспериментов продемонстрировано преимущества третьего подхода
  - ▶ Простой вариант выбора терминальной стоимости
  - ▶ Задача оптимального управления проще с точки зрения численного решения
  - ▶ Задача проще с вычислительной точки зрения
  - ▶ Имеет решение при любом горизонте  $T$

Спасибо за внимание!