Задача X

Alg1, Alg2

Анализ на алгоритми:
Какво искаме от един алгоритъм?
1. Коректност
2. Бързодействие:
 - сложност по време
 - сложност по памет

Дефиниция: Сложност по време - ф-я по големината на входа

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Пр: $f(n) = 300n + 8$

→ големина на входа
→ брой стъпки

Пример за големина на входа:

1) сортиране на масив → размерът на масива
2) дали число е просто → самото число

! Интересуваме се от сложността единствено, когато големината на входа клони към безкрайност ($n \to \infty$)

$f(n) = \boxed{300}n + \boxed{8}$

→ константен множител

→ константно събираемо

точният брой стъпки

* * не зависи от големината на входа

$f(n) \asymp n$ $\qquad$ $f(n) = \Theta(n)$ *растят еднакво бързо

$$\Theta(f) = \{ g \mid \exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : c_1 . f \leq g \leq c_2 . f \}$$

$f(n) \asymp n$

$\text{"}300n+8 \quad vs. \quad n$

$300n \leq 300n+8 \leq 400n$

"Обосновка"
"защо игнорираме конст. множители

$f(n) = \Theta(n)$

Забележка: Асимптотично нарастване на основните функции

1. Ограничени функции /константни/
2. Логаритмични функции и техните степени (полилогаритмични)
3. Степенни ф-ии
4. Показателни ф-ии
5. Факториелът $(n!)$
6. $\text{"}n^n\text{"}$
7. Суперекспоненти (2^{2^n})

$$1 < \lg(\lg(n)) < \lg(n) < n < n\log(n) <$$
$$< n^2 < n^3 < 2^n < n! < n^n$$

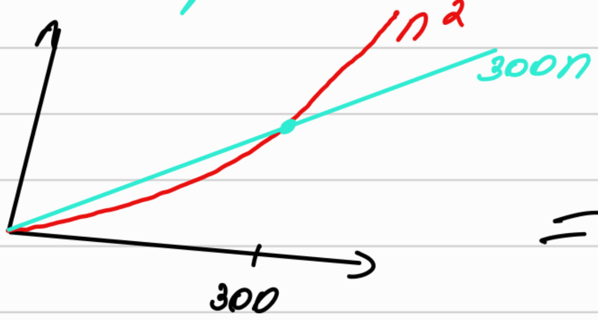
Задача 7: Знаем, че $n \le 300$

големината на входа

Alg 1: n^2

Alg 2: $300n \asymp n$

Кой алгоритъм ще изберем?



$\Rightarrow$ Ползваме Alg 1

Правила:

① $f(n) = g(n) + h(n), \quad g(n) \prec h(n)$

$f(n) \asymp h(n)$

①' $P(n)$ - произволен полином от степен k

$p(n) \asymp n^k$

② $f(n) \asymp g(n) \iff (f(n))^k \asymp (g(n))^k$

③ $f(n)$ и $g(n)$, растящи и неограничени.

$\lg(f(n)) \prec \lg(g(n)) \Rightarrow f(n) \prec g(n)$

④ $f(n) \asymp g(n) \Rightarrow \lg(f(n)) \asymp \lg(g(n))$

⑤ $$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \begin{cases} \infty, & f(n) \succ g(n) \\ const, & f(n) \asymp g(n) \\ 0, & f(n) \prec g(n) \end{cases}$$

Задача: Подредете по асимптотично нарастване следните ф-ии

$f_1(n) = n^n$

$f_2(n) = \ln(n)$

$f_3(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$f_4(n) = 3 + \cos(n)$

$f_5(n) = (\lg(\lg(n)))^{\lg(\lg(n))}$

$f_6(n) = n + 5\sin(n)$

$f_7(n) = n^{3n}$

$f_8(n) = \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k}$

$f_9(n) = \sum_{k=1}^{n^2} k$

$f_{10}(n) = (\sqrt{n!})^{\sqrt{n!}}$

Решение:

$f_4(n) = 3 + \cos(n)$, $\boxed{f_4(n) = \Theta(1)}$

$\Rightarrow 2 \leq f_4(n) \leq 4$

от дефин. $\begin{cases} c_1 > 0, \ c_2 > 0 \\ c_1 = 2, \ c_2 = 4 \end{cases}$

$f_8(n) = \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k}$, $f_8(n) = \Theta(1)$

$$f_3(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1 \approx 2,7183 - 1 =$$

$$= 1,7183 \quad \text{(const)}$$

$$f_3(n) = \Theta(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_3(n) \asymp f_4(n) \asymp f_8(n)}$$

$$f_2(n) = \ln(n)$$

двоичен логаритъм

$$\ln(n) \asymp \lg n$$

$$\log_e n = \frac{\log_2 n}{\log_2 e}$$

константен множител

$$f_5(n) = (\lg(\lg(n)))^{\lg(\lg(n))}$$

vs. $\lg(n) = f_2(n)$

Логаритмуваме: f_5 и f_2

$$\lg(f_5(n)) = \lg((\lg \lg n)^{\lg \lg n}) =$$

$$= \lg \lg(n) \cdot \underline{\lg \lg \lg(n)}$$

$$\lg f_2(n) = \lg \lg(n) \cdot 1$$

$$\lg(f_2(n)) \prec \lg(f_5(n))$$

(3) $\Rightarrow f_2(n) \prec f_5(n)$

, но $f_8(n) \prec f_2(n)$

$$\Rightarrow f_3(n) \asymp f_4(n) \asymp f_8(n) \prec f_2(n) \prec f_5(n)$$

$$f_6(n) = n + 5.\sin(n)$$

$$n - 5 \leq f_6(n) \leq n + 5$$

$$\Rightarrow f_6(n) = \Theta(n)$$

$f_6(n) \asymp n \qquad f_5(n) = (\lg \lg n)^{\lg \lg n}$

$$\lg(f_6(n)) = \lg(n)$$

$$\lg(f_5(n)) = \lg \lg n . \lg \lg \lg n < \lg \lg n . \lg \lg n$$

$$= (\lg \lg n)^2$$

Полагаме $x = \lg n$:

$$\underset{\downarrow\,\infty}{x} \text{ vs. } \underset{\searrow\,\infty}{(\lg x)^2}$$

$$(\lg x)^2 < x$$

$$(\lg \lg n)^2 < \lg n$$

$$\lg f_5(n) < (\lg \lg n)^2 < \lg n = \lg(f_6(n))$$

$$\Rightarrow f_5(n) < f_6(n)$$

$$f_3(n) \asymp f_4(n) \asymp f_8(n) < f_2(n) < f_5(n) < f_6(n)$$

$$f_9(n) = \sum_{k=1}^{n^2} k \,, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \asymp n^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \asymp n^4$$

$f_3(n) \asymp f_4(n) \asymp f_8(n) \prec f_2(n) \prec f_5(n) \prec f_6(n) \prec f_9(n) \prec f_1(n)$

$f_1(n) = n^n \asymp n^n \qquad f_9(n) \asymp n^4$

От реда на ф-те $\Rightarrow f_9(n) \prec f_1(n)$

$f_1(n)$ vs. $f_7(n) = n^{3.n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_7(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3n}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} n^{2n} = \infty$$

$\Rightarrow f_1(n) \prec f_7(n)$

$f_3(n) \asymp f_4(n) \asymp f_8(n) \prec f_2(n) \prec f_5(n) \prec f_6(n) \prec f_9(n) \prec f_1(n) \prec f_7(n)$

$f_{10}(n) = (\sqrt{n!})^{\sqrt{n!}}$ vs. $f_7(n) = n^{3n}$

Логаритмуване:

$\lg f_7(n) = \lg(n^{3n}) = 3n.\lg n \asymp n.\lg n$

$\lg f_{10}(n) = \sqrt{n!}.\lg\sqrt{n!} = \sqrt{n!}.\lg[(n!)^{\frac{1}{2}}] =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{n!}.\lg(n!) \asymp \frac{1}{2}\sqrt{n!}.n\lg n$

$n! \asymp \sqrt{n}.\frac{n^n}{e^n}, \quad \lg(n!) \asymp n.\lg n$

$f_3(n) \asymp f_4(n) \asymp f_8(n) \prec f_2(n) \prec f_5(n) \prec f_6(n) \prec f_9(n) \prec f_1(n) \prec f_7(n) \prec f_{10}(n)$