Анализ на времевата сложност на итеративни алгоритми чрез сумиране

$$\sum_{i=1}^{n} i^a = \begin{cases} \Theta(n^{a+1}), & a > -1 \\ \Theta(\lg n), & a = -1 \\ \Theta(1), & a < -1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Theta(n^4)$$

хормоничен ред

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} = \Theta(\lg n)$$

Задача 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i*i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \boxed{\Theta(n^3)}$$

Задача 2:

$$\sum_{\substack{i=1,\\ i^*=2}}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{\substack{i=1,\\ i^*=2}}^{n} i = 1+2+4+8+16+\dots+2^k = 2^{k+1}-1 = 2.2^k - 1 \asymp$$

$$\asymp 2^k \; (*)$$

най-голямата степен на 2-цата $\leq n$

$2^k \leq n < 2^{k+1}$

$2^k \leq n < 2.2^k$. Следователно $n \asymp 2^k$ $(**)$

От $(*)$ и $(**)$ и транзитивността на "$\asymp$" следва, че

$\sum\limits_{\substack{i=1,\\ i^*=2}}^{n} i \asymp n$, т.е. $\sum\limits_{\substack{i=1,\\ i^*=2}}^{n} = \boxed{\Theta(n)}$

Задача 3:

Сложност на f? $\rightarrow \Theta(n)$

Сложност на f_3?

Външният цикъл се изпълнява от порядъка на $\lg n$ пъти.

Сложността на $f_3 \stackrel{?}{=} \Theta(n \lg n)$. НЕ!

Променливата "res" ВИНАГИ е 1-ца.

=> Цикълът for във f винаги се изпълнява точно веднъж.

=> Сложността на f в рамките на f_3 е $\Theta(1)$.

=> Сложността на f_3 е $\boxed{\Theta(\lg n)}$.

Рекурентни уравнения

Def: Рекурентно уравнение - уравнение, което изразява общия член на редица от числа чрез предишни членове.

! Сложността на рекурсивни алгоритми се описва чрез рекурентни уравнения.

Решаване на рек. ур.

Търсим затворена ф-ла.

(+) $\left| \begin{array}{l} T(0) = 0 \\ T(n) = T(n-1) + n, \ n > 0 \end{array} \right\}$ линейно рек. ур.

Решение: $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

затворена ф-ла (функц. с-л не се среща вдясно)

! Интересуваме се само от асимптотиката на решението.
В "естествените" алгоритми асимптотиката на решението НЕ зависи от началните условия => ще ги изпускаме.

Методи за решаване на рекурентни уравнения

I) Чрез развиване

Задача 1: Решете рек. уравнение

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

Решение:

$$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 1 + 1 = T(n-3) + 1 + 1 + 1 = \ldots$$

$$= T(1) + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1} = T(0) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = T(0) + n = \boxed{\Theta(n)}$$

Задача 2: Решете рек. уравнение

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Решение:

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n} = T(n-2) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \ldots = T(1) + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n-1} =$$

$$= T(0) + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}_{n} = T(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \boxed{\Theta(\lg n)}$$

Задача 3: Решете рек. уравнение

$$T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Решение:

$$T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n} = 2\cdot 2\cdot T(n-2) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} = \ldots = 2^{n-1} T(1) + \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{2}}_{n-1} =$$

$$= 2^n T(0) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{4}{n-2} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{2} + \frac{2^{n-1}}{1} =$$

$$\frac{1}{n} = \frac{2^n}{n\cdot 2^n}, \quad \frac{2}{n-1} = \frac{2^n}{(n-1)\cdot 2^{n-1}}, \quad \frac{2^{n-2}}{2} = \frac{2^n}{2\cdot 2^2}, \quad \frac{2^{n-1}}{1} = \frac{2^n}{1\cdot 2^1}$$

$= 2^n T(0) + 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.2^i} = \boxed{\Theta(2^n)}$, защото

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.2^i} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

$$\Rightarrow 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.2^i} \le 2^n$$

Домашно: Решете рек. уравнение

$$T(n) = \frac{n}{n+1} T(n-1) + 1$$

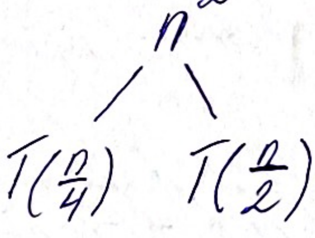
Задача 4: Решерете рек. уравнение

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

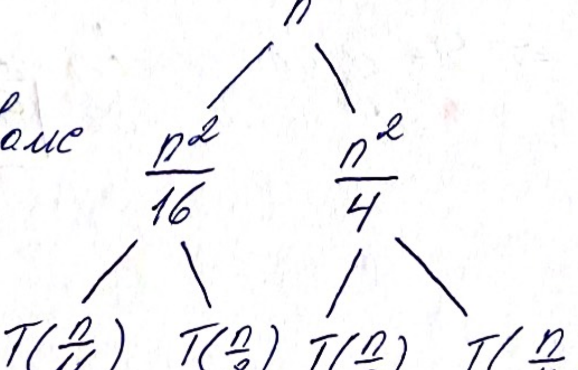
Решение:

Ще решим рек. ур., използвайки метода с **дървото на рекурсията**.

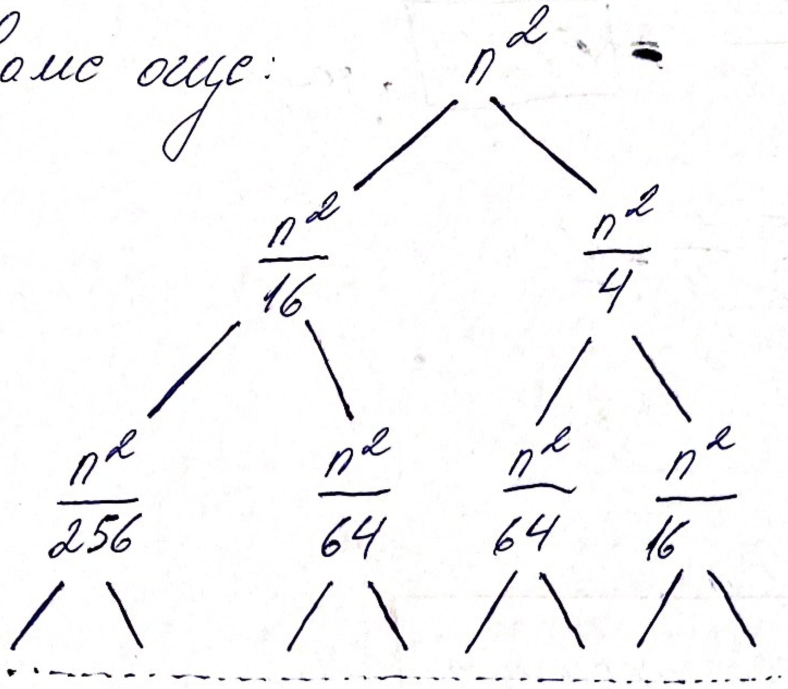
Дясна страна:



Развиваме $T(\frac{n}{4})$ и $T(\frac{n}{2})$ и получаваме



Развиваме още:



$h = \lfloor \lg n \rfloor$

$h \approx \lg n$

Сумата на върховете, които не са листа, е

$$S = n^2 + \underbrace{\frac{n^2}{16}+\frac{n^2}{4}}_{\frac{5n^2}{16}} + \underbrace{\frac{n^2}{256}+\frac{n^2}{64}+\frac{n^2}{64}+\frac{n^2}{16}}_{\frac{25n^2}{256}} + \dots$$

сума на пълните слоеве

Тази сума очевидно е крайна.

Долна граница: n^2

Горна граница: $n^2\left(1+\underbrace{\frac{5}{16}+\frac{25}{256}+\dots}\right)$

безкрайна геометрична прогресия с частно $\frac{5}{16}$

=> е равна на $\frac{1}{1-5/16} = \frac{1}{11/16} = \frac{16}{11}$

Получихме, че

$n^2 \le S \le \frac{16}{11} n^2$

=> S = сумата на върховете, които не са листа $= \boxed{\Theta(n^2)}$

Сборът на листата:

$T(1) \cdot \underbrace{\#\text{им}}_{\le 2^h \le n}$

=> Сборът на листата ~~[illegible]~~ е $= \boxed{O(n)}$

$T(n) = \underbrace{O(n)}_{\text{листа}} + \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{вътрешни върхове}} = \boxed{\Theta(n^2)}$

II Чрез метода с характеристичното уравнение

Приложим, ако:

- рекурентното уравнение е линейно
- коефициентите му са постоянни (константни)
- рекурентното уравнение има постоянна дължина на историята
- свободният му член (ако има такъв) е квазиполином

Задача 5: Решете рек. уравнение

$T(n) = 4T(n-2) + \underbrace{n \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}_{\text{квазиполином } (c \cdot n^k \cdot a^n + \dots}$

сбор от произв. на степенна и показателна ф-ии

Решение:

1. Правим характеристично уравнение

$x^n = 4x^{n-2}$

2. Делим на x^{n-2}

$x^2 - 4 = 0$

3. Правим мултимножество от корените на хом. част

$x_{1,2} = \pm 2$

$\{2, -2\}_{м.}$

4. Правим мултимножество от корените на нехом. част

$\{2, 2\}_{м.}$ от $n^{1} \cdot 2^n$

влиза 1+1 пъти

$\{3\}_{м.}$ от $4 \cdot n^{0} \cdot 3^n$

5. Обединяваме мултимножествата

$\{2, -2, 2, 2, 3\}_{м.}$

6. Правим общото решение

$$T(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n + D \cdot (-2)^n + E \cdot 3^n = \boxed{\Theta(3^n)}$$

Домашно: Решете рек. уравнение

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$