

Анализ на времевата сложност на итеративни алгоритми чрез сумиране

$$\sum_{i=1}^n i^a = \begin{cases} \Theta(n^{a+1}), & a > -1 \\ \Theta(\lg n), & a = -1 \\ \Theta(1), & a < -1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n i^1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Theta(n^4)$$

хармоничен ред

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \Theta(\lg n)$$

Задача 1:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i \times i} 1 = \sum_{i=1}^n i^2 = \boxed{\Theta(n^3)}$$

Задача 2:

$$\sum_{i=1, i^*=2}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1, i^*=2}^n i = 1+2+4+8+16+\dots+2^k = 2^{k+1}-1 = 2 \cdot 2^k - 1 \not\leq 2^k (*)$$

↑
най-голямата
степен на 2-ката $\leq n$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}$$

$$2^k \leq n < 2 \cdot 2^k. \text{ Следователно } n \not\leq 2^k (**)$$

От (*) и (**) и транзитивността на " \leq " следва, че

$$\sum_{i=1, i^*=2}^n i \leq n, \text{ т.е. } \sum_{i=1, i^*=2}^n i = \boxed{\Theta(n)}$$

Задача 3:

Сложност на $f?$ $\rightarrow \Theta(n)$

Сложност на $fz?$

Външният цикъл се изпълнява от порядъка на \sqrt{n} пъти.
Сложността на $fz \stackrel{?}{=} \Theta(n\sqrt{n})$. НЕ!

Променливата "res" винаги е 1-ца.

\Rightarrow Цикълът fz във f винаги се изпълнява точно веднъж.

\Rightarrow Сложността на f в рамките на fz е $\Theta(1)$.

\Rightarrow Сложността на fz е $\boxed{\Theta(\sqrt{n})}$.

Рекурентни уравнения

Def: Рекурентно уравнение - уравнение, което изразява общия член на редица от членове чрез предишните членове.

! Сложността на рекурсивни алгоритми се описва чрез рекурентни уравнения.

Решаване на рек. ур.

Търсим затворена ф-ла.

$$\textcircled{+} \left\{ \begin{array}{l} T(0) = 0 \\ T(n) = T(n-1) + n, n > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{линейно} \\ \text{рек. ур.} \end{array}$$

Решение: $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

↑ 2
затворена ф-ла (функция с-я не се среща външно)

! Интересуваме се само от асимптотиката на решението.

• В "естествените" алгоритми асимптотиката на решението НЕ зависи от началните условия \Rightarrow ще ги изпуснаме.

Методи за решаване на рекурентни уравнения

1/ Чрез развиване

Задача 1: Решите рекуррентное уравнение

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

Решение:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 1 = T(n-2) + 1 + 1 = T(n-3) + 1 + 1 + 1 = \dots \\ &= T(1) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1} = T(0) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n = T(0) + n = \boxed{\Theta(n)} \end{aligned}$$

Задача 2: Решите рекуррентное уравнение

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Решение:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \frac{1}{n} = T(n-2) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \dots = T(1) + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2}}_{n-1} = \\ &= T(0) + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}_n = T(0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \boxed{\Theta(\lg n)} \end{aligned}$$

Задача 3: Решите рекуррентное уравнение

$$T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Решение:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1) + \frac{1}{n} = 2 \cdot 2T(n-2) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} = \dots = 2^{n-1} T(1) + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \dots + \frac{2^{n-2}}{2}}_{n-1} = \\ &= 2^n T(0) + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{4}{n-2} + \dots + \frac{2^{n-2}}{2} \right) = \end{aligned}$$

Diagram illustrating the expansion of the recurrence relation for Task 3, showing the terms being summed in the final expression:

- Term 1: $\frac{1}{n}$ (orange)
- Term 2: $\frac{2}{n-1}$ (pink)
- Term 3: $\frac{4}{n-2}$ (orange)
- Term 4: $\frac{2^{n-2}}{2}$ (pink)

The terms are grouped together in a large bracket, indicating they are summed to form the final result.

$$= 2^n T(0) + 2^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot 2^i} = \boxed{O(2^n)}, \text{ защото}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot 2^i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

$$\Rightarrow 2^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot 2^i} \leq 2^n$$

Домашно: Решете рекур. уравнение

$$T(n) = \frac{n}{n+1} T(n-1) + 1$$

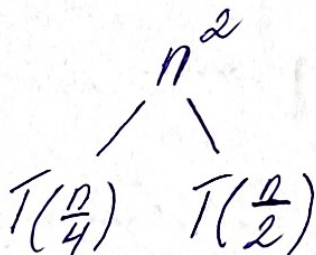
Задача 4: Решете рекур. уравнение

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

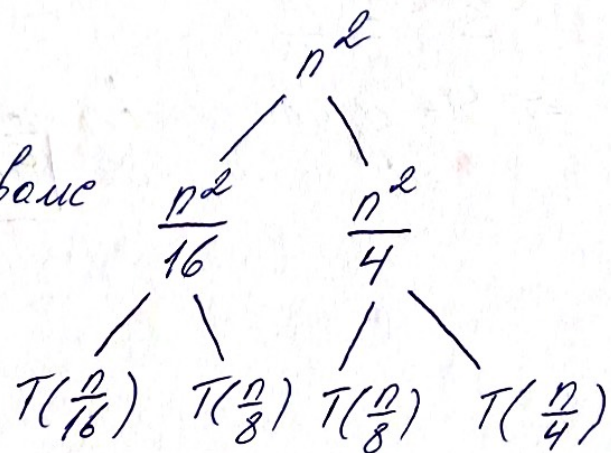
Решение:

Ще решим рекур. ур., използвайки метода с дървото на рекурсията.

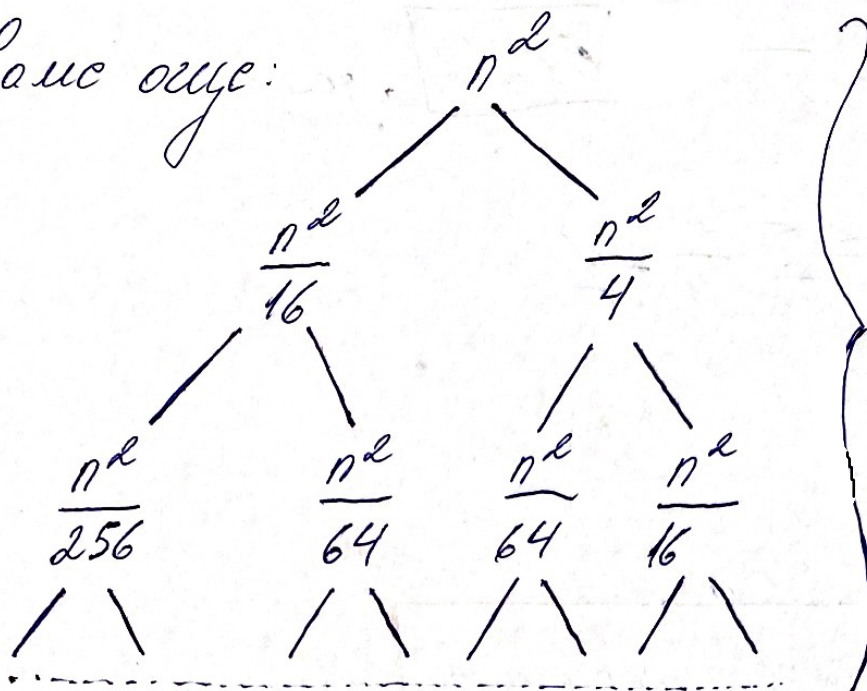
Дясна страна:



Развиваме $T\left(\frac{n}{4}\right)$ и $T\left(\frac{n}{2}\right)$ и получаваме



Развиваме още:



$$h = \lfloor \lg n \rfloor$$

Сумата на върховете, които не са листа, е

$$S = n^2 + \underbrace{\frac{n^2}{16} + \frac{n^2}{4}}_{\frac{5n^2}{16}} + \underbrace{\frac{n^2}{256} + \frac{n^2}{64} + \frac{n^2}{64} + \frac{n^2}{16}}_{\frac{25n^2}{256}} + \dots$$

↑
сума на пълните нива

Тази сума очевидно е крайна.

Долна граница: n^2

Горна граница: $n^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{5}{256} + \dots \right)$

Получихме, че

$$n^2 \leq S \leq \frac{16}{11} n^2$$

$\Rightarrow S =$ сумата на върховете

които не са листа $= \Theta(n^2)$

безкрайна геометрична прогресия с

частно $\frac{5}{16}$.

\Rightarrow е равна на

$$\frac{1}{1 - 5/16} = \frac{1}{11/16} = \frac{16}{11}$$

Сборът на листата:

$T(1)$. #ли

$$\underbrace{\leq 2^n}_{\leq n}$$

\Rightarrow Сборът на листата е $= \boxed{O(n)}$

$$T(n) = \underbrace{O(n)}_{\text{листа}} + \underbrace{O(n^2)}_{\text{вътрешни върхове}} = \boxed{O(n^2)}$$

II Чрез метода с характеристичното уравнение

Приложим, ако:

- рекурентното уравнение е линейно
- коефициентите му са постоянни (константи)
- рекурентното уравнение има постоянна дължина на историята
- свободният му член (ако има такъв) е ивазиполином

Задача 5: Решете рек. уравнение

$$T(n) = 4T(n-2) + \underbrace{n \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}_{\text{ивазиполином (с } n^k \cdot a^n + \dots)}$$

Сбор от произв. на степенно и показателна ф-ии

Решение:

1. Правим характеристично уравнение

$$x^n = 4x^{n-2}$$

2. Делим на x^{n-2}

$$x^2 - 4 = 0$$

3. Правим мултимножество от корените на хом. част

$$x_{1,2} = \pm 2$$

$$\{2, -2\} \text{ м.}$$

4. Правим мултимноества от корените на нехом. част

$$\{2, 2\} \text{ м. от } n \cdot 2^n$$

← влиза $1+1$ пъти

$$\{3\} \text{ м. от } 4 \cdot n \cdot 3^n$$

5. Обединяваме мултимноествата

$$\{2, -2, 2, 2, 3\} \text{ м.}$$

6. Правим общото решение

$$T(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n + D \cdot (-2)^n + E \cdot 3^n = \boxed{\Theta(3^n)}$$

Домашно: Решете рекур. уравнение

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$$