Sint-Jan Berchmansinstituut

Zonhoven

Muziek en wiskunde

Maria Hendrikx
ZONHOVEN

Scriptie ingediend voor het vak Wiskunde
6.2 Latijn-8u wiskunde
Schooljaar 2014 - 2015

Sint-Jan Berchmansinstituut

Zonhoven

Muziek en wiskunde

Maria Hendrikx
ZONHOVEN

Scriptie ingediend voor het vak Wiskunde
6.2 Latijn-8u wiskunde
Schooljaar 2014 - 2015

Woord vooraf

Om te beginnen ben ik heel blij dat ik deze synthese mag maken. Daarvoor dank ik mevrouw Kris Kerkhofs, lerares wiskunde, die me deze opdracht heeft gegeven. Ook dank ik mijn moeder voor alle moeite die zij in mij en mijn twee broers heeft gestoken. Daarenboven staat ze toe dat ik de kunstrichting op ga en helpt ze me hierbij om mijn dromen te verwezenlijken. Daarnaast bedank ik ook Kortjakje, de vioolschool waar ik privéonderwijs volg, en meer specifiek Wim Meuris, mijn vioolleraar, voor het laten kennis maken met de Suzuki-methode en voor alle jaren dat hij me ondersteund en geholpen heeft om de viool te leren bespelen. Ten slotte bedank ik ook nog Carolina Hendrikx, mijn nicht, voor de motiverende houding en vriendschap die zij mij gaf tijdens het maken van dit scriptie.

Inhoudsopgave

Woord vooraf ... 3

Inleiding ... 5

1 Wat is muziek? ... 6

1.1 Toonhoogte ... 6

1.1.1 De noten ... 6

1.1.2 Halve en hele tonen ... 7

1.1.3 Intervallen ... 8

1.1.4 Toonsoorten ... 10

1.2 Notenwaarde ... 10

1.2.1 Maten ... 11

1.2.2 Tempo ... 11

1.2.3 Ritme ... 11

2 Geluid ... 13

3 Boventonen ... 14

3.1 Geluid bestaat uit tonen: het geluidsspectrum ... 14

3.2 Klankkleur ... 15

3.3 Versterkte trillingen ... 17

3.4 Boventonen verhoudingen ... 18

3.5 Octaven als maatstaf ... 18

4 Toonstelsels en stemmingen ... 19

4.1 Toonstelsels ... 19

4.1.1 Diatonische toonstelsel ... 20

4.2 Stemmingen ... 20

4.2.1 Reine stemming ... 21

4.2.2 Gelijkzwevende stemming: afwijking ... 22

4.3 Logaritmen op de piano ... 23

4.3.1 Afwijking logaritmische frequenties en pianotonen ... 25

Besluit ... 27

Literatuurlijst ... 28

Inleiding

Muziek en wiskunde, een onderwerp dat voor wiskundigen die ook met muziek bezig zijn een heel geliefd onderwerp is. Waarom nu dit onderwerp als scriptie? Al vanaf ik geboren ben, ben ik in contact met muziek, meer bepaald viool. Dit komt omdat ik twee oudere broers heb en een moeder die haar kinderen viool wilde leren spelen via de Suzuki-methode, ook wel de moedertaal-methode genoemd. In deze methode beginnen kinderen vanaf vier jaar een instrument te bespelen. Aangezien ik vier jaar jonger ben dan mijn oudste broer, ben ik al heel mijn leven in contact met deze methode en de muziek. Voor het vak Nederlands heb ik mijn scriptie dan ook gewijd aan het onderwerp de Suzuki-methode.

Het is nog maar sinds pas dat ik zeer gefascineerd ben geworden in de muziek. In de zomervakantie heb ik namelijk een paar muziekkampen gevolgd en hier heb ik dan ook mijn hart verloren. Mijn verdere toekomst zal waarschijnlijk voornamelijk uit muziek bestaan en daarom is dit scriptie in samenhang met mijn verdere leven.

Muziek bestaat uit geluid, geluid bestaat uit geluidsgolven en geluidsgolven kunnen vele vormen aannemen, om niet te zeggen oneindig veel. Er kan aan de hand van geluidsgolven iets gezegd worden over o.a. de geluidssterkte, het timbre (klankkleur), de toonhoogte en de verbanden onderling. Als men daarenboven een lesje muziektheorie volgt, dan zullen velen niet ontkennen dat de les wiskundig aanvoelt. Nu komt de vraag natuurlijk, hoe komt dit? Waarom voelt de theorie voor een kunst-onderwerp zo wiskundig aan?

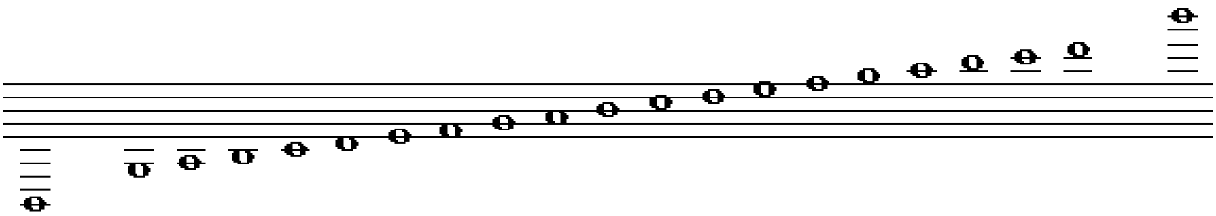
1 Wat is muziek?

Om dit scriptie te begrijpen, heb je enig inzicht nodig in de werking van de muziekafspraken. Daarom eerst een kleine mini-cursus muziek waarin vooral de basisbegrippen staan uitgelegd. De muziektheorie die hier staat uitgelegd, is die van het westerse toonstelsel of ook wel het diatonische toonstel genoemd. Wat hiermee wordt bedoeld, zal duidelijk worden in het hoofdstuk “toonstelsels en stemmingen”.

1.1 Toonhoogte

1.1.1 De noten

Muziek is een bewuste ordening van klanken die met behulp van instrumenten of een stem worden voortgebracht. Aangezien het moeilijk is om klanken, toonhoogten, notenwaarden… weer te geven zodat het leesbaar is, hebben ze een soort taal ontwikkeld, die voornamelijk uit symbolen bestaat, die dit kan representeren. Hoe is die taal nu precies?



Figuur 1: De notenbalk

Wat we op *figuur 1*: de notenbalk zien, is de notenbalk. Deze bestaat uit 5 evenwijdige horizontale lijnen en 4 tussenruimten. Op en tussen de lijnen worden noten genoteerd. Indien de noten onder of boven de notenbalk moeten geschreven worden, dan wordt er gebruik gemaakt van hulplijnen. Een noot is een

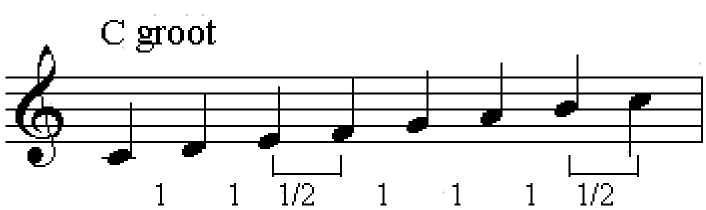
Figuur 2: De toonhoogten

klank met een toonhoogte en een tijdsduur. Door verschillende noten achter elkaar te plaatsen, krijgt men een melodie. Hierbij moet men de begrippen toon en klank goed begrijpen. Alles wat geluid produceert, heeft een eigen klank. Het gaat hier om eigen, specifieke verschillen. Denk maar aan een viool en een piano die dezelfde noot spelen, maar toch verschillend klinken. Een toon is een klank met een bepaalde toon(hoogte), die met een bepaalde frequentie overeenkomt. De eenheid van de frequentie is de hertz. Het is in feite een visuele voorstelling van een toon. Op eender welk instrument zal bijvoorbeeld de eerste C, helemaal links op Figuur 2, dezelfde toonhoogte hebben, maar anders klinken naar gelang de materialen en verhoudingen van het instrument. In de muziek hebben de verschillende toonhoogten een vaste plaats gekregen. Hoe hoger de noot op de notenbalk, of hoe meer naar rechts op een piano, hoe hoger de toon. De toonhoogten die deze noten aannemen, is trouwens een afspraak onder de mensen, aangezien muziek niet in de frequenties zit, maar in de verhoudingen onderling.

Om eenduidigheid te creëren zijn er in totaal zeven notennamen, namelijk: do, re, mi, fa, sol, la en si. Er is echter nog een andere benaming voor de noten, deze zijn respectievelijk: C (=do), D(=re), E, F, G, A en B. Deze noten worden ook wel stamtonen genoemd. Vermits de alfabetische benaming het vaakst gebruikt wordt, zal ik in dit scriptie de alfabetische benaming gebruiken. Het rijtje wordt overigens een toonladder genoemd. Na de B, begint er een nieuwe toonladder, maar nu allemaal een toontje hoger.

1.1.2 Halve en hele tonen

Op papier hebben de noten dan wel een even grote afstand, maar in praktijk zal men merken dat er soms verschillen zijn in de toonhoogte tussen twee opeenvolgende noten. Op de piano is dit goed te zien. Zo mist er telkens een zwarte toets tussen E en F en tussen B en C. Een opschuiving van één toets staat gelijk aan een halve toon. Opschuiving van twee toetsen staat dan gelijk aan twee halve tonen, ook wel een hele toon genoemd. Als men bijvoorbeeld van C naar D wil gaan, dan moet men langs de zwarte toets. Dit staat gelijk aan twee toetsen, of een hele toon. In een octaaf zijn er twaalf halve noten. Een octaaf is bijvoorbeeld van een C naar de eerstvolgende C. Op een notenbalk ziet men echter het verschil niet tussen halve en hele tonen, men weet dit. Onderstaande afbeelding geeft weer waar deze halve tonen zich bevinden (voor C-groot).



Figuur 3: Hele en halve tonen

In feite kan men de toonafstand tussen twee noten overal wijzigen. Dit door een mol of een kruis toe te voegen. In het bijzonder een dubbelmol of een dubbelkruis. Als men een mol vóór de noot plaatst, betekent dit dat die noot een halve toon verlaagd wordt. Plaatst men er een kruis voor, dan verhoogt deze. Bij een dubbelmol, verlaagt deze twee halve tonen. Bij een dubbelkruis gaat de toon twee halve tonen omhoog. Wil men de verandering in toonhoogte echter weer ongedaan maken, dan plaatst men een herstellingsteken voor de noot.

Figuur 4: De wijzigingstekens

Op bovenstaande afbeelding is de muzieknotatie van deze begrippen weergegeven. In de absolute notenbenaming wordt er ‘mol’, ‘hersteld’ of ‘kruis’ achter het woord geplaatst, bijvoorbeeld: fa kruis. In de alfabetische versie maakt men gebruik van achtervoegsels. Een verlaagde noot krijgt de toevoeging “-es”, terwijl een verhoogde noot het toevoegsel “-is” krijgt. Bij dubbelmollen en –kruisen worden de toevoegingen “-isis” en “-eses” gebruikt.

Ten slotte kunnen voortekens “vast” of “toevallig” zijn. Bij toevallige voortekens staat het teken tussen de maten en geldt deze tot de volgende maat. Vaste voortekens staan daarentegen aan het begin van de sleutel. Deze wordt ook wel de voortekening genoemd. Ze gelden voor het hele stuk en alle octaven. De vaste voortekens staan altijd in een vaste volgorde. De volgorde kan men zien op de afbeelding hieronder.

Figuur 5: De voortekening

1.1.3 Intervallen

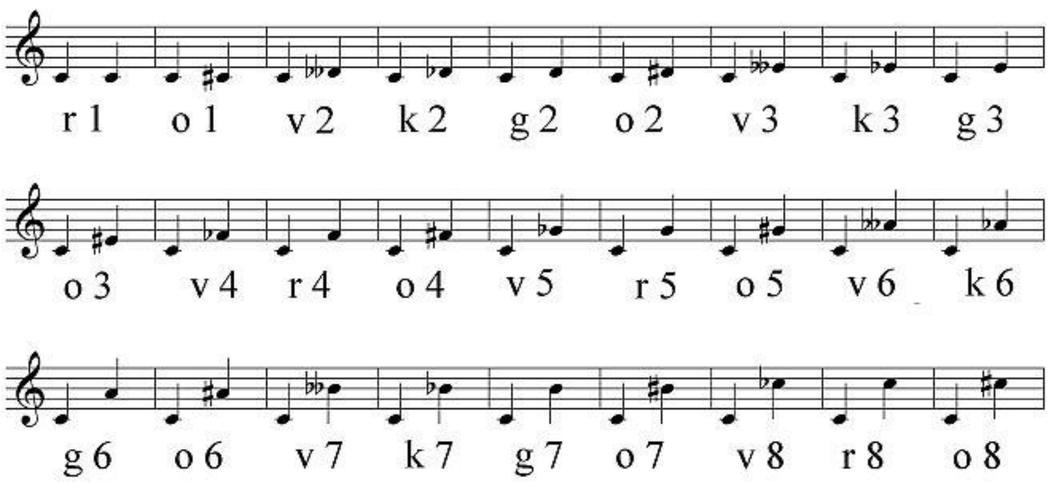
De reden dat deze tekens zijn ontstaan, heeft te maken met de afstand tussen twee tonen. Dit laatste wordt ook wel een interval genoemd en heeft fysisch gezien betrekking tot de verhoudingen van de trillingsgetallen tussen de twee tonen. Om dit begrip hanteerbaar te maken, heeft men het notenbeeld als hulpmiddel. Hierbij worden de intervallen bepaald door het verschil van plaats op de notenbalk, zoals je kan zien op onderstaande figuur.

Figuur 6: De intervallen

Deze benamingen komen overeen met de plaats op de notenbalk, maar zoals we in een vorige paragraaf hebben gezien, zijn er verschillende afstanden tussen bepaalde noten, namelijk tussen E-F en B-C. Bij C-E tellen we bijvoorbeeld 4 halve tonen, terwijl we bij de D-F maar 3 halve tonen tellen. Dit is toch wel een groot verschil, terwijl het beiden tertsen zijn. Daarom hebben ze ook nog de termen “klein” en “groot” toegevoegd. Deze termen horen trouwens alleen maar bij de secunde, de terts, de sext en de septiem. De andere intervallen, de priem, de kwart, de kwint en het octaaf zijn namelijk reine intervallen en worden dus niet meer onderverdeeld in “klein” of “groot”. De reden hiervoor heeft weer te maken met de wiskundige verhoudingen tussen deze intervallen.

secunde	terts	kwart	kwint	sext	septime
klein: ½ toon	klein: 1½ toon	rein: 2½ toon		klein: 4½ toon	klein: 5½ toon
groot: 1 toon	groot: 2 tonen		rein: 3½ toon	groot: 5 tonen	groot: 6 tonen

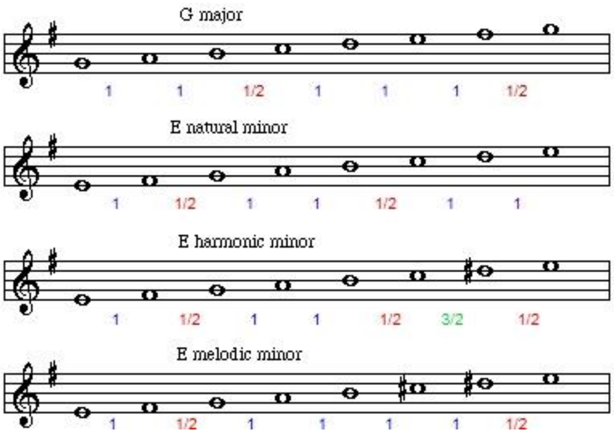
In de vorige paragraaf hebben we echter gezien dat er ook nog zoiets bestaat als een toevoeging van halve tonen aan de hand van kruisen en mollen. Dit resulteert dan weer dat er ook “vergrote” en “verminderde” intervallen bestaan. De naam van het interval (prime, secunde, …) heeft trouwens niets te maken met het aantal halve tonen, maar wel met de plaats op de notenbalk. De benamingen ”rein”, “klein”, “groot”, “vergroot” en “verminderd” hebben te maken met het aantal halve tonen. Op de onderstaande afbeelding staan alle mogelijke verhoudingen weergegeven, waarbij de 1 overeenkomt met een priem, de 2 met een secunde, enzovoort. De r staat voor rein, o voor overmatig, v voor verminderd, k voor klein en g voor groot.



Figuur 7: De uitbreiding van de intervallen

1.1.4 Toonsoorten

Een andere reden dat deze voortekens er zijn, heeft te maken met de toonsoort. Met toonsoort wordt de toonaard bedoeld. Deze wordt meestal in de titel van het stuk al vernoemd, bijvoorbeeld: “vioolconcerto in A mineur van A. Vivaldi” of “Canon in D”, waarbij de toonsoorten respectievelijk A mineur en D majeur zijn. Met de toonsoort wordt de grondtoon en het toongeslacht vastgelegd. Bij A mineur is A de grondtoon en het toongeslacht is mineur. Elk toongeslacht kent trouwens verschillende toonsoorten, want een toongeslacht bestaat uit een opeenvolging van dezelfde intervallen, maar met een verschillende grondtoon. In het westerse muzieksysteem zijn er twee toongeslachten: majeur en mineur, waarbij de mineur ook nog eens is opgedeeld is in drie: de antieke (=natural), de harmonische en de melodische.



1 = een hele toon

1/2 = een halve toon

3/2 = 3 halve tonen

Figuur 8: De toongeslachten

De toongeslachten hebben hun naam te danken aan het feit dat de majeur open (en blij) klinkt, terwijl de mineur eerder als gesloten (en droevig) wordt ervaren. De onderverdeling van de mineur is er omdat er bij de antieke mineur geen leidtoon is en zo de weg naar het centrale punt wegvalt, waardoor het lijkt alsof de muziek niet eindigt. Dit hebben ze proberen op te lossen door de zevende noot een halve toon te verhogen, maar dit resulteerde dat er een toonafstand van drie halve tonen was tussen de zesde en de zevende. Vandaar ook de laatste toevoeging, de melodische, waarbij de zesde én zevende noot verhoogd zijn en men een “normale” opeenvolging van toonafstanden krijgt.

De invoering van de vaste voortekening heeft dus te maken met de afstanden tussen de noten als we een toonladder spelen. Als we bijvoorbeeld op een D beginnen, i.p.v op een C, dan kun je al raden dat de afstanden niet meer 1-1-1/2-1-1-1-1/2 zullen zijn, maar iets anders en er dus geen rode draad meer is zijn doorheen het stuk, indien we de voortekening niet veranderen.

1.2 Notenwaarde

Een muziekwerk bestaat echter niet alleen maar uit verschillende toonhoogten, ook de tijdsindeling van wanneer en hoelang een noot gespeeld moet worden, maakt de muziek.

1.2.1 Maten

Een muziekstuk verdeeld men doorgaans in stukjes van een gelijke tijdsduur, die de maten worden genoemd. Deze worden van elkaar gescheiden door verticale lijnen: de maatstrepen. De relatieve tijdsduur van zo één maat wordt bepaald door het aantal tellen tussen de maatstrepen. Hoeveel tellen er in één maat staat, wordt aangegeven aan het begin van de bladmuziek en wordt de maatsoort genoemd. Dit wordt gedaan aan de hand van een breuk. De teller geeft het aantal tellen per maat aan, terwijl de noemer de notenwaarde van één tel aangeeft, bijvoorbeeld:

$\frac{4}{4}$

Hier zitten vier tellen in een maat, waarbij de kwartnoot één tel duurt

$\frac{3}{4}$

Hier zitten drie tellen in een maat, waarbij de kwartnoot één tel duurt

$\frac{6}{8}$

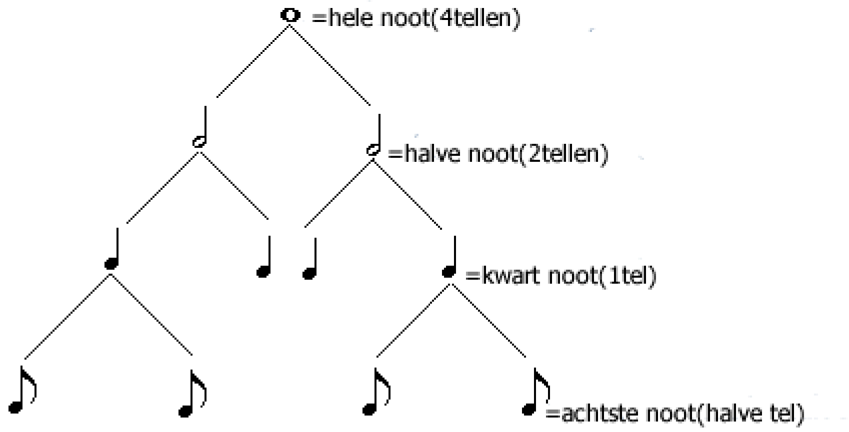
Hier zitten zes tellen in een maat, waarbij de achtste noot één tel duurt

1.2.2 Tempo

De absolute tijdsduur van een maat is afhankelijk van het tempo waarin het stuk gespeeld moet worden. Als muzikant is dit het eerste waar men moet naar kijken, aangezien het van belang is dat iedere muzikant in hetzelfde tempo speelt, anders zou de één al veel sneller klaar zijn als de ander en zou de samenhang volledig verstoort zijn. Het tempo is de snelheid waarmee je de maat telt. In de muziek duidt men dit dikwijls aan met behulp van Italiaanse termen, zoals bijvoorbeeld ‘largo’ wat langzaam betekent. De muzikant weet dan dat de snelheid van een kwartnoot tussen de 40 en de 60 tellen per minuut moet liggen. De andere noten zijn allemaal in verhouding met de snelheid van de kwartnoot, indien er een kwartnoot in de noemen staat. Men kan het tempo ook aantonen door middel van cijfers. Bovenaan de partituur staat dan bijvoorbeeld "♩=60". Hierbij weet men dan dat het tempo moet gespeeld worden aan 60 kwartnoten per minuut.

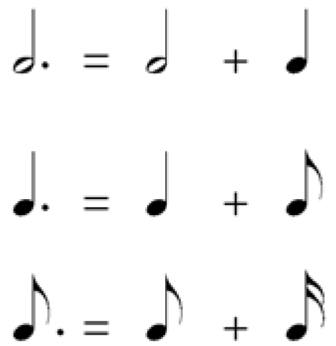
1.2.3 Ritme

Nu we weten wat maten en tempo betekenen, kunnen we ook het begrip “ritme” uitleggen, aangezien deze afhankelijk is van de vorige drie. Een noot bestaat niet alleen uit een toonhoogte, maar ook uit een nootlengte. De nootlengtes geven hierbij de onderlinge verhouding van de tijdsduur aan, want welke nootlengte één tel krijgt, hangt af van de maatsoort. De meest voorkomende notenwaarden zijn:



Figuur 9: De notenwaarden

Zoals je ziet is de waarde telkens gedeeld door twee, maar wat als men nu bijvoorbeeld een noot van drie tellen wil? Hiervoor heeft men de afspraak gemaakt, dat men dan een punt achter de noot zetten en deze punt heeft dan de waarde van de helft van die noot. Voor de duidelijkheid, even een visueel beeld.

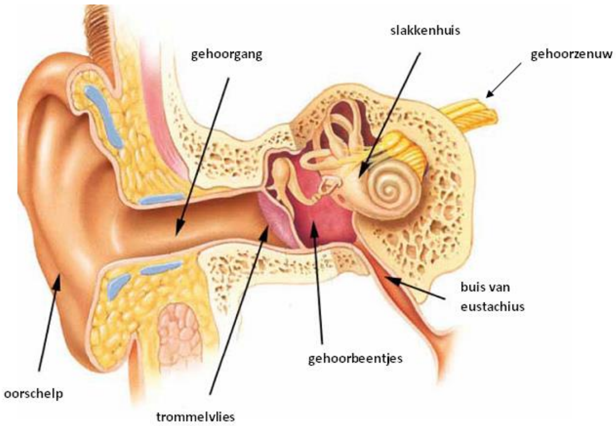

Figuur 10: De waarden van gepunteerde noten

Naast de noten bestaan er ook nog de rusttekens. Het verschil met een rusten en een noot is niet dat we bij rusttekens mogen rusten, maar bij een rust mag de muzikant niet spelen. Dit betekent echter niet dat de muzikant ook niet meer moet tellen! Voor de rusten geldt dezelfde regeling als bij de noten, betreft de notenwaarden, maar het symbool is anders. Door de rust te punteren, bereikt men trouwens hetzelfde effect als dat men bij een gepunteerde noot bereikt: de rust wordt met de helft verlengt. In volgende tabel staan de meest gebruikte rusten.

Figuur 11: De rusttekens

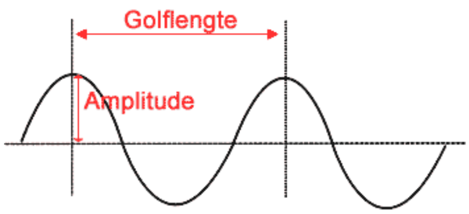
2 Geluid

Muziek is iets dat door de oren wordt waargenomen. Het is geluid dat mooi klinkt en bij de mens bepaalde gevoelens kan opwekken. Men zegt wel eens dat muziek begint waar lawaai eindigt. In natuurkundige context is geluid niets anders dan een verstoring in de lucht (of in een ander medium, zoals water), die zich door de ruimte kan voortplanten in de vorm van geluidsgolven. De snelheid waarmee dit gebeurt, de geluidssnelheid, hangt af van het medium waarin de geluidsgolf zich voortbeweegt en van factoren als temperatuur, vochtigheidsgraad en bewegingstoestand van het medium, zoals bijvoorbeeld tegenwind. Een geluidsgolf wordt gekenmerkt door zijn trillingsgetal of frequentie. Hoe hoger de frequentie, dus hoe meer golven per tijdseenheid en per lengte-eenheid, hoe hoger de waargenomen toon. De kleine fluctuaties in de luchtdruk brengen achtereenvolgens het trommelvlies, de gehoorbeentjes en het slakkenhuis in trilling, waarna de binnenste haarcellen tenslotte via de gehoorzenuw een elektrisch signaal naar de hersenen sturen. Die trillingen worden omgezet in elektrische signalen die langs de gehoorzenuwen aan de hersenen worden doorgeven. We worden bewust van het geluid en ervaren dit als al dan niet aangenaam.



Figuur 12: Het inwendige oor

Met behulp van een microfoon kunnen we de luchtdrukvariaties registeren en in een grafiek weergeven. Hierbij zien we dat de geluidsgolven (bij benadering) periodiek zijn en dat de verschillende tonen telkens een andere geluidsgolf representeren, de frequentie is namelijk anders. Daarnaast heeft een toon nog twee andere karakteristieke eigenschappen: zijn sterkte (luidheid), die correspondeert met de amplitude van de trilling, en zijn klankkleur (ook wel timbre genoemd), die correspondeert met de specifieke vorm van het zich telkens herhalende golfje.

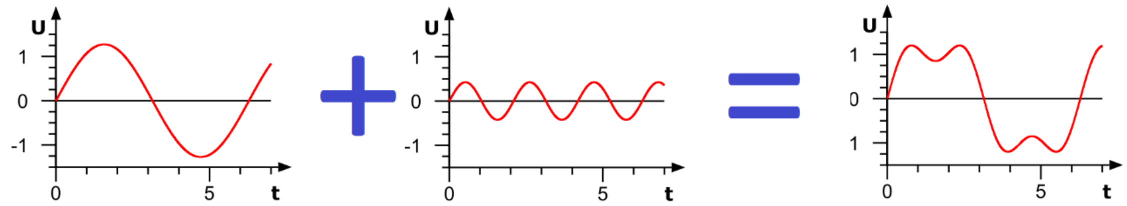


Figuur 13: De amplitude

3 Boventonen

3.1 Geluid bestaat uit tonen: het geluidsspectrum

Uit wat bestaat zo een geluidsgolf nu allemaal? Een toon wordt weergegeven als een sinusvormig tijdssignaal met elk zijn eigen frequentie. Een willekeurige muzikale toon van een zekere frequentie, blijkt daarnaast ook uit een (vaak groot) aantal tonen, de boventonen, te bestaan, en dus ook uit een (groot) aantal sinusvormige signalen. Deze boventonen zijn overigens telkens een veelvoud van de (grond)frequentie. Al de tonen die bij één geluid horen, noemen we het geluidsspectrum. Nu, hoe kan het dat één geluidsgolf uit allemaal verschillende sinusvormige signalen bestaat, we zien toch maar "één" golf? Dit komt doordat als we allemaal sinusfuncties bij elkaar optellen, het resultaat er als volgt uitziet:

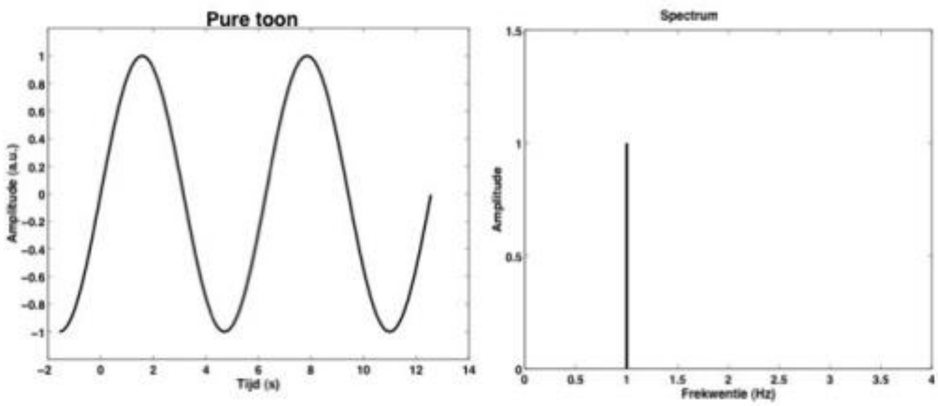


Figuur 14: Het optellen van sinussen

De vorm van de sinus met de laagste frequentie verandert! Door allemaal sinusfuncties bij elkaar op te tellen, kan men dus elke denkbare vorm krijgen. Andersom geldt deze regel ook: als je de geluidsgolf van een bepaald geluid kent, dan kan men hieruit bereken uit welke sinussen die geluidsgolf bestaat. De Franse wiskundige Joseph Fourier bedacht een wiskundige techniek om zo een gek gevormde geluidsgolf te ontleden en het geluidsspectrum van een geluid dus te berekenen. Deze techniek is dan ook naar hem vernoemd: de fourieranalyse.

3.2 Klankkleur

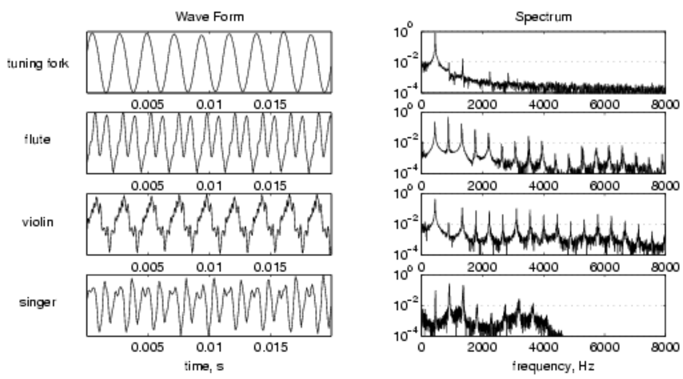
Dat een geluidsgolf uit meerder boventonen bestaat heeft als gevolg dat we een toon ook nog eens kunnen onderscheiden in de klankleur. De pure toon, zonder boventonen, heeft het eenvoudigste geluidsspectrum, omdat deze slechts uit één frequentiecomponent bestaat. Op de linkse grafiek is de geluidsgolf van een pure toon weergegeven en op de rechte grafiek is het geluidsspectrum van de pure toon weergegeven



Figuur 15: De sinus en het spectrum van een pure toon

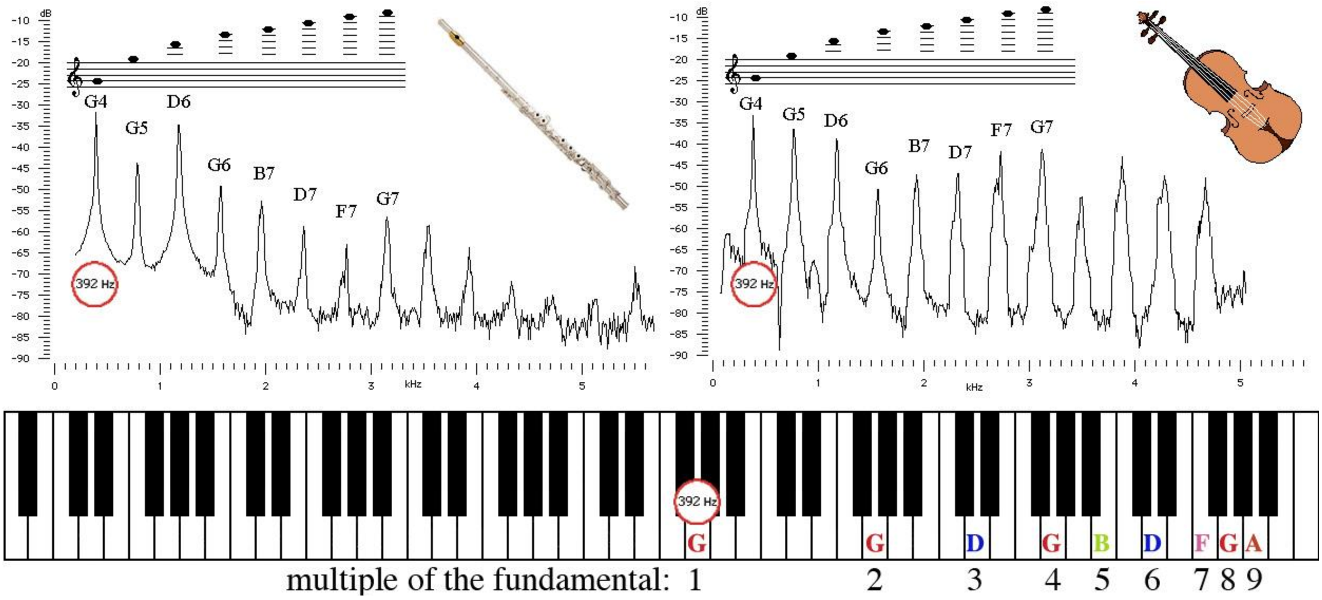
Of een geluidsvoorbeeld van een pure toon: 400hz.mp3

Vanaf het moment dat er boventonen bijkomen, zal de geluidsgolf er telkens anders uitzien naar gelang welke en hoeveel boventonen erbij komen, waarbij de sterkte en de duur van de boventonen ook weer hun invloed hebben. Dit zorgt voor de verschillende klanken die wij horen. Twee instrumenten kunnen bijvoorbeeld dezelfde noot spelen, maar toch hoort men een verschil. Een ander gevolg is dat we bijvoorbeeld de stem van iemand kunnen herkennen. De klankkleur of het timbre is dus de eigenschap van een klank waarmee verschillende muziekinstrumenten en stemmen zich onderscheiden. Naast de boventonen, zijn er bovendien ook veel instrumenten die niet alleen harmonischen produceren, maar ook boventonen die niet een geheel aantal keer de grondtoon zijn; dit worden de delen genoemd en hebben ook weer hun eigen effect op de klankkleur die het geluid aanneemt. Op onderstaande afbeelding ziet men de typische geluidsgolven van: een stemvork, die geen boventonen bevat, een fluit, een viool en de menselijke stem. Aan de rechterkant ziet men dan telkens het bijbehorende geluidsspectrum. Het geluidsspectrum bekomt men overigens door de fourieranalyse toe te passen op de geluidsgolf.



Figuur 16: De geluidsgolven van verschillende instrumenten

Of met een gedetailleerder voorbeeld, de volgende afbeelding. Op de piano zijn telkens de gebruikte boventonen weergegeven, zodat men een beter idee heeft over welke noten we het hebben. Daarboven ziet men dan het geluidsspectrum, waarvan links die van een fluit en rechts die van een viool. Zoals men ziet, is het verschil in de klank bij de viool en de fluit te wijten aan het fenomeen dat bij de viool bepaalde boventonen sterker doorklinken, dit komt door o.a. resonantie. Deze versterkingen worden ook wel formanten genoemd en komen veelvuldig voor.



Figuur 17: Geluidsspectrum van een fluit en een viool

Of een geluidsvoorbeeld van een fluit en een viool:


Voorbeeld: fluit


Voorbeeld: viool

We kunnen dus met het menselijke gehoor instrumenten herkennen door hun verschil in de opbouw van het geluidsspectrum. De klankkleur verschilt overigens niet alleen tussen de instrumenten, maar ook onder de instrumenten onderling. Zo zal men na enige oefening bijvoorbeeld ook verschillende violen van elkaar kunnen scheiden. Dit komt onder andere door kleine verschillen in de vorm, de lak, het hout, de tijd, etc. Waardoor de vorm van het golfpatroon er lichtjes anders uitziet. Vandaar dat een Stradivarius veel meer kost dan een nieuw gebouwde viool. Een Stradivarius klinkt (volgens velen) gewoon veel mooier. De verschillen zijn maar lichtjes te horen (in volgend voorbeeld), maar ze zijn er wel.

Een geluidsvoorbeeld van één violiste op twee verschillende violen:


Viool 1


Viool 2

Daarnaast is er ook een verschil te horen als het instrument door verschillende violisten bespeeld wordt. Zo zal bij de één violist bepaalde harmonischen t.o.v. de grondtoon luider of zachter klinken, afhankelijk van o.a. de druk en de beweging die de violist op de viool uitoefent. Het menselijke gehoor ervaart dit als respectievelijk schelle en doffe klanken. Ten slotte doet dit zich dit fenomeen ook voor bij een luid gespeelde toon, waarbij de harmonischen t.o.v. de grondtoon luider zijn dan bij een zacht gespeelde toon, wat ook weer als respectievelijk schel en dof wordt ervaren.

Een geluidvoorbeeld van twee verschillende violisten op dezelfde viool: Violist 1 Violist 2

3.3 Versterkte trillingen

Dat instrumenten onderling verschillen heeft te maken met o.a. de vorm van het instrument. Deze bepaalde vorm is er omdat een trilling niet altijd goed hoorbaar is en dus versterkt moet worden. Tonen worden namelijk voortgebracht door trillende voorwerpen: een gespannen snaar, het riet in een blaasinstrument, de stembanden van de menselijke stem, enzovoort. Bij een strijkinstrument gebeurt dit bijvoorbeeld door de klankkast. Door de vorm en materiaal van de klankkast te veranderen, verandert de bouwer(bewust) ook de klankkleur van het instrument, wat ons een verscheidenheid aan instrumenten opbrengt.

Een klankkast bestaat uit een holle ruimte, die gevuld is met lucht, waarin één of meerdere gaten zitten. Een trillend voorwerp die in contact is met de wand, brengt de wand aan het trillen. Bij een viool wordt de trilling van de snaren bijvoorbeeld doorgegeven door de kam. De trillende wand brengt vervolgens de lucht in de holle ruimte in trilling. De geluidsgolven zitten nu opgesloten in een soort “kleine kamer” en weerkaatsen tegen de “muren” van de klankkast. Binnen de ruimte treden resonanties op waardoor de geluidsdruk binnen de klankkast erg hoog wordt. De gaten in de klankkast zorgen ervoor dat de geluidsgolven ook nog een weg naar buiten hebben en de oren van de toehoorders kunnen bereiken. Het geluid komt er nu versterkt, krachtiger en voller uit. De inwendige vorm van de klankkast heeft hierbij veel invloed op de klank van het geluid die uitgestraald wordt. Naast de vorm, is ook het volume van de klankkast zeer bepalend. Het volume bepaalt namelijk de laagste toon die de klankkast kan ondersteunen. Vandaar dat een instrument steeds groter wordt als de tonen lager worden. Denk maar aan een cello of een contrabas, die veel groter zijn dan een viool en ook lagere tonen voortbrengen. De verschillende toonhoogten worden overigens bepaald door de dikte, de lengte en de spanning van de snaar, het volume van de klankkast bepaalt alleen maar of hij deze ook kan versterken. Bij de snaren geldt de regel hoe dikker of hoe losser de snaar, hoe lager de toon zal klinken. Hoe fijner of hoe strakker de snaar, hoe scherper en hoger het zal klinken.

Figuur 18: De klankkast

4 Boventonen als basis in de muziektheorie

4.1 Boventonen verhoudingen

Trillende voorwerpen kunnen in het algemeen op allerlei manieren en in verschillende frequenties trillen. De toon die men (het beste) hoort is de toon met de laagste frequentie en wordt in de muziek de grondtoon genoemd. Bij het horen van een toon horen we echter ook nog andere, hogere tonen: de boventonen of harmonischen. We zijn hier niet altijd van bewust, maar ze zijn er wel. De mogelijke frequenties van de boventonen verhouden zich als de (eenvoudige) reeks 1:2:3:4:5. Deze cijfers zijn overigens ook gegeven op *figuur 17* onder de piano. Of met andere woorden: de n-de boventoon heeft als frequentie n maal de frequentie van de grondtoon. De grondtoon mag dus ook de eerste boventoon genoemd worden. Bij *figuur 17* heeft de grondtoon G de frequentie 392 Hz. De bijbehorende boventonen hebben dan de frequenties 2 x 392 = 784 Hz, 3 x 392 = 1176 Hz, 4 x 392 = 1568, 5 x 392 = 1960, enzovoorts. Deze komen respectievelijk overeen met G(=392Hz), G(=784 Hz), D(1176 Hz), G, B, etc.

4.2 Octaven als maatstaf

Een gevolg hiervan is dat het menselijke gehoor bij een octaaf niet altijd goed twee verschillende toonhoogten kan onderscheiden, aangezien de boventonen van de hoge toon tevens de boventonen van de lage toon zijn. Een octaaf wordt namelijk gevormd door de frequentie van een toon te verdubbelen en heeft dus de verhouding 1:2. De even boventonen van de grondtoon worden als het ware extra versterkt.

Dit fenomeen heeft er in de muziek voor gezorgd dat het octaaf wordt gebruikt om verschillen in toonhoogte te meten in een natuurlijke eenheid. Een gevolg hiervan vinden we terug in de naamgeving: de zeven notennamen, zodat de achtste noot (een octaaf verschil) weer de zelfde naam heeft als de grondtoon.

5 Toonstelsels en stemmingen

Met de muziektheorie probeert men het mooie in de muziek theoretisch uit te leggen en een taal te ontwikkelen op papier zodat (alle) mensen het muziekstuk kunnen brengen zoals de componist het bedoelde. Die muziektheorie is tot stand gekomen door muziek wiskundig te benaderen. De ultieme theorie bestaat vandaag de dag echter nog niet en vandaar dat er soms wel eens wijzigingen gebeuren in het systeem van de muziek. Ten eerste kan men de vraag stellen: op welke frequentie gaan we de instrumenten stemmen opdat we bij het spelen van meerdere noten tegelijk toch zo een optimale klank hebben? Of als we weten dat een octaaf de verhouding 2:1 heeft, hoe gaan we de verhoudingen daartussen nemen?

De manier waarop de frequentie van tonen in de muziek gekozen wordt, noemen we de stemming of de temperatuur. Hierbij wordt enerzijds de toonhoogte van de tonen vastgelegd, maar anderzijds ook de toonafstanden tussen de tonen. Het is dit laatste wat voor veel problemen zorgt en de reden waarom het systeem (nog niet) optimaal is. De stemming die we aan de instrumenten geven, zijn trouwens ook afhankelijk van het gebruikte toonstelsel. Het is dus een echte wisselwerking tussen stemming en toonstelling!

5.1 Toonstelsels

Onder toonstelsel of toonsysteem verstaat men in de muziek de systematiek van het gebruikte toonmateriaal. Hiermee gaat men niet kijken naar de toonhoogten van iedere noot, maar naar de toonafstanden en verhoudingen tussen de tonen. In de loop van de geschiedenis zijn er verschillende toonstelsels geweest en ook onder de culturen zijn er verschillen. In onze westerse cultuur, in de huidige tijd, wordt er vooral gebruik gemaakt van het diatonische toonstelsel met een chromatische schaal, waarbij men voornamelijk gebruikt maakt van de toongeslachten majeur en mineur. Andere gekende toonstelsels zijn bijvoorbeeld het twaalftoonstelsel, het 31-toonstelsel en veel andere microtonale toonsystemen.

Ondanks dat er zoveel verschillende toonstelsels bestaan, is er wel altijd één overeenkomst: de octaven. Octaven lijken zoveel op elkaar, dat het klankverschil bijna niet te horen is. Hierbij moet men wel opmerken dat de benaming “octaaf” niet voor alle toonstelsels klopt. Want de term “octaaf” is afgeleid van het Latijnse woord ´octavus´, dat acht betekent. Maar dit geldt enkel bij ons westerse toonstelsel, waar het octaaf in 7 is verdeeld en de 8ste noot dus eigenlijk een octaaf vormt met de grondtoon. Als we bijvoorbeeld gaan kijken naar het 31-toonstelsel, dan kun je al aan de naam van het stelsel zien dat de 8ste noot waarschijnlijk niet de verhouding van een octaaf zal hebben, maar pas bij de 32ste noot en daarbij de naam “octaaf” dus eigenlijk fout is.

5.1.1 Diatonische toonstelsel

In de westerse muziek gebruikt men dus vandaag de dag het diatonische toonstelsel met een chromatische schaal. Wat bedoelt men hier nu mee? Om te beginnen was deze verdeling er natuurlijk niet plotseling. Het heeft zich globaal historisch ontwikkeld vanuit 3 tonen rond 1 toon, naar 5 tonen (de pentatoniek), vervolgens naar 7 tonen (de diatoniek) en tenslotte nog eens uitgebreid naar 12 tonen (chromatiek). Bij de diatoniek wordt het octaaf verdeeld in vijf grotere en twee kleinere intervallen. Het toonsysteem bestaat dus uit zeven stamtonen, die de namen C, D, E, F, G, A en B kregen. Aangezien deze tonen alleen te weinig waren, zijn er ook nog kruisen en mollen aan toegevoegd, zodat men een chromatische toonladders verkrijgt. Onder de chromatiek verstaan we het gebruik van halve toonafstanden. Dit resulteert dat we in het westerse systeem in totaal twaalf halve toonafstanden hebben in één octaaf (de 7 stamnoten waarvan de 5 hele toonafstanden nu ook verdeeld zijn in 2, dus 5x2=10 en dan nog de 2 halve toonafstanden. 5x2+2=12). Men zou zich kunnen afvragen waarom we zeggen dat het westerse systeem gebruikt maakt van het diatonische toonstelsel en niet van het twaalftoonstelsel, want het octaaf is toch verdeeld in twaalf? Dit heeft te maken met het feit dat het westerse systeem gebruikt maakt van zeven hoofdtonen, stamtonen en de toegevoegde halve tonen maar "bijtonen" zijn.

5.2 Stemmingen

Voor het westers gebruikte toonstelsel is het vinden van de "ideale" muzikale stemming, door de tegenstrijdige eisen, een (onoplosbaar) probleem: "hoe stem ik een instrument zodanig dat zowel de octaven als de kwinten rein zijn?" 7 gestapelde octaven moeten namelijk dezelfde toon geven als 12 gestapelde kwinten, maar $2^7 = 128$, en dat is niet gelijk aan $(3/2)^{12} = 129{,}746$. Bij het stemmen van de piano en de viool worden trouwens verschillende stemmingen gebruikt, die natuurlijk niet te erg verschillen. Bij de piano gebruikt men de gelijkzwevende stemming, waarbij de verhoudingen tussen twee halve tonen telkens gelijk is aan 100 cent, terwijl bij de viool de reine stemming wordt gebruikt. Bij deze laatste stemt men bijvoorbeeld op de kwinten (de 4 snaren op de viool hebben de verhoudingen van een kwint). Buiten deze, zijn er nog meer stemmingen, zoals bijvoorbeeld voor de oosterse toonstelsels. Hieronder zijn de stemmingen die in het Westen bestaan, weergegeven. Deze zijn trouwens chronologisch naar ontstaan gerangschikt.

- ♬ De reine stemming: is gebaseerd op de harmonische boventonenreeks.
- ♬ De stemming van Pythagoras: is gebaseerd op het op elkaar stapelen van reine kwinten. Helaas raakten men in de knoop toen men aan polyfonie wilde doen en sindsdien zijn er alternatieven geprobeerd.
- ♬ De middentoonstemming: streeft naar zo rein mogelijke grote tertsen (5:4 verhouding). Harmonie en cadensen zijn mogelijk, maar de toonsoorten verschillen wel van klankkleur.

- Diverse barokstemmingen: hierbij doet zich het probleem voor dat elke toonsoort anders klinkt. Bij het stemmen de éne zweeft de éne toonladder nauwelijks, terwijl een andere enorm vals klinkt.

- De welgetemperde stemming: komt voort uit de barokstemmingen, maar hierbij kan men wél in alle toonsoorten spelen.

- Gelijkzwevende stemming: de meest gebruikte stemming en is in feite een speciaal geval van de welgetemperde stemming. Een octaaf wordt hierbij in 12 gelijke halve tonen opgedeeld. Deze is in een volgend paragraaf meer in detail uitgelegd.

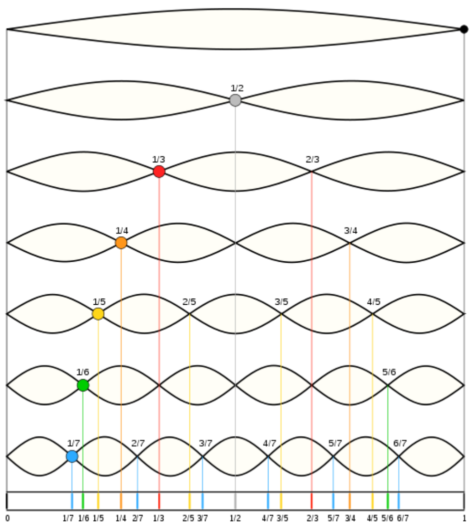
- 19-toonsstemming**:** het octaaf wordt hier in 19 delen verdeeld.

- 31-toonstemming: het octaaf wordt in 31 delen van 38,71 cent verdeeld.

- Diverse andere stemmingen voor de microtonale toonsystemen

5.2.1 Reine stemming

De reine stemming is een stemming die gebaseerd is op de harmonische boventonenreeks. De frequentie van de tussenliggende tonen staat dus vast door de verhouding van een simpele breuk met de grondtoon. Als we alle tonen na elkaar spelen, dan krijgen we de harmonische verhoudingen: kleine secunde 16/15, secunde 9/8, kleine terts 6/5, grote terts 5/4, kwart 4/3, kwint 3/2, kleine sext 8/5, grote sext 5/3 en het octaaf 2/1. Als we dit zouden toepassen op de grondtoon a = 220 Hz, dan krijgen we de toonladder met bijbehorende frequentiewaarden: a = 220 Hz, b = 247,5 Hz, c = 264 Hz, d = 297 Hz, e = 330 Hz, f = 352 Hz, g = 396 Hz, a = 440 Hz. Als we het westers toonstelsel volgen, dan weten we dat er tussen e-f en b-c halve toonafstanden zijn. Bij de overige 5 zijn er telkens hele toonafstanden tussen. Maar is het wel zo, dat deze twee halve toonafstanden en vijf hele toonafstanden, onderling gelijk zijn?



Figuur 19: De harmonische boventonenreeks

Als we de verhoudingen van de halve toonafstanden nachecken, f-e: 352/330 = 1,06666 en b-c: 264/247,5 = 1,06666, dan zien we dat deze gelijk zijn. Als we echter de verhoudingen tussen de hele tonen bekijken, c-d: 297/264 = 1,125 (van priem maar secunde), d-e: 330/297 = 1,111 (van secunde naar terts), f-g: 396/352= 1,125 (van kwart naar kwint), g-a: 440/396 = 1,111 (van kwint naar sext), b-c: 495/440 = 1,125 (van sext naar septiem), dan zien we dat deze verhoudingen niet gelijk zijn. Zo ontstaat er in 3 gevallen het quotiënt van 1,125 (9/8) en in 2 gevallen het quotiënt van 1,1111 (10/9). Dit betekent dus dat er ‘grote’ en ‘kleine’ hele toonafstanden bestaan. Als we de toonladder volgens de namen van de verhoudingen zouden benoemen, dan krijgen we het volgende rijtje: grote hele - kleine hele - halve - grote hele - kleine hele - grote hele - halve. Op zich geen probleem, zou je kunnen denken, maar wat als je bijvoorbeeld als pianist, waarbij je niet kan kiezen met welke frequentie je speelt, je grondtoon verandert? De ‘grote’ en de ‘kleine’ toonafstanden zullen dan verkeerdom komen te liggen en dus ook verkeerdom klinken. De noten zullen als vals ervaren worden. Dit maakt het dan ook onmogelijk om samen met andere instrumenten, volgens deze stemming, samen te spelen.

Een violist, of een zangeres, kan daar tegenover dit probleem verhelpen door zijn vinger een millimeter te verschuiven, aangezien zijn frequentiebereik continu is. Vandaar dat een viool gestemd wordt volgens de reine stemming. Aangezien deze stemming van “nature” is ontstaan, is dit dan ook de oudste stemming. De meeste instrumenten hebben echter geen continu frequentiebereik, en daarom zijn er dus ook andere stemmingen ontstaan.

5.2.2 Gelijkzwevende stemming: afwijking

Dat een piano opgedeeld is in perfect twaalf evenredige delen, heeft natuurlijk ook zijn gevolgen. Behalve het octaaf, hebben de andere intervallen niet de rein klinkende verhoudingen. De verhoudingen van reine intervallen zijn bijvoorbeeld 3/2 voor een kwint en 5/4 voor een grote terts. Niet rein betekent vals. De gelijknamige intervallen, bijvoorbeeld de frequentieverhoudingen van alle kwinten, zoals C-G, D-A, E-B, …, zijn wel altijd even vals, vandaar de naam evenredig zwevende stemming. De afwijking voor een kwint – het belangrijkste interval na het octaaf – is gelukkig erg beperkt. Een voordeel van deze stemming is dat het even vals blijft klinken als men op een andere toonsoort overgaat, waardoor het een kwestie van aanpassing is voor het menselijke gehoor om het geluid als mooi te beschouwen. Het “niet reine” toonstelsel is dus als een soort compromisoplossing om in de alle twaalf toonsoorten even (weinig) vals te spelen. In onderstaande tabel zijn de frequentieverhoudingen van de piano (gelijkzwevend) gegeven en daarnaast die van een reine verhouding. Bij toonafstand staan de tonen weergegeven in cent, dit is een maat die rond 1870 werd ingevoerd om de frequentieverhouding om te zetten in gemakkelijker te hanteren toonafstanden. De cent is ontstaan uit de logaritmische schaal. Helemaal rechts van de tabel ziet men dan in procent de afwijking van de frequentieverhoudingen, wat ons een goed beeld geeft over de “valsheid” in onze piano’s.

toon	interval t.o.v. grondtoon c	frequentieverhouding t.o.v. grondtoon c		toonafstand t.o.v. grondtoon c		afwijking
		gelijkzwevend	rein	gel.zw.	rein	
c	prime	$2^{0/12} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$	= 0	= 0	0
des	kleine secunde	$2^{1/12} \approx 1{,}059463094$	$\frac{16}{15} \approx 1{,}0667$	= 100	≈ 112	−0,68%
d	grote secunde	$2^{2/12} \approx 1{,}122462048$	$\frac{9}{8} = 1{,}125$	= 200	≈ 204	−0,23%
es	kleine terts	$2^{3/12} \approx 1{,}189207115$	$\frac{6}{5} = 1{,}2$	= 300	≈ 316	−0,91%
e	grote terts	$2^{4/12} \approx 1{,}25992105$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$	= 400	≈ 386	+0,79%
f	reine kwart	$2^{5/12} \approx 1{,}334839854$	$\frac{4}{3} \approx 1{,}3333$	= 500	≈ 498	+0,11%
fis	overmatige kwart	$2^{6/12} \approx 1{,}414213562$	$\frac{7}{5} = 1{,}4$	= 600	≈ 583	+1,02%
g	reine kwint	$2^{7/12} \approx 1{,}498307077$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	= 700	≈ 702	−0,11%
as	kleine sext	$2^{8/12} \approx 1{,}587401052$	$\frac{8}{5} = 1{,}6$	= 800	≈ 814	−0,79%
a	grote sext	$2^{9/12} \approx 1{,}681792831$	$\frac{5}{3} \approx 1{,}6667$	= 900	≈ 884	+0,90%
bes	kleine septiem	$2^{10/12} \approx 1{,}781797436$	$\frac{16}{9} \approx 1{,}7778$	= 1000	≈ 996	+0,23%
b	grote septiem	$2^{11/12} \approx 1{,}887748625$	$\frac{15}{8} = 1{,}875$	= 1100	≈ 1088	+0,68%

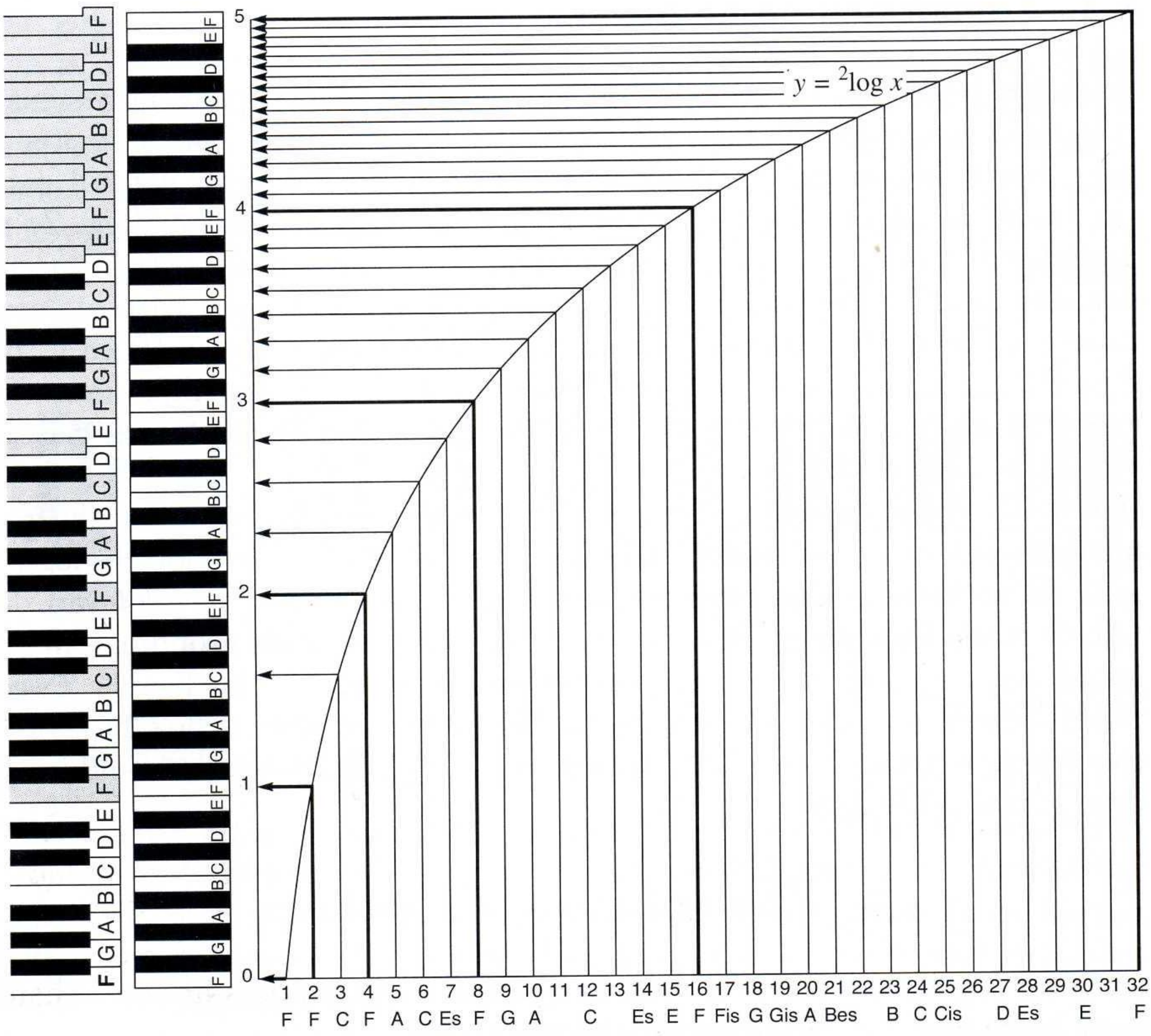
Tabel 1: Gelijkzwevend vs. reine stemming

5.3 Logaritmen op de piano

In het westerse toonstelsel, het diatonische toonstelsel, wordt een octaaf met frequentieverhouding 2 verdeeld in 12 gelijke intervallen van telkens een halve toonafstand, vandaar dat er op een pianoklavier 12 toetsen (zwarte en witte) per octaaf zijn. Deze verdeling is echter maar een afspraak onder de mensen, net zoals zoveel dingen in het dagelijkse leven een afspraak zijn om de wereld een beetje structuur te geven en beter te begrijpen.

Aangezien bij een toonstelsel, ook een gepaste stemming hoort, worden sinds het begin van de negentiende eeuw de piano's gestemd volgens de zogenaamde evenredige twaalftoonstemming. Met evenredig wil men zeggen dat de noten dezelfde frequentieverhoudingen hebben. Zo een deelinterval kreeg de benaming "een halve-toonafstand". Als we alle verhoudingen van de halve tonen bij elkaar optellen, dan moeten we de verhouding 2:1 uitkomen. De frequentieverhouding van twee opeenvolgende halve toon op een piano is dan bijgevolg steeds dezelfde en gelijk aan $\sqrt[12]{2} : 1 \approx 1{,}059463094 : 1$.

Het wordt een stuk eenvoudiger als men met de logaritme van de toonfrequenties werkt. Wegens de regel log(a:b) = log a – log b gaat de verhouding van twee frequenties over in het verschil van de bijbehorende logaritmen. Kiezen we in het bijzonder 2 als grondtal van de logaritme, dan geeft het octaaf een verschil van $\log_2 \sqrt[12]{2} - \log_2 1 = \log_2 2^{1/2} - \log_2 1 = \frac{1}{12}$. De verhoudingen van de frequenties van trillingen worden als het ware door de logaritmische schaal omgezet in verschillen van toonhoogte. Bovendien past ook de boventonenrij in dit beeld, zoals op volgende afbeelding aangetoond wordt, waarin de eerste 32 boventonen aangegeven zijn van en toon F.



Figuur 20: De piano en de logaritmische schaal

Op de horizontale as staan de rangnummers van de boventonen van de grondtoon, en op de verticale as vind je via de pijlen de logaritmen van die getallen. Hierbij is de lengte-eenheden op de beide assen verschillend gekozen om een mooier plaatje te krijgen. De lengte-eenheid op de verticale as is namelijk zo gekozen dat het overeenstemt met de lengte van een octaaf op de piano (die er links van is getekend). Dit is niet toevallig, zo toonden we in een vorige paragraaf aan dat een octaaf de verhouding heeft van 2:1. Met een voorbeeld geïllustreerd: F heeft de frequentie 349,228. De F van een octaaf hoger heeft bijgevolg als frequentie 2 x 349,228 = 698,456. Willen we de frequentie van de F van nog een octaaf hoger weten, dan bekomen dit door: 2 x 698,456 = 2 x 2 x 349,228 = 2^2 x 349,228 = 3196,91. Nog een octaaf hoger, dan doen we 2^3 x 349,228 = 2793.83, enzovoort. Verhoogt de exponent, en verschuift men dus eigenlijk een eenheid op de logaritmische schaal, dan zal men telkens een octaaf stijgen. De piano is overigens zo getekend dat alle zwarte en witte toetsen gelijk zijn en een octaaf op een piano dus ook op papier in twaalf gelijke delen is verdeeld. De doorgetrokken lijnen laten in de tekening goed zien dat een verschuiving van één lengte-eenheid op de x-as gelijk staat aan een volgende boventoon van F, die bekomen wordt door de functie $y = \log_2 x$.

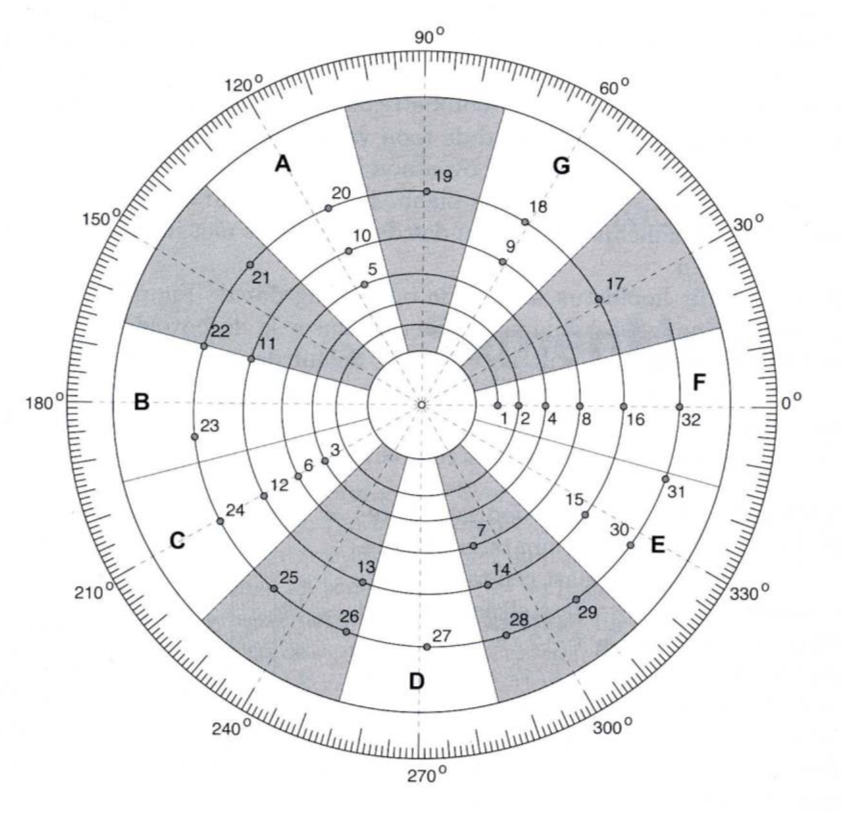
5.3.1 Afwijking logaritmische frequenties en pianotonen

In een wiskundige beschrijving, heeft men echter vaak ook afwijkingen. De frequentielijst bevat echter frequenties voor een theoretisch ideale piano, maar in de praktijk is dit nog steeds niet het topmodel. Als men bijvoorbeeld bepaalde tonen samen speelde, dan klonk dit toch niet mooi harmonisch en daarom hebben ze de frequenties van de pianotonen lichtjes aangepast. Dit heeft natuurlijk als gevolg dat de logaritmische schaal er niet meer mee overeenkomt. De logaritmische schaal toont dus een kleine afwijking ten opzichte van de gebruikte pianotonen. De octaven van de grondtoon, ook wel de eerste, tweede, vierde, zestiende en de tweeëndertigste boventoon, hebben exact de schaalwaarde 0, 1, 2, 3, 4 en 5. Deze boventoon komen wel nog exact met de bijbehorende pianotonen overeen. Dit geldt echter niet zo voor de andere boventonen. Op de logaritmische schaal heeft bijvoorbeeld de derde boventoon van F een bijbehorende verhouding van $\log_2 3 \approx 1{,}5849$, terwijl deze volgens de evenredige twaalftoonstemming op deze logaritmische schaal de schaalwaarde 19/12 = 1,5833 heeft. Bij de vijfde boventoon is het verschil zelfs nog groter, namelijk $\log_2 5 \approx 2{,}3219$ tegen 28/12 ≈ 2,3333. Deze verschillen zijn echter niet alleen bij de vernoemde boventonen te merken, maar bij bijna alle boventonen, behalve de octaven dan. Zoals we ook in de volgende tabel kunnen zien.

Boventoon n	**y = ²log x**	***Aantal halve-toonafstanden = k***	$\frac{k}{12}$	**Aantal graden y * 360**
1	0	0	0	0
2	1	12	1	360
3	1,5849	19	1,5833	570,6
4	2	24	2	720
5	2,3219	28	2,3333	835,8
6	2,5849	31	2,5833	930,5
7	2,8073	34	2,8333	1010,6
8	3	36	3	1080
9	3,1699	38	3,1666	1141,1
10	3,3219	40	3,3333	1195,8
11	3,4594	41-42	3,4166 – 3,5000	1245,3
12	3,5849	43	3,5833	1290,5
13	3,7004	44	3,6666	1332,1
14	3,8073	46	3,8333	1370,6
15	3,9068	47	3,9166	1406,4
16	4	48	4	1440
17	4,0874	49	4,0833	1471,4
18	4,1699	50	4,1666	1501,1
19	4,2479	51	4,25	1529,2
20	4,3219	52	4,3333	1555,8
21	4,3923	53	4,4166	1581,2
22	4,4594	53-54	4,4166 – 4,5000	1605,3
23	4,5235	54	4,5	1628,4
24	4,5849	55	4,5833	1650,5
25	4,6438	56	4,6666	1671,7
26	4,7004	56	4,6666	1692,1
27	4,7548	57	4,75	1711,7
28	4,8073	58	4,8333	1730,6
29	4,8579	58	4,8333	1748,8
30	4,9068	59	4,9166	1766,4
31	4,9541	59	4,9166	1783,5
32	5	60	5	1800

Tabel 2: Afwijking logaritmische frequenties en pianotonen

Om de afwijking nog beter te zien, kunnen we de grafiek van oprollen, waardoor we een spiraaldiagram verkrijgen. Het octaaf is hierbij telkens een volledige rondgang (360°). Als we alle waarden van $\log_2 x$ vermenigvuldigen met 360, dan krijgen we het aantal graden. De cirkel verdelen we daarbij ook nog eens in 12 gelijke delen, die in stippenlijn zijn aangeduid en de verdeling van de evenredige twaalftoonstemming van de piano aangeven. Zoals we kunnen zien, vallen de boventonen, met uitzondering van de octaven, nergens precies op de stippenlijnen. Dit laat dus goed zien dat de tonen inderdaad afwijken van de pianotonen, bij bepaalde boventonen al wat meer dan bij een ander.



Figuur 21: Spiraaldiagram van de logaritmische schaal en de pianotonen

Besluit

Dat muziek een wiskundige achtergrond heeft, kunnen we bij deze nu wel bevestigen. Doordat geluidsgolven uit boventonen bestaan en deze boventonen een bepaalde verhouding hebben met elkaar en voornamelijk de grondtoon, is het “mogelijk” om er een theorie op te plakken, zodat men nog meer mooie melodieën kan creëren en dit zelfs op papier, zonder het eerst te moeten proberen op een instrument. Dat de muziektheorie zo wiskundig aanvoelt, is hiermee ook verklaard. Wiskundigen, meer specifiek de natuurkundigen, hebben de mooie samenhang in de muziek proberen te verklaren aan de hand van wiskundige verbanden en deze vervolgens in een theorie gegoten. De muziektheorie die wij vandaag de dag kennen, is dus eigenlijk een product van allemaal wiskundige berekeningen. Om het visueel makkelijker te maken, heeft men dan de notenbalk met de noten en andere tekens uitgevonden.

De frequenties en de verhoudingen die wij aan de noten geven, zijn hierbij echter nog niet optimaal, maar zolang iedereen dezelfde afspraken hanteert en het mooi klinkt, is er op zich geen probleem. Ondanks dat muziek wiskundig verklaard kan worden, moet men hierbij wel de vermelding maken dat een muzikant niet noodzakelijk een goede wiskundige moet zijn en dat een wiskundige ook niet persé een goede muzikant is. Muziek bestaat namelijk niet alleen uit wiskunde, maar ook uit het begrijpen en brengen van de emoties, wat wij ook wel verstaan onder “muzikaliteit”. Daarnaast heeft het goed bespelen van een instrument vooral te maken met de coördinatie van de hersenen en dus moet een muzikant vooral motorisch sterk zijn. Een wiskundig inzicht hebben, kan echter wel zijn voordelen hebben, en hiervoor moeten we alleen al maar denken aan de ritmiek, die bestaat uit tellen, wat de muzikant er dus tot verplicht, het hele lied lang te tellen.

Literatuurlijst

Internetsites

ADAGIETTO, ‘Johann Sebastian Bach - Partita No. 2, BWV 1004 | Hilary Hahn’, < https://www.youtube.com/watch?v=6KaYzgofHjc>, 16 mei 2015.

ARHCVONK, ‘Maken van golfvormen’, < https://www.youtube.com/watch?v=5BJL1pwd-sU>, 7 april 2015.

AUDIOLOGIE, ‘De fysica van het geluid’, < http://www.audiologieboek.nl/htm/hfd5/5-2-1.htm>, 7 april 2015.

BIG BANG PHYSICS, ‘Fourier Series Part 1’, < https://www.youtube.com/watch?v=x04dnqg-iPw>, 9 april 2015.

BIG BANG PHYSICS, ‘Fourier Series Part 2’, < https://www.youtube.com/watch?v=B9l1fZLLW1E>, 9 april 2015.

BIG BANG PHYSICS, ‘Fourier Series Part 3’, < https://www.youtube.com/watch?v=AqQpIEMhKQA>, 9 april 2015.

BIG BANG PHYSICS, ‘Fourier Series Part 4’, < https://www.youtube.com/watch?v=Y7RAkjbPHDU>, 9 april 2015.

BIG BANG PHYSICS, ‘Fourier Series Part 5 (Recap), < https://www.youtube.com/watch?v=Mxn1Bw613T4>, 9 april 2015.

ENCYCLO, ‘Geluidsgolven’, < http://www.encyclo.nl/begrip/geluidsgolven>, 5 april 2015.

HOLLAND SCHERM, ‘Geluid’, < http://www.hollandscherm.nl/nl/over-ons/geluid>, 16 mei 2015.

JACKOOP, ‘Intervallen’, < http://jackoop.nl/intervallen.html>, 16 mei 2015.

JACKOOP, ‘Maat en maatsoorten’, < http://jackoop.nl/maatsoorten.html>, 16 mei 2015.

JACKOOP, ‘Notenstelsel’, < http://jackoop.nl/notenstelsel.html >, 12 april 2015.

JACKOOP, ‘Toonstelsels’, < http://jackoop.nl/toonstelsels.html>, 12 april 2015.

KSH, ‘Samenvatting muzieknotatie’, <http://www.kshmuziek.nl/MuziekNotatie%20samenvatting.PDF>, 4 november 2014.

LOOKING GLASS UNIVERSE, ‘Fourier Series’, < https://www.youtube.com/watch?v=kP02nBNtjrU>, 8 april 2015.

MGO, ‘Pythagoras’, <http://users.telenet.be/muziekindegriekseoudheid/MGO/mgo_main/mgo_nav/mgo_pythagoras.htm >, 4 november 2014.

MUSICAD, ‘Akkoorden en muziektheorie’, < http://www.musicad.nl/theorie>, 4 november 2014.

MUZIEKBUS, ‘Diatonisch Toonstelsel’, < http://www.muziekbus.nl/muziek/diatoniek.html>, 12 april 2015.

MUZIEKTHEORIE, ‘Muziektheorie v1.0’, < http://users.telenet.be/muziektheorie/>, 4 november 2014.

NATUURKUNDE, ‘Boventonen en frequentiespectrum’, < http://www.natuurkunde.nl/opdrachten/2151/boventonen-en-frequentiespectrum>, 7 april 2015.

NATUURKUNDE, ‘Natuurkundige begrippen in de muziek: boventonen’, < http://www.natuurkunde.nl/artikelen/view.do?supportId=941913>, 8 april 2015.

NEDERLANDSE BLOKFLUITPAGINA, ‘Stemmingen van muziekinstrumenten’, < http://www.blokfluitpagina.nl/index-stemming.htm>, 16 mei 2015.

OOCITIES, ‘Evenredige twaalftoonsstemming’, < http://www.oocities.org/henrikezwart/evenredige_twaalstoonsstemming.htm>, 11 april 2015.

OOCITIES, ‘Stemmingen’, < http://www.oocities.org/henrikezwart/Stemmingen>, 11 april 2015.

OOCITIES, ‘Tonen en Boventonen’, < http://www.oocities.org/henrikezwart/tonen_en_boventonen.htm>, 11 april 2015.

SCARLET, ‘Wat is Geluid’, < http://home.scarlet.be/~ababab/geluid.pdf>, 5 april 2015.

SKR33D, ‘A 440 Hz (Pitch Standard) Tone For Instrument Tuning’, < https://www.youtube.com/watch?v=rFOl-9SNxLY>, 9 april 2015.

SUNCHEEP VIDAYANAKORN, ‘Donjon's Cadenza (Flute Concerto No.2 in D Major Mozart) Using Yamaha YFL 894’, < https://www.youtube.com/watch?v=l00GCRrpK3o>, 16 mei 2015.

UNSW, ‘Violin acoustics: an introduction’, < http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/violintro.html>, 9 april 2015.

VNME, ‘Muziek in de oudheid’, <http://www.vnme.nl/muziek-in-de-oudheid/>, 4 november 2014.

WIKIPEDIA, ‘Antonio Stradivari’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Antonio_Stradivari>, 10 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Fourieranalyse’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Fourieranalyse>, 9 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Frequentie’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Frequentie>, 6 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Geluid’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Geluid>, 5 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Geluidsgolf’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Geluidsgolf>, 5 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Golfvorm’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Golfvorm>, 6 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Klankkast’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Klankkast>, 7 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Klassieke muziek’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Klassieke_muziek>, 12 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Logaritmische schaal’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Logaritmische_schaal>, 11 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Piano acoustics’, < http://en.wikipedia.org/wiki/Piano_acoustics>, 11 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Polyfonie’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Polyfonie>, 10 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Polymetriek’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Polymetriek>, 10 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Polyritmiek’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Polyritmiek>, 10 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Resonantie (natuurkunde)’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Resonantie_(natuurkunde)>, 7 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Snaar (muziek)’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Snaar_%28muziek%29>, 7 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Stemming (muziek)’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Stemming_(muziek)>, 16 mei 2015.

WIKIPEDIA, ‘Stemming van Pythagoras’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Stemming_van_Pythagoras>, 4 november 2014.

WIKIPEDIA, ‘Timbre’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Timbre>, 6 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Tonaliteit’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Tonaliteit>, 10 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Toonsoort’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Toonsoort>, 11 april 2015.

WIKIPEDIA, ‘Westerse muziek’, < http://nl.wikipedia.org/wiki/Westerse_muziek>, 12 april 2015.

WISFAQ, ‘Logaritmen en muziek’, < http://www.wisfaq.nl/show3archiveipad.asp?id=749&j=200>, 11 april 2015.

WIZARD, ‘Muziekactiviteiten’, <http://members.home.nl/de-laak/activiteiten/muziek%20activiteiten.htm>, 4 november 2014.

YRSKY, ‘De basis van de algemene muziekleer’, <http://myrsky.infoteur.nl/specials/algemene-muziekleer.html>, 4 november 2014.

ZORG EN GEZONDHEID, ‘Verklaring: Log-schaal’, < http://www.zorg-en-gezondheid.be/Cijfers/Over-deze-cijfers/Verklaring--Log-schaal/>, 11 april 2015.

Boeken

VERHULST, R., *In de ban van wiskunde. Het cultuurverschijnsel mathematica in beschaving, kunst, natuur en leven*, Garant Uitgevers nv, Antwerpen-Apeldoorn, 2006, 398p.

VAN DE CRAATS, J., *De juiste toon*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2005, 56p.