1. Un péndulo simple posee una masa m en el extremo de una cuerda elástica de longitud l, la cual cambia a una tasa constante $\dot{l} = a$

a) Encuentre el lagrangiano del sistema

b) Encuentre la Energía del sistema.

a) Escribimos el vector de posición en términos de

$$r = l(t)\cos\theta\,\hat{i} + l(t)\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j}$$

la velocidad:

$$\frac{dr}{dt} = (\dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\,\text{sen}\theta)\hat{i} + (\dot{l}\,\text{sen}\theta + l\dot{\theta}\cos\theta)\hat{j}$$

la E_K está dada como:

$$T = \frac{1}{2}m|v|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

Ahora calculamos la Epotencial V debido a la de altura con respecto a la posición de equilibrio de las masas.

La altura se puede expresar como:

$$h = l(1-\cos\theta)$$

$$V = mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2) - mgl(1-\cos\theta)$$

b) las velocidades conjugadas p_l y p_θ están dadas por:

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

$$= m\dot{l} \qquad = ml^2\dot{\theta}$$

los expresamos en términos de los momentos conjugados

$$\dot{l} = \frac{p_l}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

el Hamiltoniano

$$H = p_l\dot{l} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

$$H = p_l\frac{p_l}{m} + p_\theta\frac{p_\theta}{ml^2} - \left(\frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) - mgl(1-\cos\theta)\right)$$

$$H = \frac{p_l^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1-\cos\theta)$$

Este Hamiltoniano describe la E_T del sistema.

3. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial de la forma $V(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$, donde $\vec{F}$ es un vector constante. Encontrar las transformaciones que dejan el lagrangiano invariante y las cantidades conservadas correspondientes.

Se tiene en cuenta que:

$\vec{F}$ es un vector constante

El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \vec{F} \cdot \vec{r}$$

La simetría bajo transformación en el espacio está dada como

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$$

Reemplazo en el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \vec{F} \cdot (\vec{r} + \vec{a})$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \vec{F} \cdot \vec{r} + \vec{F} \cdot \vec{a}$$

La simetría de transformación espacial depende de la dirección de $\vec{F}$. Si $\vec{F}$ es cnte, no hay fuerzas internas que varíen con la posición.

Se conserva el momento lineal: si consideramos $\vec{F} = \vec{0}$, queda:

$$\vec{p} = \dot{\vec{m}}$$

Simetria bajo rotaciones: El lagrangiano no tiene ~~simetria~~ simetria completa, ya que el termino $\vec{F} \cdot \vec{r}$ introduce una dependencia en la dirección $\vec{F}$.

Simetria bajo translación en el tiempo: Se observa que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, esto indica que la función energía, se conserva.

④ En el mismo espíritu del problema anterior, considere una partícula de masa m se mueve con velocidad v sujeto al potencial $V(r,v) = U(r) + n \cdot l$ donde r es el radio vector medido desde el origen del sistema de referencia, l es el momento angular con respecto a ese origen, n es un vector fijo en el espacio y $U(r)$ es una función escalar.

a) Encuentre la fuerza ejercida sobre la partícula

$$F = -\nabla V$$

$$F = -\nabla(U(r) + n \cdot l) = -\nabla U(r) - \nabla(n \cdot l)$$

y $$\nabla U(r) = \frac{dU}{dr}\hat{r}$$

$$\nabla(n \cdot l) \quad , \quad l = r \times p = r \times m\dot{r}$$

$$\nabla(n \cdot l) = \nabla(mn \cdot (r \times \dot{r})) = m\nabla(n \cdot (r \times \dot{r}))$$

$$\Rightarrow \quad = m\nabla(r \times \dot{r}) \cdot n$$

$$= m[\underbrace{(\nabla \dot{r})}_{0} \times r + \nabla \dot{r} \times r] \cdot n$$

$$= m[\cancel{\overset{0}{\nabla \dot{r}} \times \overset{0}{r}}] \cdot n$$

$$= 0$$

Entonces la fuerza sería

$$F = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

b) Obtenga las ec. de movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas

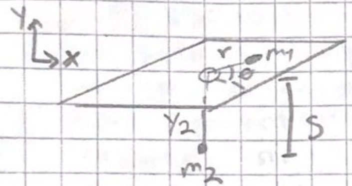
$$\frac{m\, d^2 r}{dt^2} = \frac{-dU}{dr}\hat{r}$$

c) ¿Existe alguna cantidad cte?

- El momento angular se conserva siempre y cuando no haya torque externo
- Si n es fijo, no depende del tiempo por lo que $\hat{n} \cdot l = cte \rightarrow$ el momento angular proyectado sobre n.

5) Dos masas, m_1 y m_2, estan conectadas por una cuerda atraves de un agujero en una mesa sin friccion, de manera que m_1 se mueve sobre la superficie de la mesa y m_2 cuelga de la cuerda, moviendose verticalmente.

a) Determine las ec. de movimiento del sistema



$L = T - U$

$l \to$ longitud total cuerda

$l = r - y_2$, $x_1 = r\cos\theta$

$y_2 = r - l$, $z_1 = r\sin\theta$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - m_2 g (r - l)$$

$$= \frac{1}{2}(m_2 + m_1)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}^2 - m_2 g r + m_2 g l$$

$\Rightarrow$ las ec. de movimiento

Para r

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2)\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{r}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g$$

$$\ddot{r} = \frac{m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Para θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$ $\Rightarrow$ hay una cantidad conservada

$\to$ momento generalizado

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2 m_1 r \dot{r} \dot{\theta} + m_1 r^2 \ddot{\theta} = 0$$

$$2 m_1 r \dot{r} \dot{\theta} + m_1 r^2 \ddot{\theta} = m_1 r^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

b) Identifique las cantidade conservadas

- Energía → No se depende del tiempo
- Momento generalizado respecto a θ

c) Encuentre la posición de equilibrio del sistema

$\ddot{r}=0$ en la posición de equilibrio

$$0 = \frac{m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 r \dot{\theta}^2 = m_2 g$$

$$\boxed{r = \frac{m_2 g}{m_1 \dot{\theta}^2}}$$ Posición equilibrio

Para $\ddot{\theta}=0$ $\qquad 0 = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$

→ existirá posición de equilibrio siempre y cuando $\dot{\theta} = cte$

d) Si m_1 se encuentra inicialmente en reposo a una distancia a del agujero, determine la velocidad de m_2 cuando m_1 alcanza el agujero.

$$E_{Inicial} = \frac{1}{2} m_1 \cancel{v_1^2} + \frac{1}{2} m_2 \cancel{v_2^2} + m_2 g (r-\ell)$$

0 0 partimos del reposo

$$= m_2 g (r-\ell)$$

$$E_{TFinal} = \frac{1}{2} m_1 v_{f_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f_2}^2 - m_2 g \ell$$

Por conservación de la energía

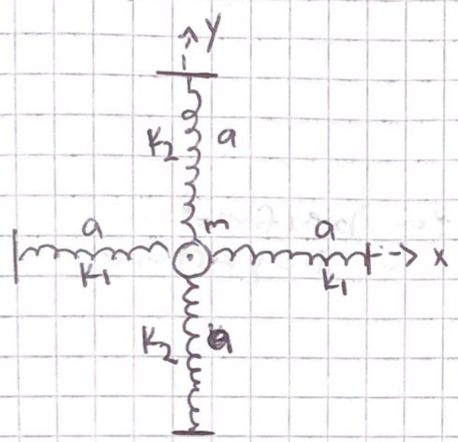
$$m_2 g (r-\ell) = \frac{1}{2} m_1 v_{f_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f_2}^2 - m_2 g \ell$$ → Pero $V_{f_1} = V_{f_2}$

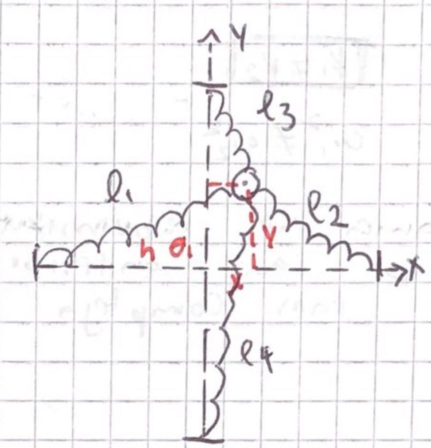
$$m_2 g (r-\ell) = \frac{V_{f_2}^2}{2} (m_1 + m_2) + m_2 g \ell$$

Despejando: $\quad V_{f_2} = \sqrt{\frac{2 m_2 g r}{m_1 + m_2}}$

⑥ El oscilador armonico bidimensional anisotropo es un sistema superintegrable. Consiste en una masa m que se mueve libremente en el plano xy. Esta conectado a las paredes rigidas por dos resortes sin masa de ctes de resorte, k_1 en el eje x y k_2 en el eje y. La longuitud natural de cada resorte es a.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento





Fuerzas restauradoras de los resortes

en X $\qquad F_x = -k_1(x-a)$

en Y $\qquad F_y = -k_2(y-a)$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$

el cual si usamos Newton tal que

$F_x = m a_x \qquad\qquad F_y = m a_y$

$-k_1(x-a) = m\ddot{x} \qquad\qquad -k_2(y-a) = m\ddot{y}$

$\boxed{\ddot{x} + \omega_1^2(x-a) = 0} \qquad\qquad \boxed{\ddot{y} + \omega_2^2(y-a) = 0}$

Ec. de movimiento

Tal que sus soluciones son:

$x(t) = A_x \cos(\omega_1 t + \phi_x) + a$

$y(t) = A_y \cos(\omega_2 t + \phi_y) + a$

- Tal que: ϕ_y y ϕ_x son las fases iniciales
- A_x y A_y → amplitudes
- W_1 → Frecuencia angular X
- W_2 → Frecuencia angular Y

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones.

Definimos: $X = x - a$ y $Y = y - a$
que son las desviaciones pequeñas de las posiciones en equilibrio

Por lo que las ec de movimiento

$$\ddot{X} + \omega_1^2 X = 0$$

$$\ddot{Y} + \omega_2^2 Y = 0$$

c) ¿Qué diferencia puede apreciar entre el caso isotropo y el anisotropo

Tenemos distintos casos

1er caso $\boxed{k_1 = k_2} = k$

$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2$ → esto implica que sus movimientos están sincronizados

- De modo que las trayectorias serán círculos o elipses

2do caso $\boxed{k_1 \neq k_2}$

$\omega_1^2 \neq \omega_2^2$

Ya no tenemos un movimiento tan "perfecto" comparado al caso anterior, su trayectoria es un poco más compleja

d) Encuentre las cuatro ctes de movimiento, las energías en x, y, la cantidad de móv. angular L_z y la correlacional K.

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}, \quad E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 x^2}{2}$$

$$L_z = y p_x - x p_y, \quad K = \omega_1 x \omega_2 y + p_x p_y$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}, \; i = 1, 2$$

el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\left[k_1 (x-a)^2 + k_2 (y-a)^2\right]$$

Tal que la energía

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \dot{y} - \mathcal{L} = \text{cte}$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k_1}{2}(x-a)^2 + \frac{k_2}{2}(y-a)^2$$

Tal que: $\rightarrow E_x = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_1}{2}(x-a)^2$

Pero $p_x = m\dot{x}$

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1}{2}(x-a)^2$$

$$\rightarrow E_y = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{k_2}{2}(y-a)^2$$

$$= \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2}{2}(y-a)^2$$

Ahora el momento angular

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, tal que $\vec{r} = (x, y, 0)$

$\vec{p} = (p_x, p_y, 0)$

Que al realiza el producto cruz

$$L = \underbrace{(x p_y - y p_x)}_{L_z} \hat{k}$$

$$L_z = x p_y - y p_x$$