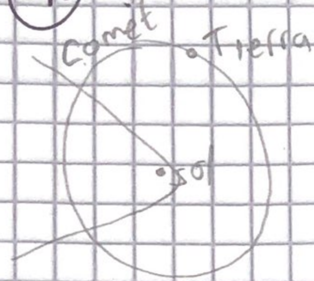
1.



la ecuación de la órbita del cometa por ser una parábola es:

$$r = \frac{q}{1+\cos\theta}$$

donde

$$q = \frac{l^2}{\mu k} \quad ; \quad \text{siendo } k = G m m_s$$

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = cte$$

$$\mu = \frac{m m_s}{m + m_s}$$

Se hallan los puntos donde las órbitas se cruzan. Igualando r al radio de la tierra

$$R_T = \frac{q}{1+\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{q}{R_T} - 1 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{q}{R_T} - 1\right)$$

Por lo que el inicio y el final de la trayectoria del cometa dentro de la órbita de la tierra

$$\alpha_1 = 2\pi - \theta$$

$$\alpha_2 = \theta.$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$ → Usamos 2^{da} ley

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{24}$$

$$dA = \frac{1}{24} dt$$

Igualamos los dA

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{24} dt$$

$$\frac{4}{1} r^2 d\theta = dt$$

$$\frac{4}{1} \frac{q^2}{(1+\cos\theta)^2} d\theta = dt$$

$$\frac{4}{1} q^2 \int_{2\pi-\theta}^{\theta} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} d\theta = t$$

$$t = \underbrace{\frac{4q^2}{1}\left(\frac{\tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{6} + \left(\tan^3\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right) + 3\tan\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right)\right)\right)}_{S}$$

$$t = \frac{S}{86400}$$ → Segundos de un día

↓

días

2. Una partícula se mueve en el potencial

$$V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

a) Determine la órbita de la partícula $r = r(\theta)$

b) Dibuje esquemáticamente el potencial efectivo para este sistema.

1. Para una partícula bajo un potencial central, utilizamos la conservación del momento angular $L = mr^2\dot{\theta}$.

donde

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Utilizamos la conservación de la Energía total y el momento angular pues no hay fuerzas disipativas y no hay dependencia explícita del tiempo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

reemplazamos el potencial

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

Ahora para obtener la ecuación de la órbita expresamos la ecuación en términos de r y θ, eliminando el tiempo.

Usamos la relación entre $\dot{r}$ y θ utilizando la conservación del momento angular.

Sabemos que:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = \frac{mr^2}{L}$$

Diferenciamos r con respecto a θ, usando la cadena de derivación.

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{L}{mr^2}$$

Sustituimos esto en la ecuación de Conservación de la Energía.

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{L}{mr^2} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

Simplificando:

$$E = \frac{L^2}{2m^2r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

$$\frac{2m^2r^4}{L^2} E = \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{m^2r^2}{L^2} \left(\frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \right)$$

③ Considere ahora el potencial de Yukawa

$$V(r) = \frac{-k}{r} e^{-r/a} \quad , \text{donde } k>0 \text{ y } a>0 \text{ , son ctes.}$$

a) Encuentre la condicion de estabilidad de una orbita circular de radio r_0

La energia total sera:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} e^{-r/a}$$

y

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

El potencial efectivo es

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} e^{-r/a}$$

La estabilidad se obtiene al encontrar el minimo potencial efectivo, que se da:

$$\frac{d V_{eff}(r)}{dr} = 0$$

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = \frac{-L^2}{\mu r^3} + \frac{k}{r^2} e^{-r/a} + \frac{k}{ar} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$0 = \frac{-L^2}{\mu r^3} + \left(\frac{k}{r^2} + \frac{k}{ar}\right) e^{-r/a}$$

El cual tiene soluciones si:

$$\frac{L^2}{\mu} = kr\left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

Esta fue la condición para que la orbita sea circular, y si se cumple, la orbita es estable si el segundo derivado del potencial efectivo en ese punto es positivo:

$$\frac{d^2 V_{eff}(r)}{dr^2} > 0$$

$$\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2} = \frac{3L^2}{\mu r^4} + \left(-\frac{2k}{r^3} - \frac{k}{ar^2}\right) e^{-r/a} - \frac{1}{a}\left(\frac{k}{r^2} + \frac{k}{ar}\right) e^{-r/a}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^2 V_{ef}}{dr^2} = \frac{k}{r^3}\left(1 + \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{a}}$$

Entonces tenemos un minimo proporcionado por

$$a^2 + ar - r^2 > 0$$

Que se satisface siempre y cuando

$$r < \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

Si $r = r_0 \rightarrow$ entonces $\rightarrow$ $E = \frac{L^2}{2\mu r_0^2} - \frac{k}{r_0} e^{-r_0/a}$

$$L = \mu r_0^2 \dot{\varphi}_0$$

El cual si usamos la condicion $\frac{L^2}{\mu} = kr\left(1+\frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$

Tenemos:

$$E = \left(\frac{1}{2r_0^2} kr_0 \left(1+\frac{r_0}{a}\right) - \frac{k}{r_0}\right) e^{-r_0/a}$$

$$= \frac{-k}{2r_0}\left(1-\frac{r_0}{a}\right) e^{-\frac{r_0}{a}}$$

$$L = \mu r_0^2 \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\mu k r_0 \left(1+\frac{r_0}{a}\right) e^{-r_0/a}}$$

b) Determine el periodo de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de esta orbita circular

$$\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu r_0^3}}\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\right)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{\mu r_0^3}}\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{a}\right)^2\right)}$$

④ Una particula con momento angular L describe la orbita
$r = a(1+\cos\theta)$

a) Encuentre la fuerza central que produce esta orbita

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1+\cos\theta)} \Rightarrow au(1+\cos\theta) = 1$$

$$\log a + \log u + \log(1+\cos\theta) = 1$$

Derivamo respecta a θ

$$0 + \frac{1}{u}\frac{du}{d\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta}(-\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{d\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = u\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Ahora la segunda derivada de u

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = u\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{du}{d\theta}$$

$$= \frac{u}{2}\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + u\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

La fuerza central esta dada por

$$F = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

$$= h^2u^2\left(u + \frac{u}{2}\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + u\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}h^2u^3\sec^2\frac{\theta}{2} \quad ; \quad u = \frac{1}{r}$$

$$F = \frac{3}{2}h^2\frac{1}{r^3}\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{3h^2}{r^3} \times \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{3h^2}{r^3\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \quad ; \quad r = a(1+\cos\theta), \quad \frac{r}{a} = (1+\cos\theta) = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \left(\frac{3h^2}{r^3}\right)\left(\frac{1}{r/a}\right) = \boxed{\frac{3ah^2}{r^4} = F} = \boxed{\frac{-3ak}{r^4}}$$

b) Calcule el periodo de esta orbita

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{E - V_{eff}}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -F(r)$$

$$V(r) = \frac{-aK}{r^3}$$

c) Determine la energía mínima que debe tener la partícula para escapar de esta orbita.