

Primera asignación

Jurianny Andica Corredor
María José Pérez
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

30 Agosto del 2024

Índice

1. Introducción	1
2. Metodología	2
2.1. Caso 1: Masas y Longitudes Iguales	4
2.2. Caso 2: Masas y Longitudes Diferentes	5
2.3. Caso 3: Resorte atado a media altura de las varillas	5
2.4. Solución de los Casos 1 y 2	6
2.5. Caso 4: Aproximaciones para Pequeñas Oscilaciones	7
2.6. Solución Caso 4	7
2.7. Caso 5: Comportamiento caótico	8
2.8. Caso 6: Espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma.	8
3. Experimento y Resultados	9
4. Conclusiones y Recomendaciones	24
5. Referencias	24

Resumen

1. Introducción

El estudio de los sistemas de péndulos acoplados representa un área fundamental en la mecánica clásica, proporcionando un marco para entender la dinámica de sistemas oscilatorios complejos. Estos sistemas, que involucran la interacción de múltiples péndulos a través de resortes, son un modelo representativo para explorar fenómenos como la transferencia de energía y la sincronización de movimientos oscilatorios.

Este artículo aborda estas cuestiones al analizar un sistema de péndulos acoplados bajo diversas configuraciones de parámetros. El objetivo principal es investigar cómo las variaciones en las masas de los péndulos, las longitudes de las varillas y los ángulos iniciales afectan el comportamiento dinámico del sistema. Para lograr esto, se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Este enfoque permite una representación detallada y precisa de las oscilaciones, ofreciendo una nueva perspectiva sobre la dinámica de los péndulos acoplados.

El artículo está organizado de la siguiente manera: primero se presenta una revisión del estado actual y la motivación del estudio. Luego, se describen los métodos y la metodología empleada. A continuación, se presentan y analizan los resultados obtenidos, seguidos de una discusión y conclusiones que resumen los hallazgos y su relevancia para el campo.

2. Metodología

En este trabajo, se estudió el comportamiento dinámico de un sistema de dos péndulos acoplados mediante un resorte, como se puede observar en la figura(1). Cada péndulo consiste en una masa m suspendida de una varilla rígida sin masa de longitud l . El acoplamiento entre los péndulos se logra mediante un resorte con constante elástica k .

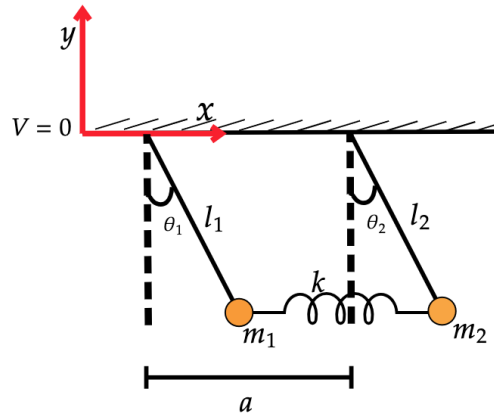


Figura 1: Esquema de dos péndulos acoplados mediante un resorte.

Para analizar este sistema, se siguió un enfoque analítico y numérico. En primer lugar, se formularon las ecuaciones de movimiento utilizando el formalismo de Lagrange, considerando tanto la energía cinética como la energía potencial del sistema. Posteriormente, se resolvieron las ecuaciones de movimiento. Además, se implementó una simulación numérica para visualizar el comportamiento dinámico del sistema bajo diferentes condiciones iniciales. Esta simulación permitió verificar los resultados analíticos y explorar el comportamiento del sistema.

Se comenzó hallando las ecuaciones de movimiento utilizando el formalismo de Euler-Lagrange para un caso general, en el que se consideran masas diferentes, m_1, m_2 , así como longitudes de

varillas distintas, l_1, l_2 . A partir de esto, se pudo derivar las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del sistema.

Para iniciar, es necesario establecer las coordenadas generalizadas del sistema. En este caso, consideramos dos coordenadas generalizadas: θ_1 y θ_2 . A partir de esto, podemos definir las posiciones que describen el movimiento de cada masa.

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & y_1 &= l_1 \cos \theta_1, \\x_2 &= a + l_2 \sin \theta_2, & y_2 &= l_2 \cos \theta_2.\end{aligned}$$

Se calculan las velocidades, las cuales se utilizarán para determinar la energía cinética, T .

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \\ \dot{x}_2 &= l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, & \dot{y}_2 &= -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2.\end{aligned}$$

Para analizar el comportamiento dinámico del sistema, es necesario calcular el Lagrangiano. Este se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema. Al calcular el Lagrangiano, podemos aplicar el formalismo de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento. Así, el Lagrangiano del sistema está dado por:

$$L = T - U. \quad (1)$$

En última instancia, el Lagrangiano representa la diferencia entre la energía cinética de ambas masas y la energía potencial de las masas, además del potencial elástico del resorte.

$$L = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \left(-m_1gy_1 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2\right). \quad (2)$$

Sustituyendo estas expresiones, obtenemos:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2gl_2\cos(\theta_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}k(-l_2\sin(\theta_2) + l_1\sin(\theta_1))^2 - \frac{1}{2}k(l_2\cos(\theta_2) - l_1\cos(\theta_1))^2.\end{aligned} \quad (3)$$

No obstante, fue notorio que las expresiones podían ser simplificadas utilizando identidades trigonométricas estándar. Desarrollando estas simplificaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2gl_2\cos(\theta_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}k(l_1^2 + l_2^2) + k l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).\end{aligned} \quad (4)$$

Aquí podemos considerar dos escenarios de condiciones iniciales: uno en el que las masas m_1 y m_2 y las longitudes l_1 y l_2 son iguales, y otro en el que estas son diferentes.

2.1. Caso 1: Masas y Longitudes Iguales

Abordamos el análisis del sistema bajo la condición que $l_1 = l_2 = l$ y $m_1 = m_2 = m$. Este caso permite simplificar el Lagrangiano del sistema, facilitando el análisis de las ecuaciones de movimiento y sus soluciones.

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - \frac{1}{2}kl^2(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2 - \frac{1}{2}kl^2(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2. \quad (5)$$

Asimismo, podemos aplicar las identidades trigonométricas previamente utilizadas para simplificar aún más el Lagrangiano.

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - \frac{1}{2}kl^2(\cos(\theta_2 - \theta_1)). \quad (6)$$

Con el Lagrangiano definido y simplificado, ahora podemos proceder a derivar las ecuaciones de movimiento del sistema. Utilizando el formalismo de Euler-Lagrange, aplicamos el Lagrangiano para obtener las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de los péndulos.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0. \quad (7)$$

Calculamos la ecuación de movimiento para cada coordenada generalizada.

Para θ_1 , obtenemos las correspondientes derivadas con respecto a $\dot{\theta}_1$ y θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -mgl \sin \theta_1 + kl^2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = ml^2 \ddot{\theta}_1.$$

Procedemos a sustituir estas derivadas en la ecuación de Lagrange correspondiente.

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 + mgl \sin \theta_1 - kl^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l} \sin \theta_1 + \frac{k}{m} \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (9)$$

A continuación, repetimos el proceso de cálculo para la coordenada generalizada θ_2 . Siguiendo el mismo proceso anterior, derivando el Lagrangiano con respecto a $\dot{\theta}_2$ y θ_2 , y luego sustituyendo estas derivadas en la ecuación de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgl \sin \theta_2 - kl^2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = ml^2 \ddot{\theta}_2.$$

Sustituimos estas derivadas en la ecuación de Lagrange para θ_2 :

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l} \sin \theta_2 - \frac{k}{m} \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (10)$$

2.2. Caso 2: Masas y Longitudes Diferentes

Este escenario introduce una mayor complejidad en las ecuaciones de movimiento, ya que las diferencias en los parámetros del sistema afectan significativamente su comportamiento dinámico. Partiendo del Lagrangiano previamente construido (ver ecuación 4), procedemos a encontrar las ecuaciones de movimiento aplicando el formalismo de Euler-Lagrange, siguiendo un procedimiento similar al previamente descrito.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0. \quad (11)$$

Determinamos la ecuación de movimiento para cada coordenada generalizada.

Para θ_1 , obtenemos las derivadas respectivas con respecto a $\dot{\theta}_1$ y θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 + k l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1.$$

Sustituimos estas derivadas en la ecuación de Lagrange correspondiente.

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 - k l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1} \sin \theta_1 + \frac{k}{m_1} \frac{l_2}{l_1} \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (13)$$

Y repetimos el proceso para la coordenada generalizada θ_2 , derivando el Lagrangiano con respecto a $\dot{\theta}_2$ y θ_2 , y luego sustituyendo estas derivadas en la ecuación de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 - k l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2.$$

Sustituimos estas derivadas en la ecuación de Lagrange para θ_2 :

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2} \sin \theta_2 - \frac{k}{m_2} \frac{l_1}{l_2} \sin(\theta_2 - \theta_1). \quad (14)$$

2.3. Caso 3: Resorte atado a media altura de las varillas

Además de los casos anteriores, se exploró el efecto de ubicar el resorte en la mitad de las varillas del sistema de péndulos acoplados. Con el objetivo de determinar cómo varía el comportamiento del sistema en función de la posición del resorte.

En este caso, el análisis cambia al calcular la energía potencial elástica del resorte. Como se muestra en la ecuación(2), esta energía depende de Δx y Δy . Ahora, en lugar de que Δy se extienda hasta l , lo hará hasta una longitud r , que es donde se posiciona el resorte. El esquema del sistema se puede observar en la figura(2).

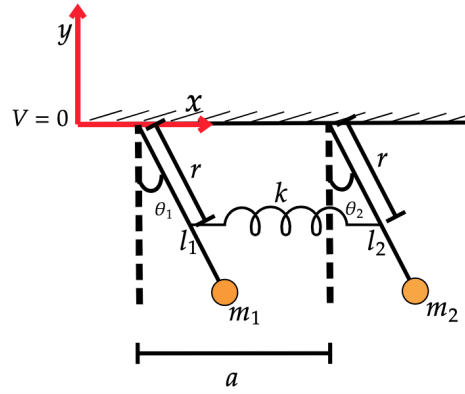


Figura 2: Esquema de dos péndulos acoplados mediante un resorte fijado a una altura r .

$$L = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \left(-m_1gy_1 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 \right). \quad (15)$$

Ahora Δx y Δy están dados por:

$$L = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2gl_2\cos(\theta_2) - \frac{1}{2}k(r\sin(\theta_1) - r\sin(\theta_2))^2 - \frac{1}{2}k(rcos(\theta_2) - rcos(\theta_1))^2. \quad (16)$$

El cual puede simplificarse a:

$$L = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2gl_2\cos(\theta_2) - \frac{1}{2}kr^2(\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2))^2 - \frac{1}{2}kr^2(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))^2. \quad (17)$$

Este Lagrangiano sigue siendo el mismo, con las mismas ecuaciones, excepto por el cambio en la energía potencial elástica, donde l es sustituido por r .

2.4. Solución de los Casos 1 y 2

Para resolver las ecuaciones diferenciales que surgen en el análisis de los sistemas físicos, como los péndulos acoplados, es fundamental considerar que muchas de estas ecuaciones no lineales no tienen soluciones analíticas exactas. Por lo tanto, es necesario buscar una solución aproximada. Para implementar esta aproximación, se desarrolló un código en Python que utiliza el método RK4 para integrar el sistema de ecuaciones. El código [0] genera gráficas que muestran la evolución del sistema a lo largo de un intervalo de tiempo, permitiendo analizar el movimiento de los péndulos en función de las condiciones iniciales.

Para abordar este problema, se emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4), el cual consiste en calcular la solución en intervalos sucesivos utilizando una combinación ponderada de pendientes calculadas en diferentes puntos dentro del intervalo. Este método es un método de

integración numérica que proporciona una aproximación precisa de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

2.5. Caso 4: Aproximaciones para Pequeñas Oscilaciones

Cuando las amplitudes de las oscilaciones son pequeñas, el comportamiento del sistema puede simplificarse significativamente. Esta simplificación se basa en la suposición de que las desviaciones angulares son pequeñas, permitiendo aproximaciones lineales de las ecuaciones de movimiento.

En el análisis se realizaron las siguientes aproximaciones para simplificar las ecuaciones del sistema. Suponiendo que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños, se puede aproximar $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\sin \theta_2 \approx \theta_2$, $\cos \theta_1 \approx 1$ y $\cos \theta_2 \approx 1$. Además, dado que las oscilaciones son pequeñas, θ_1^2 y θ_2^2 se consideran términos de orden insignificante y se pueden aproximar por cero, es decir, $\theta_1^2 \approx 0$ y $\theta_2^2 \approx 0$.

Por lo tanto, al retroceder a las ecuaciones obtenidas, (13) y (14), y aplicar las aproximaciones previamente mencionadas, las ecuaciones de Euler-Lagrange se simplifican y se reducen a:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1}\theta_1 + \frac{k}{m_1}\frac{l_2}{l_1}(\theta_2 - \theta_1), \quad (18)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2}\theta_2 - \frac{k}{m_2}\frac{l_1}{l_2}(\theta_2 - \theta_1). \quad (19)$$

2.6. Solución Caso 4

En el análisis de pequeñas oscilaciones, se recurrió al uso de Python y a la representación matricial de las ecuaciones de movimiento, lo cual resulta conveniente por varias razones. Este enfoque permite simplificar el sistema no lineal complejo a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, utilizando la aproximación de pequeñas oscilaciones. La clave del método radica en la linealización de las ecuaciones del sistema alrededor de la posición de equilibrio, lo cual permite representar el sistema como un problema de autovalores y autovectores.

El método consiste en reescribir las ecuaciones de movimiento en forma matricial, donde las matrices resultantes describen la relación entre las variables del sistema y sus derivadas. A continuación, se calculan los valores y vectores propios de estas matrices. Los valores propios representan las frecuencias naturales del sistema, mientras que los vectores propios describen los modos normales de oscilación, es decir, las formas en que el sistema oscila cuando es perturbado.

La matriz \mathbf{M} es la matriz identidad, y la matriz \mathbf{K} es la matriz de rigidez. Estas matrices están relacionadas con las ecuaciones de movimiento del sistema a través de la ecuación diferencial matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = 0. \quad (20)$$

En esta ecuación, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ representa las aceleraciones angulares de las coordenadas generalizadas del sistema, \mathbf{M} es la matriz de masa que, en este caso particular, es una matriz identidad, y \mathbf{K} es la matriz de rigidez que encapsula las características elásticas del sistema. La matriz de rigidez \mathbf{K} determina cómo las fuerzas restauradoras actúan sobre el sistema en respuesta a los desplazamientos

θ de las masas.

Este enfoque es particularmente útil porque permite descomponer el comportamiento complejo del sistema en una superposición de modos normales, facilitando así la comprensión y el análisis de la dinámica del sistema. Además, Python proporciona una herramienta poderosa para realizar estos cálculos de manera eficiente y precisa, lo que permite explorar diferentes configuraciones del sistema y observar cómo varían las frecuencias naturales y los modos de oscilación en función de las condiciones iniciales y los parámetros del sistema.

2.7. Caso 5: Comportamiento caótico

Para trabajar el comportamiento caótico en este sistema, se consideró crucial analizar la sensibilidad a las condiciones iniciales ya que es una característica distintiva de los sistemas caóticos. Este comportamiento se manifiesta cuando pequeñas variaciones en las condiciones iniciales generan trayectorias radicalmente diferentes, evidenciando la naturaleza caótica del sistema. Esto se va a analizar directamente, usando el código obtenido con Runge-Kutta ya que permite observar de forma directa el comportamiento y lograr hallar conclusiones. Esto se hará tanto para grandes y pequeñas oscilaciones.

Además, se debe introducir variaciones en las masas y longitudes de los péndulos para evaluar su impacto en la dinámica del sistema. Se consideran diferencias de 0,1kg en las masas y 0,1m en las longitudes de los péndulos, lo que permite observar cómo estas modificaciones afectan el comportamiento caótico.

Finalmente la idea es graficar el espacio de fases del sistema ya que me permite ver las trayectorias realizadas. Las trayectorias de θ_1 frente a ω_1 y de θ_2 frente a ω_2 deben revelar una estructura compleja y no repetitiva. La aparente aleatoriedad y la falta de patrones simples en estas trayectorias son indicativos del caos presente en el sistema. La complejidad y variabilidad observadas en el espacio de fase destacan la naturaleza caótica del sistema, donde pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden llevar a resultados significativamente distintos, complicando así la predicción del comportamiento futuro.

2.8. Caso 6: Espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma.

Para analizar el comportamiento de la señal en términos del espectro de potencias de Fourier y del espectrograma, implementamos la simulación numérica ya obtenida de Runge-Kutta de cuarto orden.

A partir de asignar las condiciones iniciales, primero, se calcula el espectro de potencia de Fourier utilizando la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Esta técnica permite identificar las frecuencias dominantes en las señales de los péndulos y calcular las magnitudes de estas frecuencias para evaluar su intensidad. Donde posteriormente, se calcula el espectrograma, el cual muestra cómo varían las frecuencias con el tiempo.

Por último, se visualizan y evalúan los resultados. Aquí se generan tres gráficos: el primero muestra el movimiento temporal de los péndulos, permitiendo observar cómo los ángulos cambian con el tiempo cuando las masas son iguales. El segundo gráfico representa el espectro de potencia de

Fourier, mostrando así las frecuencias dominantes y su intensidad. El tercer gráfico es el espectrograma, que ilustra cómo las frecuencias cambian a lo largo del tiempo y permite identificar patrones de variación temporal.

3. Experimento y Resultados

En esta sección, se presentan y analizan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones realizadas en Python para diferentes configuraciones del sistema de péndulos acoplados. Se han considerado varias condiciones iniciales y parámetros del sistema, tales como la igualdad o diferencia en las masas y longitudes de las varillas, el ángulo inicial de los péndulos, y la constante de elasticidad del resorte que los acopla.

A través de estas simulaciones, se pretende explorar cómo estas variaciones afectan el comportamiento dinámico del sistema. Para cada caso, se han generado gráficas que permiten visualizar de manera clara y detallada la evolución temporal de las variables del sistema. Estas gráficas nos proporcionan una visión comparativa del efecto de los diferentes parámetros sobre el movimiento de los péndulos, permitiendo una comprensión más profunda de la dinámica del sistema.

Comenzando con los casos 1 y 2. En los que las masas y longitudes son iguales, podemos observar que el comportamiento del sistema está influenciado principalmente por el ángulo inicial y la constante de elasticidad del resorte, permitiendo observar cómo se modifica el movimiento de los péndulos.

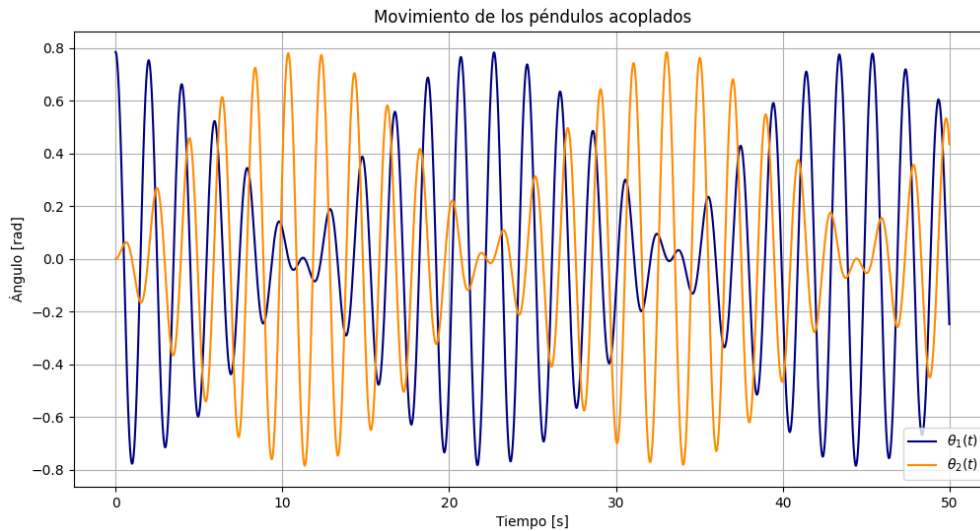


Figura 3: Movimiento de los péndulos acoplados con masas y longitudes idénticas. En esta configuración, el primer péndulo tiene un ángulo inicial de $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, mientras que el segundo péndulo comienza desde la posición vertical ($\theta_2 = 0$).

Ahora consideremos el caso en el que ambos péndulos comienzan desde ángulos iniciales distintos.

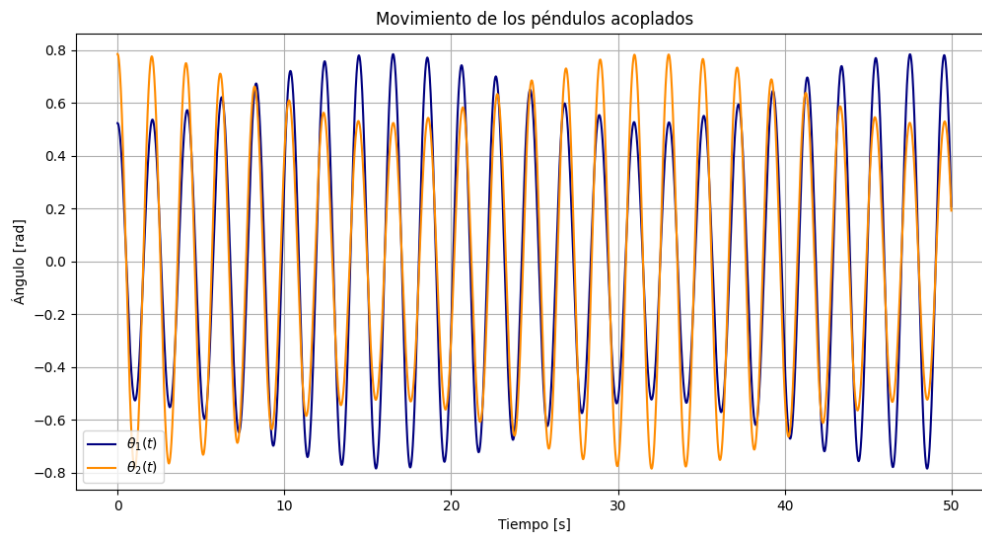


Figura 4: Movimiento de los péndulos acoplados con masas y longitudes iguales. En esta configuración, el primer péndulo comienza con un ángulo inicial de $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, mientras que el segundo péndulo inicia desde $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$.

En las gráficas analizadas, se observa un comportamiento distintivo dependiendo de los ángulos iniciales de los péndulos. En el primer caso, donde uno de los péndulos comienza desde la posición ($\theta = 0$), las oscilaciones del péndulo varían desde cero hasta un punto máximo y luego regresan a cero, repitiendo este patrón cíclicamente. En este escenario, el péndulo alcanza su máxima amplitud en el ángulo inicial del otro péndulo (θ) debido a la interacción con el resorte, que transfiere energía entre los péndulos. El resorte, al estar acoplado a ambos péndulos, introduce una fuerza restauradora que afecta las oscilaciones, haciendo que el péndulo que empieza en cero alcance su máxima amplitud en el ángulo inicial del otro.

En contraste, cuando ambos péndulos inician desde ángulos iniciales casi idénticos, sus oscilaciones son muy similares y nunca llegan a cero. Este fenómeno ocurre porque, al comenzar desde ángulos cercanos, los péndulos tienden a oscilar en sincronía. La proximidad de los ángulos iniciales minimiza la amplitud relativa de las oscilaciones y estabiliza el sistema en un rango constante. El resorte contribuye a esta sincronización al equilibrar las fuerzas entre los péndulos, lo que evita que el sistema regrese completamente a cero y mantiene un patrón de oscilación más estable.

Estas observaciones resaltan cómo la elección de los ángulos iniciales y la interacción con el resorte influyen en la dinámica del sistema de péndulos acoplados. El resorte juega un papel crucial en la transferencia de energía y la sincronización de los movimientos, afectando tanto la amplitud de las oscilaciones como el comportamiento global del sistema.

A continuación, se complica un poco la dinámica del sistema al variar las masas de los péndulos mientras mantenemos las longitudes constantes y consideramos dos ángulos iniciales distintos. Por ejemplo, al analizar el caso en el que la masa m_1 es mayor que la masa m_2 , se observan diferencias significativas en el comportamiento de los péndulos.

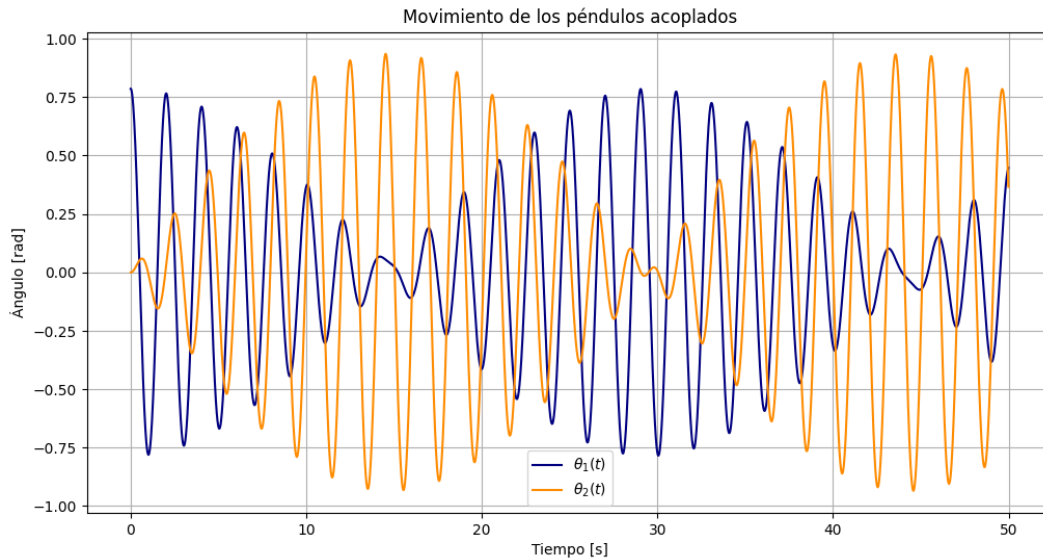


Figura 5: Movimiento de los péndulos acoplados con $m_1 = 1,7[kg]$, mayor que $m_2 = 1,2[kg]$ y longitudes iguales. El péndulo con θ_1 comienza desde un ángulo inicial de $\pi/4$, mientras que el otro comienza desde $\theta_2 = 0$.

Y si ahora m_2 es mayor a m_1 , con longitudes iguales y los mismos ángulos iniciales.

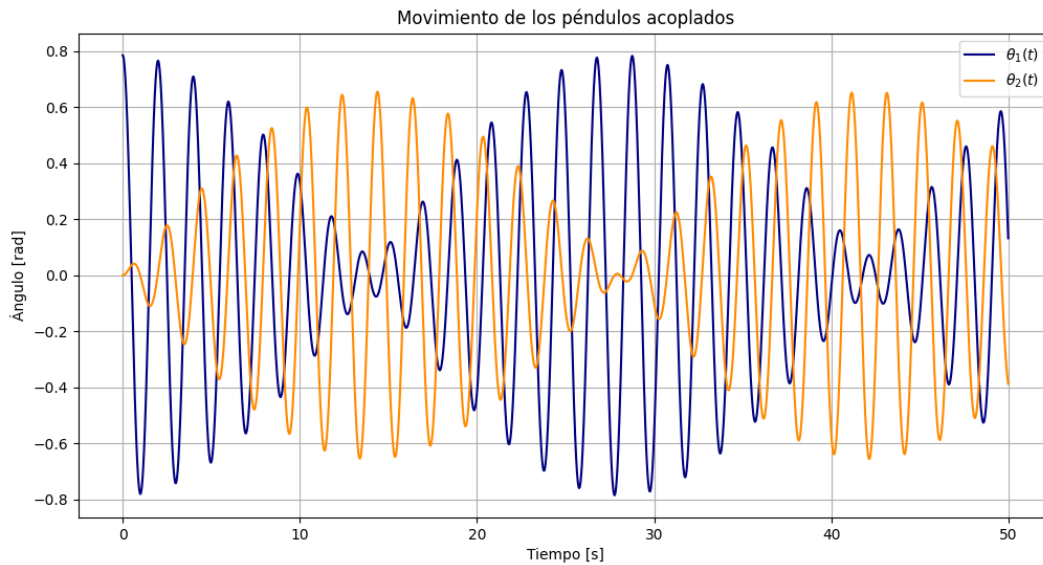


Figura 6: Movimiento de los péndulos acoplados con $m_2 = 1,7[kg]$, mayor que $m_1 = 1,2[kg]$, manteniendo longitudes iguales y con ángulos iniciales idénticos para ambos péndulos.

En este caso, observamos que el péndulo con menor masa nunca alcanza la misma amplitud máxima que el péndulo con mayor masa, y el péndulo de menor masa puede llegar a un ángulo mayor que el punto inicial del péndulo más pesado. Esta diferencia en las oscilaciones se debe a cómo las masas afectan la distribución de la energía en el sistema.

Cuando las masas son desiguales, el resorte ajusta el equilibrio dinámico entre los dos péndulos, transmitiendo fuerzas que no solo mantienen el sistema acoplado, sino que también modifican la dinámica de cada péndulo en función de sus masas respectivas. El péndulo con mayor masa tiene una mayor inercia, lo que resulta en una amplitud de oscilación más alta y una frecuencia diferente en comparación con el péndulo de menor masa. En contraste, el péndulo de menor masa, al ser más ligero, alcanza un ángulo mayor al que empieza el péndulo más pesado debido a la forma en que el resorte redistribuye la energía en el sistema. Esta interacción provoca un movimiento más asimétrico y complejo, destacando la influencia de las masas en la dinámica del sistema acoplado.

A continuación, exploramos el efecto de variar la longitud de las varillas, manteniendo constantes tanto el ángulo inicial como las masas de los péndulos.

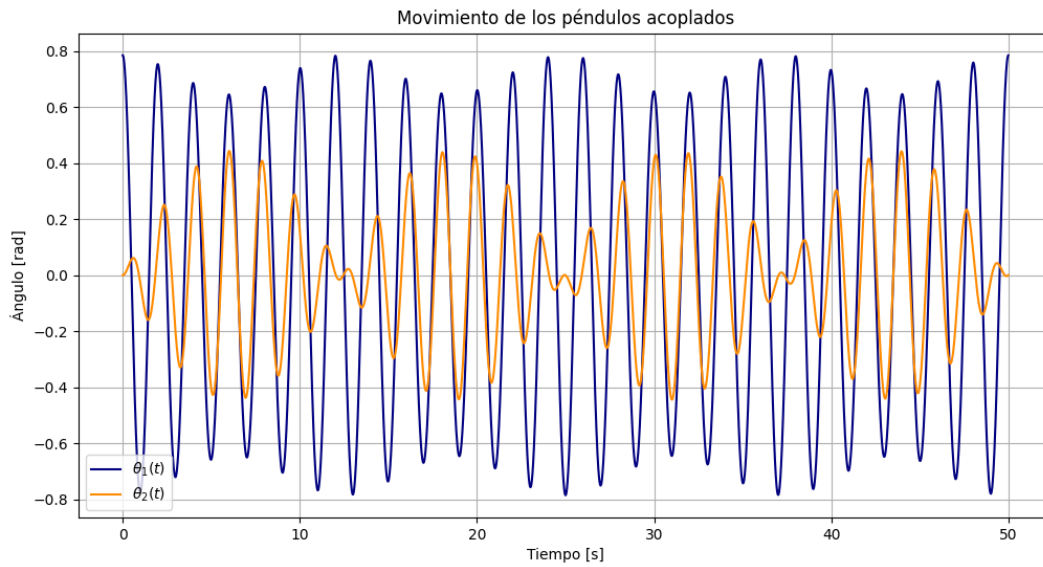


Figura 7: Movimiento de los péndulos acoplados con longitudes desiguales, $l_1 = 1,0[m]$ y $l_2 = 0,8[m]$, y masas iguales. El primer péndulo tiene un ángulo inicial de $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, mientras que el segundo comienza desde $\theta_2 = 0$.

Y ahora para el caso contrario.

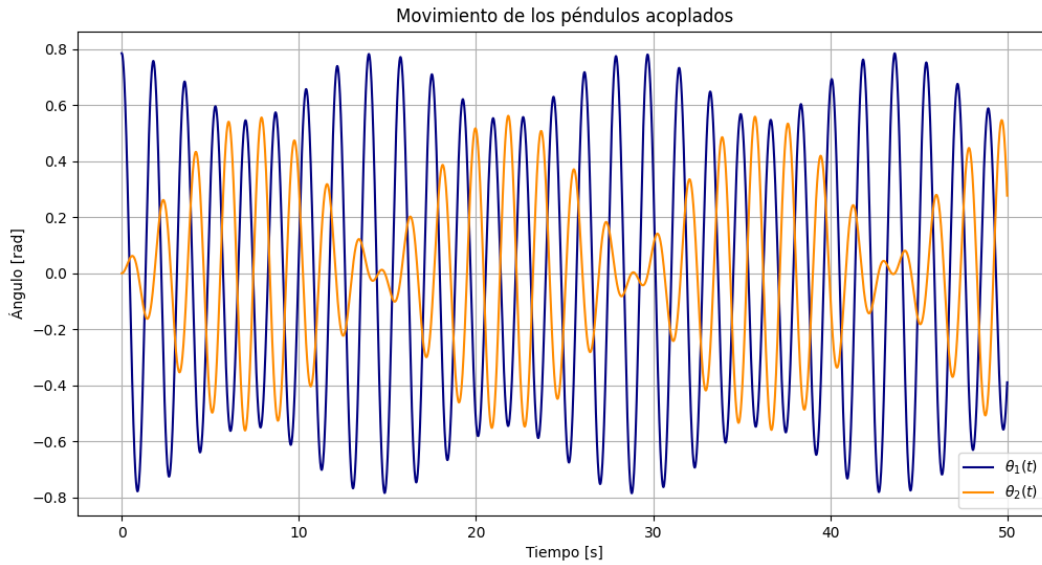


Figura 8: Movimiento de los péndulos acoplados con longitudes desiguales, donde $l_1 = 0,8[m]$ es menor que $l_2 = 1,0[m]$, y con masas iguales. El primer péndulo comienza con un ángulo inicial de $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, mientras que el segundo péndulo inicia desde $\theta_2 = 0$.

La longitud de la varilla afecta la frecuencia de oscilación del péndulo: los péndulos más cortos tienen frecuencias de oscilación más altas, mientras que los más largos tienen frecuencias más bajas. Como resultado, el péndulo con la varilla más corta puede oscilar con mayor rapidez y amplitud suficiente para llegar a cero, mientras que el péndulo con la varilla más larga tiene una amplitud más restringida y no llega a cero.

Ahora nos dirigimos al caso 4, que se enfoca en el análisis de pequeñas oscilaciones. En esta sección, aplicaremos las mismas clasificaciones utilizadas previamente, comenzando con el caso en el que las masas y las longitudes de las varillas son iguales. En este escenario, variamos únicamente el ángulo inicial para observar cómo afecta al comportamiento dinámico del sistema.

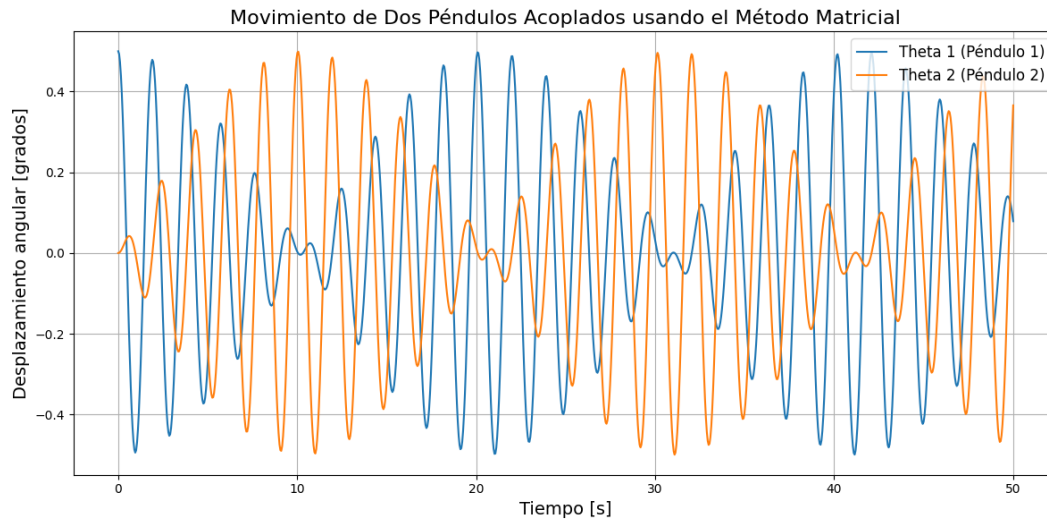


Figura 9: Movimiento de los péndulos acoplados con masas y longitudes iguales. En esta configuración, el primer péndulo comienza con un ángulo inicial de $\theta_1 = 0,5\text{grados}$, mientras que el segundo péndulo inicia desde $\theta_2 = 0$.

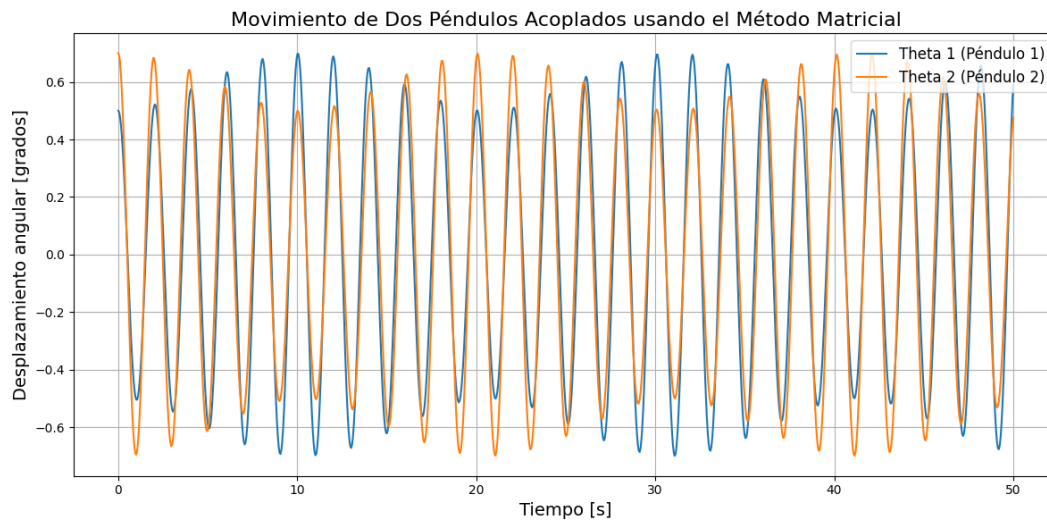


Figura 10: Movimiento de los péndulos acoplados con masas y longitudes iguales. En esta configuración, el primer péndulo comienza con un ángulo inicial de $\theta_1 = 0,5\text{grados}$, mientras que el segundo péndulo inicia desde $\theta_2 = 0,7\text{grados}$.

Ambas gráficas revelan un patrón de comportamiento similar al observado en el análisis de grandes oscilaciones para este caso. En las gráficas, se puede observar que cada péndulo alcanza su punto máximo de oscilación cuando el otro péndulo se encuentra en su punto mínimo. Este

comportamiento se debe a la influencia del resorte acoplado entre los péndulos.

El resorte transfiere la energía entre los dos péndulos, lo que resulta en una oscilación antinómica: cuando uno de los péndulos está en su máxima amplitud, el otro está en su mínimo, y viceversa. Esta dinámica se debe a la conservación de la energía en el sistema acoplado y a la manera en que el resorte ajusta la distribución de la energía entre los dos péndulos, generando una interacción que sincroniza los picos y valles de sus oscilaciones.

A continuación, analizamos el caso con masas variables, manteniendo constantes las longitudes de las varillas y los ángulos iniciales.

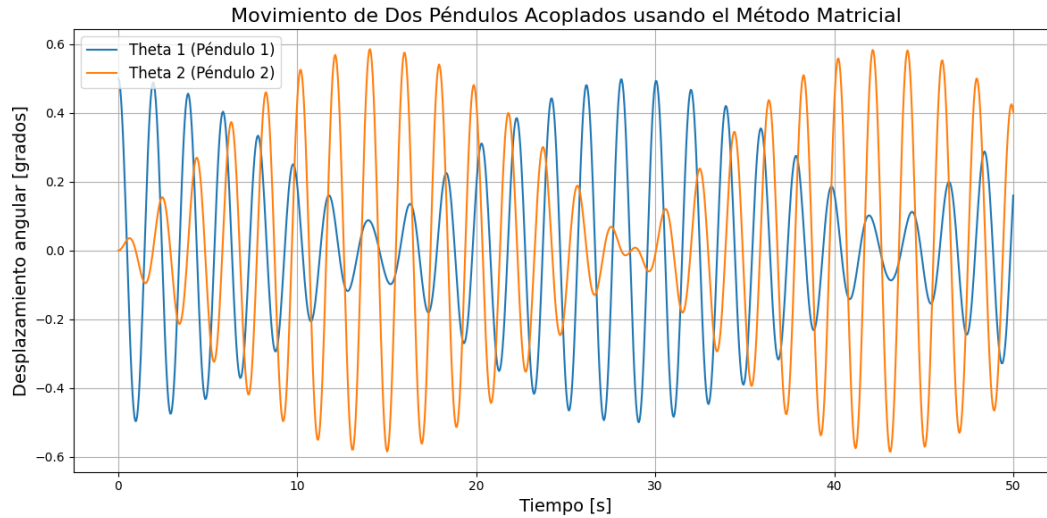


Figura 11: Movimiento de los péndulos acoplados con $m_1 = 1,7[kg]$, mayor que $m_2 = 1,2[kg]$ y longitudes iguales. El péndulo con $\theta_1 = 0,5$ grados, mientras que el otro comienza desde $\theta_2 = 0$.

Y si ahora m_2 es mayor a m_1 , con longitudes iguales y los mismos ángulos iniciales.

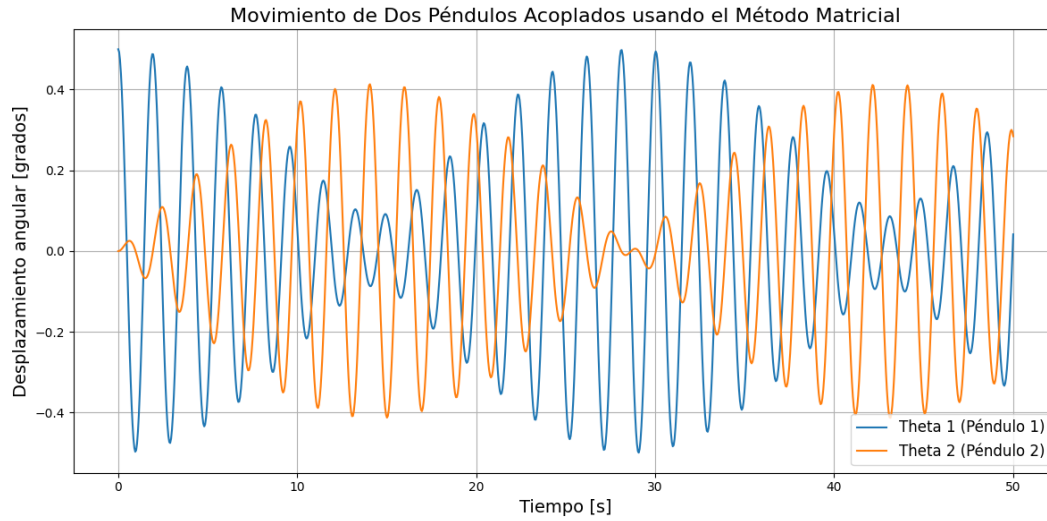


Figura 12: Movimiento de los péndulos acoplados con $m_2 = 1,7[\text{kg}]$, mayor que $m_1 = 1,2[\text{kg}]$, manteniendo longitudes iguales y con $\theta_1 = 0,5$ grados, mientras que el otro comienza desde $\theta_2 = 0$.

El análisis de la gráfica para pequeñas oscilaciones sigue el mismo patrón que el observado en el caso de grandes oscilaciones. A pesar de que los ángulos son pequeños, la física subyacente del sistema acoplado permanece constante. En ambas situaciones, la masa mayor no alcanza la amplitud máxima de oscilación; en cambio, es la masa menor la que logra la mayor amplitud.

Esto se debe a que, en un sistema de péndulos acoplados, el resorte transmite energía entre los dos péndulos. La dinámica del resorte y la conservación de la energía resultan en una transferencia de energía que favorece al péndulo de menor masa, permitiéndole alcanzar una mayor amplitud de oscilación en comparación con el péndulo de mayor masa.

Finalmente, abordamos el caso en el que las longitudes de las varillas son variables, mientras que las masas se mantienen constantes y los ángulos iniciales permanecen fijos.

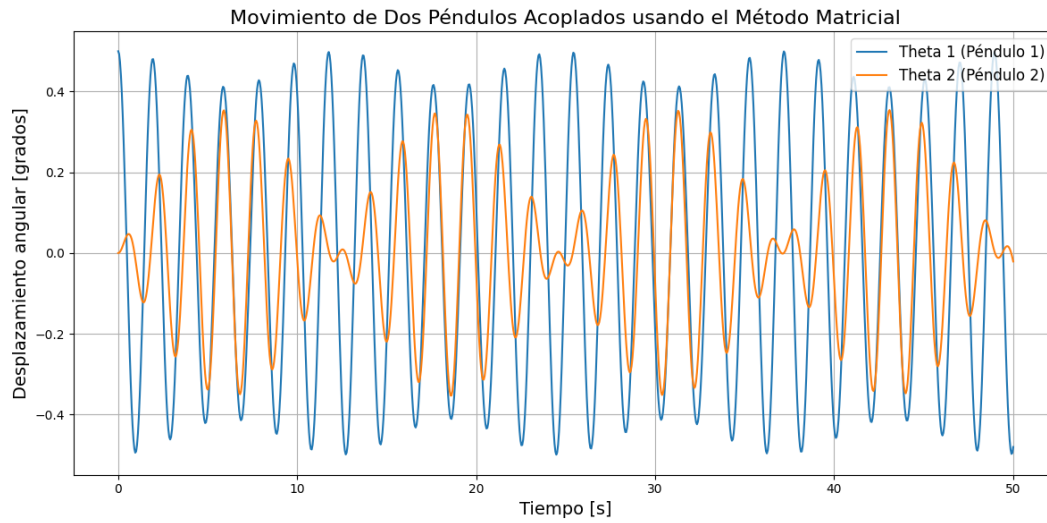


Figura 13: Movimiento de los péndulos acoplados con longitudes desiguales, $l_1 = 1,0[m]$ y $l_2 = 0,8[m]$, y masas iguales. El primer péndulo tiene un ángulo inicial de $\theta_1 = 0,5$ grados, mientras que el segundo comienza desde $\theta_2 = 0$.

Y ahora para el caso contrario.

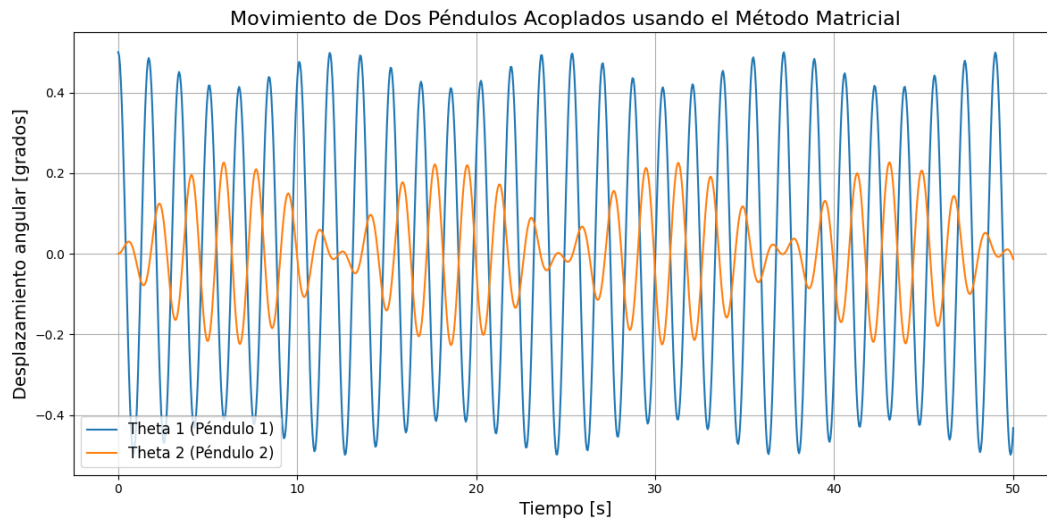


Figura 14: Movimiento de los péndulos acoplados con longitudes desiguales, donde $l_1 = 0,8[m]$ es menor que $l_2 = 1,0[m]$, y con masas iguales. El primer péndulo comienza con un ángulo inicial de $\theta_1 = 0,5$ grados, mientras que el segundo péndulo inicia desde $\theta_2 = 0$.

De manera similar a lo observado anteriormente, el comportamiento del sistema se debe a las mismas causas antes mencionadas.

Es decir que, tanto para pequeñas oscilaciones como para grandes oscilaciones, la física del sistema de péndulos acoplados se mantiene consistente. Los análisis realizados muestran que, independientemente de si el sistema está en el régimen de pequeñas o grandes oscilaciones, los patrones de movimiento observados y las relaciones entre las masas, longitudes de las varillas y ángulos iniciales siguen siendo las mismas. En ambos casos, el péndulo con mayor masa no alcanza la mayor amplitud de oscilación; en cambio, el péndulo con menor masa tiende a exhibir una mayor amplitud. Asimismo, la influencia de la longitud de las varillas y la constante de elasticidad del resorte en la dinámica del sistema sigue los mismos principios, mostrando una coherencia en la física subyacente del sistema acoplado. Esto refuerza la idea de que las características fundamentales del sistema permanecen inalteradas, independientemente del tipo de oscilación que se esté considerando.

Para el caso 4 se obtuvieron los siguientes resultados:

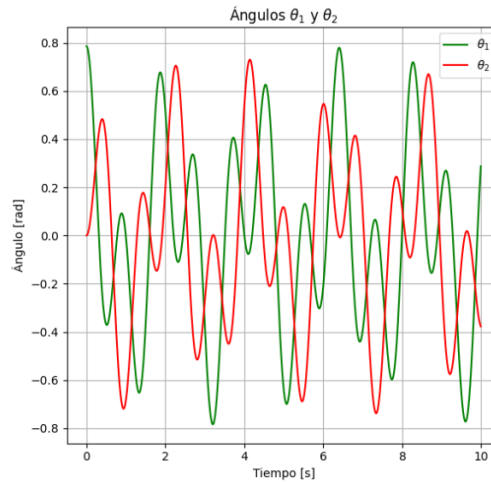


Figura 15: Comportamiento caótico en el sistema de péndulos acoplados.

Los ángulos θ_1 (en verde) y θ_2 (en rojo) muestran oscilaciones altamente irregulares. No hay un patrón claro o periódico, lo cual es un indicio de comportamiento caótico. Las condiciones utilizadas fueron la variación de la masa $m_2 = 1,1$, $m_1 = 1,0$, las variaciones de las longitudes $l_1 = 1,0$, $l_2 = 1,1$ y finalmente, como constante elástica se tomó $k = 20$ N/m. El ángulo que se mantuvo fue $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. Otro parámetro importante fue la variación de la velocidad angular. Dado que al tener estos valores iniciales diferentes, los péndulos pueden desincronizarse rápidamente, haciendo que el sistema se convierta en una trayectoria caótica.

La energía cinética y potencial se transfieren entre los dos péndulos a través del resorte, y la velocidad angular inicial afecta cómo se distribuye esta energía y cómo se transfiere entre los péndulos. Si un péndulo tiene una velocidad angular mayor, puede transferir más energía al otro

péndulo, afectando el patrón de movimiento. Esta transferencia de energía, combinada con las diferencias en las condiciones iniciales, contribuye a la complejidad y el comportamiento caótico observado.

Se realizó también la gráfica con las mismas condiciones mencionadas del espacio de fases, ya que es una representación gráfica en la que se muestran las posibles trayectorias de un sistema donde cada eje corresponde a una variable del sistema. En este caso, un espacio de fases son los ejes representados por los ángulos θ_1 , θ_2 y sus respectivas velocidades angulares ω_1 , ω_2 .

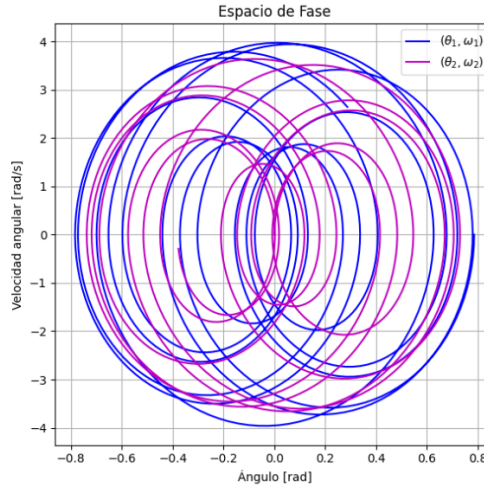


Figura 16: Espacio de fase del comportamiento caótico en el sistema de péndulos acoplados.

Se observa que las trayectorias llenan el espacio de fases de manera compleja. Lo que se analiza es que a medida que el sistema evoluciona, su estado no regresa exactamente a una condición previa, por lo que será difícil predecir de forma exacta la trayectoria de los péndulos. Por lo tanto se observa nuevamente el movimiento caótico al hacer las variaciones y teniendo en cuenta la influencia de la velocidad angular y la constante elástica.

En el caso 5 podemos analizar el comportamiento de su señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma. Aquí vemos 3 gráficas, la primera es el movimiento de los péndulos acoplados, la segunda es el espectro de potencias de fourier y el tercero es el espectrograma.

Se conoce que cada péndulo tiene su propia frecuencia natural de oscilación, determinada por su longitud y la aceleración. Ahora como la presencia del resorte acoplado introduce una interacción que afecta el movimiento de ambos péndulos, esta interacción hace que la energía se transfiera entre ambos péndulos, lo que resulta en movimientos oscilatorios sincronizados, desincronizados o caóticos como anteriormente se hizo.

En la gráfica del Espectro de Potencia de Fourier (gráfica 2, figura 17), se observa cómo se distribuyen las frecuencias presentes en la señal a lo largo del tiempo. En este sistema, destacan dos picos en

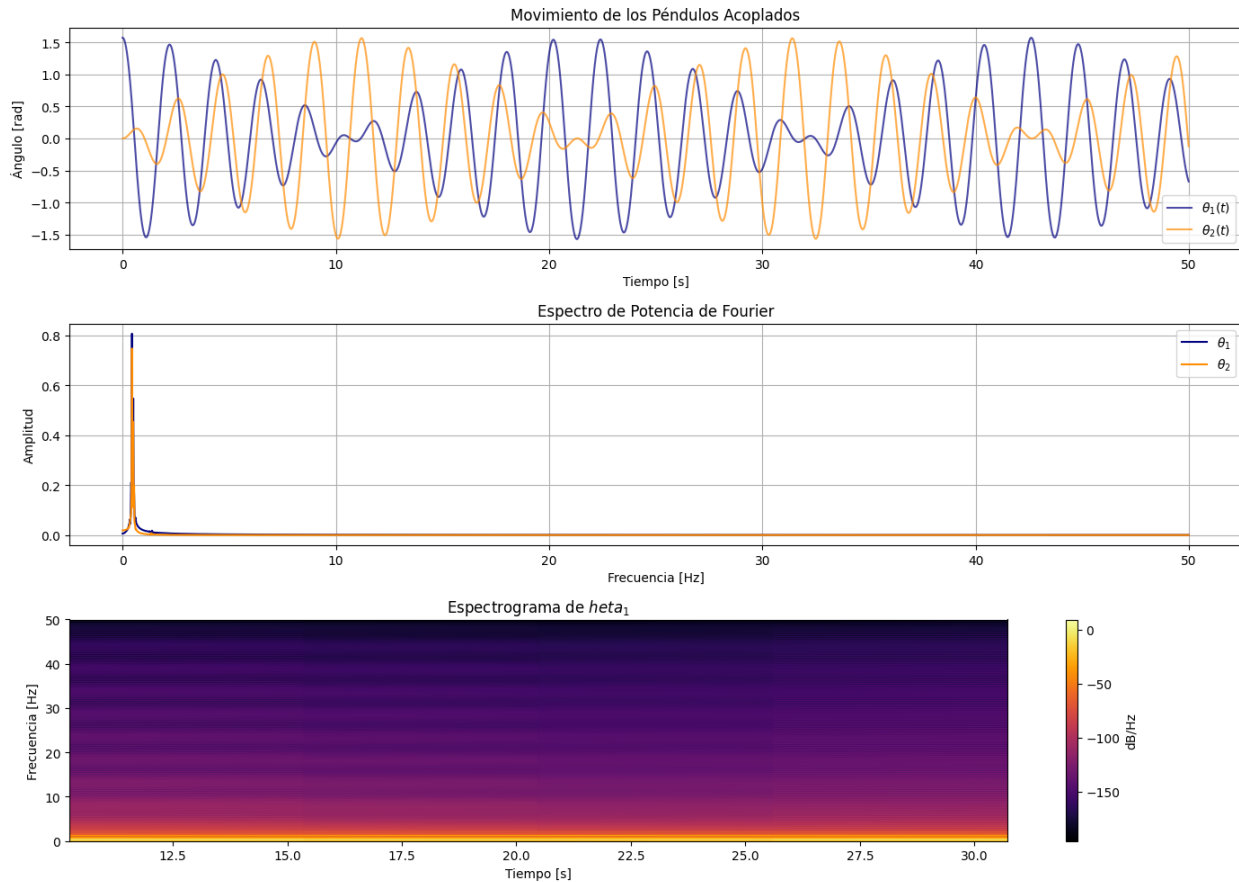


Figura 17: espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma.

el espectro, que corresponden a frecuencias específicas. Estos picos no solo indican las frecuencias naturales de los péndulos, sino que también pueden representar combinaciones o múltiplos de estas frecuencias, resultado de la interacción y acoplamiento entre los péndulos. La altura de estos picos indican la intensidad de la señal en esas frecuencias, es decir, cuanto más alto es un pico, mayor es la amplitud de la señal asociada a esa frecuencia, lo que sugiere que estas frecuencias dominan el comportamiento dinámico del sistema. Entonces el sistema exhibe oscilaciones más fuertes en estas frecuencias específicas.

El tercer gráfico es un espectrograma, muestra cómo cambian las características de la señal en el dominio del tiempo y frecuencia. Aquí, las áreas de mayor intensidad (rango de 0-50 dB/Hz) representan las frecuencias más dominantes en el sistema en un momento dado. En este sistema, las frecuencias dominantes corresponden a las frecuencias naturales de oscilación de los péndulos, así como a posibles modos acoplados, debido a la interacción a través del resorte. La persistencia de una frecuencia en la señal sugiere que esta es una característica fundamental del movimiento del

sistema, posiblemente relacionada con un modo de oscilación estable.

Además, se pueden observar cambios en las bandas de frecuencia a lo largo del tiempo, lo que indica transferencias de energía entre los péndulos.

4. Conclusiones y Recomendaciones

En conclusión, tanto para pequeñas oscilaciones como para grandes oscilaciones, la física del sistema de péndulos acoplados se mantiene consistente. Los análisis realizados muestran que, independientemente de si el sistema está en el régimen de pequeñas o grandes oscilaciones, los patrones de movimiento observados y las relaciones entre las masas, longitudes de las varillas y ángulos iniciales siguen siendo las mismas. En ambos casos, el péndulo con mayor masa no alcanza la mayor amplitud de oscilación; en cambio, el péndulo con menor masa tiende a exhibir una mayor amplitud. Asimismo, la influencia de la longitud de las varillas y la constante de elasticidad del resorte en la dinámica del sistema sigue los mismos principios, mostrando una coherencia en la física subyacente del sistema acoplado. Esto refuerza la idea de que las características fundamentales del sistema permanecen inalteradas, independientemente del tipo de oscilación que se esté considerando. Por otro lado el análisis del espectro de potencia de Fourier y del espectrograma nos permite comprender mejor el comportamiento dinámico de los péndulos acoplados. Finalmente, el comportamiento caótico se caracteriza por una alta sensibilidad a las condiciones iniciales donde se observó que al variar condiciones específicas como la velocidad angular y la constante elástica el sistema realizaba de forma casi inmediata trayectorias no predecibles.

5. Referencias

- [1] <https://colab.research.google.com/drive/1cqApzmc40qE8jKufeCzZTgQ3VsbHLUSN?usp=sharing>
- [2] Maianti, M., Pagliara, S., Galimberti, G., Parmigiani, F. (2009). Mechanics of two pendulums coupled by a stressed spring. *Am. J. Phys.*, 77(9), 834-838.
- [3] Guzev, M., Dmitriev, A. (2016). Stability analysis of two coupled oscillators. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 4(2), 139-152.
- [4] Baleanu, D., Jajarmi, A., Asad, J. H. (2019). Classical and fractional aspects of two coupled pendulums.
- [5] Kapitaniak, T., Czołczyński, K., Perlikowski, P., Stefański, A. (2012). Energy balance of two synchronized self-excited pendulums with different masses. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 50(3), 729-741.
- [6] Rojas, D. M. M. (2023). Simulación del Péndulo Doble como Herramienta para la Enseñanza del Caos. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 18(Especial), 376-386.