1. a. Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguridad de los atletas.

tabla

Calculamos el tiempo que demora en caer al agua.

$$\cancel{y}^{\,0} = \cancel{y_0}^{\,h} + \cancel{V_{0y}}^{\,0}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{9,8}}$$

$$t = 1,42 \text{ seg}$$

Ahora Calculamos la Vel a la que cae.

$$V_y = \cancel{V_{0y}}^{\,0} - gt$$

$$V_y = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow 14 \text{ m/s}$$

Tomamos el volumen de la persona, como el de una tabla.

Hallamos la Fuerza de empuje

$$F_E = \rho_{agua} \cdot V \cdot g$$

$$F_E = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot (0,24 m^3) \cdot 9,8 \, m/s^2$$

$$F_E = 2352 \, kg \cdot m/s^2$$

la Fuerza neta es:

$$F = W - F_E$$

$$F = (65 kg \cdot 9,8 \, m/s^2) - 2352 N$$

$$F = 637 N - 2352 N$$

$$F = -1715 N$$

$$a = \frac{-1715\ N}{65\,kg} = -26,38\ m/s^2$$

Cambiando mi sistema de referencia

$$y = \cancel{y_0}^{\,0} + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$y = 14\frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}(-26,38)t^2$$

derivamos

$$\cancel{y'}^{\,0} = 14\frac{m}{s} - 26,38\frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$t = \frac{14}{26,38}$$

$$t = 0,53\ seg.$$

Reemplazo:

$$y = 14 \cdot 0,53 + \frac{1}{2}(-26,38)(0,53)^2$$

$$y = 3,71\ m$$

Nos damos cuenta que la profundidad maxima, aprox. de la que llega el clavadista es de 3,71 m, podemos decir que la profundidad que tienen la piscina de clavados que son 5 metros, garantiza la seguridad de los atletas.

1. b. Suponga que un corcho esférico de 5 cm de diámetro está en el fondo de la fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

La fuerza de empuje que actúa sobre el corcho se define como:

$$F_e = \rho_{agua} \cdot V \cdot g$$

Fuerza (peso) corcho

$$F_g = m_{corc} \cdot g = \rho_c \cdot V \cdot g$$

La fuerza neta es:

$$F_n = F_e - F_g$$

densidad del corcho

$$F_n = (\rho_{agu} - \rho_c) \cdot V \cdot g$$

A partir de esto, podemos hallar la aceleración del corcho es:

$$a = \frac{F_n}{m_c} = \frac{(\rho_{agu} - \rho_c) \cdot \cancel{V} \cdot g}{\rho_c \cdot \cancel{V}} = \frac{(\rho_{agu} - \rho_c) \cdot g}{\rho_c}$$

Sustituyendo

$$a = \frac{(1000\ kg/m^3 - 240\ kg/m^3) \cdot 9,8\ m/s^2}{240\ kg/m^3}$$

$$a = \frac{760 \cdot 9,8}{240}\ m/s^2$$

$$a \approx 30,62\ m/s^2$$

La velocidad final al llegar a la superficie es:

$$V_F = \sqrt{2 \cdot a \cdot h}$$

Sustituyendo:

$$V_F = \sqrt{2 \cdot 30{,}62\, m/s^2 \cdot 5m}$$

$$V_F = \sqrt{306{,}2\, m/s}$$

$$V_F = 17{,}49\, m/s$$

1. a. Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superficie.

Primero hallamos la presión en el fondo de la fosa.

$$P_{fon} = P_{atm} + \rho g h$$

$h = 5\,m$
$g = 9{,}8\ m/s^2$
$P_{atm} = 101325\ Pa$
$\rho = 1000\ kg/m^3$

La presión en la superficie se calcula como:

$$P_{sup} = P_{atm}$$

Utilizamos la ecuación de Bernulli para la superficie y el fondo.

$$P_{fond} + \frac{1}{2}\rho V_{fondo}^2 + \rho g h = P_{sup} + \frac{1}{2}\rho V_{sup}^2$$

Se tiene en cuenta que la velocidad en el fondo es:

$$V_{fon} = 0$$

$$P_{fon} + \rho g h = P_{sup} + \frac{1}{2}\rho V_{sup}^2$$

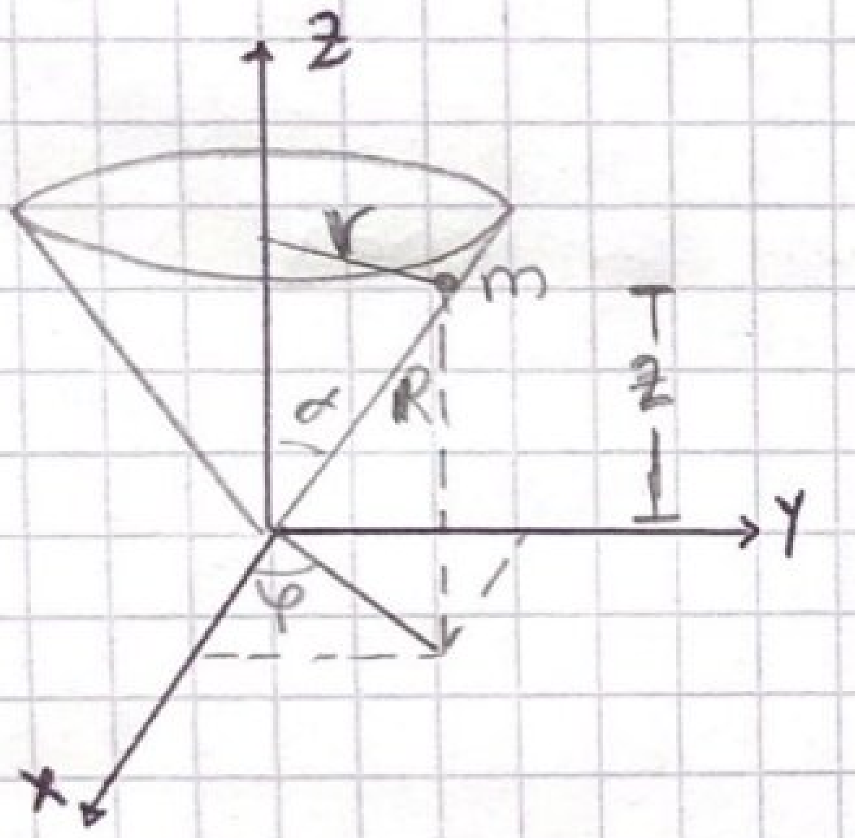
Despejamos V_{sup}

$$P_{atm} + \rho g h + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V_{sup}^2$$

$$V_{sup}^2 = 4gh \Rightarrow V_{sup} = 14\ m/s$$

2. Utilice los resultados de un articulo que describen el movimiento de una particula sobre una superficie sin fricción.

a) calcule la trayectoria que da la distancia mas corta entre 2 puntos sobre la superficie del cono invertido cuyo ángulo de vertice es α.



La distancia mas corta entre 2 puntos sobre la superficie conica se puede resolver utilizando las Ecuaciones de Euler-Lagrange.

1) Se usaran las coordenadas generalizadas

$$q_1 = \varphi \quad y \quad q_2 = r$$

y α, la apertura del cono que sera constante

La posicion de la particula esta dada por:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\,\text{sen}\,\varphi \quad , \quad z = r\cot\alpha$$

Las velocidades serian:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\,\text{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$$

Para construir el lagrangiano se necesita la energia potencial y cinética.

- E. cinética : $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \cot^2\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r\dot{\varphi}2\right)$$

• En potencial: $mgz = mgr\cot\alpha$

Por lo tanto, $\mathcal{L} = T - V$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$$

las ecuaciones de Lagrange, se escribira una por cada coordenada generalizada

Para φ: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

Pero $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

y $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 0}_{\text{significa que esto es una constante}} \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = cte$$

y esto se relaciona con la conservacion del momento angular, ya que las ec. de Euler Lagrange son relacionadas con las ec. de Newton, donde:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$F = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}, \quad y \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \vec{p}$$

lo que significa que el momento angular es constante, mas especificamente su componente z.

Para la coordenada r

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

donde $\Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg\cot\alpha$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$$

reemplazando $\Rightarrow \ddot{r}\csc^2\alpha - r\dot{\varphi}^2 + g\cot\alpha = 0$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\alpha + g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0$$

Conservación de la Energía

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\dot{r})^2 + \frac{r^2\dot{\varphi}^2 sen^2\alpha}{2} + rg\,sen\alpha\cos\alpha\right) = 0$$

Conservación de la energía: $\mathcal{E} = cte$

$$\frac{1}{2}(\dot{r})^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sen^2\alpha + rg\,sen\alpha\cos\alpha = E$$

Energía potencial efectiva

$$V(r) = \frac{r^2\dot{\varphi}^2 sen^2\alpha}{2} + rg\,sen\alpha\cos\alpha$$

$$\mathcal{E} = r^2\dot{\varphi}^2 sen^2\alpha + rg\,sen\alpha\cos\alpha$$

Para la trayecto partimos de la posición $r = r_1$ tal que $\frac{dr}{dt} = 0$ y $\varphi = 0$

Igual. $V(r_1) = V(r_2)$

$$\mathcal{E} = \frac{r_1^2 \dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2} + r_1 g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{r_2^2 \dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2} + r_2 g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$r_1^2 \dot\varphi^2$$

$$\boxed{r^2 \dot\varphi = cte} = K$$

$$\frac{K^2}{r^2} = r^4 \dot\varphi^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{K^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2r_1^2} + r_1 g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{K}{2r_2^2} \operatorname{sen}^2\alpha + r_2 g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{K^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2r_1^2} - \frac{K^2}{2r_2^2}\operatorname{sen}^2\alpha = r_2 g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - r_1 g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$= g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(r_2 - r_1)$$

$$K^2 \operatorname{sen}^2\alpha \left(\frac{1}{2r_1^2} - \frac{1}{2r_2^2}\right) = g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(r_2 - r_1)$$

$$K^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1^2 r_2^2} = g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(r_2 - r_1)$$

$$\boxed{K^2 = \frac{2g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(r_2 - r_1)\cdot(r_1^2 r_2^2)}{\operatorname{sen}^2\alpha \; r_2^2 - r_1^2}}$$

Si $m K^{2} \dot{\varphi} = \dfrac{2 g \cos\alpha \, (r_2 - r_1) \, r_1^2 r_2^2}{\operatorname{sen}\alpha \, (r_2^2 - r_1^2)}$

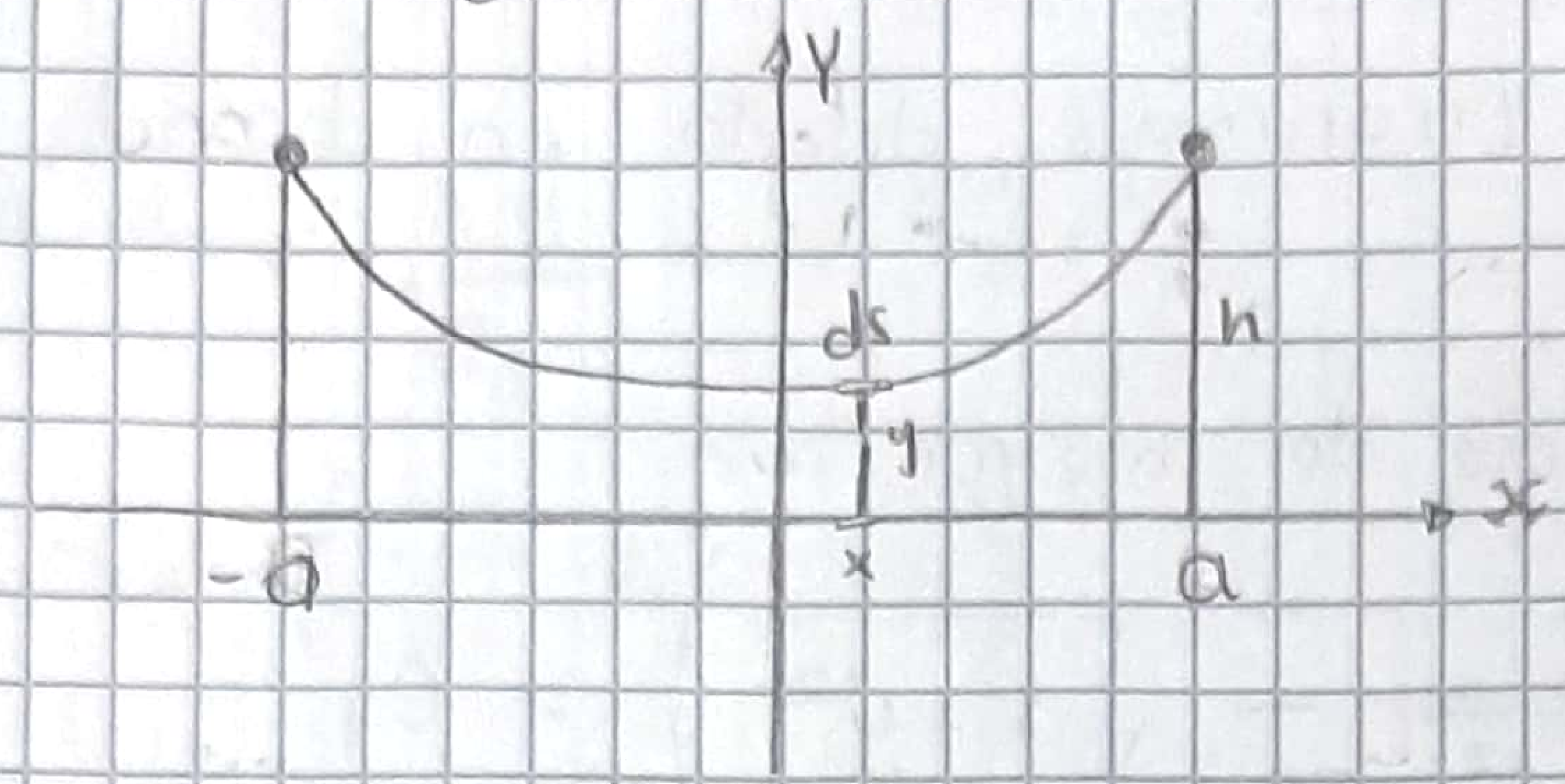
las ec. de movimiento son: $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha + g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 0$

$$m r^2 \dot{\varphi} = K$$

$$K^2 = r^4 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \frac{K^2}{r^3}$$

3. Los cables de los tendidos eléctricos tienen una forma de Catenaria. Muestre que esa forma minimiza su energía potencial.

Partimos definiendo la longitud del siguiente tendido eléctrico.



ds es un elemento diferencial de longitud del cable, que podemos expresarlo en función de dx y dy usando el teorema de Pitágoras.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

La longitud del cable es entonces:

$$L = \int_{-a}^{a} ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad ; \ L > 2a$$

Ahora, la Energía potencial, se obtiene integrando sobre toda la longitud del cable.

La E_p de una pequeña porción del cable de longitud ds es $dE_p = (\lambda\, ds)\, g y$, siendo λ la densidad lineal de masa del cable y "y" la altura del cable.

$$E_p = \int_{-a}^{a} (\lambda g\, ds)\, y = \lambda g \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

• La función $F(x, y, \dot{y})$ se forma con la E_p descrita, dependiendo de un parámetro κ.

$$F(x,y,\dot{y}) = \lambda g y \sqrt{1+\dot{y}^2} + \kappa \sqrt{1+\dot{y}^2}$$

Aplicamos Euler - Lagrange, donde no depende de x.

$$\dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - F = C_1$$

↳ cte de integración

Reemplazamos:

$$(\lambda g y + \kappa)\left(\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} - \sqrt{1+\dot{y}^2}\right) = C_1$$

Despejamos $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ de la ecu. E-L para obtener una Ec. cuadrática.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(\lambda g y + \kappa)^2}{C_1^2} - 1$$

Para Simplificar, $u = \frac{\lambda g y + \kappa}{C_1}$

$$du = \frac{\lambda g \cdot dy}{C_1}$$

↳ Ecua. diferencial Separable.

$$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{\lambda g}{C_1} dx$$

Integramos Ambos lados:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{\lambda g}{C_1}\int dx + C_2$$

Haciendo el cambio

$u = \cosh v$

$du = \operatorname{senh} v \cdot dv$

$$\int dv = \frac{\lambda g}{C_1} x + C_2$$

$$\cosh^{-1} u = \frac{\lambda g}{C_1} x + C_2$$

$$u = \cosh\left(\frac{\lambda g}{C_1} x + C_2\right)$$

$$y = -\frac{K}{\lambda g} + \frac{C_1}{\lambda g} \cosh\left(\frac{\lambda g}{C_1} x + C_2\right)$$

Para simplificar. $\sigma = \frac{\lambda g a}{C_1}$

$$y = \frac{-K}{\lambda g} + \frac{a}{\sigma} \cosh\left(\sigma \frac{x}{a} + C_2\right)$$

Se establece y aplican las condiciones de contorno iniciales del problema para determinar las ctes que aparecen en la solución.

Se definen en los puntos $x_1 = -a$

$x_2 = a$

Las posiciones y_1 y y_2 son iguales a h, que es la altura en los extremos de la catenaria.

Por simetría de la catenaria respecto al eje vertical en $x = 0$, la cte C_2 se establece como cero.

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{-a}^{a} \cosh\left(\frac{\lambda g}{C_1} x\right) dx$$

$$= \frac{2a}{\sigma} \operatorname{senh}(\sigma)$$

Resolvemos la ecuación para calcular σ

$$\frac{L}{2a} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{senh} \sigma$$

Conociendo que $x = a$
$y = h$

entonces

$$h = -\frac{k}{\lambda g} + \frac{a}{\sigma} \cosh(\sigma)$$

la ecuación de la catenaria queda como:

$$y = \frac{a}{\sigma} \left\{ \cosh\left(\sigma \frac{x}{a}\right) - \cosh(\sigma) \right\} + h$$