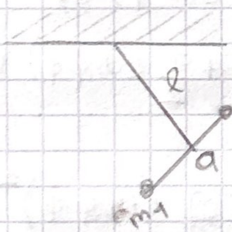
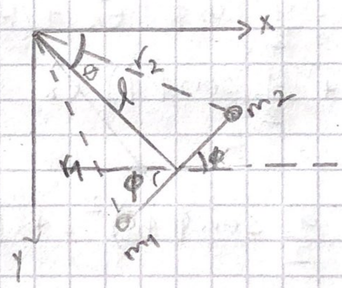
María Jose Perez - 2211380 y Julianny Andica - 2210703

1) Un péndulo compuesto esta formado por una varilla de masa despreciable y longuitud ℓ, con un extremo fijo y el otro conectado al punto medio de una segunda varilla sin masa de longuitud a, $(a < \ell)$ en cuyos extremos hay dos masas m_1 y m_2. las varillas pueden rotar sin fricción en un mismo plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema





=> hay 2 ligaduras

- longuitud de la segunda varilla:
- Longuitud de la primera varilla:

Por la ecuacion $S = 3N - K$ → Pero estamos en un espacio bidimensional

$S = 2N - K$

N → numero particulas y K → ligadura

$2(2) - 2 = 2$ → hay 2 grados de libertad

Tal que las coordenadas generalizadas son θ y ϕ

θ, ángulo de la varilla l con la horizontal
ϕ, ángulo que forma la varilla de longitud a con la horizontal

Las posiciones de las masas seran:

$m_1 \rightarrow x_1 = l\cos\theta - \frac{a}{2}\cos\phi \quad , \quad y_1 = l\,sen\theta + \frac{a}{2}\,sen\phi$

$m_2 \rightarrow x_2 = l\cos\theta + \frac{a}{2}\cos\phi \quad , \quad y_2 = l\,sen\theta - \frac{a}{2}\,sen\phi$

Para encontrar las ecuaciones de mov. primero se necesita $\mathcal{L} = T - V$, por lo tanto se necesita la energía cinetica y potencial

$$T = \frac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)^2$$

$$\vec{v_1} = \dot{r}_1 \, ; \, r_1 = (l\cos\theta - \frac{a}{2}\cos\phi)\,\hat{e_x} + (l\,sen\theta + \frac{a}{2}\,sen\phi)\,\hat{e_y}$$

$$\dot{r}_1 = (-l\,sen\theta\,\dot{\theta} + \frac{a}{2}\,sen\phi\,\dot{\phi})\,\hat{e_x} + (l\cos\theta\,\dot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\phi\,\dot{\phi})\,\hat{e_y}$$

$$(v_1)^2 = (-l\,sen\theta\,\dot{\theta} + \frac{a}{2}\,sen\phi\,\dot{\phi})^2 + (l\cos\theta\,\dot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\phi\,\dot{\phi})^2$$

$$= \left[(l\,sen\theta\,\dot{\theta})^2 - 2l\frac{a}{2}\,sen\theta\,\dot{\theta}\,sen\phi\,\dot{\phi} + (\frac{a}{2}\,sen\,\phi\,\dot{\phi})^2\right]$$

$$+ \left[(l\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + 2l\frac{a}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\phi\,\dot{\phi} + (\frac{a}{2}\cos\phi\,\dot{\phi})^2\right]$$

se pueden simplificar usando identidade trigonometricos
$sen\,\theta^2 + \cos\theta^2 = 1 \quad$ y $\quad sen\phi^2 + \cos\phi^2 = 1$

$$(v_1)^2 = l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\phi}^2$$

Para la segunda masa

$\vec{v_2} = \dot{r_2}$; $r_2 = -\left(l\cos\theta + \frac{a}{2}\cos\phi\right)\hat{e_x} + \left(l\,\text{sen}\,\theta - \frac{a}{2}\text{sen}\,\phi\right)\hat{e_y}$

$\dot{r_2} = \left(l\,\text{sen}\,\theta\dot{\theta} - \frac{a}{2}\,\text{sen}\,\phi\dot{\phi}\right)\hat{e_x} + \left(l\cos\theta\dot{\theta} - \frac{a}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)\hat{e_y}$

$(v_2)^2 = \left(l\,\text{sen}\,\theta\dot{\theta} + \frac{a}{2}\text{sen}\,\phi\dot{\phi}\right)^2 + \left(l\cos\theta\dot{\theta} - \frac{a}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)^2 \hat{e_y}$

$= \left[(l\,\text{sen}\,\theta\dot{\theta})^2 + 2l\frac{a}{2}\text{sen}\,\phi\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\dot{\theta} + \left(\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\phi\dot{\phi}\right)^2\right]$

$+ \left[(l\cos\theta\dot{\theta})^2 - 2l\frac{a}{2}\cos\theta\dot{\theta}\cos\phi\dot{\phi} + \left(\frac{a}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)^2\right]$

$= l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\phi}^2$

$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2$

$T = \frac{1}{2}m_1\left(l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\phi}^2\right)$

$\Rightarrow \quad V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$

$V = m_1 g\left(l\,\text{sen}\,\theta + \frac{a}{2}\text{sen}\,\phi\right) + m_2 g\left(l\,\text{sen}\,\theta - \frac{a}{2}\,\text{sen}\,\phi\right)$

Construyendo el lagrangiano:

$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m_1\left(l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\phi}^2\right)$

$- m_1 g\left(l\,\text{sen}\,\theta + \frac{a}{2}\,\text{sen}\,\phi\right) - m_2 g\left(l\,\text{sen}\,\theta - \frac{a}{2}\,\text{sen}\,\phi\right)$

Entonces tenemos 2 ecuaciones de Euler-lagrange, una para cada coordenada generalizada:

=> Para θ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m_1 g l \cos\theta - m_2 g l \cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_1 l^2 \dot{\theta} + m_2 l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_1 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l^2 \ddot{\theta}$$

$$l^2 \ddot{\theta} (m_1 + m_2) - g l \cos\theta (m_1 + m_2) = 0$$

-> Para ϕ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m_1 g \frac{a}{2} \cos\phi + m_2 g \frac{a}{2} \cos\phi$$

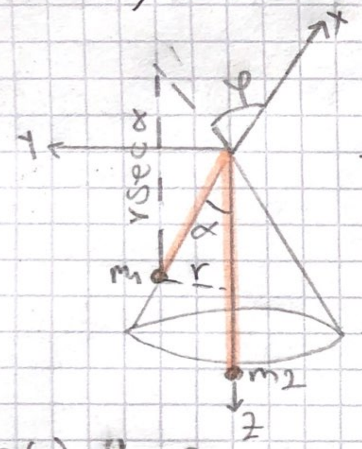
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_1 \frac{a^2}{4} \dot{\alpha} + m_2 \frac{a^2}{4} \dot{\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = m_1 \frac{a^2}{4} \ddot{\alpha} + m_2 \frac{a^2}{4} \ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} \frac{a^2}{4} (m_1 + m_2) - g \frac{a}{2} \cos\phi (m_2 - m_1) = 0$$

2) Dos masas, m_1 y m_2, estan conectadas por una cuerda de longutud ℓ a traves de un agujero en el vértice de un cono vertical con ángulo de vertice α. La masa m_1 se mueve sobre la superficie interior del cono y m_2 cuelga verticalmente. Desprecie la fricción.

a) Determine las ecuaciones de movimiento del sistema



ligaduras:

- m_2 se mueve por z
- m_1 se mueve sobre la superficie conica
- la longutud de la cuerda que une las dos masas
- Abertura cono

$3(2)-4=2$ $\Rightarrow$ Hay 2 coordenadas generalizadas r, y φ

$x_1 = r\cos\varphi$

$y_1 = r\operatorname{sen}\varphi$

$z_1 = r\cot\alpha$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{masa 1}}$

$x_2=0$

$y_2=0$

$z_2=h$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{masa 2}}$

ligadura:

$|r_1|+|r_2|=\ell$

$|x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}| + |z\hat{z}| = \ell$

$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{z_2^2}=\ell$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cot^2\alpha} + h = \ell$$

$$r\sqrt{1+\cot^2\alpha} + h = \ell$$

$$h = \ell - r\csc\alpha$$

$\Rightarrow$ Si derivamos respecto al tiempo

$$\dot{r}(1+\cot^2\alpha)^{1/2} + \dot{h} = 0$$

$$\dot{r}^2\csc^2\alpha + \dot{h}^2 = 0$$

$$\dot{h}^2 = -\dot{r}^2\csc^2\alpha$$

Para encontrar el lagrangiano, calculamos las velocidades

Para m_1:

$\vec{v_1} = \dot{r}_1$; $r_1 = r\cos\varphi\,\hat{e_x} + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{e_y} + r\cot\alpha\,\hat{e}_z$

$\dot{r}_1 = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\hat{e_x} + (\dot{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)\hat{e_y} + \dot{r}\cot\alpha\,\hat{e}_z$

Para m_2:

$\vec{v_2} = \dot{r}_2$, $r_2 = h\,\hat{e_2}$

$\dot{r}_2 = \dot{h}\,\hat{e_2}$

$\Rightarrow$ El lagrangiano seria:

$v_1^2 = (\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2)$

$v_2^2 = \dot{h}^2 \Rightarrow -\dot{r}^2\csc^2\alpha$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2\csc^2\alpha - m_1 g r\cot\alpha$$
$$- m_2 g(\ell - r\csc\alpha)$$

$\Rightarrow$ Las ecuaciones de Euler-Lagrange serian:

$\Rightarrow$ Para φ : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$

$\varphi \rightarrow$ es una coordenada ciclica $\rightarrow$ entonces $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$

Por lo que:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right)}_{cte} = 0 \Rightarrow m_1 r^2\dot{\varphi} = cte = C_1$$

$\Rightarrow$ Para r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m_1 r \dot{\varphi}^2 - m_1 g \cot\alpha + m_2 g \csc\alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m_1 \dot{r} \csc^2\alpha - m_2 \dot{r} \csc^2\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = m_1 \ddot{r} \csc^2\alpha - m_2 \ddot{r} \csc^2\alpha$$

$$\ddot{r}\csc^2\alpha\,(m_1 - m_2) - m_1 r \dot{\varphi}^2 + m_1 g \cot\alpha - m_2 g \csc\alpha = 0$$

b) Calcule el radio de equilibrio de m_1.

Tomando la Ec. de Euler-Lagrange para r. en equilibrio significa que $\dot{r}$, y $\ddot{r} = 0$, quedando

$$-m_1 r \dot{\varphi}^2 + m_1 g \cot\alpha - m_2 g \csc\alpha = 0$$

De la ecuacion de Euler-Lagrange para φ, podemos despejar $\dot{\varphi}$

$$\frac{-C_1^2}{m_1 r^3} + m_1 g \cot\alpha - m_2 g \csc\alpha = 0 \quad \Rightarrow \text{Despejamos } r$$

$$\frac{-C_1^2}{m_1 r^3} = m_2 g \csc\alpha - m_1 g \cot\alpha$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{-C_1^2}{m_1 m_2 g \csc\alpha - m_1^2 g \cot\alpha}}$$