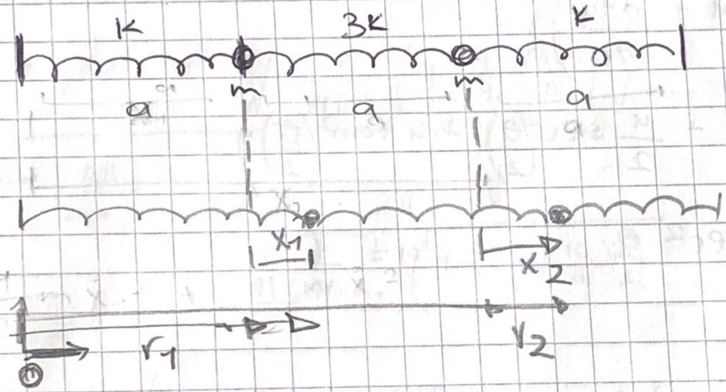
Jurianny Andica / Maria Jose Perez

① Considere un sistema conformado 2 particulas de masa m unidas por 3 resortes, dos de cte elastico k y otro 3K. Calcule las frecuencias y las configuraciones de la correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones del sistema.



Las posiciones

$$r_1 = a + x_1 \Rightarrow \dot{r}_1 = \dot{x}_1$$

$$r_2 = 2a + x_2 \Rightarrow \dot{r}_2 = \dot{x}_2$$

Entonces la energia cinetica es:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \Rightarrow \text{De forma matricial}$$

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

* $\eta_{1,2}$ son las derivadas de la posicion de equilibrio

$$T = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La energia potencial:

$$V = \frac{1}{2}k(r_1-a)^2 + \frac{1}{2}3k(r_2-r_1-a)^2 + \frac{1}{2}k(r_2-2a)^2$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{3}{2}k(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[4x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2\right]$$

De forma matricial

$$V = k\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Frecuencia del modo normal

$$|V - \omega^2 T| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4k-\omega^2 m & -3k \\ -3k & 4k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (4k-\omega^2 m)^2 - 9k^2 = 0$$

$$(7k - m\omega^2)(k - m\omega^2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$7k - m\omega^2 = 0 \longrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

$$k - m\omega^2 = 0 \longrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para las coordenada normales

$$(V - \omega^2 T)\,a = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4k-\omega_j^2 m & -3k \\ -3k & 4k-\omega_j^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix} = 0$$

Para $j=1$, $\rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$ – remplazando $\omega_1^2 = \frac{7k}{m}$

$$\begin{pmatrix} 4k-\frac{7k}{m}m & -3k \\ -3k & 4k-\frac{7k}{m}m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3k & -3k \\ -3k & -3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow a_{11} + a_{21} = 0$$

$$\boxed{a_{11} = -a_{21}} \quad a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

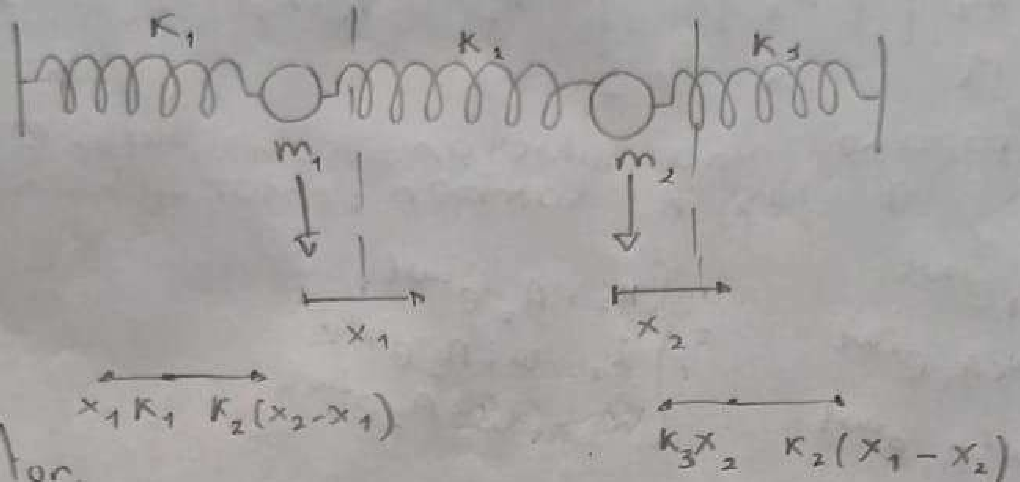
Para $j=2$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{pmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{a_{12} = a_{22}} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

lo que indica que ambas masas se desplazan la misma cantidad pero a dirección opuesta, para ω_1, por lo que el resulta...

2. Para un sistema como muestra en la figura (dos masas iguales y todos los resortes iguales). Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones transversales.



Por Newton

$$\Sigma F_{x_1} = K_2 x_2 - K_2 x_1 - x_1 K_1 = m_1 \ddot{x}_1 = x_1(-K_1-K_2) + x_2 \cdot K_2$$

$$\Sigma F_2 = K_2 x_1 - K_2 x_2 - K_3 x_2 = m_2 \ddot{x}_2 = x_1(K_2) + x_2 \cdot (-K_2-K_3)$$

Por lagrange

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2$$

$$u = \frac{K_1}{2} \cdot x_1^2 + \frac{K_2}{2} \cdot (x_2-x_1)^2 + \frac{K_3}{2} x_2^2$$

$$L = T - u$$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{K_1}{2} \cdot x_1^2 - \frac{K_2}{2} \cdot (x_2-x_1)^2 - \frac{K_3}{2} x_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right] - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = x_1 \cdot (-)(K_1+K_2) + x_2(K_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = x_1(K_2) + x_2 \cdot (-K_2-K_3)$$

Como se tienen 2 E.D de segundo orden se plantea un sistema matricial.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{x}} = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}_{K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

Se propone una solución: como las m son iguales y las k también, entonces:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ \dot{x}_1 = \omega i A_1 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = A_2 e^{i\omega t} \\ \dot{x}_2 = \omega i A_2 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

Simplificando.

$$m\ddot{x}_1 + (2k)x_1 + (-k)x_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + (-k)x_1 + (2k)x_2 = 0$$

Reemplazo.

$$-m \cdot \omega^2 A_1 \cancel{e^{i\omega t}} + 2k \cdot A_1 \cancel{e^{i\omega t}} + -k(A_2)\cancel{e^{i\omega t}} = 0$$
$$-m \cdot \omega^2 A_2 \cancel{e^{i\omega t}} + (-k)A_1 \cancel{e^{i\omega t}} + (2k)A_2 \cancel{e^{i\omega t}} = 0$$

$$= \begin{cases} A_1 \cdot (2k - m\omega^2) + A_2(-k) = 0 \\ A_1(-k) + A_2(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (2k-m\omega^2) & (-k) \\ (-k) & (2k-m\omega^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener una s/n no trivial es si:

$$\det\left(\begin{bmatrix} (2k-m\omega^2) & (-k) \\ (-k) & (2k-m\omega^2) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 2km\omega^2 - 2km\omega^2 + m^2(\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$m^2(\omega^2)^2 - 4km(\omega^2) + 3k^2 = 0$$

Por cuadrática: se obtienen las frecuencias.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{4km \pm 2km}{2m^2} \rightarrow \omega_1^2 = 3\frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = \pm\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2^2 = 1\frac{k}{m} \rightarrow \omega_2 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para

$\omega_1 = \sqrt{3}\sqrt{k/m}$

$$\rightarrow A_1 \cdot \left(2k - \cancel{m}\, 3\frac{k}{\cancel{m}}\right) - kA_2 = 0$$

$$-kA_1 = kA_2$$

$$A_1 = -A_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\rightarrow A_1 \cdot \left(2k - m\frac{k}{m}\right) - kA_2 = 0$$

$$kA_1 - kA_2 = 0$$

$$A_1 = A_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega_2 t}$$

③ Calcule las frecuencia y configuraciones de las correspondiente modos normales para pequeñas oscilaciones

De forma similar como se ha llevado la otras ejercicios

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \rightarrow T = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la energía potencial

$$V = \frac{1}{2} k \eta_1^2 + \frac{1}{2} k (\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2} k \eta_2^2 + \frac{q^2}{|x_1 - x_2|}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(2k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \eta_1^2 - 2\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \eta_1 \eta_2 + \left(2k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \eta_2^2 \right\}$$

Expandiendo

$$V = \begin{pmatrix} 2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) & -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \\ -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) & 2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |V - \omega^2 T| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) - \omega^2 m & -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \\ -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) & 2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$= \left(2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) - \omega^2 m\right)^2 - \left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + \frac{q^2}{a^3}}{m}}$$

$$\omega_2 = \pm\sqrt{\frac{3k + \frac{4q^2}{a^3}}{m}}$$

y las configurac normal

$$(V - \omega^2 T)\,a = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) - \omega^2 m & -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \\ -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) & 2\left(k + \frac{q^2}{a^3}\right) - \omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix}$$

Para $j = 1$

$$\begin{pmatrix} k + \frac{q^2}{a^3} & -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) \\ -\left(k + \frac{2q^2}{a^3}\right) & k + \frac{q^2}{a^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$