

Segunda asignación

Jurianny Andica Corredor
María José Pérez
Juan Camilo Murcia
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

25 de Octubre del 2024

Índice

1. Introducción	1
2. Metodología	2
2.1. Caso 1: Ecuaciones clásicas de trayectoria	2
2.1.1. Ecuaciones de Movimiento con Potencial de Coulomb	2
2.1.2. Ecuaciones de Movimiento con Potencial de Yukawa	4
2.2. Caso 2: Ángulo de dispersión	5
3. Experimento y Resultados	7
3.1. Caso 2: Ángulo de dispersión	7
4. Conclusiones y Recomendaciones	11
Referencias	11

1. Introducción

El histórico experimento de Rutherford marcó un antes y un después en la historia de la ciencia. Al bombardear una lámina de oro con partículas alfa, Rutherford observó que aunque la mayoría de las partículas atravesaban la lámina sin dificultad habían algunas de estas partículas que se dispersaban, lo cual se producía por la interacción electrostática. A partir de este descubrimiento fue capaz sentar las bases de la física atómica: el átomo, hasta entonces concebido como una esfera uniforme que estaba compuesto en su mayor parte por espacio vacío, y al centro se encontraba un núcleo pequeño y denso.

La idea de Rutherford a lo largo de los años se ha perfeccionado para incluir fenómenos más complejos, como el apantallamiento. Este concepto describe cómo los electrones que rodean al núcleo

actúan como una especie de escudo, disminuyendo la fuerza con que el núcleo atrae o repele a otras partículas. [10] Este apantallamiento es especialmente relevante en átomos grandes y complejos, como el oro, donde el alcance de la interacción nuclear se ve reducido por la presencia de múltiples capas electrónicas.

Para este trabajo se busca entender los efectos de este apantallamiento sobre la dispersión de protones al interactuar con núcleos de oro, utilizando el potencial de Coulomb apantallado también conocido como potencial de Yukawa, como modelo para representar esta interacción. A través de nuestro análisis, se expone cómo este apantallamiento modifica la fuerza de interacción entre las partículas y afecta la probabilidad de que una partícula sea desviada en un ángulo determinado, especialmente cuando las partículas tienen diferentes energías [11]. El objetivo es comprender cómo el parámetro de apantallamiento, influye en el alcance efectivo de la interacción y altera la sección transversal de dispersión: una medida de la probabilidad de dispersión que se ve directamente afectada por la energía de la partícula incidente.

2. Metodología

2.1. Caso 1: Ecuaciones clásicas de trayectoria

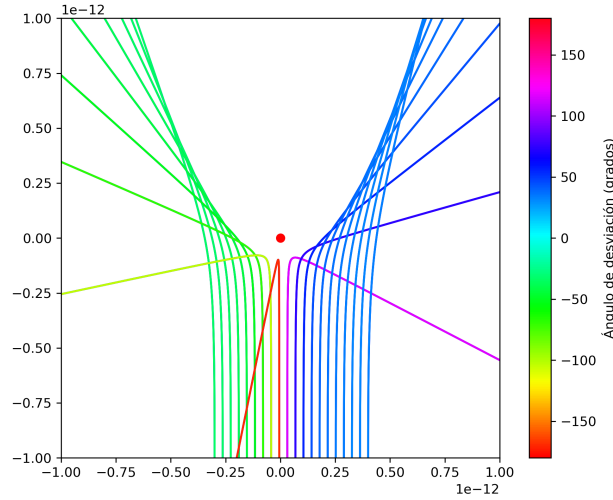


Figura 1: Simulación del movimiento de iones cerca de una fuente de campo

2.1.1. Ecuaciones de Movimiento con Potencial de Coulomb

Para este análisis, comenzamos por derivar las ecuaciones de movimiento utilizando el **potencial de Coulomb**. La energía cinética del sistema se describe mediante la siguiente expresión [2]:

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right), \quad (1)$$

donde \dot{r} representa la velocidad radial y $\dot{\theta}$ la velocidad angular. El potencial de Coulomb se define como:

$$V = \frac{k}{r}, \quad (2)$$

donde k es una constante que depende de las cargas involucradas. A partir de la energía cinética y potencial, el Lagrangiano L del sistema se establece como:

$$L = T - V = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}. \quad (3)$$

Utilizando las **ecuaciones de Euler-Lagrange**, [1] podemos derivar las ecuaciones de movimiento. Para la coordenada radial r , la ecuación de Euler-Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Calculamos $\frac{\partial L}{\partial r}$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2},$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}.$$

Al derivar con respecto al tiempo, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}.$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2}. \quad (5)$$

Ahora, consideremos el movimiento angular. La ecuación de Euler-Lagrange para θ se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (6)$$

Dado que el Lagrangiano no depende explícitamente de θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

y calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}.$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0,$$

lo que implica que:

$$mr^2 \dot{\theta} = \text{constante}. \quad (7)$$

2.1.2. Ecuaciones de Movimiento con Potencial de Yukawa

Ahora, procedemos a hallar las ecuaciones de movimiento utilizando el **potencial de Coulomb apantallado** (potencial de Yukawa). La energía cinética se mantiene igual:

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right). \quad (8)$$

El potencial se define como:

$$V = \frac{k}{r} e^{-\alpha r}. \quad (9)$$

El Lagrangiano para este caso es:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{k}{r} e^{-\alpha r}. \quad (10)$$

Y seguimos un proceso similar al anterior. Para la coordenada radial r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

Calculamos $\frac{\partial L}{\partial r}$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - k \left[\frac{-\alpha e^{-\alpha r}}{r} - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} \right],$$

simplificando obtenemos:

$$= m r \dot{\theta}^2 - \frac{k \alpha e^{-\alpha r}}{r} + \frac{k e^{-\alpha r}}{r^2},$$

y calculamos también $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}.$$

Derivando con respecto al tiempo, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}.$$

Al sustituir en la ecuación de Euler-Lagrange, llegamos a:

$$m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + k \left[\frac{e^{-\alpha r}}{r^2} + \frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r} \right]. \quad (12)$$

Respecto a la coordenada angular θ , la ecuación de Euler-Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (13)$$

Con $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}.$$

Derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0,$$

lo que nos lleva a:

$$mr^2\dot{\theta} = \text{constante.} \quad (14)$$

2.2. Caso 2: Ángulo de dispersión

Una partícula choca elásticamente con otra a través de un potencial esférico $U(r)$ donde r es la distancia entre las partículas. Como conocemos el ángulo de dispersión está dado por $\theta = \pi - 2\phi$, donde

$$\phi = \int_{r_0}^{\infty} \frac{b}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}}. \quad (15)$$

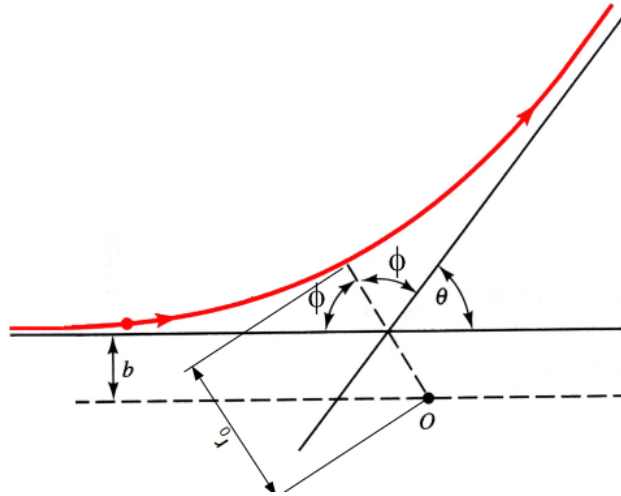


Figura 2: Trayectoria de una partícula moviéndose en un potencial central cerca del origen, r_0 es la distancia más cercana a la fuente en el recorrido del ion

Pero para evaluar la integral, que es doblemente impropia, ya que, el límite superior de la integral es infinito y en segundo lugar, el integrando diverge en la distancia más cercana, la podemos resolver si introducimos una variable $u = \frac{1}{r}$.

$$\phi = \int_0^{u_0} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 u^2 - \frac{U(1/u)}{E}}} du, \quad (16)$$

donde el límite superior de la integral es $u_0 = 1/r_0$. Podrías preocuparte por $U(1/u)$ cuando $u=0$. Normalmente, el potencial de interacción se anula cuando las dos partículas están separadas

por una distancia infinita. Por lo tanto, $\lim_{u \rightarrow 0} U(1/u) = 0$. No parece haber dificultad en relación con la primera impropiedad.

La segunda impropiedad es un poco más complicada y necesitamos resolverla caso por caso. Para encontrar el ángulo de dispersión para el potencial de Yukawa, que está dado por:

$$U(r) = \frac{k}{r} e^{-r\alpha},$$

donde k y α son constantes que indican la intensidad y el alcance de la interacción, respectivamente. El ángulo de dispersión para este potencial está dado por la siguiente integral:

$$\phi_Y = \int_0^{u_0} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 u^2 - \frac{u k e^{-\alpha/u}}{E}}} du. \quad (17)$$

Para eliminar la singularidad, debemos encontrar una integral resoluble analíticamente que tenga la misma singularidad que en la Ecuación (17). Si recordamos el caso de dispersión de Rutherford, $U_c(r) = \frac{C}{r}$, donde C es una constante a determinar. El ángulo de dispersión para el potencial de Coulomb está dado por una integral similar:

$$\phi_C = \int_0^{u_0} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 u^2 - \frac{C u}{E}}} du. \quad (18)$$

Y resulta que esta integral se puede realizar analíticamente y la solución es:

$$\phi_C = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{C}{2bE} \right).$$

Ahora necesitamos que las dos integrales de las Ecs. (17) y (18) tengan la misma singularidad, es decir

$$1 - b^2 u_0^2 - \frac{u_0 k e^{-\alpha/u_0}}{E} = 1 - b^2 u_0^2 - \frac{C u_0}{E},$$

lo cual se satisface si $C = k e^{-1/u_0 \alpha}$. Y observamos que la intensidad del potencial de Coulomb es menor que la del potencial de Yukawa, de modo que ambos potenciales tienen el mismo punto de aproximación más cercano.

Finalmente, estamos listos para calcular el ángulo de dispersión para el potencial de Yukawa. Evaluamos numéricamente la parte no singular de la integral, que es la diferencia entre las dos dispersiones,

$$\Delta\phi = \phi_Y - \phi_C = \int_0^{u_0} \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 u^2 - \frac{u e^{-\alpha/u}}{E}}} - \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 u^2 - \frac{C u}{E}}} du.$$

Y añadiendo la solución de Rutherford, obtenemos:

$$\phi_Y = \Delta\phi + \phi_C.$$

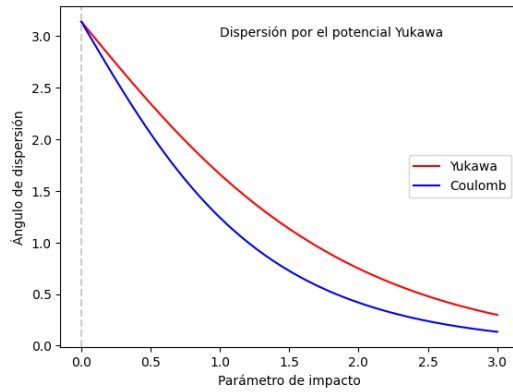
3. Experimento y Resultados

3.1. Caso 2: Ángulo de dispersión

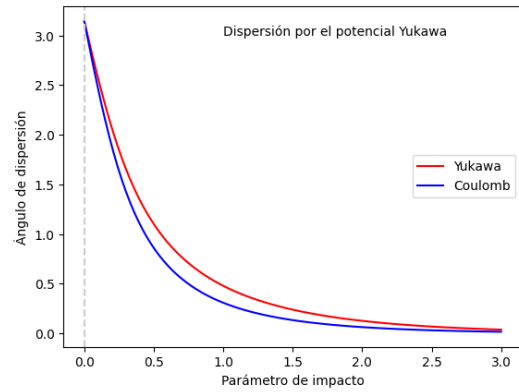
Para analizar la variación del ángulo de dispersión en función de distintos valores de energía, parámetros de impacto y de apantallamiento, se implementó un modelo en Python [3]. Este enfoque proporcionó una flexibilidad considerable en el ajuste de los parámetros, lo que facilitó la visualización y comprensión de cómo influyen estas variables en el comportamiento del sistema.

En primer lugar, se presenta un caso en el que se modifica exclusivamente la energía del sistema, manteniendo constante el parámetro de apantallamiento en $\alpha = 1$. Este análisis fue fundamental para entender cómo la energía de colisión afecta el ángulo de dispersión.

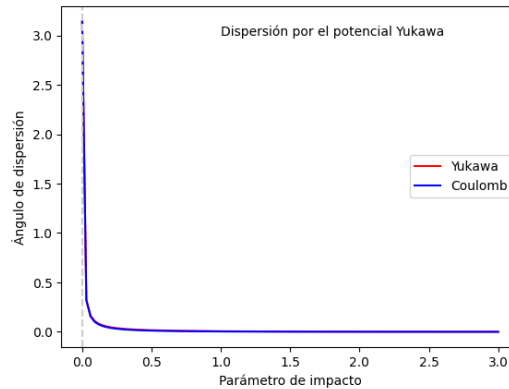
A continuación, se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de energía E . Las gráficas ilustran cómo el ángulo de dispersión varía conforme se ajusta la energía, destacando las diferencias notables entre los casos analizados.



(a) Caso con $E = 0,1$



(b) Caso con $E = 1$



(c) Caso con $E = 100$

Figura 3: Variación del ángulo de dispersión para diferentes valores de energía, manteniendo $\alpha = 1$ constante. Se grafica la variación del ángulo respecto al parámetro de impacto b .

Al observar la comparación entre el potencial de Yukawa y el potencial de Coulomb, se destacan diferencias notables según el valor de la energía. Cuando la energía es baja, las curvas que representan ambos potenciales no son tan cercanas, lo que se evidencia en una caída más suave del potencial de Yukawa en comparación con el potencial de Coulomb. En este rango energético, la curva logarítmica correspondiente no es tan pronunciada y tiende a una ligera curvatura. Esto sugiere que, en condiciones de baja energía, el comportamiento de las interacciones en el sistema es menos afectado por el apantallamiento del potencial de Yukawa.

Por otro lado, al incrementar la energía, ambas curvas comienzan a converger, casi pareciendo una sola. Este acercamiento indica que, en situaciones de alta energía, las diferencias entre ambos potenciales se minimizan, sugiriendo que las interacciones se comportan de manera similar en este régimen. Además, la curva logarítmica se vuelve más pronunciada, lo que señala un aumento en la influencia del potencial a medida que se incrementa la energía.

La observación de que las curvas se acercan a medida que aumenta la energía puede interpretarse como una indicación de que, en condiciones energéticas elevadas, las interacciones entre las partículas son menos sensibles a los efectos del apantallamiento del potencial de Yukawa. El hecho de que la curva logarítmica se vuelva más pronunciada en altas energías puede indicar que la naturaleza de las interacciones se intensifica y que los efectos de la distancia comienzan a jugar un papel más crucial en la dinámica del sistema.

En un segundo análisis, se mantiene la energía en $E = 1$ y se permite que el parámetro de apantallamiento α varíe. Esta evaluación es esencial para determinar cómo cambios en α influyen en el ángulo de dispersión en función del parámetro de impacto b .

Al analizar el comportamiento del sistema manteniendo constante la energía y variando el parámetro de apantallamiento α , se observa que, para valores de α pequeños, las curvas correspondientes al potencial de Yukawa y al potencial de Coulomb son prácticamente idénticas. Esto sugiere que, cuando α es bajo, el efecto de apantallamiento del potencial de Yukawa es mínimo, por lo que su comportamiento se aproxima al del potencial de Coulomb, que no presenta apantallamiento. En términos físicos, un α pequeño indica que el alcance efectivo del potencial es amplio, permitiendo que la interacción entre partículas se asemeje a una interacción puramente coulombiana, sin la atenuación adicional del potencial de Yukawa.

A medida que se incrementa α , las curvas comienzan a diferenciarse, lo que refleja un cambio en la interacción de apantallamiento. Con un α mayor, el potencial de Yukawa decae más rápidamente con la distancia, mientras que el potencial de Coulomb permanece más fuerte a mayores distancias. Este comportamiento se debe a que el potencial de Yukawa incluye un término exponencial que introduce un factor de decaimiento adicional, haciendo que la fuerza de interacción disminuya más rápidamente. Así, un valor alto de α acorta el rango efectivo de la interacción, mostrando que las partículas en el sistema experimentan una fuerza menos intensa a medida que se alejan entre sí.

Además de los casos analizados, se llevó a cabo un análisis más exhaustivo en el que ambos parámetros fueron modificados simultáneamente, donde se examinaron extremos de cada parámetro.

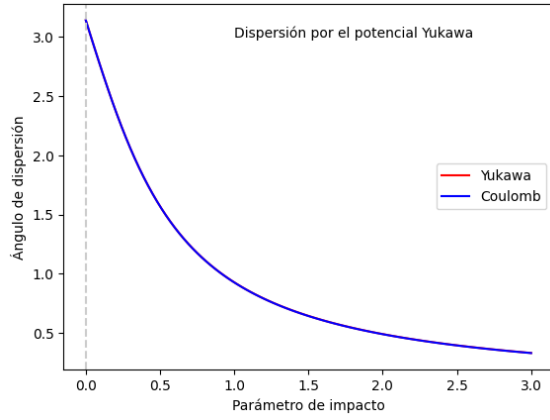
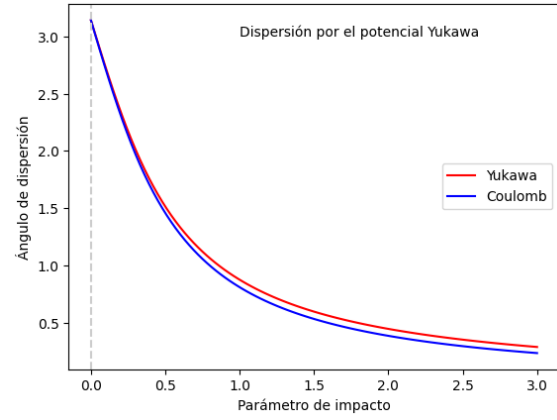
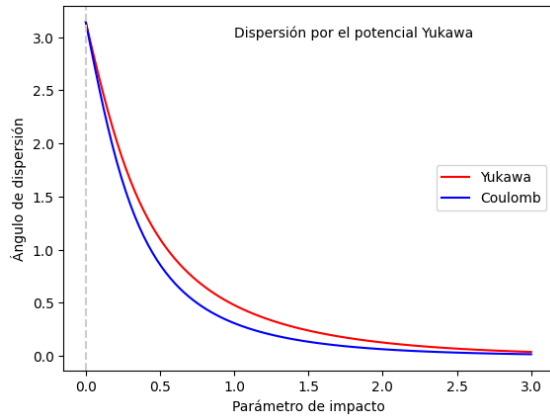
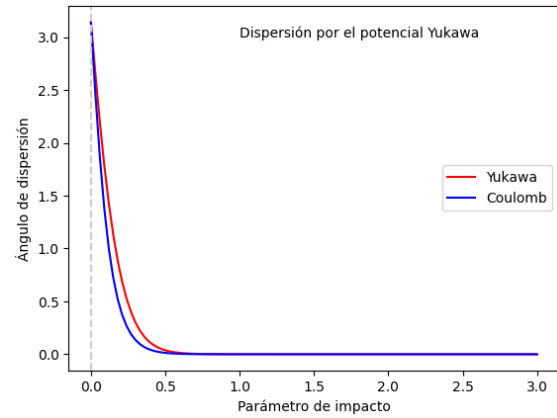
(a) Caso con $\alpha = 0,001$ (b) Caso con $\alpha = 0,1$ (c) Caso con $\alpha = 1$ (d) Caso con $\alpha = 10$

Figura 4: Variación del ángulo de dispersión al modificar el valor de α y manteniendo constante E . Se grafica la variación del ángulo respecto al parámetro de impacto b .

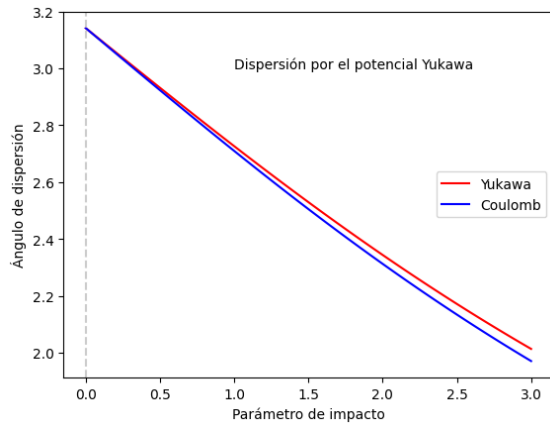
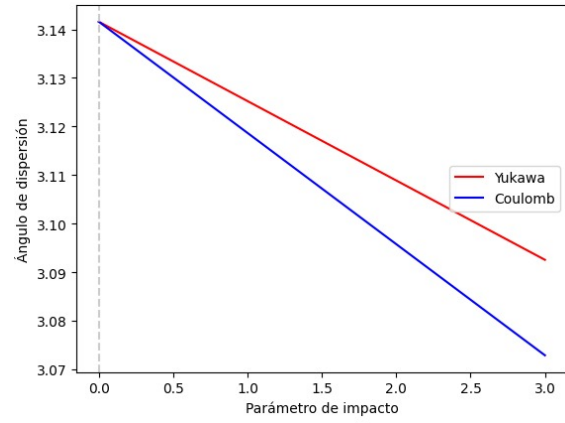
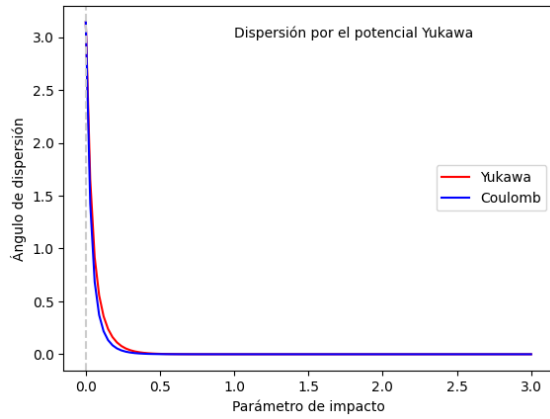
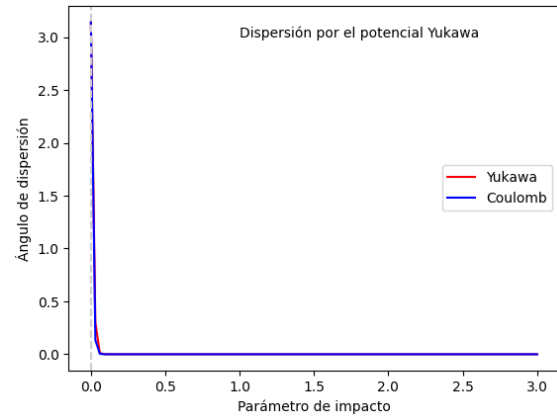
(a) Caso con $\alpha = 100$ y $E = 0,1$ (b) Caso con $\alpha = 100$ y $E = 0,001$ (c) Caso con $\alpha = 0,1$ y $E = 10$ (d) Caso con $\alpha = 0,01$ y $E = 10$

Figura 5: Variación del ángulo de dispersión al modificar simultáneamente α y E . Las gráficas ilustran el cambio del ángulo de dispersión en función del parámetro de impacto b para diversas combinaciones de estos parámetros.

Al combinar la variación de ambos parámetros, energía y apantallamiento α , se observa una clara dependencia entre ellos en el comportamiento de los potenciales. Para valores bajos de ambos parámetros, las curvas del potencial de Coulomb y el de Yukawa son casi idénticas, ya que el apantallamiento es leve y la interacción permanece de largo alcance. Sin embargo, al incrementar α mientras la energía sigue baja, el apantallamiento se intensifica, causando que el potencial de Yukawa decaiga rápidamente y difiera considerablemente del potencial de Coulomb, que mantiene su fuerza a mayor distancia. Por otro lado, cuando la energía es alta y α pequeño, las curvas vuelven a coincidir, mostrando una interacción similar en ambos potenciales.

4. Conclusiones y Recomendaciones

1. Al desarrollar las ecuaciones de movimiento nos dimos cuenta que en el caso apantallado este parámetro hacía que la interacción fuera más débil en zonas donde el potencial de Coulomb tenía más incidencia, de tal suerte que se puede considerar un término de amortiguamiento que reduce el alcance del potencial.
2. El ángulo de dispersión de los dos potenciales se ve afectado por la magnitud de 3 parámetros:
 - **Parámetro de impacto b** : inversamente proporcional con más incidencia en el potencial de Yukawa (como se esperaba).
 - **Energía del sistema E** : inversamente proporcional, pero en este caso el comportamiento de cada uno de los potenciales es similar simplemente que desfasado por el factor de apantallamiento.(como se esperaba).
 - **parámetro de apantallamiento α** : Su comportamiento es directamente proporcional con una cota superior, es decir que a medida que α aumenta el ángulo de dispersión también lo hace pero no sube indefinidamente.

Referencias

- [1] Douglas Cline. *Variational principles in classical mechanics*. en. Ago. de 2017.
- [2] Mario Cosenza. *Mecánica Clásica*. es. 2016.
- [3] Ryoichi Kawai. 5.4.4. *Scattering by the Yukawa potential — Computational Methods for Physics with Python*. en. https://kawaihome.link/jbooks/comp-phys/integral/scattering_angle.html.