PÉNDULOS ACOPLADOS

Realizado por:
María José Pérez
Jurianny Andica

CASO 1:

MASAS Y LONGITUDES IGUALES

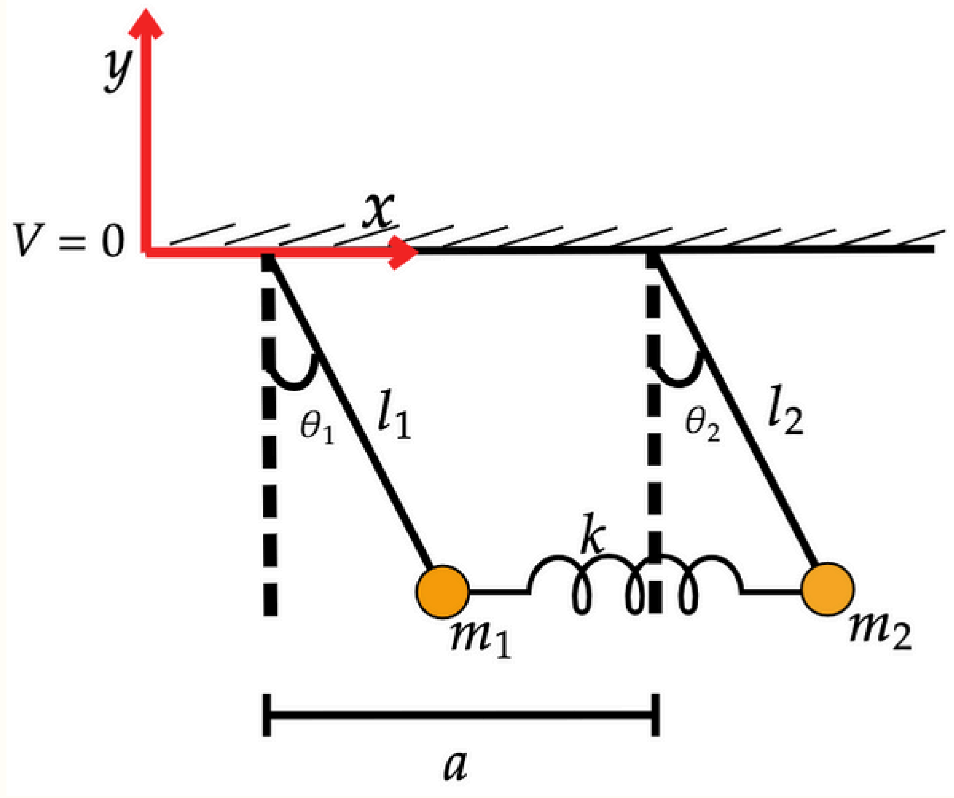


Figura 1: Esquema de dos péndulos acoplados mediante un resorte.

Coordenadas:

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1, \quad y_1 = l_1 \cos\theta_1,$$

$$x_2 = a + l_2 \sin\theta_2, \quad y_2 = l_2 \cos\theta_2.$$

El lagrangiano general:

$$L = \tfrac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1 g l_1 cos(\theta_1) + m_2 g l_2 cos(\theta_2) - \tfrac{1}{2}k\left(l_1^2 + l_2^2\right) + k\ l_1 l_2\ cos(\theta_2 - \theta_1).$$

El lagrangiano del caso 1:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - \frac{1}{2}kl^2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 - \frac{1}{2}kl^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2.$$

Las ecuaciones de movimiento para cada coordenada generalizada:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\sin\theta_1 + \frac{k}{m}\sin(\theta_2 - \theta_1). \qquad \text{y} \qquad \ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\sin\theta_2 - \frac{k}{m}\sin(\theta_2 - \theta_1).$$

CASO 2:

MASAS Y LONGITUDES DIFERENTES

El lagrangiano general:

$$L \ = \ \tfrac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \ \tfrac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1gl_1cos(\theta_1) + m_2gl_2cos(\theta_2) - \tfrac{1}{2}k\left(l_1^2 + l_2^2\right) + k\ l_1l_2\ cos(\theta_2 - \theta_1).$$

Las ecuaciones de movimiento para cada coordenada generalizada:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1}\sin\theta_1 + \frac{k}{m_1}\frac{l_2}{l_1}\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

y

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2}\sin\theta_2 - \frac{k}{m_2}\frac{l_1}{l_2}\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

CASO 3:

RESORTE ATADO A MEDIA ALTURA DE LAS VARILLAS

El lagrangiano general:

$$L \ = \ \tfrac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \ \tfrac{1}{2}m_2(l_2\dot{\theta}_2)^2 + m_1gl_1cos(\theta_1) + m_2gl_2cos(\theta_2)$$

$$-\tfrac{1}{2}kr^2(sin(\theta_1) - sen(\theta_2))^2 - \tfrac{1}{2}kr^2(cos(\theta_2) - cos(\theta_1))^2.$$

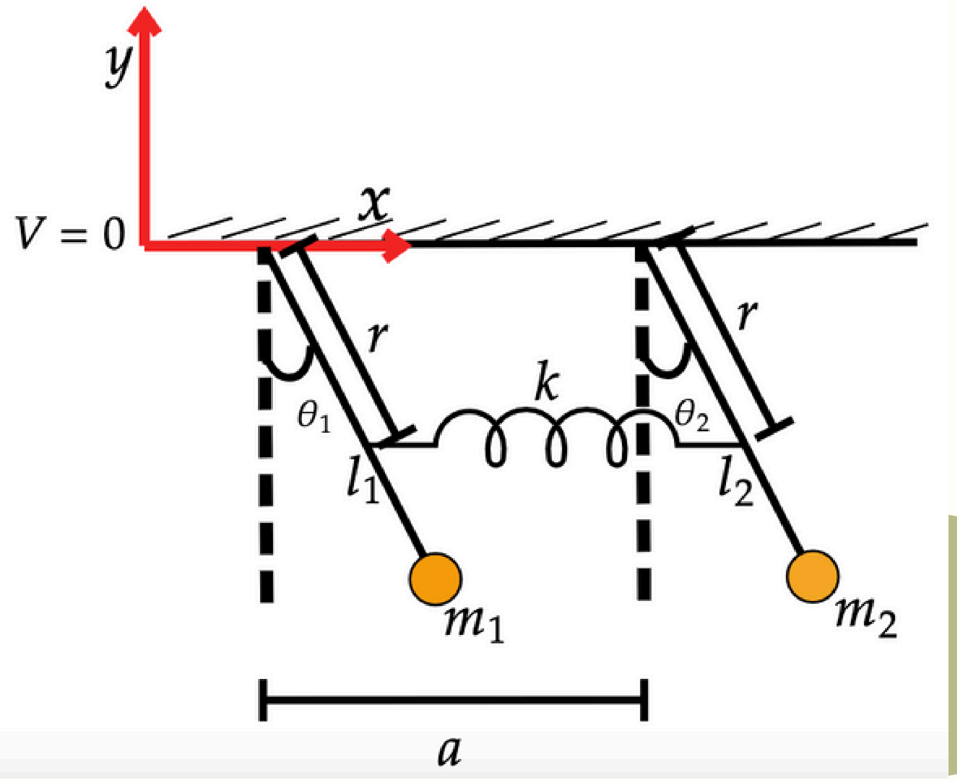


Figura 2: Esquema de dos péndulos acoplados mediante un resorte fijado a una altura r.

SOLUCIÓN CASO 1 Y 2

Para resolver las ecuaciones diferenciales que surgen, se implementó un código en Python que emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para integrar estas ecuaciones.

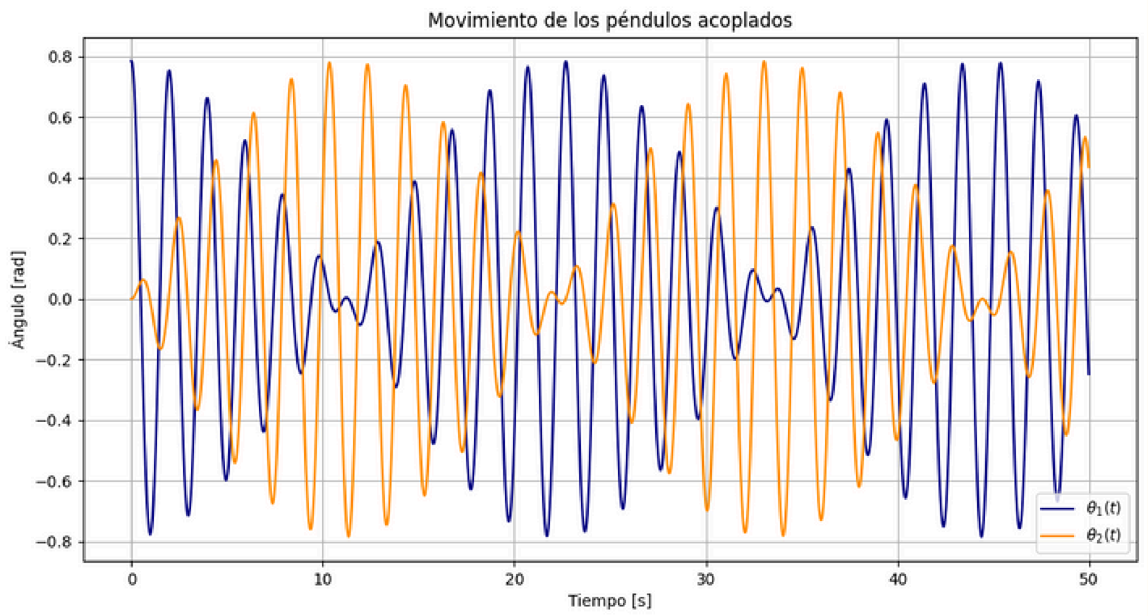


Figura 3: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = π/4 , y el segundo péndulo con θ2 = 0. Con masas y longitudes iguales.

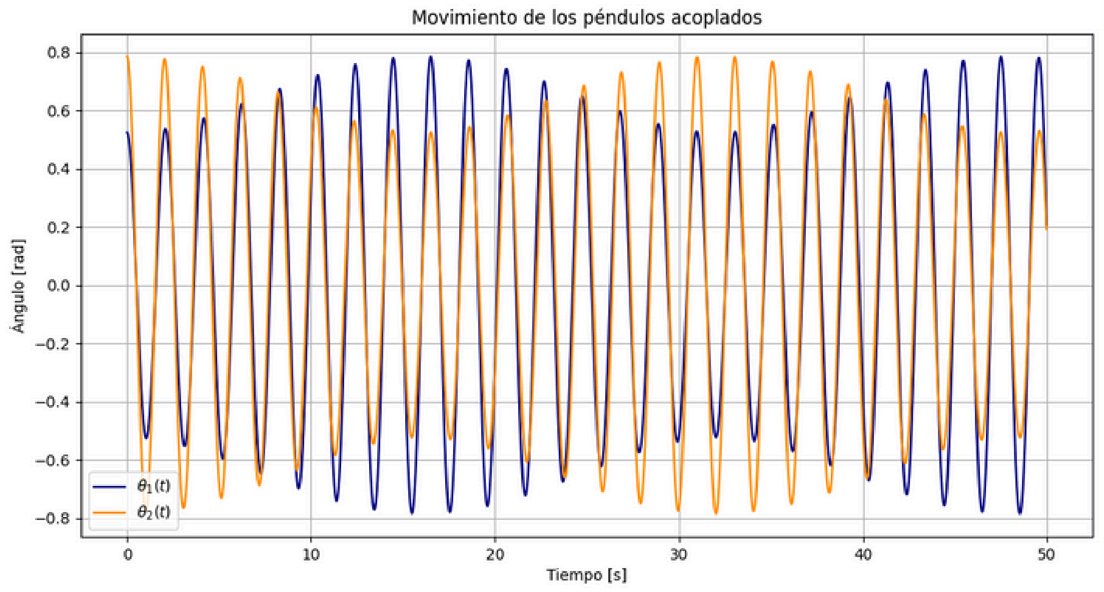


Figura 4: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = π/6 , y el segundo péndulo con θ2 = π/4. Con masas y longitudes iguales.

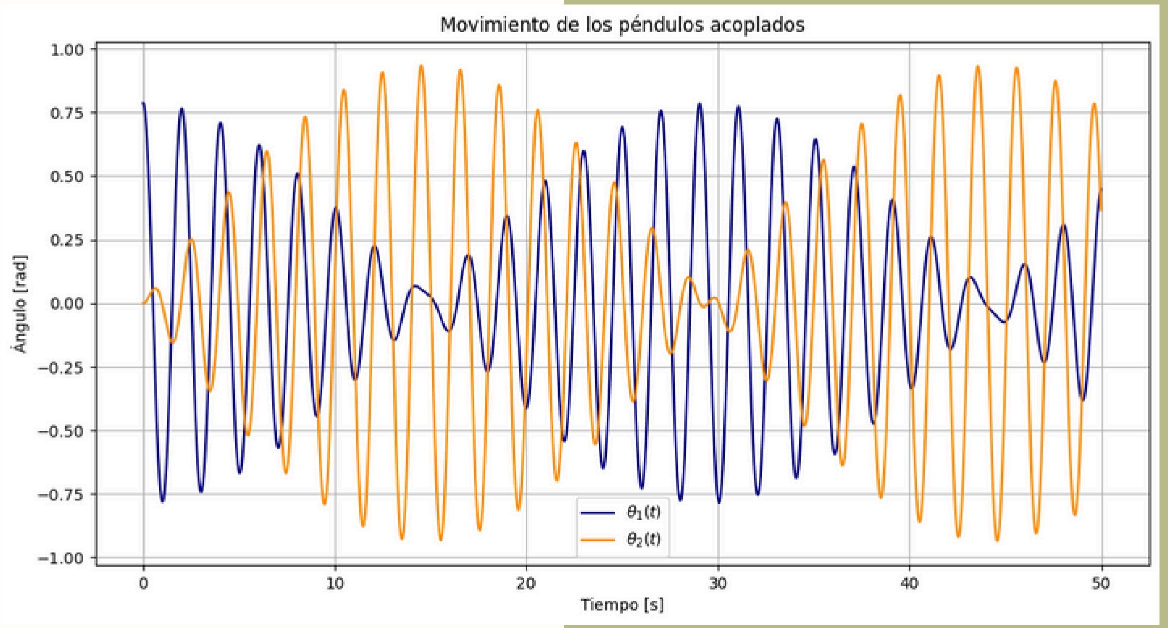


Figura 5: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = π/4 , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con m1 = 1,7[kg] y m2 = 1,2[kg] y longitudes iguales.

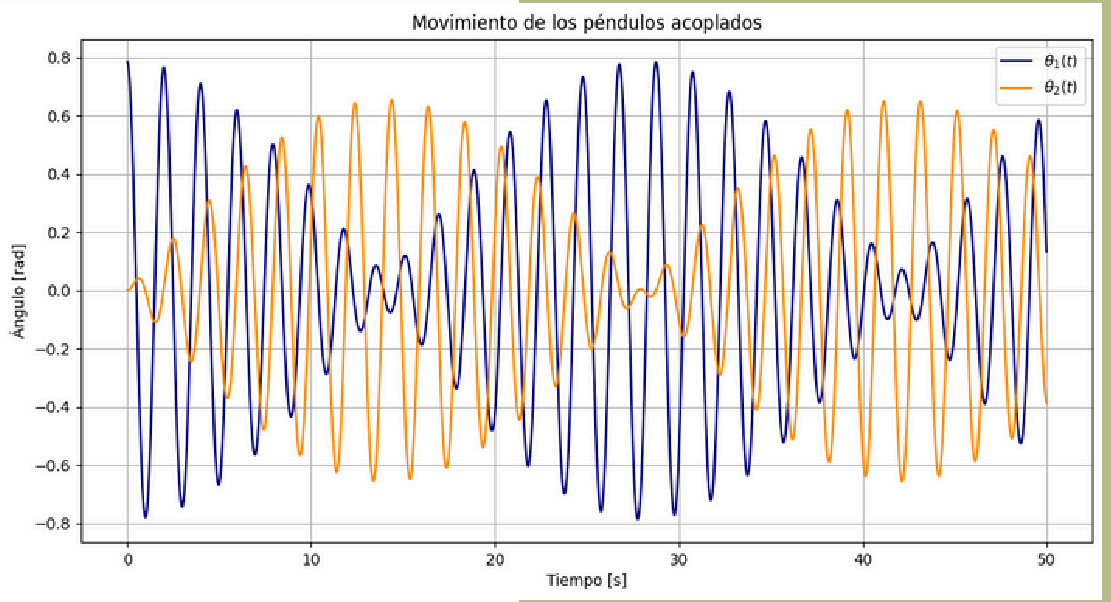


Figura 6: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = π/4 , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con m1 = 1,2[kg] y m2 = 1,7[kg] y longitudes iguales.

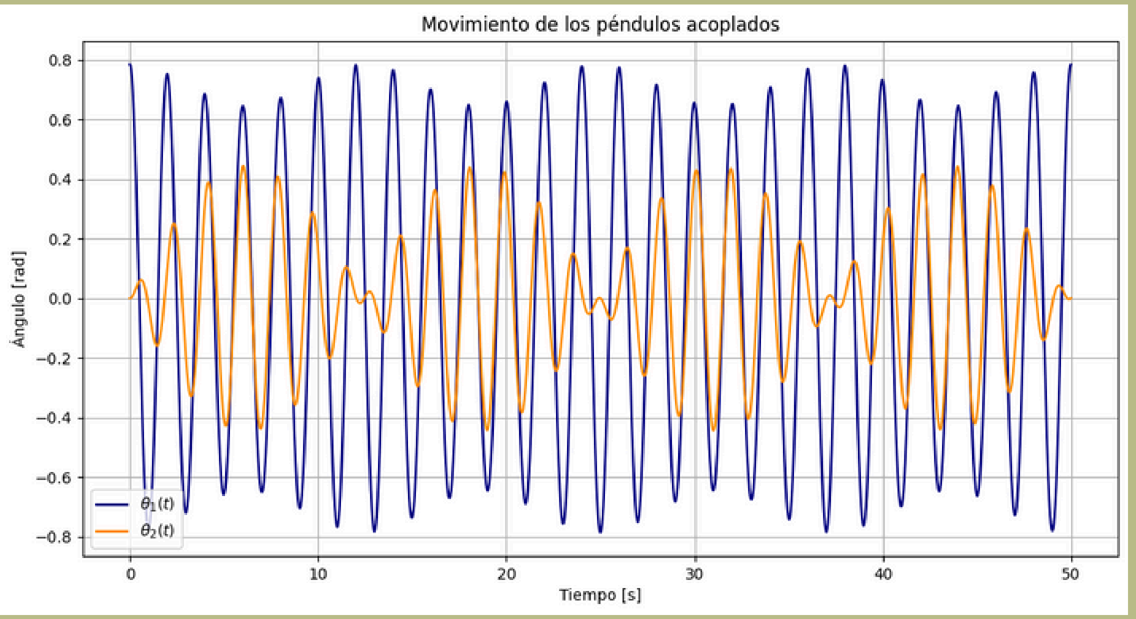


Figura 7: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = π/4 , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con l1 = 1,0[m] y l2 = 0,8[m] y masas iguales.

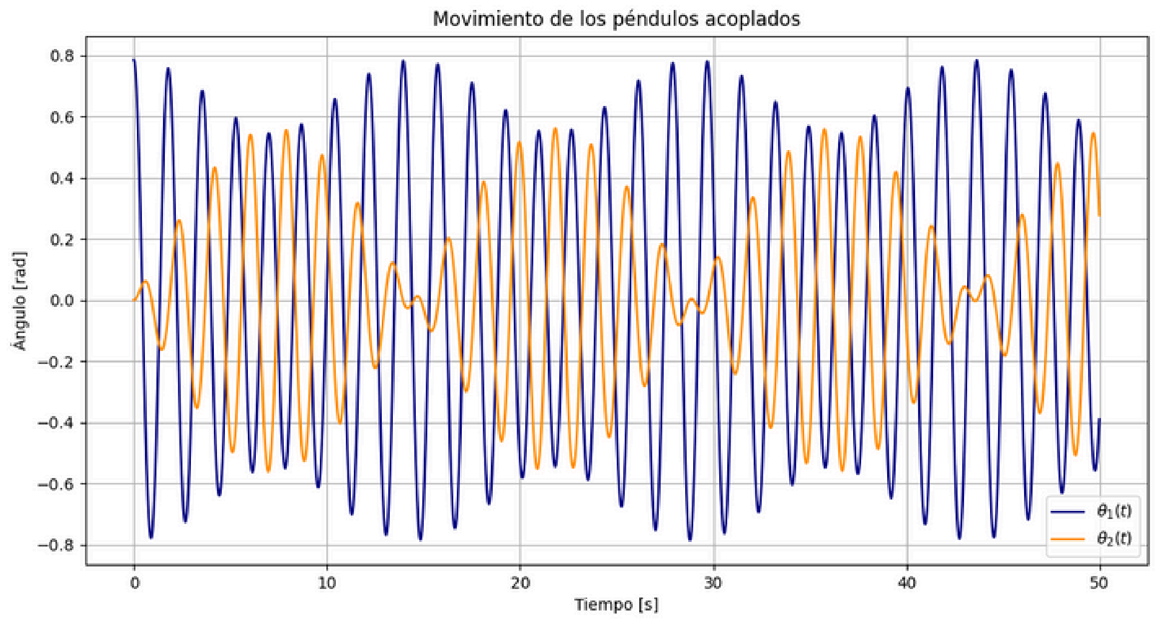


Figura 8: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = π/4 , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con l1 = 0,8[m] y l2 = 1,0[m] y masas iguales.

CASO 4:

PEQUEÑAS OSCILACIONES

Las ecuaciones de movimiento para cada coordenada generalizada:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l_1}\theta_1 + \frac{k}{m_1}\frac{l_2}{l_1}(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l_2}\theta_2 - \frac{k}{m_2}\frac{l_1}{l_2}(\theta_2 - \theta_1).$$

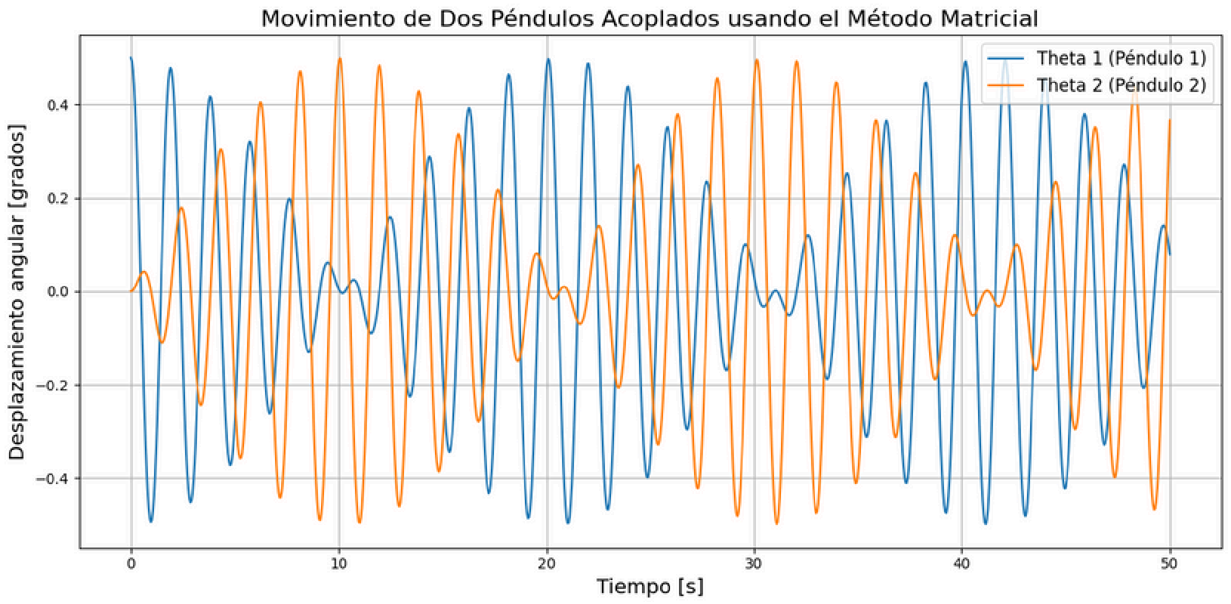


Figura 9: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = 0,5[grados] , y el segundo péndulo con θ2 = 0. Con masas y longitudes iguales.

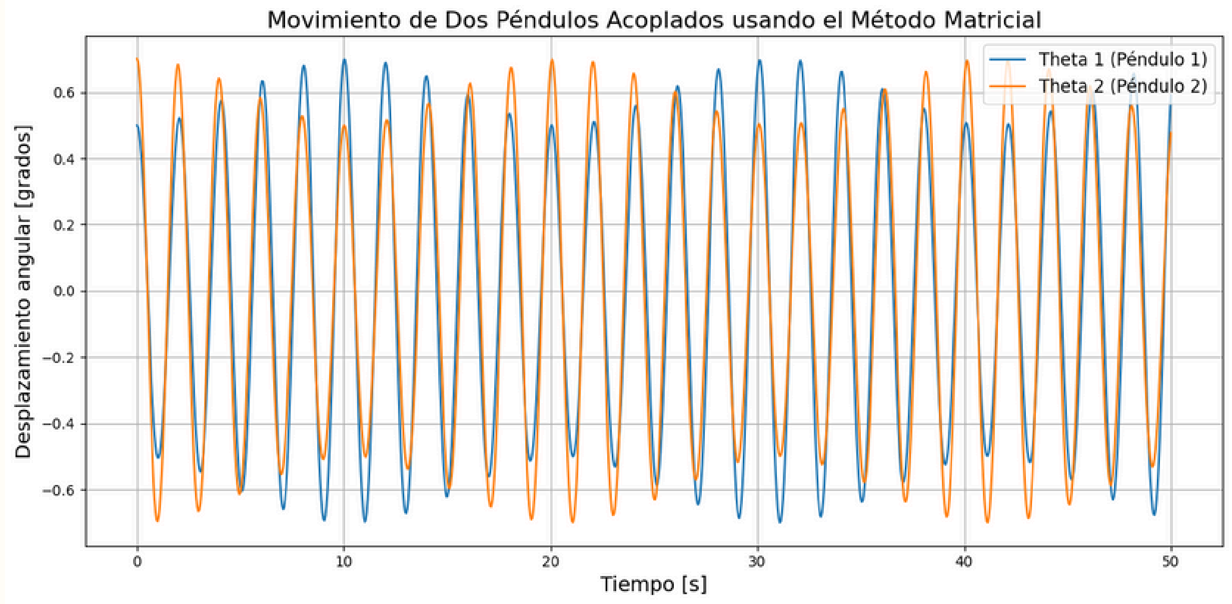


Figura 10: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = 0,5[grados] , y el segundo péndulo con θ2 = 0,7[grados]. Con masas y longitudes iguales.

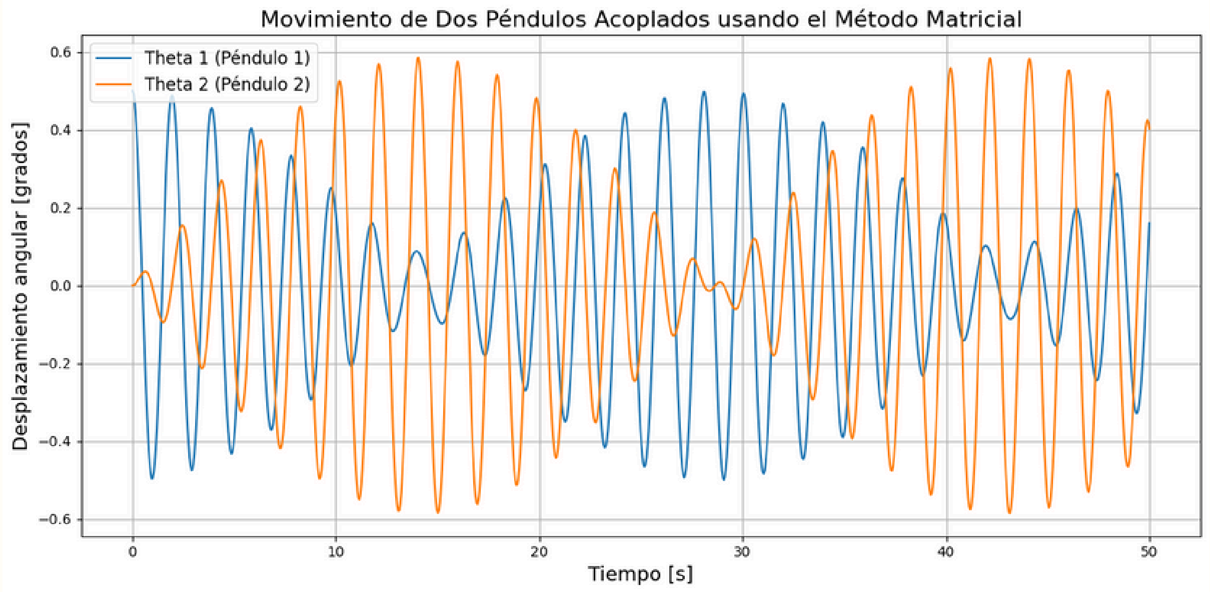


Figura 11: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = 0,5[grados] , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con m1 = 1,7[kg] y m2 = 1,2[kg] y longitudes iguales.

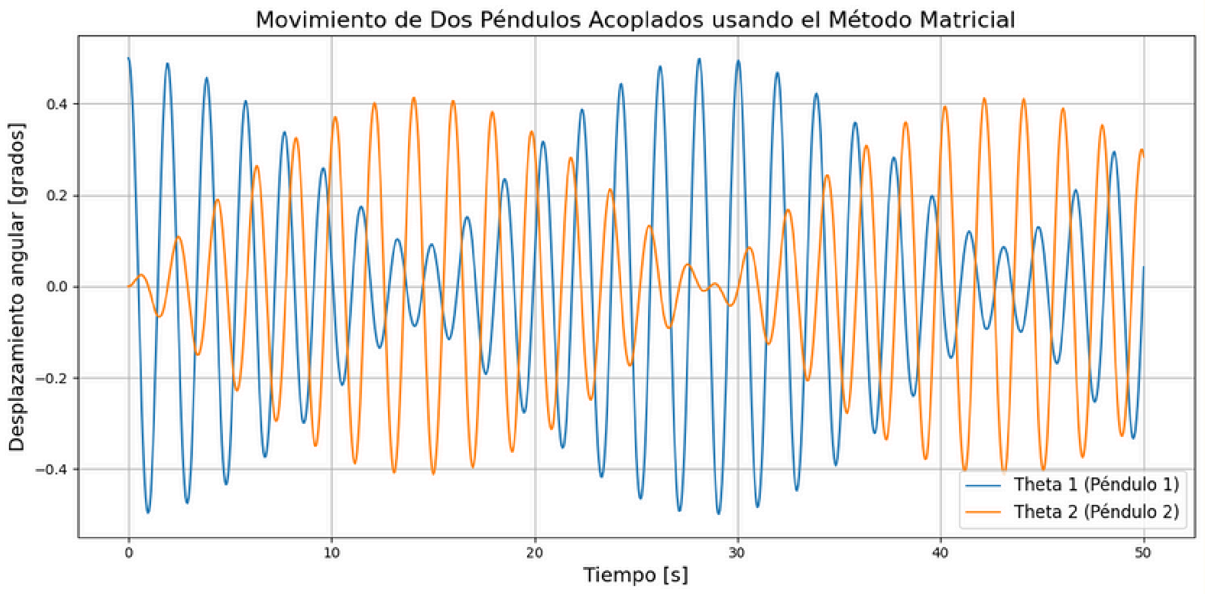


Figura 12: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = 0,5[grados] , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con m1 = 1,2[kg] y m1 = 1,7[kg] y longitudes iguales.

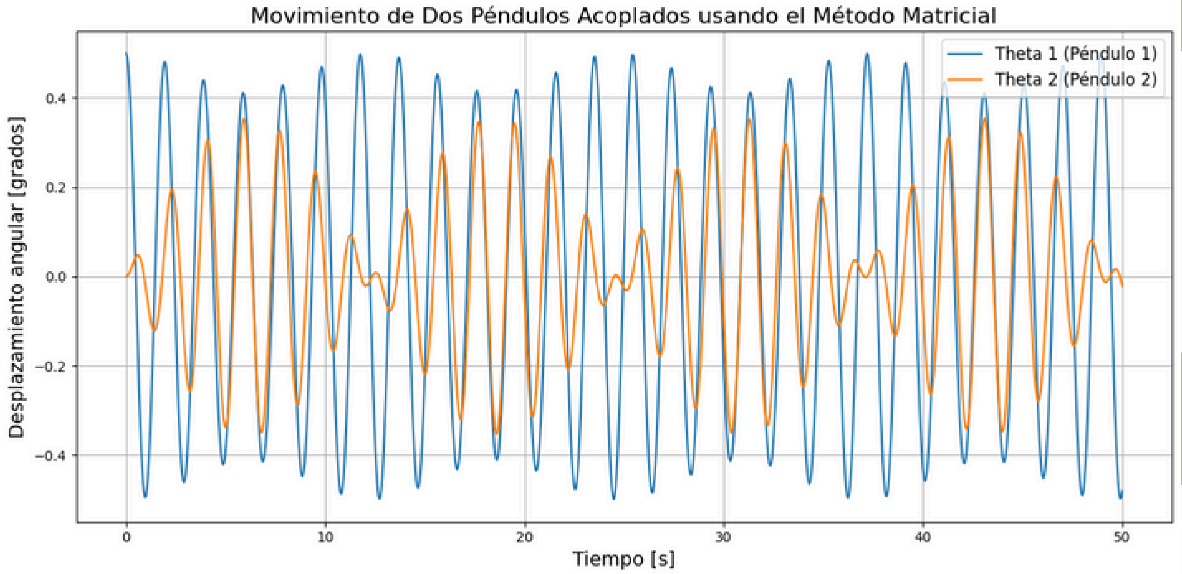


Figura 13: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = 0,5[grados] , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con l1 = 1,0[m] y l2 = 0,8[m] y masas iguales.

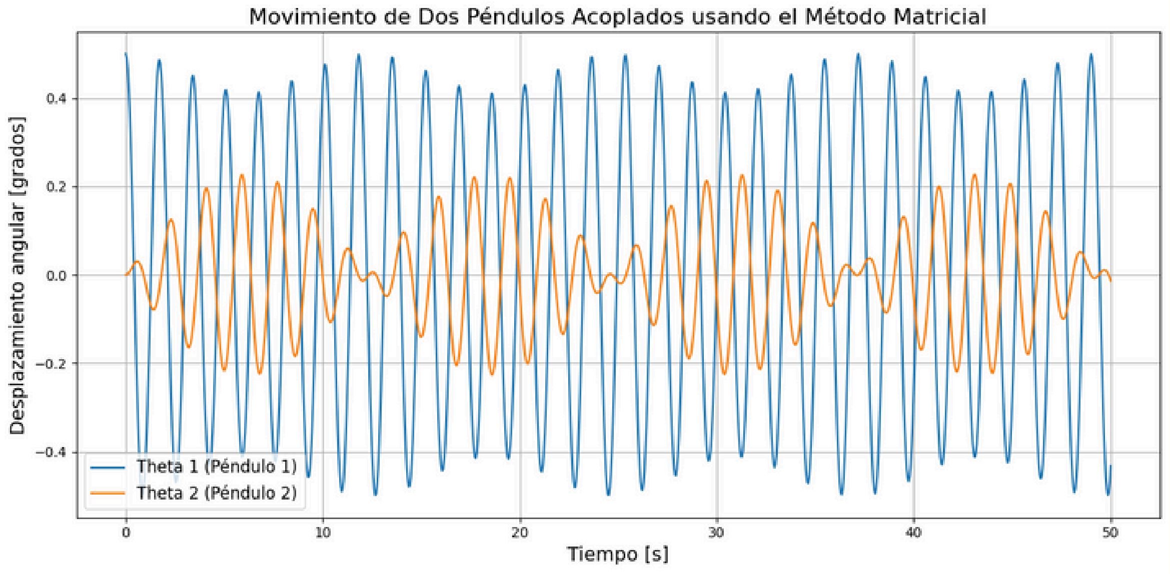
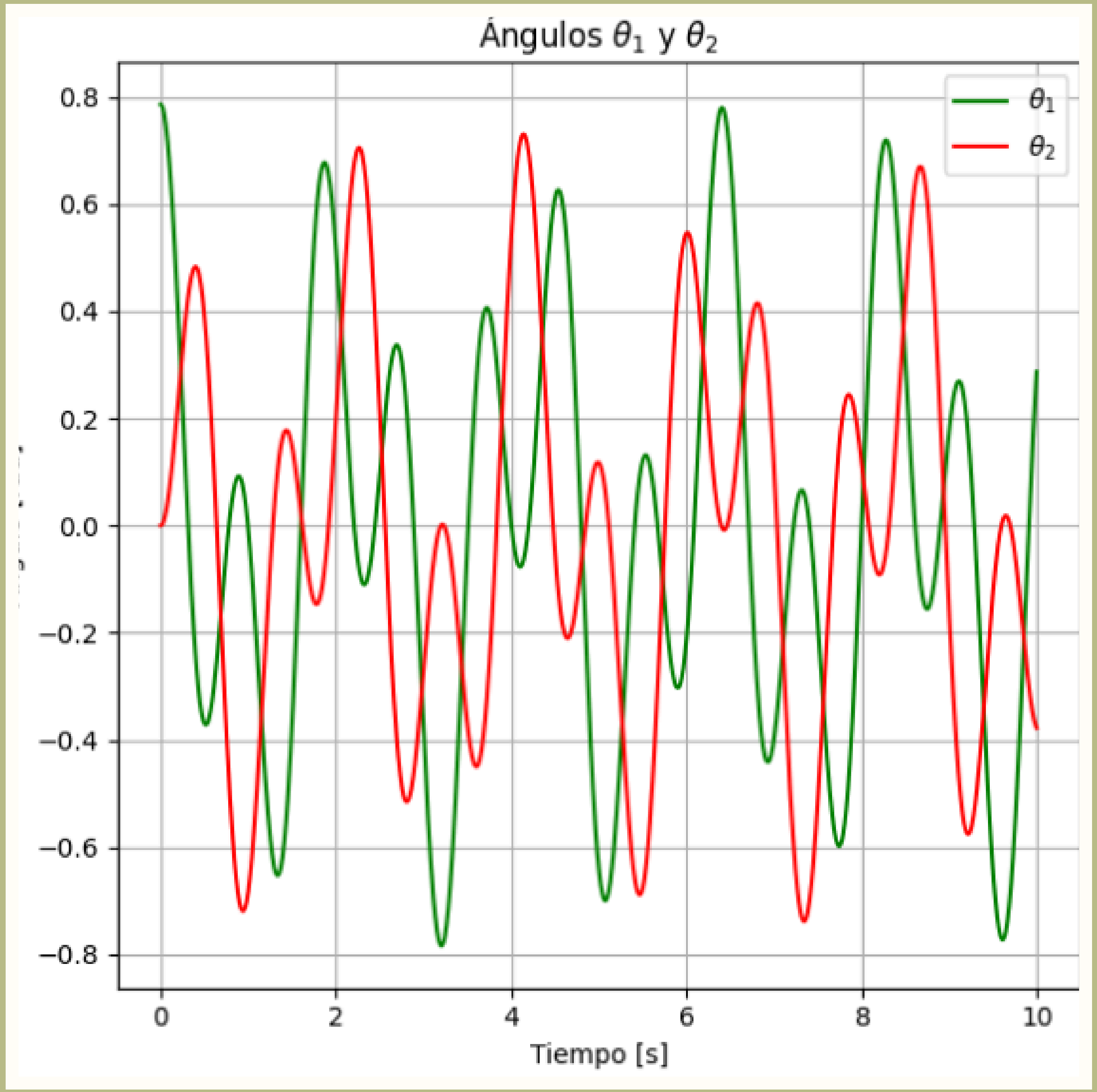


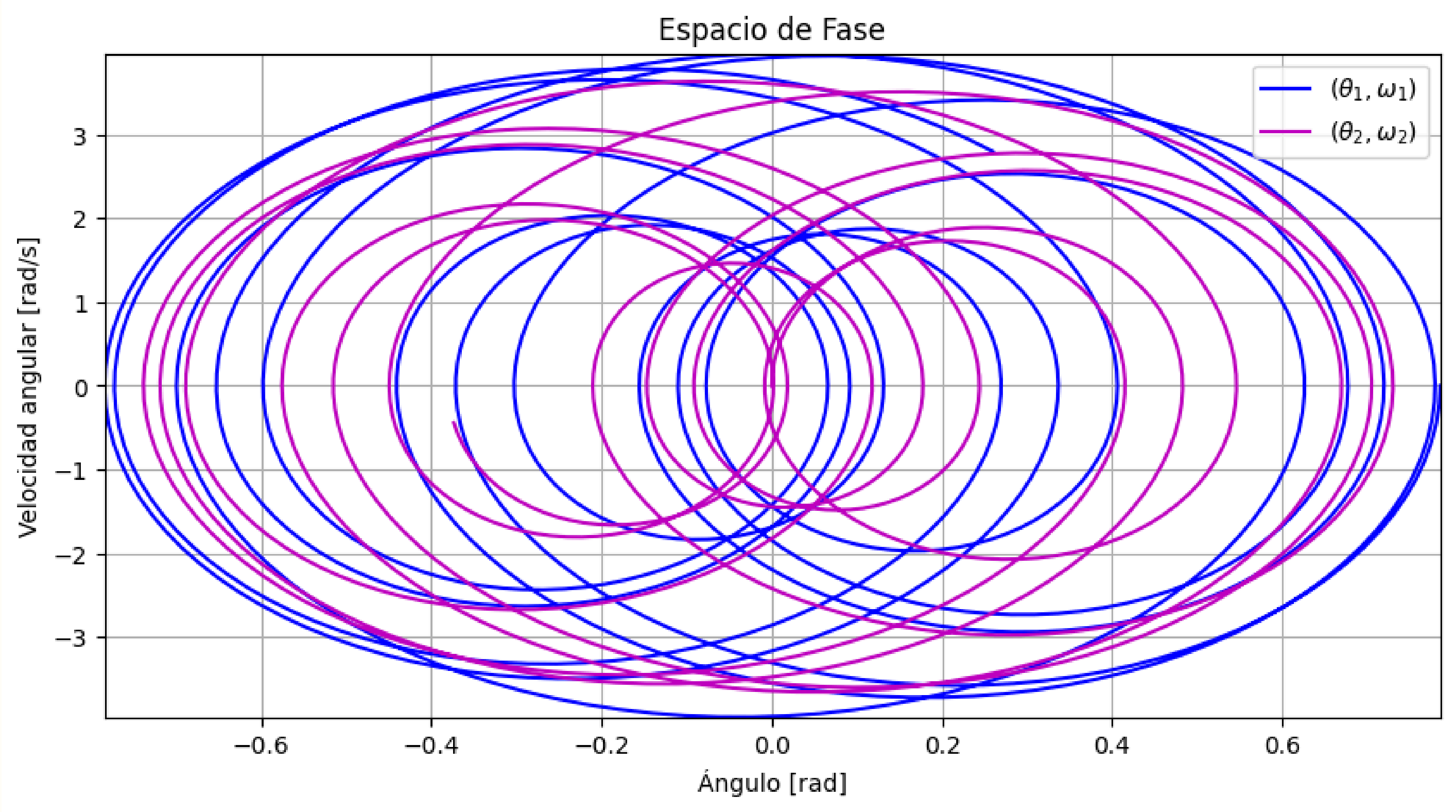
Figura 14: Movimiento primer péndulo con un ángulo inicial de θ1 = 0,5[grados] , y el segundo péndulo con θ2 = 0, con l1 = 0,8[m] y l2 = 1,0[m] y masas iguales.

CASO 4: MOVIMIEMTO CAÓTICO



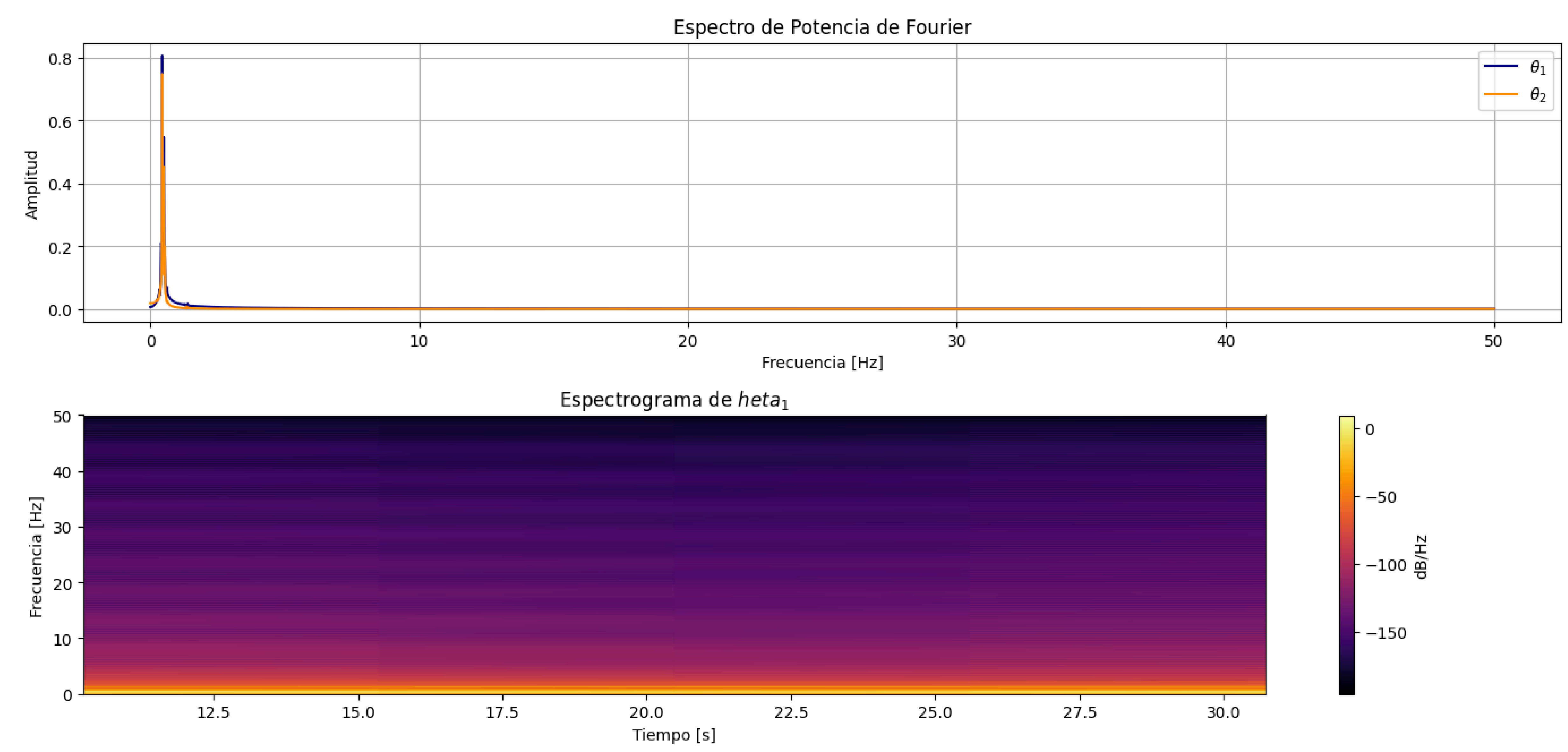
CONDICIONES INICIALES

Masa m_2 = 1,1, m_1 = 1,0
longitudes l1 = 1,0, l2 = 1,1
Constante elástica k = 20 N/m. El ángulo que se mantuvo fue θ_1 = π/4



Caso 6

Espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma



el espectro de Fourier muestra picos en las frecuencias naturales debido a la interacción entre los péndulos, mientras que el espectrograma refleja cómo esas frecuencias dominantes varían en el tiempo y cómo ocurre la transferencia de energía entre ellos.

Muchas
GRACIAS