Gabarito 2ª. Atividade : Professor Fernando

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[E]

Multiplicando a equação dada por $\frac{1}{2}$, segue que:

$$\frac{1}{2}\cdot \text{sen}(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \cos(x)=\frac{1}{2}$$

Lembrando que $\cos 60° = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\, 60° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a equação obtida pode ser escrita como:

$$\cos 60°\cdot \text{sen}(x)+\text{sen}\, 60°\cdot \cos(x)=\frac{1}{2} \text{ ou } \text{sen}(x)\cdot \cos 60°+\text{sen}\, 60°\cdot \cos(x)=\frac{1}{2}$$

Utilizando a fórmula do seno da soma de 2 arcos, o primeiro membro da equação pode ser reescrito na forma:

$$\text{sen}(x+60°)=\frac{1}{2}$$

Como a questão pede a resolução em uma volta completa ([0°, 360°]) e lembrando que $\text{sen}\, 30° = \frac{1}{2}$, $\text{sen}\ 150° = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\ 390° = \frac{1}{2}$, temos que:

$$x+60° = 30°,\ \ x+60° = 150° \text{ ou } x+60° = 390°$$
$$x = -30° \text{ (não serve)},\ \ x = 90° \text{ ou } x = 300°$$

Segue que $90° + 330° = 420°$.

Resposta da questão 2:
[E]

$$(\text{sen}\, x+\cos x)^2 = \text{sen}^2\, x+\cos^2 x+2\cdot \text{sen}\, x\cdot \cos x$$
$$(\text{sen}\, x+\cos x)^2 = 1+\text{sen}(2x)$$
$$(\text{sen}\, x+\cos x)^2 = 1+\frac{3}{5}$$
$$(\text{sen}\, x+\cos x)^2 = \frac{8}{5}$$
$$(\text{sen}\, x+\cos x)^2 = 1{,}6$$

Resposta da questão 3:
[D]

Da relação dada, obtemos:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta)^2 = 2$$
$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \text{sen}^2\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}^2\,\beta = 2$$
$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\beta + \text{sen}^2\,\beta - 2(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta) = 2$$
$$1 + 1 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2$$
$$\cos(\alpha + \beta) = 0$$

Analisando as afirmativas:

[I] Verdadeira. Para $\alpha = \beta = \frac{3\pi}{4}$, temos:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

O que satisfaz e relação obtida.

[II] Verdadeira. Se $\text{sen}(\alpha + \beta) = 1$, ficamos com $\cos(\alpha + \beta) = 0$, o que satisfaz a relação obtida.

[III] Falsa. De acordo com a primeira afirmativa, é possível perceber que $\alpha = \beta = \frac{3\pi}{4}$ também satisfaz a condição dada.

Resposta da questão 4:
[A]

Resolvendo a equação para f(x) = 0, temos:

$$\cos(x) \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2\,\text{sen}(x)\right] - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) - 2 = 0$$
$$\cos(x)\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \text{sen}(x)\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) + 2\,\text{sen}(x)\cos(x) = 2$$
$$\cos\left(\frac{4x}{3}\right) + \text{sen}(2x) = 2$$

O que só é possível para:

$$\cos\left(\frac{4x}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \left\{-3\pi, -\frac{3\pi}{2}, 0, \frac{3\pi}{2}, 3\pi\right\}$$

e

$$\text{sen}(2x) = 1 \Rightarrow x = \left\{-\frac{15\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right\}$$

Como a interseção dos dois conjuntos solução é vazia, podemos afirmar que a equação não admite soluções em I.

Resposta da questão 5:
[C]

Da relação fundamental, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 a + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 a = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\operatorname{sen} a = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\operatorname{sen} a = +\frac{3}{5} \; \left(0 \le a < \frac{\pi}{2}\right)$$

Logo:

$$\operatorname{sen}(2\pi - a) = \operatorname{sen} 2\pi \cos a - \operatorname{sen} a \cos 2\pi$$

$$\operatorname{sen}(2\pi - a) = 0 \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 1$$

$$\therefore \operatorname{sen}(2\pi - a) = -\frac{3}{5}$$

Resposta da questão 6:

a) Calculando:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

b) Resolvendo a equação, obtemos:

$$\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

$$1 - \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

$$-2\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{2} = 0$$

$$4\operatorname{sen}^2(x) + 4\operatorname{sen}(x) - 3 = 0$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{-1 \pm 2}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \operatorname{sen}(x) = -\frac{3}{2}$$

Como $-1 \le \operatorname{sen}(x) \le 1$, devemos ter que:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

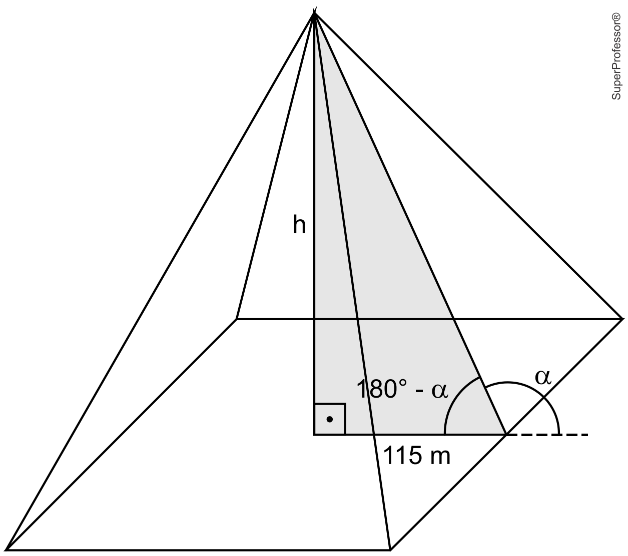
Resposta da questão 7:

[C]

Temos que:

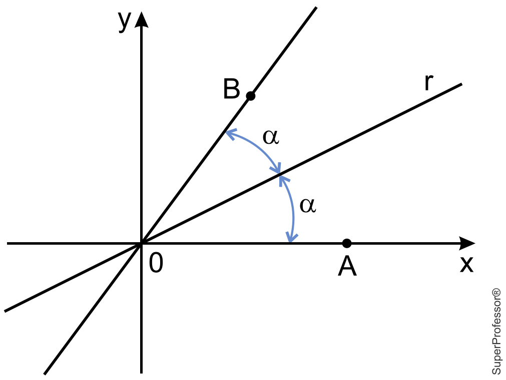
$$\cos\alpha = -0,6 \;\; \left(90° < \alpha < 180°\right)$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left(-0,6\right)^2} = 0,8$$
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$$
$$\operatorname{tg}\left(180° - \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}180° - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}180° \operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$$

A altura h da pirâmide é dada por:



$$\operatorname{tg}\left(180° - \alpha\right) = \frac{h}{115}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{h}{115}$$
$$\therefore h \cong 153 \text{ m}$$

Resposta da questão 8:
[C]



O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos O e B é dado por:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{12}{5}$$

Determinando a tg(α), ou seja, o coeficiente angular da reta r.

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{12}{5}$$

$$\frac{2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{12}{5}$$

$$-12\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 12 = 10 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$12\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 10 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - 12 = 0(\div 2)$$

$$6\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 5 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - 6 = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 6} \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}} \text{ ou } \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{2}(\text{não convém})$$

Logo a equação da reta r, será dada por:

$$\boxed{y = \frac{2}{3} \cdot x}$$

Resposta da questão 9:
[D]

Analisando as afirmativas:

[I] Correta.

$$(\mathrm{sen}\,x + \cos\,x)^2 = \mathrm{sen}^2\,x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x$$
$$= (\mathrm{sen}^2\,x + \cos^2\,x) + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = 1 + \mathrm{sen}\,2x$$

[II] Correta.

$$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{\mathrm{sen}^2\,x + \cos^2\,x}{\cos x\,\mathrm{sen}\,x}$$
$$= \frac{1}{\cos x\,\mathrm{sen}\,x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\mathrm{sen}\,x} = \sec x \cdot \mathrm{cossec}\,x$$

[III] Correta.

$$\mathrm{cotg}\,x - \mathrm{tg}\,x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x} - \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \mathrm{sen}^2\,x}{\mathrm{sen}\,x\cos x}$$
$$= \frac{\cos 2x}{\mathrm{sen}\,x\cos x} = \frac{2\cos 2x}{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x} = \frac{2\cos 2x}{\mathrm{sen}\,2x} = 2 \cdot \mathrm{cotg}\,2x$$

Resposta da questão 10:
[C]

Resolvendo a inequação, obtemos:

$$\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot[\operatorname{sen}(x)+\cos(x)]\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(x)\ge\frac{1}{2}$$
$$\operatorname{sen}(x+45^\circ)\ge\frac{1}{2}$$
$$30^\circ\le x+45^\circ\le 150^\circ$$
$$-15^\circ\le x\le 105^\circ$$

Ou seja, o ângulo na circunferência detectado pelo navio inimigo é de 120º. Portanto, a área não detectada é igual a:

$$A=\frac{360^\circ-120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi R^2$$
$$\therefore A=\frac{2\pi}{3}R^2\ \text{km}^2$$

Resposta da questão 11:
[D]

Analisando as afirmativas:
[A] Falsa. A função f pode ser reescrita como:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}-\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}}=\operatorname{sen}^2x-\cos^2x=-\cos 2x$$

Logo, o seu conjunto imagem é dado por:
$$\operatorname{Im}=[-1,1]$$

[B] Falsa. Temos que:
$$f(0)=-\cos 0=-1$$
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\pi=1$$

Portanto, f não é decrescente para $x\in\mathbb{R}\ \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

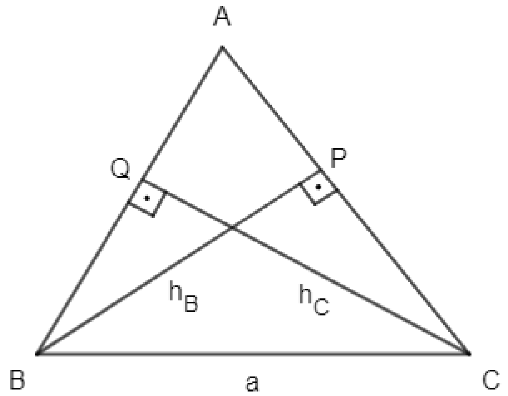
[C] Falsa. Domínio de f:
$$\begin{cases}\operatorname{cossec}x\ne 0\\ \sec x\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\ne 0\\ \dfrac{1}{\cos x}\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}$$
$$\therefore D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\ne\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

[D] Verdadeira. Período de f:

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Resposta da questão 12:

Sendo P e Q, respectivamente, os pés das alturas h_B e h_C sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:



Do ΔBCQ e do ΔCBP, obtemos:

$$\begin{cases} \text{sen}B = \frac{h_C}{a} \\ \text{sen}C = \frac{h_B}{a} \end{cases} \Rightarrow \text{sen}B\,\text{sen}C = \frac{h_B h_C}{a^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Logo:

$$\cos A + \cos B \cos C = \cos(\pi - B - C) + \cos B \cos C =$$
$$= -\cos(B + C) + \cos B \cos C = -\cos B \cos C + \text{sen}B\,\text{sen}C + \cos B \cos C =$$
$$= \text{sen}B\,\text{sen}C = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{6}{4\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}}$$

Portanto:

$$\begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow p + q + m = 11$$

Resposta da questão 13:

[E]

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔBCD, obtemos:

$$0{,}5^2 = 0{,}3^2 + \overline{BD}^2$$
$$\overline{BD} = 0{,}4$$

No ΔABD, temos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{0,4}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0,4$$
$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0,8$$
$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 0,8$$

Logo, o ângulo α equivale à abscissa s.

Resposta da questão 14:
[B]

A expressão dada equivale a:
$$\frac{\sec x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{2}{2\operatorname{sen} x\cos x} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2}{1/3} = 6$$

Resposta da questão 15:
[D]

Se $\overline{AD} = k\,\text{cm}$, então $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{6}$. Logo, vem
$$\begin{aligned}\operatorname{tg}2\alpha = \frac{6}{k+6} \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} &= \frac{6}{k+6}\\ \Rightarrow \frac{2\cdot\frac{k}{6}}{1-\left(\frac{k}{6}\right)^2} &= \frac{6}{k+6}\\ &\Rightarrow k^2 + 4k - 12 = 0\\ &\Rightarrow k = 2\,\text{cm}.\end{aligned}$$

Portanto, sendo $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ e $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, temos $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$, uma vez que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo retângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5. Ademais, pelo Teorema de Pitágoras, vem
$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 &\Rightarrow \overline{BD}^2 = 6^2 + 2^2\\ &\Rightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{10}\,\text{cm}.\end{aligned}$$

A resposta é
$$\begin{aligned}\overline{BD} + \overline{BC} + \overline{CD} &= 2\sqrt{10} + 10 + 6\\ &= 2(8 + \sqrt{10})\,\text{cm}.\end{aligned}$$