

# Теоретические модели вычислений

## ДЗ №2: КС-грамматики

Андрей Ефанов

Март 2022

Правила те же, что и раньше. Дедлайн – 12:00 29 апреля.

### Упражнение 1

(5 баллов)

Для следующих языков постройте КС-грамматику.

1. В алфавите  $\Sigma = \{a, b, c\}$  постройте грамматику для языка  $L = \{w \in \Sigma^* | w \text{ содержит подстроку } aa\}$ . Например,  $\{aa, baac, caabb\} \subset L$ .
2. В алфавите  $\Sigma = \{a, b, c\}$  постройте грамматику для языка  $L = \{w \in \Sigma^* | w \text{ не палиндром}\}$ . Например,  $\{aab, baabab\} \subset L$ , а  $\{aba, bb, \lambda\} \not\subset L$ .
3. В алфавите  $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{', \}', \cup\}$  можно построить следующие слова, обозначающие множества:

$\emptyset$	$\{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \cup \emptyset$
$\{\emptyset\} \cup \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$	$\{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$
$\{\{\mathbb{N}, \emptyset\} \cup \{\emptyset\}\}$	$\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}$
$\{\}$	$\{\mathbb{N}\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	$\{\{\{\{\mathbb{N}\}\}\}\}$
$\mathbb{N}$	$\{\emptyset, \{\}\}$

Некоторые из этих множеств (например  $\{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$ ) синтаксически корректны, но избыточны в записи. Ниже приведены примеры синтаксически некорректных множеств:

$\lambda$	$\}\emptyset\{$
$\emptyset\{\mathbb{N}\}$	$\{\{\}$
$\mathbb{N}, \emptyset, \{\emptyset\}$	$\{\,, \mathbb{N}\}$
$\{\mathbb{N}\emptyset\},$	$\{\,, \}$
$\{\emptyset$	$\}\}\mathbb{N}$
$\{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \}$	$\{\mathbb{N}, \,, \,, \emptyset\}$

Постройте грамматику для языка  $L = \{w \in \Sigma^* | w \text{ – синтаксически корректная строка, обозначающая множество}\}$ . Для простоты описания используйте символы  $n, u, o$  вместо  $\mathbb{N}, \cup, \emptyset$  соответственно

## Упражнение 2

(5 баллов)

В данном упражнении мы используем унарную арифметическую систему. Каждое число в унарной системе представлено последовательностью единиц. Например, 5 будет записано как 11111.

В алфавите  $\Sigma = \{1, +, =\}$  мы можем записать выражения для суммы чисел  $x + y = z$ :

- $4 + 3 = 7$  будет представлено как  $1111 + 111 = 1111111$ ,
- $0 + 1 = 1$  – как  $+1 = 1$ .

Рассмотрим язык  $A = \{1^m + 1^n = 1^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ .

1. Докажите, что язык  $A$  регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке).
2. Постройте КС-грамматику для языка  $A$ , показывающую, что  $A$  – контекстно-свободный.

## Упражнение 3

(5 баллов)

1. Вы пошли гулять с собакой, ваша собака на поводке длины 2. Это значит, что она не может отойти от вас более чем на 2 шага. Пусть  $\Sigma = \{h, d\}$ , где  $h$  – ваше перемещение на 1 шаг вперёд, а  $d$  – шаг собаки. Например,  $hhdd$  обозначает, что вы прошли на 2 шага вперёд, затем собака подошла к вам. При этом прогулка может быть завершена, если собака и человек оказались в одной точке.

Пусть  $D_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке с поводком}\}$ .

- (a) Докажите, что язык  $D_1$  регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке).
  - (b) Постройте КС-грамматику для  $D_1$ , показывающую, что  $D_1$  – контекстно-свободный.
2. Допустим теперь, что вы также пошли на прогулку с собакой, но не взяли с собой поводок. Это значит, что вы можете отдалиться от собаки на любое расстояние.

Пусть  $D_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ описывает последовательность ваших шагов и шагов вашей собаки на прогулке без поводка}\}$ .

- (a) Докажите, что язык  $D_2$  регулярный (построением) или не регулярный (через лемму о накачке).
- (b) Постройте КС-грамматику для  $D_2$ , показывающую, что  $D_2$  – контекстно-свободный.

## Упражнение 4

(5 баллов)

Пусть  $Perm(\omega)$  – это множество всех пермутаций строки  $\omega$ , то есть, множество всех уникальных строк, состоящих из тех же букв и в том же количестве, что и в  $\omega$ . Если  $L$  – регулярный язык, то  $Perm(L)$  – это объединение  $Perm(\omega)$  для всех  $\omega$  в  $L$ . Если  $L$  регулярный, то  $Perm(L)$  иногда тоже регулярный, иногда контекстно-свободный, но не регулярный, а иногда даже не контекстно-свободный. Рассмотрите следующие регулярные выражения  $R$  и установите, является ли  $Perm((R))$  регулярным, контекстно-свободным или ни тем и ни другим:

1.  $(01)^*$

3.  $(012)^*$

2.  $0^* + 1^*$

## Упражнение 5

(10 баллов)

Все правила праволинейной КС-грамматики имеет одну из следующих форм:

$$A \rightarrow \lambda$$

$$A \rightarrow B$$

$$A \rightarrow aB$$

где  $A, B$  – нетерминалы, а  $a$  – терминал.

1. Пусть грамматика  $G$  – праволинейная. Опишите алгоритм построения НКА  $N$ , такого что  $(N) = (G)$ . Коротко докажите (от противного), что ваш алгоритм может получить только слова из языка грамматики. Проиллюстрируйте алгоритм на грамматике:

$$A \rightarrow aB|bC$$

$$B \rightarrow aB|\lambda$$

$$C \rightarrow aD|A|bC$$

$$D \rightarrow aD|bD|\lambda$$

2. Пусть  $N$  – НКА. Опишите алгоритм построения КС-грамматики  $G$ , такой что  $(G) = (N)$ . Коротко докажите (от противного), что ваш алгоритм может получить только слова из языка НКА. Проиллюстрируйте алгоритм на автомате:

