

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТАНДЕМА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ С ПРОДЛЕНИЕМ

В.М. Кочеганов, А.В. Зорин

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Теория вероятностей, случайные процессы,
математическая статистика и приложения
(г. Минск, Республика Беларусь)

Содержательная постановка задачи

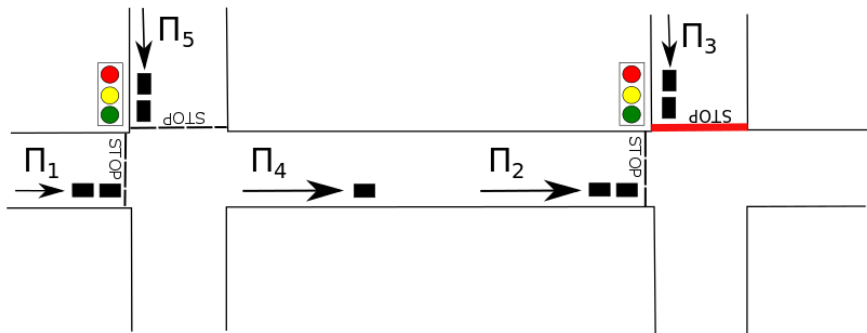


Рис.: Тандем перекрёстков

Тандем перекрестков как управляющая СМО

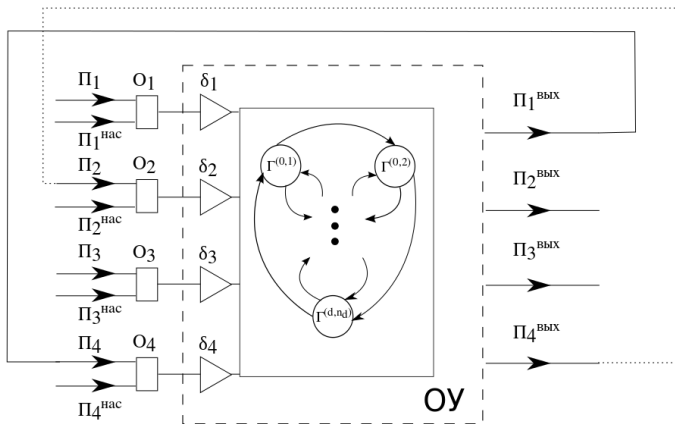


Рис.: Структурная схема системы массового обслуживания

Параметры системы

Входные потоки

Входные потоки Π_1 и Π_3 — неординарные пуассоновские потоки с интенсивностями λ_1 и λ_3 соответственно.

Распределение числа заявок в группе по потоку Π_j , $j \in \{1, 3\}$, имеет производящую функцию:

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}, \quad |z| < (1 + \varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Требования входных потоков Π_4 и Π_2 формируются из выходных требований потоков $\Pi_1^{\text{вых}}$ и $\Pi_4^{\text{вых}}$ соответственно.

Дисциплины очередей

Устройство δ_j , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, поддерживает FIFO дисциплину очереди O_j .

Кибернетический подход I

Представлен, например, в следующих работах:

- Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики / С. В. Яблонский // Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз. 1959. С. 7–38.
- Ляпунов А. А. Теоретические проблемы кибернетики / А. А. Ляпунов, С. В. Яблонский // Проблемы кибернетики. Вып. 9. М.: Физматгиз. 1963. С. 5–22
- Федоткин М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические проблемы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. 1996. С. 51–70.
- Зорин А. В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А. В. Зорин, М. А. Федоткин. // Автоматика и телемеханика. 7, 2005. С. 102–111.

Кибернетический подход II

Требуется задание:

- дискретных моментов наблюдения за системой с помощью точечного случайного процесса $\{\tau_i, i \geq 0\}$;
- случайных величин и случайных элементов, описывающих СМО и соответствующим моментам наблюдения τ_i .

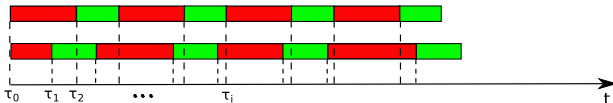


Рис.: Шкала моментов наблюдения

Кибернетический подход III

Основные принципы кибернетического подхода:

- 1 принцип дискретности актов функционирования управляемой системы обслуживания во времени;
- 2 принцип нелокальности при описании поэлементного строения управляемой системы обслуживания;
- 3 принцип совместного рассмотрения поэлементного строения управляющей системы обслуживания и ее функционирования во времени.

Кибернетический подход IV

Основными составляющими кибернетической системы являются:

- **схема**
 - внешняя среда
 - входные и выходные полюса
 - внешняя и внутренняя память
 - устройства по переработке информации во входной и выходной памяти
- **информация** — набор состояний среды, очередей в накопителях, обслуживающего устройства, потоков насыщения и потоков обслуженных требований
- **координата блока** — номер блока на схеме
- **функция** — обслуживание потоков по циклическому алгоритму

Кодирование информации

Пусть Z_+ — множество целых неотрицательных чисел.

- $\{e^{(1)}\}$ — множество состояний внешней среды (одно состояние)
- Z_+^4 — множество состояний входных полюсов
- Z_+^4 — множество состояний выходных полюсов
- $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$ — множество состояний внутренней памяти
- Z_+^4 — множество состояний внешней памяти
- Z_+^4 — множество состояний выходных полюсов
- $\{r^{(1)}\}$ — множество состояний устройства по переработке информации во внешней памяти (одно состояние)
- граф смены переходов (будет описан ниже) описывает устройство по переработке информации во внутренней памяти

Необходимы случайные величины

- $\tau_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1, \dots$ — момент смены состояния обслуживающего устройства;
- $\eta_{j,i} \in Z_+$ — число требований потока Π_j , поступивших за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\xi_{j,i} \in Z_+$ — число требований потока насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\kappa_{j,i} \in Z_+$ — число требований в очереди O_j в момент τ_i ;
- $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$ — состояние обслуживающего устройства в момент τ_i ;
- $\bar{\xi}_{j,i} \in Z_+$ — число требований выходного потока $\Pi_j^{\text{вых}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$,

для $j = 1, 2, 3, 4$.

Закон изменения состояний обслуживающего устройства I

Изменение состояний обслуживающего устройства: $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$.

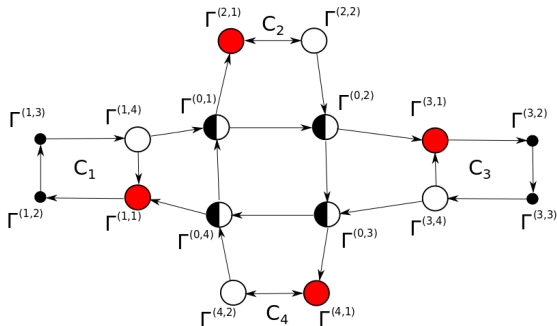


Рис.: Класс графов переходов (отображение $h(\cdot, \cdot)$).

Закон изменения состояний обслуживающего устройства II

Таким образом,

$$\Gamma = \left(\bigcup_{k=1}^d C_k \right) \bigcup \{ \Gamma^{(0,1)}, \Gamma^{(0,2)}, \dots, \Gamma^{(0,n_0)} \}, \quad C_k = C_k^I \cup C_k^O \cup C_k^N.$$

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O; \\ \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y > L; \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y \leq L; \\ \Gamma^{(0, h_2(r))}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases}$$

где

$$h_1(\cdot): \bigcup_{k=1}^d C_k^O \rightarrow N_0, \quad h_2(\cdot): N_0 \rightarrow N_0, \quad h_3(\cdot): N_0 \rightarrow \bigcup_{k=1}^d C_k^I,$$

и $N_0 = \{1, 2, \dots, n_0\}$.

Рекуррентные соотношения

Функционирование системы подчиняется следующим функциональным соотношениям:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{j,i} &= \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, & j \in \{1, 2, 3\}, \\ \kappa_{j,i+1} &= \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, & j \in \{1, 2, 3\}, \\ \kappa_{j,i+1} &= \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & j \in \{1, 2, 3\}, \\ \kappa_{4,i+1} &= \kappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \\ \xi_{4,i} &= \kappa_{4,i}.\end{aligned}\tag{1}$$

Свойства условных распределений I

Определим функции $\varphi_j(\cdot, \cdot)$, $j \in \{1, 3\}$, и $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ из разложений:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t(f_j(z) - 1)\}, \quad \psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}.$$

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$.

Тогда вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств

$\eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}},$$

где

$$\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3), \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}.$$

и

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Свойства условных распределений II

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$.

Тогда вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma(k, r); x)$ есть

$$\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}.$$

где

$$\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma(k, r), x_3).$$

Полученные результаты I

Теорема 1. Пусть

$$\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma, \quad x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$$

фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины

$\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega), \xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega), \varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega), i \geq 0, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, такие, что

- имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x^0$;
- выполняются соотношения (1);
- для любых $a, b, x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4, \Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma, t = 1, 2, \dots$, условное распределение векторов η_i , и ξ_i имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma(k_t, r_t), \varkappa_t = x^t\}) = \\ = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \end{aligned}$$

Полученные результаты II

Теорема 2.

Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $(\kappa_{1,0}, \kappa_{2,0}, \kappa_{3,0}, \kappa_{4,0}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы.

Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}); i \geq 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Идея построения вероятностного пространства I

1 шаг. Строится «начальное» вероятностное пространство $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0(\cdot))$.

- $\omega_0 = (\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0})$, $\omega_{j,0} \in Z_+$. По своему смыслу $\omega_{j,0}$ есть количество требований в очереди O_j в момент времени τ_0 .
- $\mathcal{F}_0 = 2^{\Omega_0}$.
- $P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)}))$.

Идея построения вероятностного пространства II

2 шаг. По индукции строится пространство

$(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}, P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot))$.

- $\omega_{n+1} = (\omega_{1,n+1}, \omega_{2,n+1}, \omega_{3,n+1})$, $\omega_{j,n+1} \in Z_+$. По своему смыслу $\omega_{j,n+1} F_{n+1} = 2^{\Omega_{n+1}}$ есть количество требований в очереди O_j в момент времени τ_{n+1} .
- $\mathcal{F}_{n+1} = 2^{\Omega_{n+1}}$.
- $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{4,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n}))$.

Идея построения вероятностного пространства III

3 шаг. По теореме Ионеску-Тулчи строится агрегированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, где

- $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i$;
- $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$;
- $\mathbf{P}\{\omega: \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i)$

и

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i) =$$

$$\int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P(\omega_0; d\omega_1) \dots \int_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \quad A_i \in \mathcal{F}_i.$$

Классический подход

Представлен, например, в работах А. Эрланга, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, Д. Кендалла, Б.В. Гнеденко.

Требуется задать:

- **входной поток** в виде конечномерных распределений процесса $\{\eta(t): t \geq 0\}$, где $\eta(t)$ есть число поступивших требований до момента времени t ;
- **процесс обслуживания** в виде интегральной функции распределения длительности обслуживания произвольной заявки;
- **дисциплину формирования очереди** в виде словесного описания на содержательном уровне;
- **структуру системы** в виде словесного описания на содержательном уровне.

Асимптотический подход

Сформулирован и развивается в работах А.А. Боровкова.

Требуется задание случайного процесса

$$\{(\eta(t), \nu(t), \zeta(t)); t \geq 0\},$$

где

- $\eta(t)$ — число поступивших заявок за промежуток $[0, t)$;
- $\nu(t)$ — число получивших отказ заявок за промежуток $[0, t)$;
- $\zeta(t)$ — число обслуженных заявок за промежуток $[0, t)$;

Основная цель — изучение общих предельных свойств распределения длины очереди

$$\eta(t) - \nu(t) - \zeta(t).$$

Сложность перечисленных методов

- Не удастся решить проблему изучения **выходных потоков**.
- Не удастся рассмотреть **системы с немгновенным перемещением требований** между узлами и с зависимыми, разнораспределенными длительностями обслуживания требований.