

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория массового обслуживания занимается построением и анализом моделей для сложных систем, осуществляющих большое количество однотипных операций по обслуживанию различного рода требований (заявок). Первые работы в этой области были мотивированы решением прикладных задач, связанных с организацией деятельности телефонных станций в начале XX века. Задачи, поставленные и рассмотренные Ф.В. Йоханнсенем и А.К. Эрлангом, заложили основу для так называемой классической теории массового обслуживания (ТМО). Дальнейшее развитие этой отрасли науки связано с именами таких ученых как Ф. Поллачек, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, К. Пальм, Д.Дж. Кендалл, Л. Такач, Д.Р. Кокс, У.Л. Смит, Т.Л. Саати, Л. Клейнрок, С.Н. Бернштейн, Н.П. Бусленко, А.А. Боровков, В.С. Королук, Г.П. Башарин, Г.П. Климов, Ю.В. Прохоров, А.Д. Соловьев, Б.А. Севастьянов, Н.Т.Дж. Бейли и др. В их работах закладываются основные понятия, формируются принципы и методы решения задач ТМО. Начиная с области телефонии, результаты теории очередей находят свое применение при исследовании систем управления наземным, водным и воздушным транспортом, систем организации медицинских учреждений, биологических систем, телекоммуникационных и компьютерных систем, процессов производства сложных объектов, в финансовой сфере и т. д.

Оптимизационные цели существуют у большинства прикладных исследований ТМО. В некоторой идеализации система массового обслуживания (СМО) есть система, которая, находясь под действием различных случайных, неопределенных, контролируемых факторов, осуществляет операции по обслуживанию требований. При этом возможно определить различные критерии эффективности осуществления операции: среднее время пребывания требования в системе, вероятность простоя обслуживающих приборов, вероятность отказа, среднее количество занятых приборов, средняя длина очереди, коэффициент загрузки системы, производительность системы и т. д. Целью исследования таких систем является определение способов достижения наибольшей прибыли (наибольшей эффективности системы). В связи с такой постановкой задачи, ТМО неразрывно связана с отраслью исследования операций (ИО). Такая связь наблюдается, например, в работах Н.П. Бусленко, Н.Т.Дж. Бейли и др. Задачи ТМО в этом случае понимаются как задачи организационно-управленческого характера, направленные на наиболее оптимальное использование ресурсов.

Следует также обратить внимание на связь ТМО и математической кибернетики (МК). В работе А.А. Ляпунова и С.В. Яблонского авторы выделяют понятие управляющей системы как одно из ключевых понятий МК. Кибернетика представляется как «наука об общих закономерностях строения управляющих си-

стем и течения процессов управления». При изучении конкретных управляющих систем кибернетика взаимодействует со многими другими областями знаний, в том числе и с ТМО. В связи с этим привлечение аппарата и результатов МК, ИО и других дисциплин представляется актуальным и позволяет получать новые результаты.

Начиная со второй половины XX века, появляются работы, посвященные теории управляемых систем обслуживания. Понятие управляемой СМО было введено О.И. Бронштейном и В.В. Рыковым. Отмечено, что в управляемых СМО можно выделить элементы, допускающие применение управляющих воздействий. Каждый подобный элемент характеризуется набором параметров. Выбор значений управляющих параметров является стратегией управления. Изучению управляемых СМО посвящены работы Н.М. Воробьева, Б.Г. Питтеля, А.Ф. Терпугова, В.В. Рыкова и др.

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания на одном устройстве поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. В первых работах, посвященных тандемам систем массового обслуживания, изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлением заявок в систему и времени обслуживания независимы и имеют экспоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора. Основные результаты теории тандемов в случае простейших стационарных входных потоков и экспоненциального времени обслуживания получены в работах 1980-х годов. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены в работах А. Гомес-Коралла. Более общие модели включают в себя так называемые ВМАР (Batch Markovian Arrival Process) входные потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Такие потоки рассмотрены, например, в работах В.И.Клименок, А.Н.Дудина и др, где проведены аналитические расчеты условий стационарности и изучено поведение некоторых характеристик обслуживания для некоторых частных видов входных потоков и распределений времени обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями. Модель последовательных перекрестков с немгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах А.В. Зорина. В них динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернулиевской случайной величиной:

каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью остается «между» ними.

Постановка задачи в первых классических работах по ТМО сводилась к поиску оптимального числа обслуживающих приборов, минимизирующего среднее время ожидания клиентов. Решение при этом находилось аналитически. Со временем системы, изучаемые методами ТМО и ИО, значительно усложнялись. В связи с этим возникает необходимость в новых критериях оценки качества функционирования системы, а также в новых методах исследования. Одним из самых распространенных методов при решении подобных оптимизационных задач на текущий момент является метод имитационного моделирования. Компьютерные имитационные модели позволяют учитывать достаточно большое число факторов, которые с трудом могут быть учтены при аналитическом исследовании в силу его возрастающей сложности. Кроме того, преимущество имитационных моделей связано с возможностью исследовать различные сценарии работы управляемых систем, сравнительно легко адаптировать модели к изменениям в физической постановке задачи. В диссертационной работе аналитические методы применяются наряду с численным исследованием путем имитационного моделирования. Такое объединение методологий представляется актуальным и увеличивает достоверность результатов.

Цели и задачи работы. Целями данной работы являются: 1) построение и исследование математической модели тандема управляющих систем обслуживания по циклическому алгоритму с продлением; 2) построение, реализация и анализ имитационной модели систем, осуществляющих циклическое управление с продлением тандемом перекрестка.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Построение строгой вероятностной модели тандема управляющих систем с помощью явного построения вероятностного пространства и поточечного задания необходимых для исследования случайных величин и элементов.
2. Анализ построенной вероятностной модели, получение условий существования стационарного режима в различных подсистемах тандема.
3. Разработка имитационной модели тандема, определение момента достижения системы квазистационарного режима, анализ зависимости условий стационарности от управляющих параметров.

Научная новизна. Основные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Построена строгая вероятностная модель тандема управляющих систем с немгновенным перемещением требований между ними, управление в которых осуществляется по циклическому алгоритму и алгоритму с продлением.
2. Изучены эргодические свойства построенной модели, найдены условия

существования стационарного режима для очередей первичных требований, а также для промежуточной очереди.

3. Разработана и реализована имитационная модель для тандема

4. Проведено самостоятельное исследование вероятностной и имитационной моделей и определена расширенная область стационарности системы при алгоритме с продлением.

Теоретическая и практическая значимость. Научная значимость работы заключается в построении строгой вероятностной модели для качественно нового вида управляющей системы и в последовательном исследовании ее эргономических свойств. Успешно примененный в работе метод нелокального описания процессов существенно расширяет множество поддающихся исследованию реальных систем массового обслуживания. Строгая математическая модель позволяет оперировать существующим, глубоко разработанным вероятностным аппаратом для нахождения условий стационарности и нахождения оптимального управления системой. Разработанные модели дают базу для изучения более сложных тандемных систем, систем с более сложными входными потоками и алгоритмами управления.

Практическая значимость исследования состоит в том, что изученная управляющая система является адекватным описанием реальной системы тандема перекрестков, а также других сетей, состоящих из двух узлов с перемещающимися между ними требованиями и циклическими алгоритмами обслуживания с продлением на узлах.

Методология и методы исследования. Методология диссертационной работы базируется на представлении стохастических систем массового обслуживания в виде кибернетических управляющих систем. Применение принципов кибернетического подхода позволяет выделить в изучаемых системах ключевые блоки, структурировать информацию о законах функционирования блоков и основных связях между ними. Для описания входных потоков был применен метод нелокального описания, что сделало возможным более глубокое математическое изучение рассматриваемых объектов. В работе используется аппарат теории вероятностей, теории массового обслуживания, исследования операций, теории управляемых марковских процессов, теории функций комплексного переменного. Также применяются методы математической статистики, матричных вычислений и теории систем линейных алгебраических уравнений. При разработке имитационных моделей использовался язык программирования C++. Для визуализации результатов некоторых численных исследований использовался язык Python.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Методика построения вероятностного пространства для тандема систем с немгновенным перемещением требований между ними.

2. Методика нахождения условий существования стационарного режима в

системах управления потоками неоднородных требований с циклическим алгоритмом и алгоритмом с продлением.

3. Метод определения момента достижения управляемой системой обслуживания квазистационарного режима.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим применением используемого математического аппарата, проведением статистических и численных исследований. Результаты работы находятся в соответствии с результатами, полученными ранее другими авторами при исследовании управляющих систем обслуживания.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: Международная научная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, Республика Беларусь, 2015 г.), IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2015 г.), 8-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2015 (Москва, 2015 г.), Международная научная конференция «Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016», XVIII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 2017 г.), XVI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2017 (Казань, 2017 г.), 20-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2017 (Москва, 2017 г.).

Личный вклад автора. В совместных публикациях научному руководителю принадлежит постановка задачи и общее редактирование работ. Все исследования выполнены автором диссертации лично, все полученные результаты принадлежат автору.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 работах, 1 из них — в журналах, рекомендованных ВАК для защиты по специальности 01.01.09, 2 — в библиографической базе Scopus, 2 — в библиографической базе Web of Science, 1 — в журналах, рекомендованных ВАК для защиты по смежной специальности 05.13.01, 9 — в библиографической базе РИНЦ, 8 — в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор научной литературы по изучаемой проблематике, обосновывается актуальность проводимых исследований и дается краткая характеристика работы, содержащая цели, задачи и основные результаты.

Первая глава содержит постановку задачи на содержательном уровне и построение строгой математической модели. В следствие этого глава является основополагающей для всего дальнейшего анализа системы.

Раздел 1.1 содержит описание исследуемой системы массового обслуживания, а также содержит реальный пример такой системы: тандем перекрестков.

Общая схема системы представлена на рисунке 1. В систему с одним обслужи-

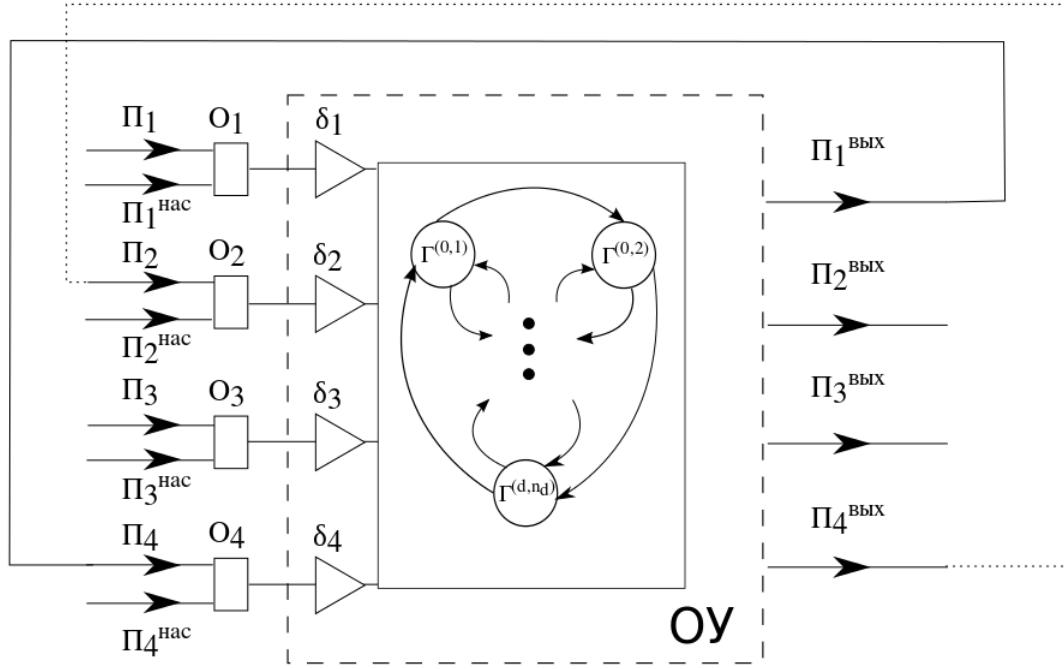


Рис. 1: Структурная схема системы обслуживания

вающим устройством поступают потоки Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 . Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ дисциплина очереди O_j , поддерживаемая устройством δ_j , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя на выходе поток Π_4 . Обслуженные требования потока Π_4 в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_2 . Основными параметрами системы являются: интенсивности $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 > 0$ поступления групп требований по потокам Π_1 , Π_3 соответственно; производящая

функция распределения $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}$, $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, числа заявок в группе по потоку Π_j , $j \in \{1, 3\}$; время $T^{(k,r)} > 0$ нахождения обслуживающего устройства в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, $k \in \{0, 1, \dots, d\}$, $r \in \{1, 2, \dots, n_k\}$; $\ell(k, r, j) \geq 0$ — количество требований содержащихся в потоке насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$; порог $L > 0$ числа требований в очереди O_3 , при превышении которого начинается обслуживание очереди O_3 .

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, \dots, n_d . Множество состояний обслуживающего устройства разделено на $d+1$ подмножества, каждое из которых является циклом. Цикл с номером 0 состоит из состояний продления, в котором требования потока Π_3 не обслуживаются. Из каждого состояния продления прибор может перейти в один из d обычных циклов. Цикл с номером i имеет n_i состояний, $i = \overline{0, d}$. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Граф переходов задается функцией $h(\cdot, \cdot)$: $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \kappa_{3,i})$, $i \geq 0$.

В разделе 1.2 на основе качественно описанной системы строится строгая математическая модель в виде конструктивно заданного вероятностного пространства и определенного на нем случайных величин и элементов.

При построении математической модели существенно используется кибернетический подход Ляпунова-Яблонского. Его основными принципами являются: **принцип дискретности** актов функционирования управляющей системы обслуживания во времени; **принцип совместного рассмотрения** поблочного строения управляющей системы обслуживания и ее функционирования во времени; **принцип нелокальности** при описании поблочного строения управляющей системы обслуживания. Основными блоками системы являются: 1) входные полюса — входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$; 2) выходные полюса — $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$; 3) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4 ; 4) внутренняя память — обслуживающее устройство; 5) устройство по переработке внешней памяти — устройство, поддерживающее дисциплину очереди $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$; 6) устройство по переработке внутренней памяти — граф переходов между состояниями обслуживающего устройства; 7) внешняя среда, имеющая только одно состояние.

Для задания информации блоков вводятся следующие величины и элементы, а также указываются множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выбрана последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i , $i \geq 1$, из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — в момент времени τ_0 , количество $\kappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, требований в очереди O_j в момент времени τ_i , количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество

$\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; $j = \overline{1, 4}$.

В завершении постановки задачи формулируются функциональные и вероятностные соотношения, которым подчиняются введенные случайные величины. А именно, из физических предположений, верны равенства:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{j,i} &= \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, & \kappa_{j,i+1} &= \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \\ \kappa_{j,i+1} &= \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \kappa_{4,i+1} &= \kappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \\ \xi_{4,i} &= \kappa_{4,i}, & \eta_{4,i} &= \min\{\kappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}. \end{aligned} \quad (1)$$

При помощи разложений $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\}$ и $\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}$ вводятся функции $\varphi_j(\cdot, \cdot)$, $j \in \{1, 3\}$, и $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ при условии $\nu_i = (\Gamma(k, r); x)$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ и $\delta_{i,j}$ есть индикатор события $i = j$.

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma(k, r); x)$ есть

$$\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \quad (3)$$

где \tilde{k} и \tilde{r} такие, что $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$.

Основным результатом первой главы является теорема 1.1, доказательство которой основывается на доказательстве теоремы Ионеску Тулча.

Теорема 1.1 Пусть

$$\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma, \quad x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$$

фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\bar{\xi}_{j,i} = \bar{\xi}_{j,i}(\omega)$, $\kappa_{j,i} = \kappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geq 0$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, такие, что

- имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\kappa_0(\omega) = x^0$;
- выполняются соотношения (1), (2), (3);

- для любых $a, b, x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \dots$, условное распределение векторов η_i , и ξ_i имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma(k_t, r_t), \varkappa_t = x^t\}) = \\ = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i). \end{aligned}$$

Вторая глава касается анализа последовательности

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geq 0\} \quad (4)$$

Основываясь на результатах главы 1, в разделе 2.1 доказывается марковость основной последовательности и находятся выражения для ее переходных вероятностей. Вид соотношений для переходных вероятностей приводится в теореме 2.3.

Теорема 2.3 Пусть $x, \tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) = \\ = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3) \times \\ \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}). \end{aligned}$$

Существенно использование при выводе рекуррентных соотношений множеств особого вида:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}), \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: \tilde{x}_1 = \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: \tilde{x}_2 = \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}\}. \end{aligned}$$

В разделе 2.2 проводится классификация состояний марковской цепи (4) по арифметическим свойствам.

Для классификации состояний необходимо определить взаимную достижимость состояний цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$. Например, сообщаются ли состояния вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}, \quad x^0 \in \mathbb{Z}_+^4, \quad x_{3,0} \leq L$$

с состояниями вида

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0)), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x}_3 \geq x_{3,0}.$$

Лемма 2.1 дает ответ на этот вопрос.

Лемма 2.1 Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$, $x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$, $x_{3,0} \leq L$, и $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0))$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$, $\tilde{x}_3 \geq x_{3,0}$, существует такое натуральное число N , что

$$\mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = (0, 0, \tilde{x}_3, 0)\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Далее, последовательно рассматривая все состояния, Леммы 2.1 – 2.9 подводят к основному результату главы 2.

Теорема 2.5 Состояния вида $(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x})$, где $\tilde{k} = \overline{0, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$,

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1 > 0) &\Rightarrow (\tilde{x}_4 \geq \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)), \\ \tilde{x}_3 &\geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(k, s, 3) \right\}, \text{ если } \tilde{k} > 0, \\ \tilde{x}_3 &\geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=\overline{1, d}} \left\{ \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\} \right\}, \text{ если } \tilde{k} = 0, \end{aligned}$$

и только они достижимы из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x^0 = (0, 0, L + 1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$, и, следовательно, являются существенными.

В этой теореме решается вопрос о множестве существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$

Очереди O_1 и O_3 первичных требований и промежуточная очередь O_4 исследованы в третьей главе. В связи со сложностью общей модели, включающей все очереди O_1, O_2, O_3, O_4 , для поиска условий стационарности необходимо разбить эту задачу на несколько подзадач.

В разделе 3.1 достаточное условие ограниченности последовательности математических ожиданий $\{E\varkappa_{4,i}(\omega); i = 0, 1, \dots\}$ представлено в теореме 3.1.

Теорема 3.1 Для того, чтобы последовательность $\{E\varkappa_{4,i}(\omega); i = 0, 1, \dots\}$ была ограничена, достаточно выполнения неравенства

$$\min_{k=\overline{0, d}, r=\overline{1, n_k}} \{p_{k,r}\} > 0.$$

В разделе 3.2 начинается анализ последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$. Более точно, находятся рекуррентные соотношения для производящих функций $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v) = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r)}, w) v^w$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Найденные соотношения в свою очередь используются при нахождении условий существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$. Теорема 3.4 раздела 3.3 содержит достаточное условие стационарности.

Теорема 3.4 Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имела стационарное распределение $Q(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, достаточно выполнения неравенства

$$\min_{k=1, \bar{d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1.$$

И далее теорема 3.5 раздела 3.4 содержит необходимое условие существования стационарного распределения.

Теорема 3.5 Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имела стационарное распределение $Q_3(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, необходимо выполнение неравенства

$$\max_{k=1, \bar{d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1.$$

Завершает теоретические исследования работы раздел 3.5, содержащий анализ последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$. В теореме 3.8 приведено описание множества существенных состояний цепи.

Теорема 3.8 Множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имеет вид $\left(\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^1 \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^1 \right)$. где

$$S_{0,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(0,r)}, x_1, x_3) : (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3) \right\} \right\}, \quad 1 \leq r \leq n_0,$$

$$S_{k,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) : (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k, t, 3) \right\}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

Теорема 3.9 содержит достаточное условие существования стационарного распределения марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$.

Теорема 3.9 Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имела стационарное распределение $Q_1(\gamma, x_1, x_3)$, $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$, достаточно выполнения неравенств

$$\min_{k=0, \bar{d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \quad \min_{k=1, \bar{d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \quad (5)$$

Наконец, в четвертой главе разработана и изучена имитационная модель системы.

Управляющими параметрами системы являются: длительности T_2 и T_3 сигналов второго светофора; длительность T_{prol} сигнала продления второго светофора;

порог продления L . Показателем качества функционирования системы выбрано среднее взвешенное время ожидания произвольного требования $E\gamma$. Для определения квазистационарного режима запускаются несмещенная («0») и смещенная («+») системы: с пустыми и не пустыми начальными очередями соответственно.

Для определения момента достижения системой квазистационарного режима в конце каждого такта считаются значения

$$\gamma_{j,\cdot}^0 = \frac{1}{\tilde{\gamma}_j^0} \sum_{\nu} \gamma_{j,\nu}^0, \quad \gamma_{j,\cdot}^+ = \frac{1}{\tilde{\gamma}_j^+} \sum_{\nu} \gamma_{j,\nu}^+ \quad (6)$$

Кроме того, для несмещенной системы считаются входящий и выходящий потоки:

$$F_{\text{in},1}^0 = \sum_n \alpha_{\text{in},1,n}^0, \quad F_{\text{out},4}^0 = \sum_n \alpha_{\text{out},4,n}^0, \quad (7)$$

$$F_{\text{in},3}^0 = \sum_n \alpha_{\text{in},3,n}^0, \quad F_{\text{out},3}^0 = \sum_n \alpha_{\text{out},3,n}^0. \quad (8)$$

Стационарный режим считается достигнутым, если выполнены все неравенства:

$$\frac{|\gamma_{j,\cdot}^0 - \gamma_{j,\cdot}^+|}{\gamma_{j,\cdot}^0} < \delta_1, \quad \frac{F_{\text{in},1}^0}{F_{\text{out},4}^0} < \delta_2, \quad \frac{F_{\text{in},3}^0}{F_{\text{out},3}^0} < \delta_3. \quad (9)$$

Для подсчета результирующей оценки целевой функции используется формула

$$\hat{E}\gamma = \frac{\sum_{j \in \{1,3\}} (\lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}) \hat{E}\gamma_j}{\sum_{j \in \{1,3\}} \lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}}, \quad (10)$$

где $\hat{E}\gamma_j = \frac{1}{\tilde{\gamma}_j} \sum_{\nu} \zeta_{j,\nu}$ – оценка математического ожидания времени пребывания в системе произвольного требования потока Π_j .

Проведение конкретных экспериментов показало, что найденная теоретически область стационарности может быть расширена при циклическом алгоритме с продлением на втором перекрестке. Весьма ожидаемо, что тем больше область стационарности увеличивается, чем больше пороговое значение L числа машин очереди O_3 . Интересно также, что кривая разных загрузок, определяемая для циклического алгоритма с продлением особым образом, уже не содержит в своей окрестности оптимального значения параметров управления. В противопоставление, конечно, с циклическим алгоритмом без продления.

В **заключении** приведены основные результаты, которые состоят в следующем:

1. построена строгая математическая модель тандема с циклическим алгоритмом управления и алгоритмом с продлением;

2. найдены условия существования стационарного распределения для цепи, включающей низкоприоритетную очередь;
3. найдены условия существования стационарного распределения для цепей, включающих промежуточную и первичные очереди;
4. разработана имитационная модель для изучения исходной системы;
5. на основе имитационной модели были подтверждены и расширены результаты, полученные теоретически.

Список публикаций по теме диссертации

1. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февр. — 2015. — С. 94–99.
2. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания при циклическом алгоритме с продлением // Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Международная конференция, Москва и Подмосковье, 20–22 мая. — 2015. — С. 126–129.
3. Kochegarov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue Fluctuations in Tandem of Queuing Systems Under Cyclic Control with Prolongations // DCCN. Ser. Communications in Computer and Information Science. 2016. — V. 601. — Pp. 268–279.
4. Kochegarov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Ser. Communications in Computer and Information Science. — 2016. — V. 678. — Pp. 210–221.
5. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. — 2017. — Выпуск 50. — С. 47–55.
6. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Изучение процесса управления потоками первичных требований в тандеме систем обслуживания с циклическим

- алгоритмом с продлением // Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19–23 июня 2017 г.) : Материалы : Под редакцией Ю.И. Журавлева. — М.: МАКС Пресс. — 2017. — С. 135–137.
7. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Анализ потоков первичных требований в тандеме при циклическом управлении с продлением // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября – 3 октября 2017 г.) – Томск: Изд-во НТЛ. — 2017. — Ч. 1. — С.81–87.
 8. Kochegarov V., Zorine A. Primary input flows in a tandem under prolongable cyclic service // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN-2017. — 2017. — Pp. 517–525.
 9. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2018. — № 2. — С. 49–74.
 10. Kochegarov V., Zorine A. Asymptotic properties of service and control operations in tandem systems with cyclic algorithms with prolongation // доклад включен в программу конференции ORM-2018 (октябрь, 2018 г.).