1. Постановка задачи и построение математической модели

1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

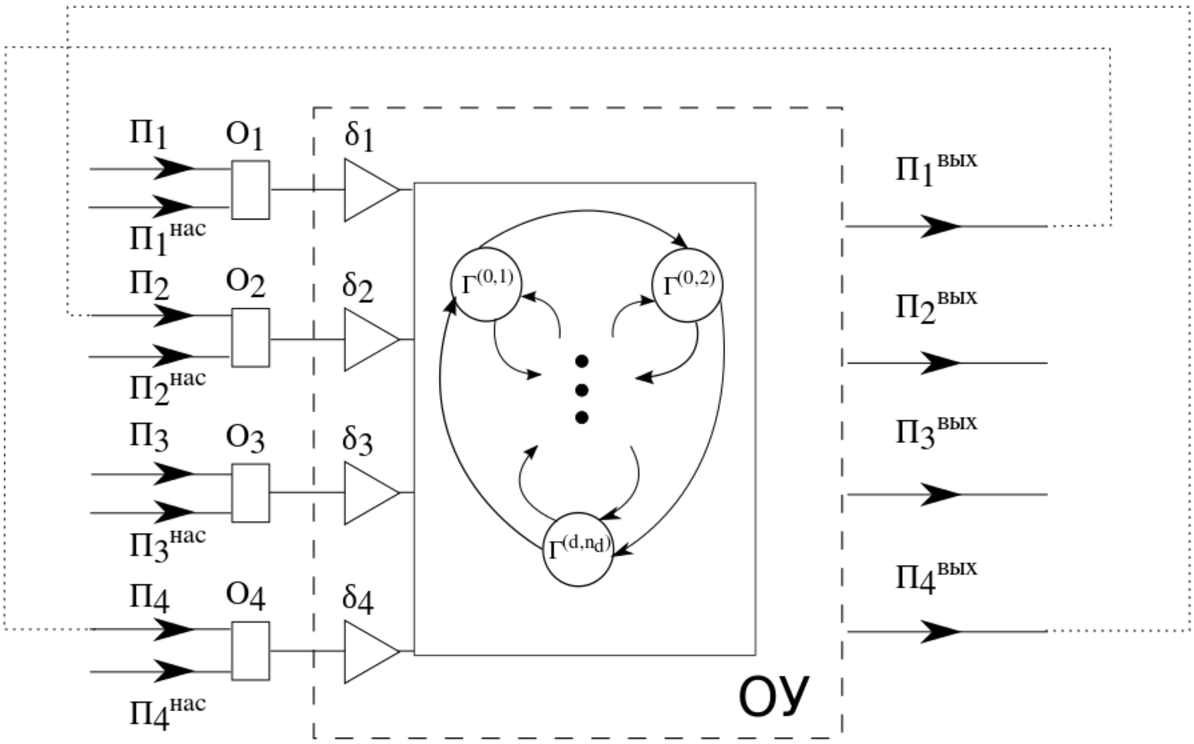

Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu \qquad (1)$$

которая предполагается аналитической при любом z таком, что $|z| < (1+\varepsilon), \varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν, $j \in \{1, 3\}$. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots n_k\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, $\ldots$, n_d. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Введем множества Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4. Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$ непересекающихся подмножеств.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} \colon r = 1, 2, \ldots n_k\}$ будем называть k-м циклом, $k = 1, 2, \ldots, d$ (Рис. 2). При $k = 0$ состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = 0, 1, \ldots, n_0$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r < n_k$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^{O} выходных, C_k^{I} входных и $C_k^{\mathrm{N}} = C_k \setminus (C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ того же цикла C_k. При $\Gamma^{(k,r)}$ принадлежащем множеству C_k^{O} прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L. В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L, то новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}}$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L, где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^{\mathrm{I}}$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}}$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^{\mathrm{O}} \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^{\mathrm{I}} \subset {}^3\Gamma$.

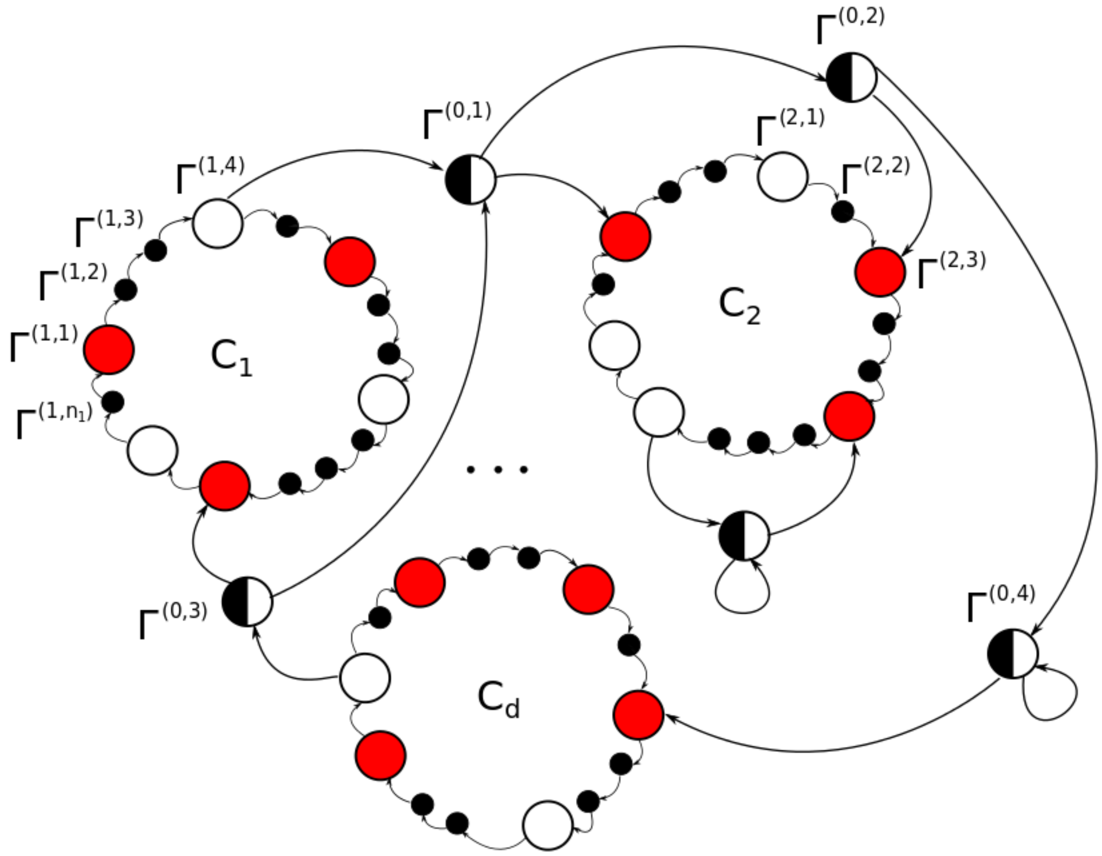

Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Рассмотрим введеные обозначения на примере Рис. 2. Примерами входных состояний являются $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^{\mathrm{I}}$ и $\Gamma^{(2,3)} \in C_2^{\mathrm{I}}$, выходных состояний — $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^{\mathrm{O}}$ и $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^{\mathrm{O}}$, нейтральных состояний — $\Gamma^{(1,2)}, \Gamma^{(1,3)}, \Gamma^{(1,n_1)} \in C_1^{\mathrm{N}}$ и $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^{\mathrm{N}}$. Состояния продления представлены на графе вершинами $\Gamma^{(0,1)}$, $\Gamma^{(0,2)}$, $\Gamma^{(0,3)}$ и $\Gamma^{(0,4)}$. Далее, отображение $h_1(\cdot)$ на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние $\Gamma^{(1,4)}$ в число 1 — номер состояния продления $\Gamma^{(0,1)}$, то есть $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$. Аналогично $h_2(1) = 2$, $h_2(2) = 4$ и $h_2(3) = 1$. Примером отображения $h_3(\cdot)$ является $h_3(2) = \Gamma^{(2,3)}$.

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, x) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r\oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\text{O}} \\ \Gamma^{(k, r\oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\text{O}} \text{ и } x > L \\ \Gamma^{\left(k, h_1(\Gamma^{(k,r)})\right)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\text{O}} \text{ и } x \leqslant L \\ \Gamma^{\left(0, h_2(r)\right)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } x \leqslant L \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } x > L \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j \in \{1, 2, 3\}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Пусть ${}^1\Gamma = \Gamma^{\text{I}} \cup \Gamma^{\text{III}}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^{\text{I}} \cup \Gamma^{\text{II}}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{\text{III}} \cup \Gamma^{\text{IV}}$. Тогда поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$, и будет содержать 0 требований в противном случае: $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$. Пусть Z_+ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in Z_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1 - p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней средой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1, Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1, проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью ($p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\widetilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в

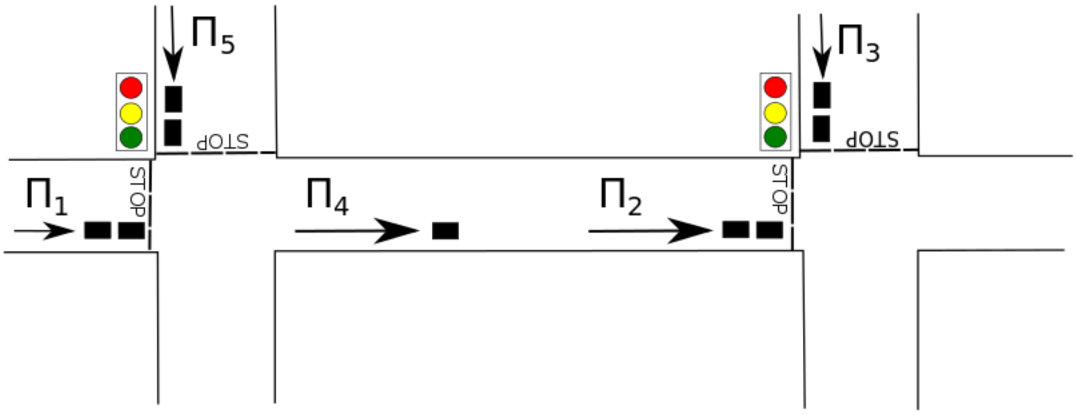

Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

течение времени $\widetilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_1 (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\widetilde{T}^{(2,1)}$, $\widetilde{T}^{(2,2)}$ и $\widetilde{T}^{(2,3)}$.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1–го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2–го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина s). Здесь T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определнности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4. За начальное состояние объединенной системы примем $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, то

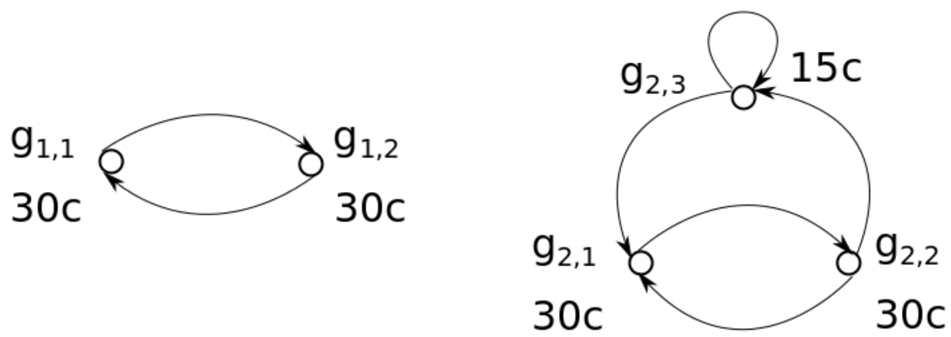

Рис. 4. Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

есть первый перекресток находится в состоянии $g_{1,1}$, второй — в состоянии $g_{2,1}$, и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами $s = 0$ и $t = 0$). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$. Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние $g_{2,1}$, так и в состояние продления $g_{2,3}$. Таким образом следущим состоянием тандема будет либо опять $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, либо $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следущий список всех возможных состояний системы:

$$
\begin{array}{rrr}
(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,4)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(4,3)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(3,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(2,2)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(2,4)}. &
\end{array}
$$

В соответсвии с приведенными выше обозначениями, множества C_1, C_2, C_3, C_4, а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут $C_1^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(1,1)}\}$, $C_2^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(2,1)}\}$, $C_3^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(3,1)}\}$ и $C_4^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(4,1)}\}$. Множествами выходных состояний будут $C_1^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(1,2)}\}$, $C_2^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(2,4)}\}$, $C_3^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(3,2)}\}$

и $C_4^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(4,4)}\}$. Функции $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ и $h_3(\cdot)$ задаются поточечно:

$$h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4 \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)} \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (ссылка на федоткина, Зорина А.В. киевский сборник твмс). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4; 5) устройство по переработки информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; 6) внутренняя память обслуживающего устройства — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\dots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1};\tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in Z_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in Z_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in Z_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, $j \in \{1,2,3,4\}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \tag{3}$$

где отображение $h(\cdot,\cdot)$ определено в (2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, удобно ввести функцию

$h_T(\cdot,\cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{4}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1,2,3\},$$

то из (4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{5}$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему (1)) следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \tag{6}$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geqslant 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i, (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}))$. Введем функции $\varphi_1(\cdot,\cdot)$, $\varphi_3(\cdot,\cdot)$ из разложений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x,t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где $f_j(z)$ определены в (1), $j \in \{1,3\}$. Функция $\varphi_j(x,t)$ есть вероятность поступления $x = 0,\ 1,\ \ldots$ требований по потоку Π_j за время $t \geqslant 0$. Функция $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ задается формулой

$$\psi(k; x, u) = C_x^k u^k (1-u)^{x-k}$$

и по своему смыслу есть вероятность поступления k требований по потоку Π_2, при условии, что очередь O_4 содержит x требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u = p_{k,r}$.

При фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}, (x_1, x_2, x_3, x_4))$ вероятность одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1+a_1\}}, \qquad (7)$$

где $0 \leqslant a_2 \leqslant x_2$, a_1, a_3, $a_4 \in Z_+$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

и

$$\widetilde{\ell}(k,r,j) = \begin{cases} \ell_{k,r,j}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad j \in \{1,2,3\}.$$

Поскольку для $j \in \{1,2,3\}$ поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ содержит ненулевое количество требований только в случае обслуживания потока Π_j, то вероятность того, что $\xi_{j,i} = 0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$. По тем же причинам вероятность того, что $\xi_{j,i} = \ell_{\tilde{k},\tilde{r},j}$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$. Таким образом, вероятность одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}, (x_1, x_2, x_3, x_4))$ есть

$$\delta_{b_1, \tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2, \tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3, \tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \qquad (8)$$

Построим теперь вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, чтобы можно было рассматривать введеные величины как случайные величины на этом пространстве. А именно, докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть $\gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0})$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\overline{\xi}_{j,i} = \overline{\xi}_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$, $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1,2,3,4\}$, такие, что $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x_0$, выполняются соотношения (3), (5), (6) и для любых $a_j, b_j \in Z_+$ $x \in Z_+^4$ верно равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\omega\colon \eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4; \xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4 | \\ |\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\} = \mathbf{P}\{\omega\colon \eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4 | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\} \times \\ \times \mathbf{P}\{\omega\colon \xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4 | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\} \quad (9) \end{aligned}$$

причем первый и второй множитель находятся из соотношений (7) и (8) соответственно.

Доказательство. В соответствии с теоремой Ионеску Тулчи (ссылка) для доказательства достаточно задать на $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ вероятностную меру $P_0(\cdot)$ и далее, считая для $0 < i \leqslant n$ и каждого набора элементарных исходов $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$ заданной на $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ вероятностную меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \cdot)$, задать на $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \cdot)$, причем для любого множества $B \in \mathcal{F}_i$ функции $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, B)$ должны быть измеримыми функциями от $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$. Тогда для $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ и $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ будет существовать единственная вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ такая, что для любого $i \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i), \tag{10}$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i) = \int\limits_{A_0} P_0(d\omega_0) \int\limits_{A_1} P(\omega_0, d\omega_1) \ldots \int\limits_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, d\omega_i), \tag{11}$$

$i \geqslant 0$, $A_i \in \mathcal{F}_i$.

Итак, за описание элементарного исхода $\omega_i \in \Omega_i$ для произвольного $i \geqslant 0$ примем набор $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$, $\omega_{j,i} \in Z_+$. Таким образом, $\Omega_i = Z_+^3$ и в качестве σ-алгебры $\mathcal{F}_i$ возьмем множество всех подмножеств Ω_i: $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_{3,0})$. Тогда поскольку множество Ω_0 счетно, определим вероятностную меру $P_0(\cdot)$ на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)})). \tag{12}$$

Определим величины

$$\Gamma_0 = \gamma_0, \quad \varkappa_{j,0} = x_{j,0}, \quad \xi_{j,0}(\omega_0) = \widetilde{l}(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \tag{13}$$

$$\eta_{j,0} = \omega_{j,0}, \quad \eta_{4,0} = \min\{\xi_{1,0}, x_{1,0} + \eta_{1,0}\}, \quad \xi_{4,0} = x_{4,0}. \tag{14}$$

где $j \in \{1, 2, 3\}$. Теперь, предполагая заданными на $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ вероятностные меры $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \cdot)$, заданными величины $\Gamma_i, \varkappa_{j,i}, \xi_{j,i}, \eta_{j,i}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и фиксируя набор $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$, определим на $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \cdot)$. Пусть

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(k^*,r^*)} = h(\Gamma_n, \varkappa_{3,n}), \quad \varkappa_{j,n+1} = \max\{0, \varkappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}, \tag{15}$$

$$\varkappa_{4,n+1} = \varkappa_{4,n} + \eta_{4,n} - \eta_{2,n}, \quad \xi_{j,n+1} = \widetilde{l}(k^*, r^*, j), \tag{16}$$

$$\eta_{j,n+1} = \omega_{j,n+1}, \quad \eta_{4,n+1} = \min\{\xi_{1,n+1}, \varkappa_{1,n+1} + \eta_{1,n+1}\}, \quad \xi_{4,n+1} = \varkappa_{4,n+1}, \tag{17}$$

для $j \in \{1,2,3\}$. Тогда

$$P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \{\omega_{n+1}\colon \omega_{1,n+1} = a_1, \omega_{2,n+1} = a_2, \omega_{3,n+1} = a_3\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{2,n}, p_{k^*,r^*}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})). \quad (18)$$

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ построено.

Теперь докажем, что введеные с помощью (13) – (17) случайные элементы $\Gamma_i(\omega)$ и случайные величины $\varkappa_{j,i}(\omega)$, $\eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i}$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1,2,3,4\}$ удовлетворяют условиям теоремы. Из построения следует, что случайные элементы Γ_i удовлетворяют (3), а случайные величины $\varkappa_{j,i}$ удовлетворяют (5) и (6), $j \in \{1,2,3,4\}$. Что касается $\xi_{j,i}$ и $\eta_{j,i}$, то для них найдем явное выражение для условной вероятности $\mathbf{P}\{\omega\colon \eta_{j,i}(\omega) = a_j, j \in \{1,2,3,4\} | \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega) = x\}$. Пусть $\Gamma^{\left(k_1^*,r_1^*\right)} = h(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x)$. Учитывая (16) и (17), распишем по определению условной вероятности:

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}, a_4 = \min\{\tilde{\ell}(k_1^*, r_1^*, 1), x_1 + a_1\}; \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \\ \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = x\} / \mathbf{P}\{\omega\colon \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = x\} = \\ = \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(k^*,r^*,1), x_1+a_1\}} \times \mathbf{P}\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}; \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \\ \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = x\} / \mathbf{P}\{\omega\colon \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = x\}.$$

Далее из (10) и (11) получим выражение для знаменателя последней дроби

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = x\} = \\ = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_i = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i = x}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\})$$

и числителя

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}; \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = x\} = \\ = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_i = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i = x}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\ \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \{\omega_i\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{k_1^*,r_1^*}) \times \\ \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_i = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i = x}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\})$$

После сокращения одинаковых сумм получим:

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \eta_{j,i}(\omega) = a_j, j \in \{1,2,3,4\} | \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega) = x\} =$$
$$= \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{k_1^*, r_1^*}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(k_1^*, r_1^*, 1), x_1 + a_1\}},$$

что в точности совпадает с (7). Аналогичным образом вероятность одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при условии $\Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(k_1,r_1)}$ и $\varkappa_i(\omega) = x$ совпадает с (8). □

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для исследования состояния обслуживающего устройства и длины всех очередей.

1.3. Марковское свойство последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$

Теперь перейдем к вопросу о марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$. Введем следующие события:

$$A_i(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) = \{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3\} \bigcap \{\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{2,i} = x_2, \varkappa_{4,i} = x_4\}, \quad (19)$$
$$B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) = \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3\} \bigcap \{\xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\} \quad (20)$$

Из теоремы (1.1) следует, что

$$P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) =$$
$$P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | A_i(k_i; r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})) \quad (21)$$

Далее, в силу того, что потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, входные потоки Π_1, Π_2, Π_3 условно независимы между собой, верно следующее соотношение:

$$P(B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$=P(\eta_{1,i}=b_1|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times P(\eta_{3,i}=b_3|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times$$
$$P(\eta_{2,i}=b_2|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times P(\xi_{1,i}=y_1|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times$$
$$\times P(\xi_{2,i}=y_2|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times P(\xi_{3,i}=y_3|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}) \quad (22)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i});i\geqslant 0\}$.

Теорема 1.2. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0,\varkappa_{1,0},\varkappa_{2,0},\varkappa_{3,0},\varkappa_{4,0})$ последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i});i\geqslant 0\}$ является цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|A_i(k_i;r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i})) \quad (23)$$

Распишем сначала левую часть равенства (23). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий $B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)$ есть достоверное событие, $\cup_{b,y}B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)=\Omega$, получим

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$=\sum_{b,y}P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$=\sum_{b,y}P(B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))\times$$
$$\times P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3))$$
$$(24)$$

Беря во внимание (3), (5) и (6) найдем второй множитель:

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)) =$$

$$= P\Big(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4\Big|\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})\bigcap$$

$$\bigcap\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\}\bigcap$$

$$\bigcap\{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\}\Big) =$$

$$= P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1,$$

$$\max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4 \mid$$

$$\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t\{k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\}\bigcap\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\}\bigcap$$

$$\bigcap\{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\}\Big) =$$

$$= P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1,$$

$$\max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4\ \big), \tag{25}$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (22), (24) и (25) получаем выражение для левой части равенства (23):

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})) =$$

$$= \sum_{b,y} P(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3|\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i})\times$$

$$\times P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1,$$

$$\max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4\ \big) \tag{26}$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях $\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})$, поэтому рассуждения для правой части (23) будут аналогичными:

$$
\begin{aligned}
&P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|A_i(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i})) = \\
&\qquad = \sum_{b,y} P(B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|A_i(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}))\times \\
&\quad \times P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|A_i(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i})\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)) = \\
&= \sum_{b,y} P(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times \\
&\qquad \times P\Big(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_{1,i+1}=x_1,\varkappa_{2,i+1}=x_2,\varkappa_{3,i+1}=x_3,\varkappa_{4,i+1}=x_4\Big| \\
&\qquad \{\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\}\bigcap \\
&\qquad \bigcap\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3\}\Big) =
\end{aligned}
$$

откуда опять в силу (3), (5) и (6) получаем

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{b,y} P(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times \\
&\qquad \times P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})=\Gamma^{(k,r)},\max\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\}=x_1, \\
&\max\{0,x_{2,i}+b_2-y_2\}=x_2,\max\{0,x_{3,i}+b_3-y_3\}=x_3,x_{4,i}+\min\{y_1,x_{1,i}+b_1\}-\eta_{2,i}=x_4\ \Big).
\end{aligned}
$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (23) совпадают, следовательно равенство верно и последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i});i\geqslant 0\}$ является цепью Маркова. $\square$