

# 1. Постановка задачи и построение математической модели

## 1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

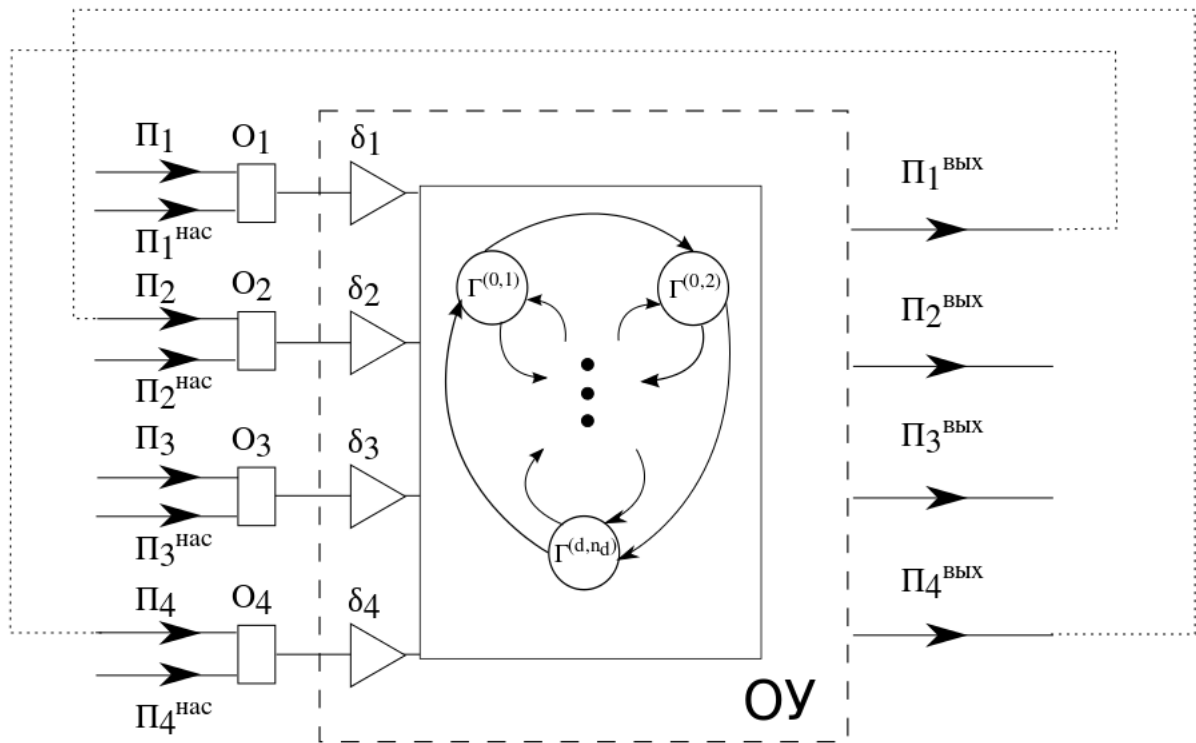


Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ . Требования по потоку  $\Pi_j$  становятся в соответствующую очередь  $O_j$  с неограниченной вместимостью,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  дисциплина очереди  $O_j$ , поддерживаемая устройством  $\delta_j$ , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди  $O_4$  будет описана ниже. Входные потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  будем обозначать  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ , а распределение числа заявок в груп-

пе по потоку  $\Pi_j$  будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu} \quad (1)$$

которая предполагается аналитической при  $\forall z: |z| < (1 + \varepsilon), \varepsilon > 0$  и  $p_{\nu}^{(j)} > 0$ . Величина  $p_{\nu}^{(j)}$  определяет вероятность того, что по потоку  $\Pi_j$  число требований в группе равно  $\nu$ ,  $j \in \{1, 3\}$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_1$  поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток  $\Pi_4$ . Потоки  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний  $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)}: k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$  с заданными натуральными числами  $d, n_0, n_1, \dots, n_d$ . В каждом состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающее устройство находится в течение времени  $T^{(k,r)}$ . Введем множества  $\Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$  и  $\Gamma^{IV}$  следующим образом. В состоянии  $\gamma \in \Gamma^I$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{II}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{III}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_3$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{IV}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_3$  и  $O_4$ . Тогда множество  $\Gamma$  есть объединение  $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$  непересекающихся подмножеств. Пусть  ${}^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}$ ,  ${}^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}$ ,  ${}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ . Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний  $C_k = \{\Gamma^{(k,r)}: r = 1, 2, \dots, n_k\}$  будем называть  $k$ -м циклом,  $k = 1, 2, \dots, d$  (Рис. 2). При  $k = 0$  состояние вида  $\Gamma^{(0,r)}$  будем называть состоянием продления,  $r = 0, 1, \dots, n_0$ . Положим  $r \oplus_k 1 = r + 1$  для  $r < n_k$  и  $r \oplus_k 1 = 1$  при  $r = n_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ . В цикле  $C_k$  выделим подмножества  $C_k^O$  выходных,  $C_k^I$  входных и  $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$  нейтральных состояний. Тогда после состояния  $\Gamma^{(k,r)} \notin C_k^O$  обслуживающее устройство переходит в состояние  $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$  того же цикла  $C_k$ . При  $\Gamma^{(k,r)}$  принадлежащем множеству  $C_k^O$  прибор переходит в состояние  $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  в момент переключения больше заданного порога  $L$ . В противном случае, то есть если число требований в очереди  $O_3$  меньше либо равно  $L$ , то новое состояние прибора будет состоянием продления  $\Gamma^{(0,r_1)}$ , где  $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$  и  $h_1(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$  во множество  $\{1, 2, \dots, n_0\}$ . После состояния  $\Gamma^{(0,r)}$  выбирается состояние того же вида  $\Gamma^{(0,r_2)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  меньше  $L$ , где  $r_2 = h_2(r)$  и  $h_2(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на себя; в противном случае включается состояние  $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$ , где  $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$  и  $h_3(\cdot)$  —

заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на множество  $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$ . Считается, что все состояния продления  $\Gamma^{(0,r)} \in {}^2\Gamma$ , все множества  $C_k^O \subset {}^2\Gamma$  и  $C_k^I \subset {}^3\Gamma$ .

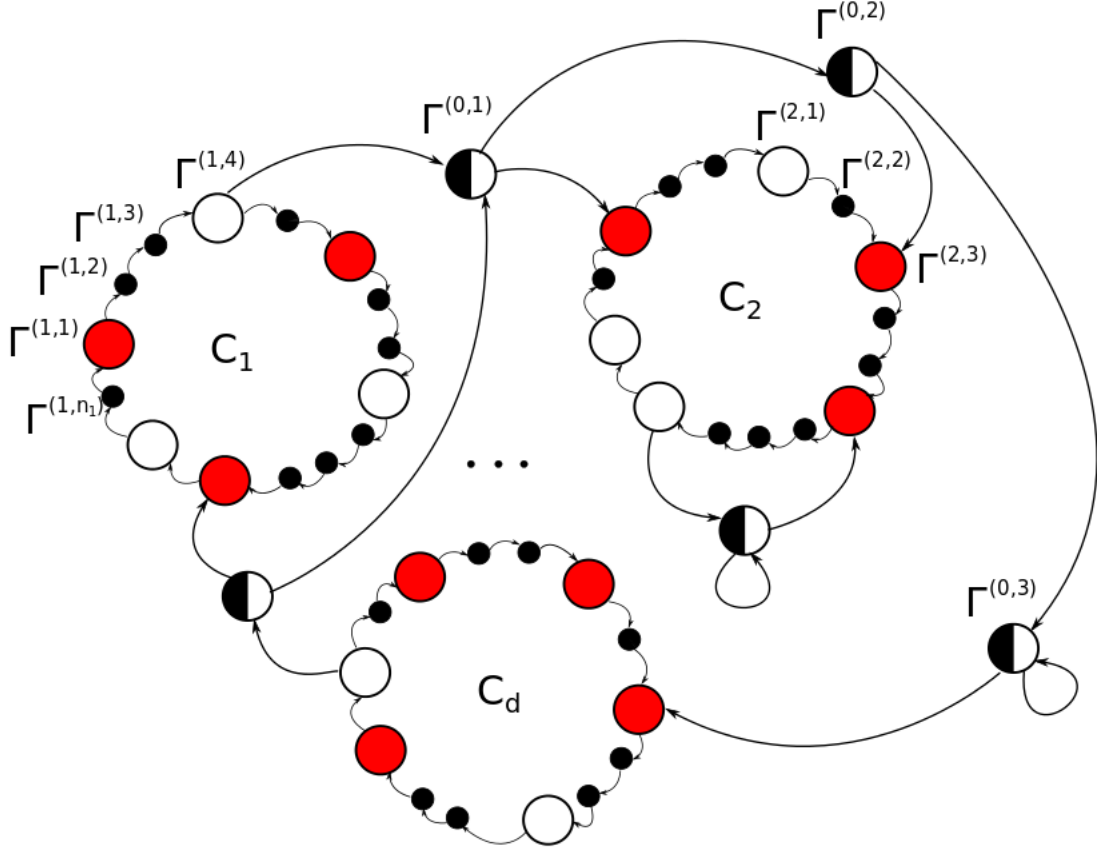


Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины — выходные вершины, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным черным вершинам соответствуют состояния продления

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для  $j \in \{1, 2, 3\}$  еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Пусть поток насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , будет содержать неслучайное число  $\ell_{k,r,j}$  требований, обслуженных в течение времени  $T^{(k,r)}$ , если  $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$ , и будет содержать 0 требований в противном случае:  $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$ . Пусть  $Z_+$  — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди  $O_4$  находится  $x \in Z_+$  требований, поток насыщения  $\Pi_4^{\text{нас}}$  определим как поток, содержащий все  $x$  требова-

ний. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства  $\Gamma^{(k,r)}$  каждое требование из очереди  $O_4$  с вероятностью  $p_{k,r}$  и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь  $O_2$  потока  $\Pi_2$ . С вероятностью  $1 - p_{k,r}$  требование очереди  $O_4$  остается в ней до следующего такта.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (Рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней сре-

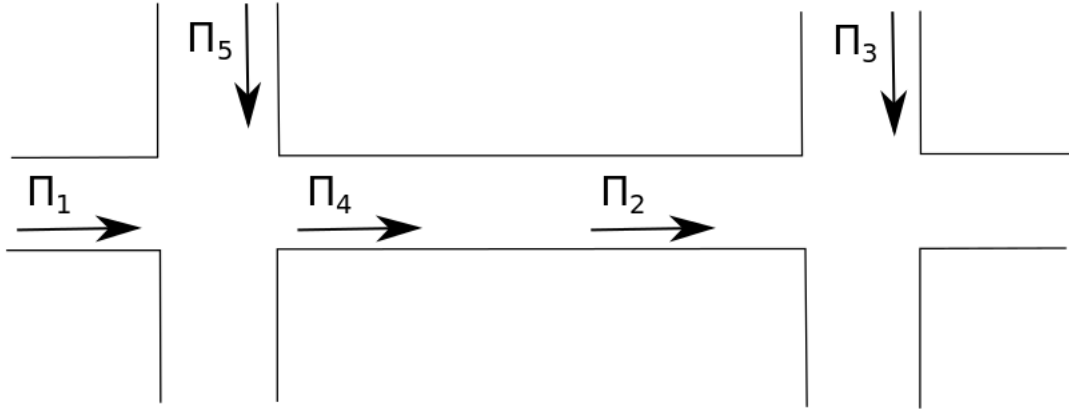


Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

дой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_5$  на первом перекрестке, а также поток  $\Pi_3$  на втором. Каждая машина из потока  $\Pi_1$ , проезжая первый перекресток, становится в очередь  $O_4$  потока  $\Pi_4$  и затем с некой вероятностью ( $p_{k,r}$  для состояния  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди  $O_4$  до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди  $O_4$  успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь  $O_2$  и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния: в первом состоянии машины потока  $\Pi_1$  пропускаются фиксированное количество времени  $\tilde{T}^{(1,1)}$  («зеленый» свет для  $\Pi_1$ ); во втором — простаивают в течение времени  $\tilde{T}^{(1,2)}$  («красный» свет для  $\Pi_1$ ). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: имеется два состояния обслуживания потока  $\Pi_2$ . Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока  $\Pi_3$ , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока  $\Pi_2$  длина очереди  $O_3$  не превосходит уровня  $L$ . Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть  $\tilde{T}^{(2,1)}$ ,  $\tilde{T}^{(2,2)}$  и  $\tilde{T}^{(2,3)}$ .

Продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор  $(g^{(1)}, g^{(2)}, f, t)$ , где  $g^{(j)}$  — состояние  $j$ -го перекрестка,  $f$  — номер сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и  $t$  — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка. Тогда количество различных состояний не будет превышать величины  $2 \times 3 \times 3 \times T$ , где  $T$  — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии, поскольку первый перекресток может находиться только в одном из двух состояний, а второй — в одном из трех.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток  $\Pi'$  не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

## 1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная на содержательном уровне в предыдущем разделе система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (ссылка на федоткина, Зорина А.В. киевский сборник твмс). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ ; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ ; 4) внешняя память — очереди  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ; 5) устройство по переработки информации внешней памяти — устройство по поддержанию дисциплины очереди  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; 6) внутренняя память обслуживающего устройства — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ . Координатой блока является номер этого блока на схеме. Для задания информации блоков введем следующие величины и укажем множество возможных состояний.

В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$  моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим  $\Gamma_i$  из множества  $\Gamma$  состояние обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ , ко-

личество  $\varkappa_{j,i} \in Z_+$  требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i$ , количество  $\eta_{j,i} \in Z_+$  требований, поступивших в очередь  $O_j$  по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\xi_{j,i} \in Z_+$  требований по потоку насыщения  $\Pi_j^{\text{sat}}$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\bar{\xi}_{j,i} \in Z_+$  реально обслуженных требований по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ .

Нелокальное описание входных полюсов первого и второго типа состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенной дискретной компоненты

### 1.3. Свойства условных распределений

Все рассматриваемые в этой работе случайные элементы определяются на общем вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  элементарных исходов  $\omega \in \Omega$  с вероятностной мерой  $P(A)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ .

Введем следующие случайные величины и элементы,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ :

- количество  $\varkappa_{j,i} \in Z_+$  требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i$ ;
- состояние обслуживающего устройства  $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(n)}\}$  в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ ;
- количество  $\eta_{j,i}$  требований, поступивших в очередь  $O_j$  по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ ;
- количество  $\xi_{j,i}$  требований по потоку насыщения  $\Pi_j^{\text{sat}}$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ ;
- количество  $\bar{\xi}_{j,i}$  реально обслуженных требований по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ .

Тогда для  $j \in \{1, 2, 3\}$  имеем

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad \varkappa_{j,i+1} = \max \{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad \bar{\xi}_{j,i} = \min \{\xi_{j,i}, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}\} \quad (2)$$

и

$$\eta_{2,i} = \bar{\xi}_{4,i}, \quad \eta_{4,i} = \bar{\xi}_{1,i}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \bar{\xi}_{1,i} - \bar{\xi}_{4,i} \quad (3)$$

Также для определения длительности  $T_i$  состояния обслуживающего устройства в течение  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ , удобно ввести функцию  $h_T(\cdot, \cdot)$ :

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(r')}, \quad \text{где } \Gamma^{(r')} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}). \quad (4)$$

Обозначим через  $\varphi_j(x, t)$ ,  $j \in \{1, 3\}$ , условную вероятность того, что за время

$t > 0$  по потоку  $\Pi_j$  поступит ровно  $b \in Z_+$  требований:

$$P\left(\eta_{j,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x\right) = \varphi_j(b, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x)). \quad (5)$$

Учитывая закон распределения процесса Пуассона и количества требований в пачках, величины  $\varphi_j(x, t)$  могут быть найдены из соотношений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, t) = \exp \left\{ \lambda_j t \left( \sum_{b=1}^{\infty} z^b \pi(b, j) - 1 \right) \right\}. \quad (6)$$

Для потоков насыщения имеем следующие соотношения:

$$P\left(\xi_{j,i} = 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x\right) = 1, \quad \Gamma_{i+1} \notin {}^j\Gamma, \quad (7)$$

$$P\left(\xi_{j,i} = \ell_{r',j} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x\right) = 1, \quad \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r')} \in {}^j\Gamma, \quad (8)$$

где  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $x \in Z_+$ .

Введем для  $0 < u \leq 1$  и  $0 \leq k \leq x$  величину

$$\psi(k, x, u) = C_x^k u^k (1 - u)^{x-k}. \quad (9)$$

Поскольку требования из очереди  $O_4$  независимо друг от друга с вероятностью  $p_{k,r}$  на выходе системы поступают в очередь  $O_2$ , то количество требований в выходном потоке  $\Pi_4^{\text{вых}}$  определяется по биномиальному закону распределения:

$$P\left(\bar{\xi}_{4,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{4,i} = x, \varkappa_{3,i} = \tilde{x}\right) = \psi(b, x, p_{r'}) \quad \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r')}, \quad 0 \leq b \leq x. \quad (10)$$

Введем следующие события:

$$A_i(r; x_1; x_2; x_3; x_4) = \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3 \right\} \cap \left\{ \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{2,i} = x_2, \varkappa_{4,i} = x_4 \right\} \quad (11)$$

$$B_i(b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) = \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3 \right\} \cap \left\{ \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3, \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \right\} \quad (12)$$

В соответствии с описанной структурой системы, количество требований пришедших по потокам  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_1^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_2^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_3^{\text{нас}}$  и  $\Pi_4^{\text{вых}}$  за  $(i+1)$ -ый такт зависит только от состояния обслуживающего устройства и размера очередей в момент  $\tau_i$ . Поэтому условные распределения рассматриваемых в системе потоков, учитывая все «про-

шное» системы удовлетворяют соотношениям

$$P \left( B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t (r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\ P \left( B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \middle| A_i (r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \right) \quad (13)$$

Далее, в силу того, что потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_2^{\text{нас}}$ ,  $\Pi_3^{\text{нас}}$ , входные потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$ , а также выходной поток  $\Pi_4^{\text{вых}}$  условно независимы между собой, верно следующее соотношение:

$$P \left( B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t (r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\ = P \left( \eta_{1,i} = b_1 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times P \left( \eta_{3,i} = b_3 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times \\ P \left( \xi_{1,i} = y_1 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times P \left( \xi_{2,i} = y_2 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times \\ P \left( \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times P \left( \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right) \quad (14)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности  $\left\{ (\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}), i \right\}$

**Теорема 1.1.** При заданном распределении начального вектора  $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \varkappa_{3,0}, \varkappa_{4,0})$  последовательность  $\left\{ (\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}), i \geq 0 \right\}$  является цепью Маркова.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно показать, что

$$P \left( A_{i+1} (r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t (r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\ P \left( A_{i+1} (r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| A_i (r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \right) \quad (15)$$

Распишем сначала левую часть равенства (15). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий  $B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4)$  есть достоверное событие,  $\cup_{b,y} B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) = \Omega$  получим



$$\begin{aligned}
& P \left( A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\
& = \sum_{b,y} P \left( A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \bigcap B_i(b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\
& = \sum_{b,y} P \left( B_i(b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) \times \\
& \times P \left( A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \bigcap \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap B_i(b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \right) \\
& \tag{16}
\end{aligned}$$

Беря во внимание (2) и (3), найдем второй множитель:

$$\begin{aligned}
& P \left( A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap B_i(b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \right) = \\
& = P \left( \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \middle| \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap \right. \\
& \quad \bigcap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right\} \bigcap \\
& \quad \left. \bigcap \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \right\} \right) = \\
& = P \left( h \left( \Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(k,r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \max \{0, x_{2,i} + y_4 - y_2\} = x_2, \max \{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \bar{\xi}_{4,i} = x_4 \mid \\
& \quad \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right\} \bigcap \\
& \quad \left. \bigcap \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \right\} \right) = \\
& = P \left( h \left( \Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(k,r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \max \{0, x_{2,i} + y_4 - y_2\} = x_2, \max \{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \bar{\xi}_{4,i} = x_4 \left. \right), \\
& \tag{17}
\end{aligned}$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (14), (16) и (17) получаем выражение для левой части равенства (15):

$$\begin{aligned}
& P \left( A_{i+1} (r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t (r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\
& = \sum_{b,y} P \left( \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times \\
& \quad \times P \left( h \left( \Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(k,r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \left. \max \{0, x_{2,i} + y_4 - y_2\} = x_2, \max \{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \bar{\xi}_{4,i} = x_4 \right) \\
& \hspace{25em} (18)
\end{aligned}$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях

$\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t (r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})$ , поэтому рассуждения для правой части (15) будут аналогичными:

$$\begin{aligned}
& P \left( A_{i+1} (r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| A_i (r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \right) = \\
& = \sum_{b,y} P \left( B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \middle| A_i (r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \right) \times \\
& \quad \times P \left( A_{i+1} (r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| A_i (r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \bigcap B_i (b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4) \right) = \\
& = \sum_{b,y} P \left( \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times \\
& \quad \times P \left( \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \middle| \right. \\
& \quad \left. \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right\} \bigcap \right. \\
& \quad \left. \bigcap \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \right\} \right) =
\end{aligned}$$

откуда опять в силу (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned}
& = \sum_{b,y} P \left( \eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3; \bar{\xi}_{4,i} = y_4 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times \\
& \quad \times P \left( h \left( \Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(k,r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \left. \max \{0, x_{2,i} + y_4 - y_2\} = x_2, \max \{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \bar{\xi}_{4,i} = x_4 \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (15) совпадают, следовательно

равенство верно и последовательность  $\left\{ \left( \Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i} \right), i \geq 0 \right\}$  является цепью Маркова.  $\square$