ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТАНДЕМА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ С ПРОДЛЕНИЕМ

В.М. Кочеганов, А.В. Зорин

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения
(г. Минск, Республика Беларусь)

Содержательная постановка задачи

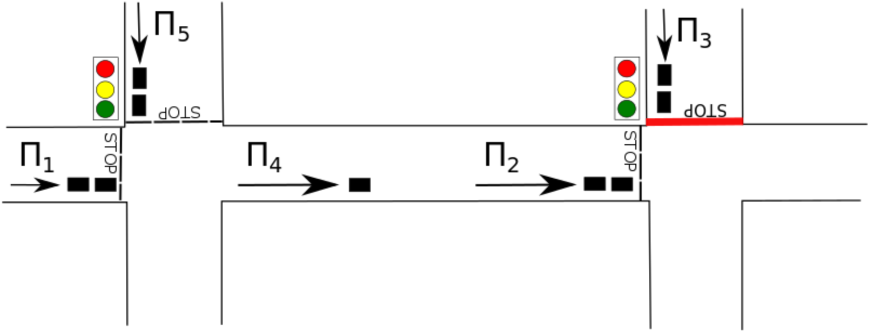

Рис.: Тандем перекрёстков

Тандем перекрестков как управляющая СМО

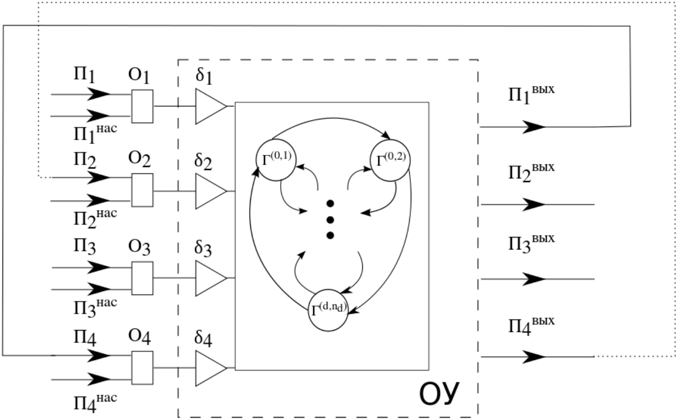

Рис.: Структурная схема системы массового обслуживания

Параметры системы

Входные потоки Π_1 и Π_3 — **неординарные пуассоновские** потоки с интенсивностями λ_1 и λ_3 соответственно.
Распределение числа заявок в группе по потоку Π_j, $j \in \{1, 3\}$, имеет **производящую функцию**:

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu.$$

Пусть обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$. Тогда время нахождения в этом состоянии неслучайно и равно $T^{(k,r)}$.
Количество требований, пришедших за это время по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, равно $\ell(k, r, j)$.

Кибернетический подход I

Представлен, например, в следующих работах:

- Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики / С. В. Яблонский // Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз. 1959. С. 7–38.
- Ляпунов А. А. Теоретические проблемы кибернетики / А. А. Ляпунов, С. В. Яблонский // Проблемы кибернетики. Вып. 9. М.: Физматгиз. 1963. С. 5–22
- Федоткин М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические проблемы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. 1996. С. 51–70.
- Зорин А. В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А. В. Зорин, М. А. Федоткин. // Автоматика и телемеханика. № 7, 2005. С. 102–111.

Кибернетический подход II

Основные принципы кибернетического подхода:

1. **принцип дискретности** актов функционирования управляемой системы обслуживания во времени;
2. **принцип совместного рассмотрения** поблочного строения управляющей системы обслуживания и ее функционирования во времени.
3. **принцип нелокальности** при описании поблочного строения управляемой системы обслуживания;

Кибернетический подход III

Выбор моментов наблюдения

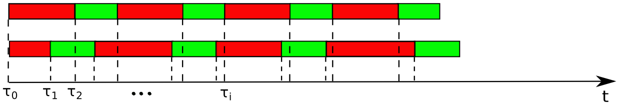

Рис.: Шкала моментов наблюдения

Кибернетический подход IV

Основными составляющими кибернетической системы являются:

- **схема**
  - внешняя среда
  - входные и выходные полюса
  - внешняя и внутренняя память
  - устройства по переработке информации во внутренней и внешней памяти
- **информация** — набор состояний среды, очередей в накопителях, обслуживающего устройства, потоков насыщения и потоков обслуженных требований
- **координата** блока — номер блока на схеме
- **функция** — обслуживание потоков по заданному алгоритму

Кодирование информации

Пусть Z_+ — множество целых неотрицательных чисел.

- $\{e^{(1)}\}$ — множество состояний **внешней среды** (одно состояние)
- Z_+^4 — множество состояний **входных полюсов**
- Z_+^4 — множество состояний **выходных полюсов**
- $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots n_k\}$ — множество состояний **внутренней памяти**
- Z_+^4 — множество состояний **внешней памяти**
- $\{r^{(1)}\}$ — множество состояний **устройства по переработке информации во внешней памяти** (одно состояние)
- граф переходов (будет описан ниже) описывает **устройство по переработке информации во внутренней памяти**

Необходимые случайные величины

- $\tau_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 0,\, 1,\, \ldots$ — момент смены состояния обслуживающего утройства;
- $\eta_{j,i} \in Z_+$ — число требований потока Π_j, поступивших за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\xi_{j,i} \in Z_+$ — число требований потока насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\varkappa_{j,i} \in Z_+$ — число требований в очереди O_j в момент τ_i;
- $\Gamma_i \in \Gamma$ — состояние обслуживающего устройства в момент τ_i;
- $\bar{\xi}_{j,i} \in Z_+$ — число требований выходного потока $\Pi_j^{\text{вых}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$,

для $j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$.

Граф переходов I

Изменение состояний обслуживающего устройства: $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$.

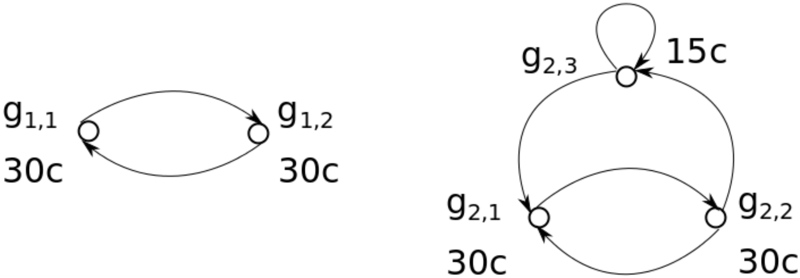

Рис.: Числовой пример. Времена

Граф переходов II

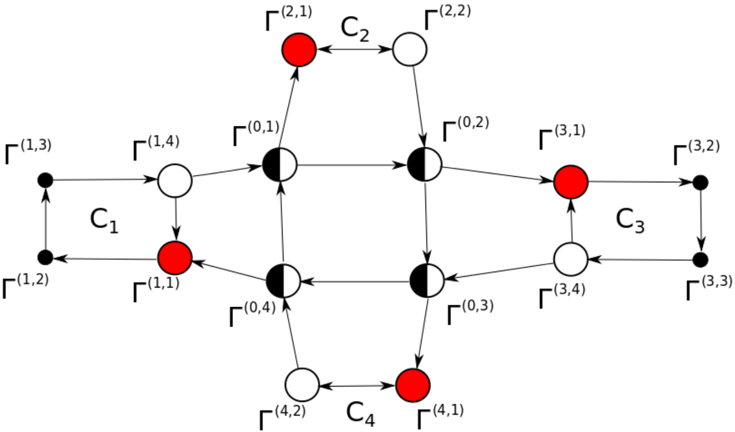

Рис.: Числовой пример. Граф переходов (отображение $h(\cdot,\cdot)$).

Граф переходов III

Таким образом,

$$\Gamma = \Big(\bigcup_{k=1}^{d} C_k\Big) \bigcup \{\Gamma^{(0,1)}, \Gamma^{(0,2)}, \ldots, \Gamma^{(0,n_0)}\}, \quad C_k = C_k^{\mathrm{I}} \cup C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{N}}.$$

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}; \\ \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y > L; \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y \leqslant L; \\ \Gamma^{(0, h_2(r))}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leqslant L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases}$$

где

$$h_1(\cdot)\colon \bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}} \to N_0, \quad h_2(\cdot)\colon N_0 \to N_0, \quad h_3(\cdot)\colon N_0 \to \bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}},$$

и $N_0 = \{1, 2, \ldots, n_0\}$.

Рекуррентные соотношения

Функционирование системы подчиняется следующим функциональным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
\overline{\xi}_{j,i} &= \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, && j \in \{1,2,3\}, \\
\varkappa_{j,i+1} &= \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, && j \in \{1,2,3\}, \\
\varkappa_{j,i+1} &= \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, && j \in \{1,2,3\}, \\
\varkappa_{4,i+1} &= \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \\
\xi_{4,i} &= \varkappa_{4,i}, \\
\eta_{4,i} &= \min\{\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Свойства условных распределений I

Определим функции $\varphi_j(\cdot,\cdot)$, $j \in \{1,3\}$, и $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ из разложений:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\varphi_j(\nu,t) = \exp\{\lambda_j t(f_j(z)-1)\}, \quad \psi(k;y,u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}.$$

Пусть $a = (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$.
Тогда вероятность $\varphi(a,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ при условии $\nu_i = (\Gamma(k,r);x)$ есть

$$\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\times\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}})\times\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\times\delta_{a_4,\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}}, \tag{2}$$

где

$$\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)},x_3), \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если } i\neq j, \end{cases}.$$

и

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}).$$

Свойства условных распределений II

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$.
Тогда вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma(k, r); x)$ есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}. \tag{3}$$

где $\tilde{k}$ и $\tilde{r}$ такие, что $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$.

Полученные результаты I

Теорема 1. *Пусть*

$$\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma, \quad x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$$

фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ *и заданные на нем случайные величины* $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\overline{\xi}_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ *и случайные элементы* $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, *такие, что*

- *имеют место равенства* $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ *и* $\varkappa_0(\omega) = x^0$;
- *выполняются соотношения* (1);
- *для любых* a, b, $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \ldots$, *условное распределение векторов* η_i, *и* ξ_i *имеет вид*

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} | \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma(k_t, r_t), \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i).$$

Полученные результаты II

Теорема 2.

Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ *и* $(\varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \varkappa_{3,0}, \varkappa_{4,0}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ *фиксированы.*
Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$ *является однородной счетной цепью Маркова.*

Идея построения вероятностного пространства I

1 шаг. Строится «начальное» вероятностное пространство $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0(\cdot))$.

- $\omega_0 = (\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0})$, $\omega_{j,0} \in Z_+$. По своему смыслу $\omega_{j,0}$ есть количество требований в очереди O_j в момент времени τ_0.
- $\mathcal{F}_0 = 2^{\Omega_0}$.
- $P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times$ $\times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)}))$.

Идея построения вероятностного пространства II

2 шаг. По индукции строится пространство $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}, P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \cdot))$.

- $\omega_{n+1} = (\omega_{1,n+1}, \omega_{2,n+1}, \omega_{3,n+1})$, $\omega_{j,n+1} \in Z_+$. По своему смыслу $\omega_{j,n+1}$ есть количество требований в очереди O_j в момент времени τ_{n+1}.
- $\mathcal{F}_{n+1} = 2^{\Omega_{n+1}}$.
- $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) =$ $\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{4,n}, p_{k^*,r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n}))$.

Идея построения вероятностного пространства III

3 шаг. По теореме Ионеску-Тулчи строится агрегированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, где

- $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i;$
- $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i;$
- $\mathbf{P}\{\omega\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i)$
  и
  $P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i) =$
  $\int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P(\omega_0; d\omega_1) \ldots \int_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; d\omega_i),\ A_i \in \mathcal{F}_i.$

Классический подход

Представлен, например, в работах А. Эрланга, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, Д. Кендалла, Б.В. Гнеденко.

Требуется задать:

- **входной поток** в виде конечномерных распределений процесса $\{\eta(t)\colon t \geqslant 0\}$, где $\eta(t)$ есть число поступивших требований до момента времени t;
- **процесс обслуживания** в виде интегральной функции распределения длительности обслуживани произвольной заявки;
- **дисциплину формирования очереди** в виде словесного описания на содержательном уровне;
- **структуру системы** в виде словесного описания на содержательном уровне.

Асимптотический подход

Сформулирован и развивается в работах А.А. Боровкова.

Требуется задание **случайного процесса**

$$\{(\eta(t), \nu(t), \zeta(t)); t \geqslant 0\},$$

где

- $\eta(t)$ — число поступивших заявок за промежуток $[0, t)$;
- $\nu(t)$ — число получивших отказ заявок за промежуток $[0, t)$;
- $\zeta(t)$ — число обслуженных заявок за промежуток $[0, t)$;

Основная цель — изучение общих предельных свойств распределения длины очереди

$$\eta(t) - \nu(t) - \zeta(t).$$

Сложность перечисленных методов

- Не удается решить проблему изучения **выходных потоков**.
- Не удается рассмотреть **системы с немгновенным перемещением требований** между узлами и с зависимыми, разнораспределенными длительностями обслуживания требований.