Факультет ВМК
Кафедра ПТВ

Выпускная квалификационная работа магистра
на тему:

Моделирование и анализ процесса обслуживания неординарных потоков с относительными приоритетами

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Зорин А.В.

Выполнил:
студент группы 86М1
Кочеганов В.М.

Цели работы

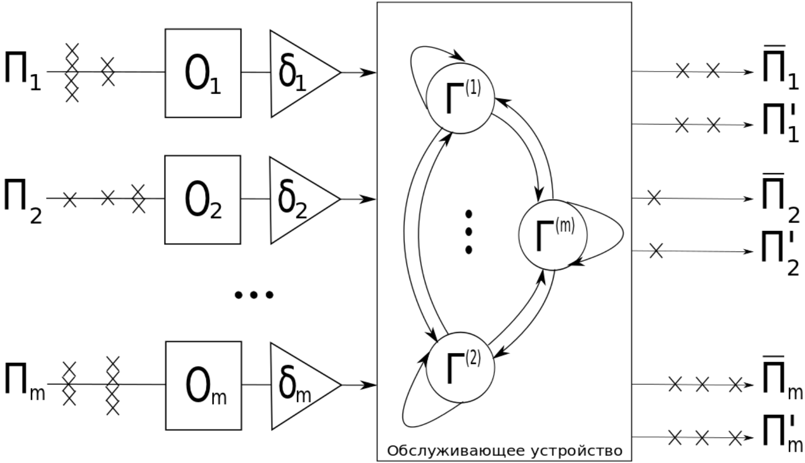
- Построить математическую модель системы обслуживания неординарных потоков с относительными приоритетами.
- Провести анализ построенной математической модели.
- Найти стационарное распределение числа требований в очередях для частного случая $m = 2$ входных потоков, используя метод цензурирования марковских цепей.

Цели работы

||

- Реализовать имитационную модель и с ее помощью изучить такие характеристики системы как стационарные вероятности некоторых состояний, загрузка системы и т.д.

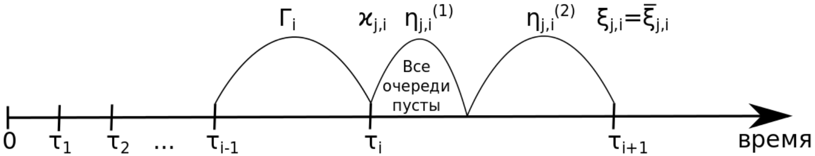
Общий вид системы



details

Построение математической модели

1. Введение необходимых случайных величин. Формализация работы обслуживающего устройства и формирования очередей.



Пусть $\theta_i = \max_{1\leq j\leq m} \eta_{j,i}^{(1)}$, тогда

$$\Gamma_{i+1} = u\left(\Gamma_i, \varkappa_i, \theta_i\right) = u\left(\varkappa_i, \theta_i\right), \tag{1}$$

где

$$u\left(\varkappa_i, \theta_i\right) = \Gamma^{(j)},\ j = \begin{cases} \arg\max_{1\leq r\leq m} \varkappa_{r,i} \text{ при } \varkappa_i \neq y^{(0)} \\ j = \theta_i, \text{если} \varkappa_i = y^{(0)} \end{cases}.$$

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}. \tag{2}$$

details

Построение математической модели

2. Свойства условных распределений входных потоков и потоков насыщения

Сформулированы выражения для следующих условных вероятностей:

$$P\left(\eta_i^{(1)} = b \,\middle|\, \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = x\right)$$

$$P\left(\eta_i^{(2)} = b \,\middle|\, \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = x, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}\right)$$

$$P\left(\xi_i = y^{(j)} \,\middle|\, \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = x, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}, \eta_i^{(2)} = b^{(2)}\right)$$

details

Построение математической модели

2. Свойства условных распределений входных потоков и потоков насыщения

$$P\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(j)}, \varkappa_{i+1} = x_{i+1} \middle| \Gamma_{i_1} = \gamma_{i_1}, \varkappa_{i_1} = x_{i_1}, 0 \leq i_1 \leq i, \right.$$
$$\left. \eta_i^{(1)} = b^{(1)}, \eta_i^{(2)} = b^{(2)}, \xi_i = y^{(\tilde{j})}\right)$$

$$P\left(\eta_i^{(1)} = b^{(1)}, \eta_i^{(2)} = b^{(2)}, \xi_i = y^{(j)} \middle| \Gamma_{i_1} = \gamma_{i_1}, \varkappa_{i_1} = x_{i_1}, \right.$$
$$\left. 0 \leq i_1 \leq i\right) = P\left(\eta_i^{(1)} = b^{(1)}, \eta_i^{(2)} = b^{(2)}, \xi_i = y^{(j)} \middle| \varkappa_i = x_i\right)$$

Результаты анализа СМО

Теорема 1.

1. Последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geqslant 0\}$ является марковской цепью.
2. Последовательность $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$ является марковской цепью.

Результаты анализа СМО

Теорема 2. Переходные вероятности марковских цепей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geqslant 0\}$ и $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$ имеют следующий вид:

$$P\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(j)}, \varkappa_{i+1} = x \middle| \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = \tilde{x}\right) =$$

$$= \begin{cases} p_j \varphi_j(x), & \text{если } \tilde{x} = 0, \\ \varphi_j(x - \tilde{x} + y^{(j)}), & \text{если } \tilde{x} \neq 0 \text{ и } \min\{1 \leqslant s \leqslant m \colon \tilde{x}_s \neq 0\} = j; \end{cases}$$

$$P\left(\varkappa_{i+1} = x \middle| \varkappa_i = \tilde{x}\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} p_j \varphi_j(x), & \text{если } \tilde{x} = 0, \\ \varphi_j(x - \tilde{x} + y^{(j)}), & \text{если } \tilde{x} \neq 0 \text{ и } \min\{1 \leqslant s \leqslant m \colon \tilde{x}_s \neq 0\} = j, \end{cases}$$

здесь $x, \tilde{x} \in Z_+^m$, $\varphi_j(b) = P\left(\eta_i^{(2)} = b \middle| \varkappa_i = x, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}\right)$ и

$$\tilde{X}(j) = \left\{\tilde{x} \in X \setminus \left\{y^{(0)}\right\} \colon \min\{1 \leqslant s \leqslant m \colon \tilde{x}_s \neq 0\} = j\right\}.$$

Результаты анализа СМО

Теорема 3 (о классификации состояний марковских цепей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geqslant 0\}$ и $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$)

1. Все состояния марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geqslant 0\}$ являются существенными, сообщающимися и апериодическими.
2. Все состояния марковской цепи $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$ являются существенными, сообщающимися и апериодическими.

Результаты анализа СМО

Пусть

$$\Phi^{(i)}\left(\Gamma^{(j)}, v\right) = \sum_{w \in \tilde{X}(j)} P\left(\varkappa_i = w\right) v^w, \quad \Gamma^{(j)} \in \Gamma, v \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

$$q_j(v) = v_j^{-1} \sum_{w \in X} \varphi_j\left(w\right) v^w, \tag{4}$$

Теорема 4. Соотношения для многомерных производящих функций марковских цепей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geqslant 0\}$ и $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$ имеют следующий вид:

$$\mathfrak{M}^{(i+1)}\left(\Gamma^{(j)}, v\right) = p_j v_j q_j(v) P\left(\varkappa_i = y^{(0)}\right) + q_j(v)\Phi^{(i)}\left(\Gamma^{(j)}, v\right)$$

$$\mathfrak{M}_{\varkappa}^{(i+1)}\left(v\right) = P\left(\varkappa_i = y^{(0)}\right) \sum_{j=1}^{m} p_j v_j q_j(v) + \sum_{j=1}^{m} q_j(v)\Phi^{(i)}\left(\Gamma^{(j)}, v\right)$$

Результаты анализа СМО

Пусть

$$\beta_{1,1} = \int_0^\infty t dB_1(t), \quad \rho = \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k'(1)\beta_{k,1}.$$

Теорема 5. Условие существования стационарного распределения марковской цепи $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$

Для существования стационарного распределения

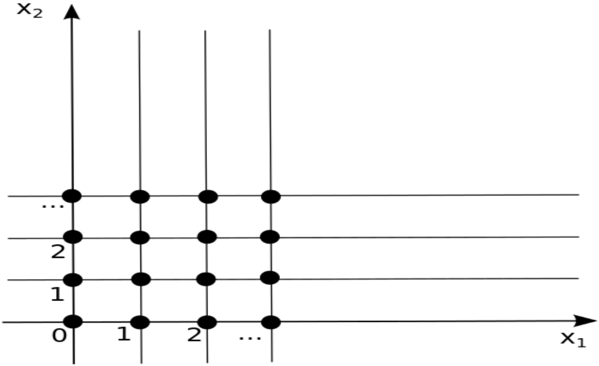
$$Q(x) = \lim_{i\to\infty} P(\varkappa_i = x), \quad x \in Z_+^m$$

последовательности $\{\varkappa_i, i \geq 0\}$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $\rho < 1$.

Стационарное распределение

1. Исходная марковская цепь

Пусть $\pi(x_1, x_2)$ — стационарная вероятность состояния (x_1, x_2) исходной марковской цепи $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$, $(x_1, x_2) \in Z_+^2$.

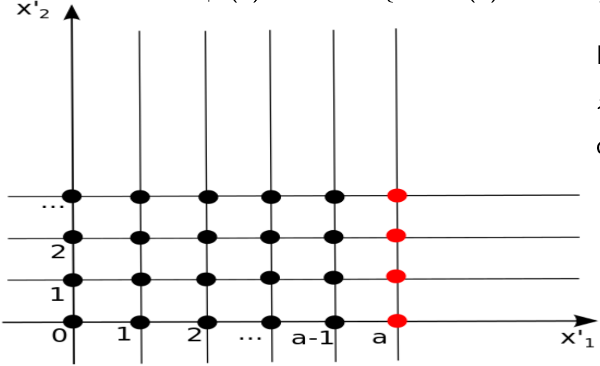


Стационарное распределение

2. Марковские цепи, цензурированные по первой координате

Зафиксируем целое число $a \geqslant 0$. Введем новое множество состояний $E^a_\varkappa = \{(x_1, x_2) \in Z^2_+ : x_1 \leqslant a\}$ и моменты времени попадания в это множество

$$\begin{aligned} \theta_1(a) &= \min\{k \geqslant 0 : \varkappa_k \in E^a_\varkappa\}, \\ \theta_{i+1}(a) &= \min\{k > \theta_i(a) : \varkappa_k \in E^a_\varkappa\}, \quad i = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$



Последовательность

$$\hat{\varkappa}_i(a) = \varkappa_{\theta_i(a)}, \quad i \geqslant 1$$

снова марковская.

Теорема 6. Рекуррентные соотношения для стационарных вероятностей цепи $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$ имеют следующий вид:

$$\pi(0,1) = \hat{p}_2(0,-1)^{-1}\left\{1 - \hat{p}^0(0,0,0,0)\right\}\pi(0,0),$$

$$\pi(0,x) = \hat{p}_2(0,-1)^{-1}\left\{\pi(0,x-1)(1-\hat{p}_2(0,0)) - \right.$$

$$\left. - \pi(0,0)\hat{p}^0(0,0,0,x-1) - \sum_{k=1}^{x-2}\pi(0,k)\hat{p}_2(0,x-k-1)\right\}, \quad x \geqslant 2,$$

$$\pi(a,x) = (1-\hat{p}_1(0,0))^{-1}\left\{\pi(0,0)\hat{p}^a(0,0,a,x) + \sum_{k=1}^{x+1}\pi(0,k)\hat{p}_2(a,x-k) + \right.$$

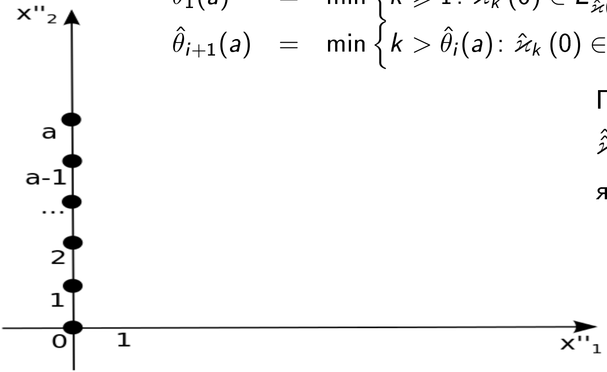
$$\left. + \sum_{l=1}^{a-1}\sum_{m=0}^{x}\pi(l,m)\hat{p}_1(a-l,x-m) + \sum_{n=0}^{x-1}\pi(a,n)\hat{p}_1(0,x-n)\right\}, \quad a > 0, x \geqslant 0.$$

Стационарное распределение

3. Вложенные цензурированные марковские цепи (цензурированные по обеим координатам)

Рассмотрим марковскую цепь $\{\hat{\varkappa}_i(0), i \geqslant 1\}$. Пусть $a \geqslant 1$. Введем еще одно множество состояний $E^a_{\hat{\varkappa}(0)} = \{(0, y) : 0 \leqslant y \leqslant a\}, a \geqslant 1$ и моменты времени попадания в него

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1(a) &= \min\left\{k \geqslant 1 : \hat{\varkappa}_k(0) \in E^a_{\hat{\varkappa}(0)}\right\}, \\ \hat{\theta}_{i+1}(a) &= \min\left\{k > \hat{\theta}_i(a) : \hat{\varkappa}_k(0) \in E^a_{\hat{\varkappa}(0)}\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$



Последовательность $\hat{\hat{\varkappa}}_i(a) = \hat{\varkappa}_{\hat{\theta}_i(a)}, i \geqslant 1$, также является марковской.

Стационарное распределение

3. Вложенные цензурированные марковские цепи (цензурированные по обеим координатам

Теорема 7. Стационарная вероятность $\pi(0,0)$ исходной марковской цепи $\{\varkappa_i, i \geqslant 0\}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\pi(0,0) = \frac{1 - \lambda_1 f_1'(1)\beta_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \Big\{ \lambda_1^2 f_1'(1)(\beta_1 - \beta_2) + \\ + \frac{1}{\hat{\pi}^0(0,0)} (1 - \lambda_1 f_1'(1)(\beta_1 - \beta_2)) \Big\}^{-1}$$

где

$$\hat{\pi}^0(0,0) = 1 - \sum_{a \geqslant 0} \sum_{y_2 \geqslant 0} \hat{p}_2(0, a + y_2)$$

details

Имитационная модель

1. Построение модели

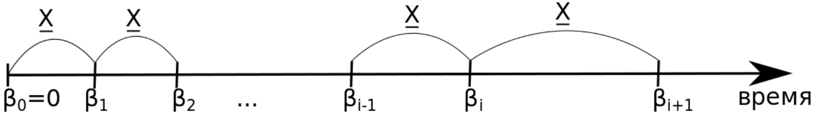
Определение 1. Регенерирующий процесс

Действительный векторно-значный случайных процесс $\underline{X} = \{X_n : n \in Z_+\}$ называется регенерирующим, если:

1. существует последовательность моментов остановки $\underline{\beta} = \{\beta_k \in Z_+ : k \in Z_+\}$ такая, что $\underline{\beta}$ является процессом восстановления (т.е. $\beta_0 = 0$ и $\{\beta_k - \beta_{k-1}\}_{k \in Z_+}$ — н.о.р. и положительные случайные величины);
2. для любой последовательности моментов времени $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ и $k \geqslant 0$ случайные векторы $\{X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_m}\}$ и $\{X_{n_1+\beta_k}, X_{n_2+\beta_k}, \ldots, X_{n_m+\beta_k}\}$ имеют одинаковое распределение, процессы $\{X_n : n < \beta_k\}$ и $\{X_{n+\beta_k} : n \in Z_+\}$ независимы.

Имитационная модель

1. Построение модели



$\{\beta_k\}_{k \in Z_+}$ — точки регенерации исходного процесса $\underline{X}$.

Подробнее об оценивании

Имитационная модель

2. Преимущества модели

Описанный метод носит название «Регенеративный» и он имеет ряд преимуществ по сравнению с более общими методами:

1. существенное сокращение общего времени моделирования;
2. есть возможность построения доверительных интервалов;
3. есть возможность вычислить необходимое число итераций для достижения заданной точности.

Имитационная модель была реализована в виде приложения:

- используемый язык программирования — C++;
- возможность запуска на кластере (используемая библиотека для параллельных вычислений — SHMEM);
- используемые библиотеки для генерации случайных чисел: GSL (GNU Scientific Library) и SPRNG(Scalable Parallel Random Number Generator).

Заключение

- Построена математическая модель СМО;
- проведен анализ построенной математической модели и доказан ряд теорем, в том числе найдено необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения;
- найдено стационарное распределение длин очередей в частном случае $m = 2$ входных потоков;
- реализована регенеративная имитационная модель с использованием методов параллельных вычислений.

Список литературы

- Федоткин М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 1 // Liet. matem. rink. 1988. T.28, № 4. C. 783-794. ISSN 0132-2818.
- Федоткин М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 2 // Liet. matem. rink. 1989. T.29, № 1. C. 148-159.
- Зорин А. В., Федоткин М. А. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени. Автоматика и телемеханика, № 7, 2005. С. 102-111.
- Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени. 1 // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19. Вып. 3. С. 558-576.
- Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М.:Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
- Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

Список литературы II

- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Издательство ЛКИ, 2007.
- Колмогоров А. Н., С. В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Физматилит,2006.
- Ширяев А. Н.Вероятность — 2-е изд. — М.: Наука, 1989.
- Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А. Счетные цепи Маркова — М.: Наука, 1987.
- Иглхарт Д. Л., Шедлер Д. С. Регенеративное моделирование сетей массового обслуживания. — М.: Радио и связь, 1984.

Спасибо за внимание!

Параметры системы

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — интенсивности входных потоков групп;
- $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}$ — производящая функция числа заявок в группе по потоку Π_j, $j = 1, 2, \ldots, m$;
- $B_j(t)$ — функция распределения длительности обслуживания требования из очереди O_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

- τ_i — момент окончания i-го рабочего акта;
- $\eta_{j,i}^{(1)} \in \{0, 1\}$ — количество поступивших требований в очередь O_j от момента τ_i до начала $(i+1)$-го рабочего акта;
  $\eta_{j,i}^{(2)} \in \{0, 1, \ldots\}$ — число требований, пришедших в очередь O_j за $(i+1)$-ый рабочий акт;
  $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}^{(1)} + \eta_{j,i}^{(2)}$ — общее число требований, пришеших в очередь O_j за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;

Построение математической модели

Введение необходимых случайных величин и случайных элементов

- $\xi_{j,i} \in \{0, 1\}$ — максимально возможное число обслуженных заявок на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ для очереди O_j;
- $\overline{\xi}_{j,i} \in \{0, 1\}$ — число фактически обслуженных требований для очереди O_j на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\varkappa_{j,i}$ — величина очереди O_j в момент τ_i;
- θ_i — в случае отсутствия требований в очередях в момент τ_i, номер очереди, в которую пришло первое требование; иначе $\theta_i = 0$;
- Γ_{i+1}– состояние обслуживающего прибора на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;

Условные вероятности

$$P\left(\eta_i^{(1)} = b \middle| \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = x\right) = \begin{cases} p_j, & \text{при } b = y^{(j)},\ x = y^{(0)} \\ 1, & \text{при } b = y^{(0)},\ x \neq y^{(0)} \\ 0, & \text{иначе }, \end{cases}$$

$$P\left(\eta_i^{(2)} = b \middle| \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = x, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}\right) = \int_0^{\infty} \prod_{s=1}^{m} \alpha_{s,b_s}(t) dB_j(t),$$

$$F_s(t,z) = e^{\lambda_s t(f_s(z)-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{s,k}(t) z^k,$$

$$P\left(\xi_i = y^{(j)} \middle| \Gamma_i = \gamma, \varkappa_i = x, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}, \eta_i^{(2)} = b^{(2)}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } u\left(x, f\left(b^{(1)}\right)\right) = \Gamma^{(j)}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$P\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(j)}, \varkappa_{i+1} = x_{i+1} \middle| \Gamma_{i_1} = \gamma_{i_1}, \varkappa_{i_1} = x_{i_1}, 0 \leqslant i_1 \leqslant i, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}, \eta_i^{(2)} = b^{(2)}, \xi_i = y^{(j)}\right) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } u\left(x_i, f\left(b^{(1)}\right)\right) = \Gamma^{(j)}, x_{i+1} = x_i + b^{(1)} + b^{(2)} - y^{(j)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};$$

Связь стационарных вероятностей исходной и цензурированной цепей

Стационарные вероятности цензурированной и исходной цепей связаны соотношением

$$\hat{\pi}^a(w_1, w_2) = \frac{\pi(w_1, w_2)}{\sum_{(x_1, x_2) \in E_\varkappa^a} \pi(x_1, x_2)}, \quad (w_1, w_2) \in E_\varkappa^a,$$

где $E_\varkappa^a = \left\{(x_1, x_2) \in Z_+^2 : x_1 \leqslant a\right\}$

Переходные вероятности цензурированной цепи

$$
\begin{aligned}
\hat{p}^a(x_1, x_2, a, w_2) &= \hat{p}_1(a - x_1, w_2 - x_2), && 0 < x_1 \leqslant a, 0 \leqslant x_2 \leqslant w_2 \\
\hat{p}^a(0, x_2, a, w_2) &= \hat{p}_2(a, w_2 - x_2), && 0 < x_2 \leqslant w_2 + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{p}^a(x_1, x_2, a, w_2) = p(x_1, x_2, a, w_2) + \sum_{y_1 \geqslant 1} \sum_{y_2 = -1}^{w_2 - x_2} p(x_1, x_2, a + y_1, x_2 + y_2) \times \\
\times \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_{y_1} = w_2 - x_2 - y_2} \alpha(k_1)\alpha(k_2)\ldots\alpha(k_{y_1}),
\end{aligned}
$$

$$
\alpha(w) = \varphi_1(0, w) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{w_0 + w_1 + \ldots + w_k = w} \varphi_1(k, w_0)\alpha(w_1)\alpha(w_2)\ldots\alpha(w_k),
$$

где $\varphi_j(b) = P\left(\eta_i^{(2)} = b \,\middle|\, \varkappa_i = x, \eta_i^{(1)} = b^{(1)}\right)$

Пусть $X_n \Rightarrow X$ при $n \to \infty$, тогда для оценки математического ожидания действительного измеримого функционала $f(X)$ применяют следующую оценку:

$$r(f) = E\left\{f\left(X\right)\right\} \approx \hat{r}_n(f) = \overline{Y}_n/\overline{\alpha}_n,$$

где

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k(f), \qquad Y_k(f) = \sum_{l=\beta_{k-1}}^{\beta_k} f(X_l),$$

$$\overline{\alpha}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \qquad \alpha_k = \beta_k - \beta_{k-1},$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 8. Центральная предельная теорема

При $n \to \infty$

$$n^{1/2}\left\{\hat{r}_n(f) - r(f)\right\} / \left[\sigma / E\left\{\alpha_1\right\}\right] \Rightarrow N(0,1),$$

где $\sigma = D\left[Y_1(f)\right]$.

Применительно к исследуемой СМО:

$$\overline{X} \sim \{\varkappa_i, i \geqslant 0\} \text{ и, например,}$$

$$f(X) = I(X = (x_1, x_2))$$

$$r(f) = E\left[f(X)\right] = \pi(x_1, x_2)$$