

# 1. Постановка задачи и построение математической модели

## 1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

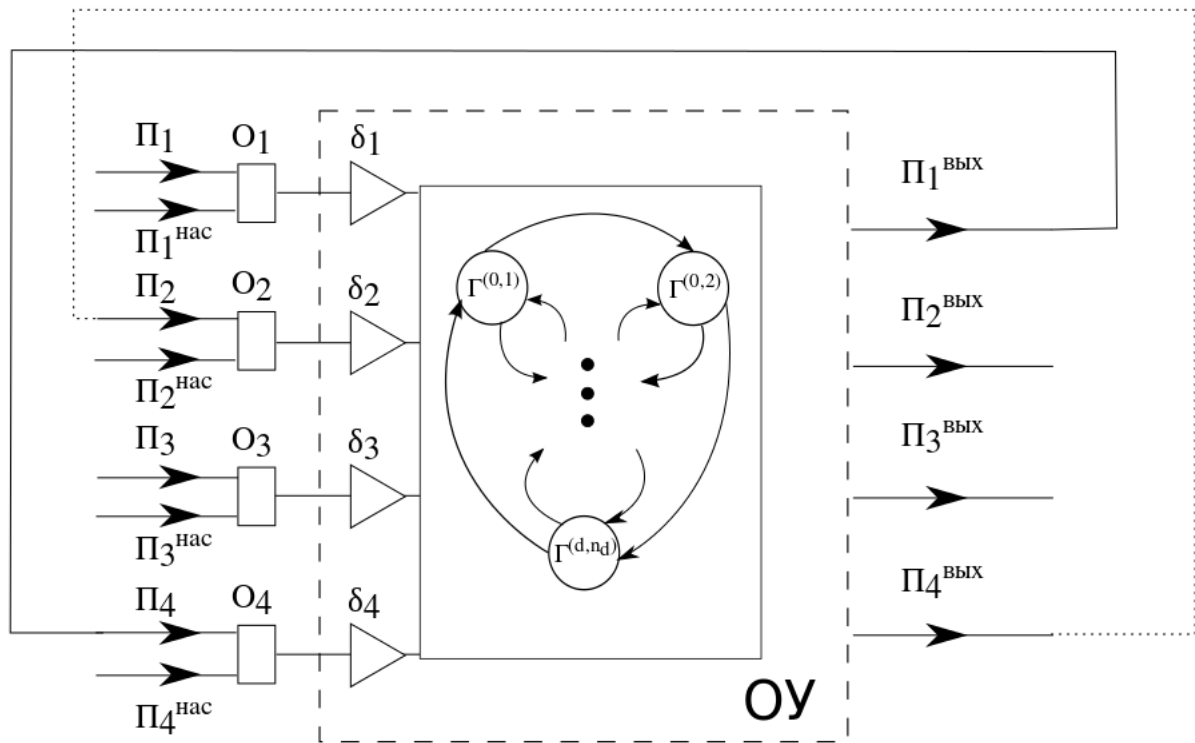


Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ . Требования по потоку  $\Pi_j$  становятся в соответствующую очередь  $O_j$  с неограниченной вместимостью,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  дисциплина очереди  $O_j$ , поддерживаемая устройством  $\delta_j$ , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди  $O_4$  будет описана ниже. Входные потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  будем обозначать  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ , а распределение числа заявок в груп-

пе по потоку  $\Pi_j$  будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}, \quad j \in \{1, 3\}, \quad (1.1)$$

которая предполагается аналитической при любом  $z \in \mathbb{C}$  таком, что  $|z| < (1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Величина  $p_{\nu}^{(j)}$  определяет вероятность того, что по потоку  $\Pi_j$  число требований в группе равно  $\nu$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_1$  поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток  $\Pi_4$ . Потоки  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний  $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$  с заданными натуральными числами  $d, n_0, n_1, \dots, n_d$ . В каждом состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающее устройство находится в течение времени  $T^{(k,r)}$ . Введем множества  $\Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$  и  $\Gamma^{IV}$  следующим образом. В состоянии  $\gamma \in \Gamma^I$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{II}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{III}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_3$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{IV}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_3$  и  $O_4$ . Тогда множество  $\Gamma$  есть объединение  $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$  непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества  $^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}$ ,  $^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}$ ,  $^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ .

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний  $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = 1, 2, \dots, n_k\}$  будем называть  $k$ -м циклом,  $k = 1, 2, \dots, d$  (Рис. 2). При  $k = 0$  состояние вида  $\Gamma^{(0,r)}$  будем называть состоянием продления,  $r = 0, 1, \dots, n_0$ . Положим  $r \oplus_k 1 = r + 1$  для  $r < n_k$  и  $r \oplus_k 1 = 1$  при  $r = n_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ . В цикле  $C_k$  выделим подмножества  $C_k^O$  выходных,  $C_k^I$  входных и  $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$  нейтральных состояний. Тогда после состояния  $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$  обслуживающее устройство переходит в состояние  $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$  того же цикла  $C_k$ . При  $\Gamma^{(k,r)}$  принадлежащем множеству  $C_k^O$  прибор переходит в состояние  $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  в момент переключения больше заданного порога  $L$ . В противном случае, то есть если число требований в очереди  $O_3$  меньше либо равно  $L$ , то новое состояние прибора будет состоянием продления  $\Gamma^{(0,r_1)}$ , где  $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$  и  $h_1(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$  во множество  $\{1, 2, \dots, n_0\}$ . После состояния  $\Gamma^{(0,r)}$  выбирается состояние того же вида  $\Gamma^{(0,r_2)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  меньше или равно  $L$ , где  $r_2 = h_2(r)$  и  $h_2(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на себя; в противном случае включается

входное состояние  $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$ , где  $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$  и  $h_3(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на множество  $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$ . Считается, что все состояния продления  $\Gamma^{(0,r)}$  принадлежат множеству  ${}^2\Gamma$ , а также верны соотношения  $C_k^O \subset {}^2\Gamma$  и  $C_k^I \subset {}^3\Gamma$ . Также будем предполагать, что из любого состояния продления существует ребро во входную вершину некоторого цикла, а все циклы, в свою очередь, имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл.

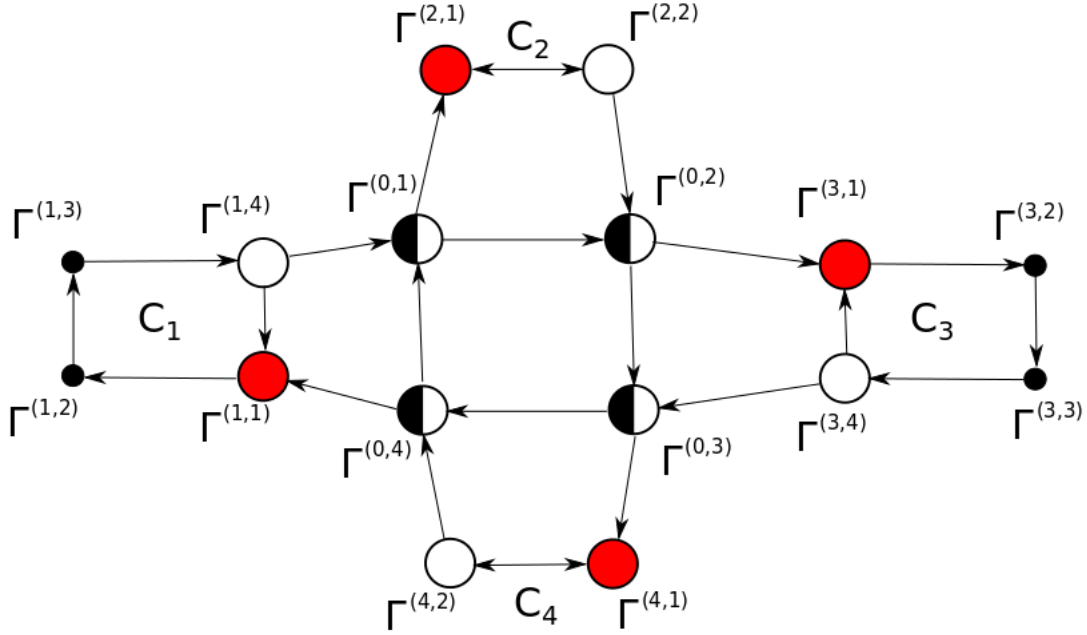


Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O; \\ \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y > L; \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y \leq L; \\ \Gamma^{(0, h_2(r))}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \quad (1.2)$$

Рассмотрим введенные обозначения на примере рис. 2. Входными состояниями обслуживающего устройства являются  $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^I$ ,  $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^I$ ,  $\Gamma^{(3,1)} \in C_3^I$  и  $\Gamma^{(4,1)} \in C_4^I$ , выходных состояний —  $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^O$ ,  $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^O$ ,  $\Gamma^{(3,4)} \in C_3^O$  и  $\Gamma^{(4,2)} \in C_4^O$ , нейтральных состояний —  $\Gamma^{(1,2)}, \Gamma^{(1,3)} \in C_1^N$  и  $\Gamma^{(3,2)}, \Gamma^{(3,3)} \in C_3^N$ . Состояния продления на графе

представлены вершинами  $\Gamma^{(0,1)}$ ,  $\Gamma^{(0,2)}$ ,  $\Gamma^{(0,3)}$  и  $\Gamma^{(0,4)}$ . Далее, отображение  $h_1(\cdot)$  на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние  $\Gamma^{(1,4)}$  в число 1 — номер состояния продления  $\Gamma^{(0,1)}$ , то есть  $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$ . Аналогично, например,  $h_2(1) = 2$  и  $h_2(3) = 4$ . Примером отображения  $h_3(\cdot)$  является  $h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}$ .

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для  $j \in \{1, 2, 3\}$  еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , будет содержать неслучайное число  $\ell_{k,r,j}$  требований, обслуженных в течение времени  $T^{(k,r)}$ , если  $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$ , и будет содержать 0 требований в противном случае:  $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$ . Пусть  $\mathbb{Z}_+$  — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди  $O_4$  находится  $x \in \mathbb{Z}_+$  требований, поток насыщения  $\Pi_4^{\text{нас}}$  определим как поток, содержащий все  $x$  требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства  $\Gamma^{(k,r)}$  каждое требование из очереди  $O_4$  с вероятностью  $p_{k,r}$  и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь  $O_2$  потока  $\Pi_2$ . С вероятностью  $1 - p_{k,r}$  требование очереди  $O_4$  остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней средой,

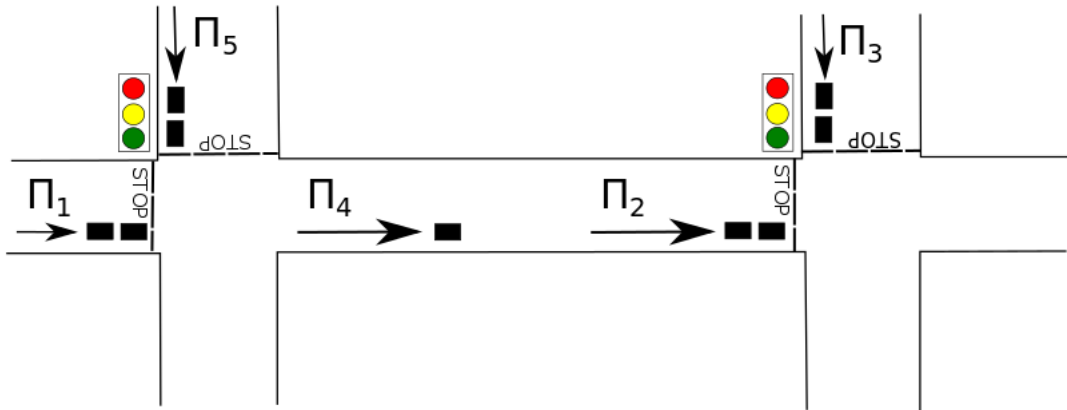


Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_5$  на первом перекрестке, а также поток  $\Pi_3$  на втором. Каждая машина из потока  $\Pi_1$ , проезжая первый перекресток, становится в очередь  $O_4$  потока  $\Pi_4$  и затем с некой вероятностью ( $p_{k,r}$  для состояния  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающего устройства) доезжает до

следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди  $O_4$  до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди  $O_4$  успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь  $O_2$  и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния  $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ : в состоянии  $g_{1,1}$  машины потока  $\Pi_1$  пропускаются фиксированное количество времени  $\tilde{T}^{(1,1)}$  («зеленый» свет для  $\Pi_1$ ); в состоянии  $g_{1,2}$  — простаивают в течение времени  $\tilde{T}^{(1,2)}$  («красный» свет для  $\Pi_1$ ). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока  $\Pi_3$  (состояние  $g_{2,1}$ ), также имеется два состояния обслуживания потока  $\Pi_2$  (состояния  $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$ ). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока  $\Pi_3$ , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока  $\Pi_2$  длина очереди  $O_3$  не превосходит уровня  $L$ . Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть  $\tilde{T}^{(2,1)}$ ,  $\tilde{T}^{(2,2)}$  и  $\tilde{T}^{(2,3)}$ .

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор  $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$ , где  $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$  — состояние 1-го перекрестка,  $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$  — состояние 2-го перекрестка,  $s \in \{0, 1, 2\}$  — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и  $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$  — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина  $s$ ). Здесь  $T$  — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины  $2 \times 3 \times 3 \times T$ .

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток  $\Pi_5$  не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определенности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4. За начальное состояние объединенной системы примем  $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , то есть первый перекресток находится в состоянии  $g_{1,1}$ , второй — в состоянии  $g_{2,1}$ , и оба

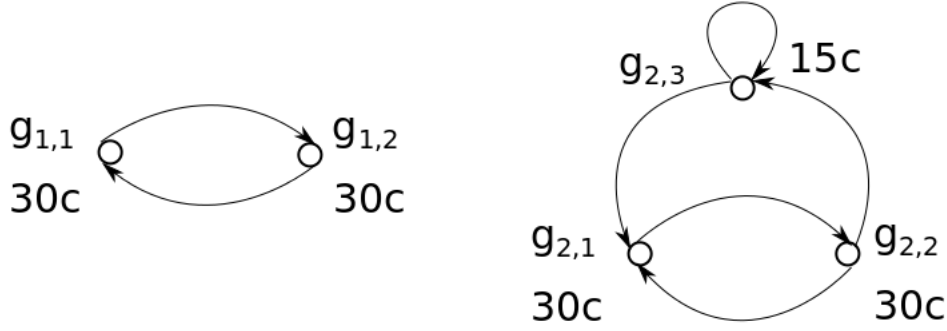


Рис. 4. Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами  $s = 0$  и  $t = 0$ ). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию  $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$ . Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние  $g_{2,1}$ , так и в состояние продления  $g_{2,3}$ . Таким образом следующим состоянием тандема будет либо опять  $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , либо  $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$ . Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следующий список всех возможных состояний системы:

$$\begin{aligned}
(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,4)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,3)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,2)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,4)}.
\end{aligned}$$

В соответствии с приведенными выше обозначениями, множества  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут  $C_1^I = \{\Gamma^{(1,1)}\}$ ,  $C_2^I = \{\Gamma^{(2,1)}\}$ ,  $C_3^I = \{\Gamma^{(3,1)}\}$  и  $C_4^I = \{\Gamma^{(4,1)}\}$ . Множествами выходных состояний будут  $C_1^O = \{\Gamma^{(1,2)}\}$ ,  $C_2^O = \{\Gamma^{(2,4)}\}$ ,  $C_3^O = \{\Gamma^{(3,2)}\}$  и  $C_4^O = \{\Gamma^{(4,4)}\}$ . Функции  $h_1(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$  и  $h_3(\cdot)$  задаются поточечно:

$$h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4, \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)}, \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

## 1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [3]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ ; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$ ; 4) внешняя память — очереди  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса  $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$ . Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$  моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим  $\Gamma_i$  из множества  $\Gamma$  состояние обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ , количество  $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$  требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i$ , количество  $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$  требований, поступивших в очередь  $O_j$  по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$  требований по потоку насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$  реально обслуженных требований по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad (1.3)$$

где отображение  $h(\cdot, \cdot)$  определено в (1.2). Для определения длительности  $T_{i+1}$  состояния обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$  удобно ввести функцию  $h_T(\cdot, \cdot)$ :

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.4)$$

между величиной  $\bar{\xi}_{j,i}$  и величинами  $\varkappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}$  реализует стратегию механизма об-

служивания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из (1.4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.5)$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1) следуют соотношения для потока  $\Pi_4$ :

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \quad (1.6)$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$  и  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$  маркированных точечных процессов  $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$  и  $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geq 0\}$  при фиксированных значениях метки  $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_i)$ , где  $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$ . Введем функции  $\varphi_1(\cdot, \cdot)$  и  $\varphi_3(\cdot, \cdot)$  из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где  $f_j(z)$  определены в (1.1),  $j \in \{1, 3\}$ . Функция  $\varphi_j(\nu, t)$  есть вероятность поступления  $\nu = 0, 1, \dots$  требований по потоку  $\Pi_j$  за время  $t \geq 0$ . Положим  $\varphi_j(\nu, t)$  равной нулю при  $\nu < 0$ . Функцию  $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$  зададим формулой

$$\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1 - u)^{y-k}.$$

По своему смыслу  $\psi(k; y, u)$  есть вероятность поступления  $k$  требований по потоку  $\Pi_2$  при условии, что очередь  $O_4$  содержит  $y$  требований и обслуживающее устройство находится в состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$ , так что  $u = p_{k,r}$ . При нарушении условия  $0 \leq k \leq y$  положим  $\psi(k; y, u)$  равной нулю.

Пусть  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$  и  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ . Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки  $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$  вероятность  $\varphi(a, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\eta_{1,i} = a_1$ ,  $\eta_{2,i} = a_2$ ,  $\eta_{3,i} = a_3$ ,  $\eta_{4,i} = a_4$  есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}, \quad (1.7)$$



где  $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$  и  $\delta_{i,j}$  есть символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}.$$

Пусть  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ . Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность  $\zeta(b, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\xi_{1,i} = b_1$ ,  $\xi_{2,i} = b_2$ ,  $\xi_{3,i} = b_3$ ,  $\xi_{4,i} = b_4$  при фиксированном значении метки  $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$  есть

$$\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) следует для  $j \in \{1, 2, 3\}$ , что вероятность события  $\xi_{j,i} = 0$  равна 1 в случае  $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$  и что вероятность события  $\xi_{j,i} = \ell_{\tilde{k}, \tilde{r}, j}$  равна 1, если  $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$ .

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором общем вероятностном пространстве.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma$  и  $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$  фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  и заданные на нем случайные величины  $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$ ,  $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$ ,  $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$  и случайные элементы  $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$ ,  $i \geq 0$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , такие, что 1) имеют место равенства  $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$  и  $\varkappa_0(\omega) = x^0$ ; 2) выполняются соотношения (1.3), (1.5), (1.6); 3) для любых  $a, b$ ,  $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , условное распределение векторов  $\eta_i$ , и  $\xi_i$  имеет вид

$$\mathbf{P} \left( \{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \} \middle| \bigcap_{t=0}^i \{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \} \right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \quad (1.9)$$

где функции  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  определяются формулами (1.7) и (1.8) соответственно,  $i \geq 0$ .

*Доказательство.* В соответствии с теоремой Ионеску Тулчи (см. [13]) для доказательства достаточно задать на  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$  вероятностную меру  $P_0(\cdot)$  и далее, считая для  $0 < i \leq n$  и каждого набора элементарных исходов  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})$  заданной на  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  вероятностную меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$ , задать на  $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$  меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$ , причем для любого множества  $B \in \mathcal{F}_i$  функции  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; B)$  должны быть измеримыми функциями от  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})$ . Тогда для декартова про-

изведения пространств элементарных исходов  $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i$  и произведения  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  будет существовать единственная вероятностная мера  $\mathbf{P}(\cdot)$  такая, что для любого  $i \geq 0$  верно равенство

$$\mathbf{P}\{\omega: \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i), \quad (1.10)$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i) = \int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P(\omega_0; d\omega_1) \dots \int_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \quad (1.11)$$

для любого  $A_i$  из  $\mathcal{F}_i$ .

Итак, за описание элементарного исхода  $\omega_i \in \Omega_i$  для произвольного  $i \geq 0$  примем набор  $(\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$ ,  $\omega_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ . Таким образом,  $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$  и в качестве  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_i$  возьмем множество всех подмножеств множества  $\Omega_i$ :  $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ . Пусть  $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x_{3,0})$ . Тогда поскольку множество  $\Omega_0$  счетно, определим вероятностную меру  $P_0(\cdot)$  на измеримом пространстве  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$  ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})). \quad (1.12)$$

Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  определим величины

$$\Gamma_0 = \gamma_0, \quad \varkappa_{j,0} = x_{j,0}, \quad \xi_{j,0} = l(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \eta_{j,0} = \omega_{j,0}, \quad (1.13)$$

и

$$\varkappa_{4,0} = x_{4,0}, \quad \xi_{4,0} = x_{4,0}, \quad \eta_{4,0} = \min\{\xi_{1,0}, x_{1,0} + \eta_{1,0}\}. \quad (1.14)$$

Теперь, предполагая заданными на  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  вероятностные меры  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$ , заданными величины  $\Gamma_i, \varkappa_{j,i}, \xi_{j,i}, \eta_{j,i}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  и фиксируя набор  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ , определим на  $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$  меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$ . Положим для  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(k^*, r^*)} = h(\Gamma_n, \varkappa_{3,n}), \quad \varkappa_{j,n+1} = \max\{0, \varkappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}, \quad (1.15)$$

$$\varkappa_{4,n+1} = \varkappa_{4,n} + \eta_{4,n} - \eta_{2,n}, \quad \xi_{j,n+1} = l(k^*, r^*, j), \quad (1.16)$$

$$\eta_{j,n+1} = \omega_{j,n+1}, \quad \eta_{4,n+1} = \min\{\xi_{1,n+1}, \varkappa_{1,n+1} + \eta_{1,n+1}\}, \quad \xi_{4,n+1} = \varkappa_{4,n+1}. \quad (1.17)$$

Тогда, по аналогии с построением вероятностной меры  $P_0(\cdot)$ , зададим меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$

на одноточечных множествах  $\{(a_1, a_2, a_3)\}$ :

$$\begin{aligned} P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{4,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  построено.

Теперь докажем, что введенные с помощью формул (1.13) – (1.17) случайные элементы  $\Gamma_i(\omega)$  и случайные величины  $\varkappa_{j,i}(\omega)$ ,  $\eta_{j,i}(\omega)$ ,  $\xi_{j,i}(\omega)$ ,  $i \geq 0$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  удовлетворяют условиям теоремы. Из формулы (1.15) следует, что случайные элементы  $\Gamma_i$  удовлетворяют соотношению (1.3), а случайные величины  $\varkappa_{j,i}$  для  $j \in \{1, 2, 3\}$  удовлетворяют соотношению (1.5). Из формулы (1.16) заключаем, что  $\varkappa_{4,i}$  удовлетворяет соотношению (1.6). Далее, из (1.14) и (1.17) следует справедливость соотношений (1.6) для величин  $\eta_{4,i}$  и  $\xi_{4,i}$ .

Перейдем к доказательству равенства (1.9). Для этого найдем явное выражение для условной вероятности  $\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$ . Пусть  $\Gamma^{(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$ . Распишем по определению условной вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) = \\ = \mathbf{P} \left( \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) / \mathbf{P} \left( \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее из (1.10), (1.11) и того факта, что  $\Gamma_i$  и  $\varkappa_i$  не зависят от  $\omega_i$  (этот факт следует из (1.13) – (1.16)), получим выражение для знаменателя последней дроби

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) = \\ = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Преобразуем множество  $\{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$ , учитывая соотноше-

ния (1.13) – (1.17):

$$\begin{aligned}
& \{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} = \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \\
& \cap \left\{ \eta_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \xi_{j,i} = b_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \xi_{4,i} = b_4 \right\} \cap \left\{ \eta_{4,i} = a_4 \right\} = \\
& = \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \left\{ \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ b_j = \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \\
& \cap \left\{ b_4 = x_{4,i} \right\} \cap \left\{ a_4 = \min \left\{ \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1 \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда для числителя дроби из (1.19) имеем:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega: \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \mathbf{P} \left( \left\{ \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min \{ \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1 \}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \\
& \times \mathbf{P} \left( \left\{ \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) \\
& \tag{1.21}
\end{aligned}$$

И по аналогии со знаменателем (выражение (1.20)), распишем последнюю вероятность:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\
& \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\}) =
\end{aligned}$$

и подставляя (1.18), получим

$$\begin{aligned}
& = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
& \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \\
& \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Подставляя (1.22) в (1.21), а затем (1.21) и (1.20) в (1.19), получим:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
& \quad \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1} : \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) / \\
& \quad / \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1} : \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\})
\end{aligned}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем в точности (1.9).  $\square$

**Следствие 1.1.** В условиях предыдущей теоремы верно равенство

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \right) \quad (1.23)
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Действительно, из (1.9) следует, что вероятность, стоящая в левой части равенства (1.23), равна величине  $\varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i)$ , зависящей только от значения  $(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$  пары  $(\Gamma_i, \varkappa_i)$  и не зависящей от значений остальных пар  $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0 \leq t \leq i-1}$ . Таким образом, знание о значениях пар  $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0 \leq t \leq i-1}$  не влияет на вероятность  $\mathbf{P}(\{\omega : \eta_i = a, \xi_i = b\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$  и, следовательно, (1.23) верно.  $\square$

Введем для  $y_0, y, \tilde{y} \in \mathbb{Z}_+$  и  $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$  функции

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(k, r, y_0, y, \tilde{y}) &= (1 - \delta_{\tilde{y}, 0}) \psi(\tilde{y} + \ell(k, r, 2) - y, y_0, p_{k, r}) + \\
& \quad + \delta_{\tilde{y}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k, r, 2) - y} \psi(a, y_0, p_{k, r}), \\
\tilde{\varphi}_3(k, r, t, y, \tilde{y}) &= (1 - \delta_{\tilde{y}, 0}) \varphi_3(\tilde{y} + \ell(k, r, 3) - y, t) + \delta_{\tilde{y}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k, r, 3) - x} \varphi_3(a, t).
\end{aligned} \quad (1.24)$$

причем  $k$  и  $r$  такие, что  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ .

**Следствие 1.2.** Пусть  $\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})$ . Тогда в условиях теоремы 1.1 верны равенства

$$\mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \tilde{\psi}(k_{i+1}, r_{i+1}, x_{4,i}, x_{2,i}, x_{2,i+1}), \quad (1.25)$$

$$\mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}), \quad (1.26)$$

*Доказательство.* Начнем с доказательства равенства (1.25). Распишем по формуле полной вероятности, а затем учтем (1.9) и (1.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) = \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) = \end{aligned}$$

учитывая функциональную зависимость (1.5) и явное выражение для функций  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ , продолжим цепочку рассуждений

$$\begin{aligned} &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}} = \\ &= \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}} \times \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \times \\ &\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} \sum_{b_3 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_3, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)} \times \\ &\times \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}}. \end{aligned}$$

Поскольку все кроме одной суммы сокращаются (равны 1), то искомая вероятность

упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\
&= \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}} = \\
&= \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}}
\end{aligned}$$

В случае, когда  $x_{2,i+1}$  больше 0, величина  $\delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}}$  отлична от нуля только при  $x_{2,i+1} = x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)$ , то есть при  $a_2 = x_{2,i+1} - x_{2,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)$ . В случае же, когда  $x_{2,i+1}$  равно 0, величина  $\delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}}$  отлична от нуля только при  $0 \leq a_2 \leq \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2) - x_2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\
&= \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}} = \\
&= \psi(x_{2,i+1} - x_{2,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2), x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) (1 - \delta_{x_{2,i+1}, 0}) + \\
&\quad + \delta_{x_{2,i+1}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2) - x_2} \psi(a, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) = \tilde{\psi}(k_{i+1}, r_{i+1}, x_{4,i}, x_{2,i}, x_{2,i+1})
\end{aligned}$$

и равенство (1.25) доказано.

Аналогичным образом доказывается равенство (1.26). А именно, расписывая по формуле полной вероятности с учетом (1.9) и (1.23), имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\
&= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) =
\end{aligned}$$

учитывая (1.5) и явный вид функций  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ , продолжим

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - b_3\}} = \\
&= \sum_{a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \delta_{b_3, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)} \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - b_3\}} \times \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \times \\
&\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} \sum_{b_2 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \times \\
&\quad \times \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}} = \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_3)) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)\}}
\end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\
& = \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)\}} = \\
& = (1 - \delta_{x_{3,i+1}, 0}) \varphi_3(x_{3,i+1} - x_{3,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3), h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) + \\
& + \delta_{x_{3,i+1}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3) - x_{3,i}} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) = \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}).
\end{aligned}$$

и следствие полностью доказано.  $\square$

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для дальнейшего исследования состояния обслуживающего устройства и длины всех очередей.

### 1.3. Марковское свойство последовательностей

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\} \text{ и } \{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$$

Введем следующие события:

$$A_i(k_i; r_i; x^i) = \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}, \quad B_i(a; b) = \{\eta_i = a, \xi_i = b\}$$

В новых обозначениях равенство (1.23) переписывается следующим образом:

$$\mathbf{P} \left( B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) = \mathbf{P} \left( B_i(a; b) \left| A_i(k_i; r_i; x^i) \right. \right) \quad (1.27)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $\Gamma_0 = \Gamma^{(k, r)} \in \Gamma$  и  $\varkappa_0 = x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$  фиксированы. Тогда последовательность  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$  является однородной счетной цепью Маркова.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно показать, что

$$\mathbf{P} \left( A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) = \mathbf{P} \left( A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| A_i(k_i; r_i; x^i) \right. \right) \quad (1.28)$$



Распишем левую часть равенства (1.28). По формуле полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) &= \sum_{a,b} \mathbf{P} \left( B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) \times \\ &\times \mathbf{P} \left( A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Из равенства (1.27) следует, что вероятность  $\mathbf{P} \left( B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right)$  не зависит от предыстории  $\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t; r_t; x^t)$ . Далее, из соотношений (1.3), (1.5) и (1.6) можно заметить, что случайный элемент  $\Gamma_{i+1}$  и случайный вектор  $\varkappa_{i+1}$  функционально выражается через  $\Gamma_i$ ,  $\varkappa_i$ ,  $\eta_i$  и  $\xi_i$ , поэтому вероятность  $\mathbf{P}(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) | B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t))$  не зависит от предыстории. Таким образом

$$\mathbf{P} \left( B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) = \mathbf{P} \left( B_i(a; b) \left| A_i(k_i; r_i; x^i) \right. \right)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t) \right. \right) &= \\ &= \mathbf{P} \left( A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| B_i(a; b) \cap A_i(k_i; r_i; x^i) \right. \right) \end{aligned}$$

откуда заключаем верность равенства (1.28).  $\square$

Докажем марковость последовательности  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ .

**Теорема 1.3.** Пусть  $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$  и  $\varkappa_{3,0} = x_{3,0} \in \mathbb{Z}_+$  фиксированы. Тогда последовательность  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  является однородной счетной цепью Маркова.

*Доказательство.* Действительно, поскольку  $\Gamma_{i+1}$  функционально выражается через  $\Gamma_i$  и  $\varkappa_{3,i}$  (см. (1.3)), то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ = \delta_{\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})} \times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}). \end{aligned}$$

и учитывая равенство (1.26), убеждаемся, что вероятность

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x_t\}) = \\ = \delta_{\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})} \times \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}) \end{aligned}$$

зависит только от значений пар  $(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$  и  $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{3,i+1})$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x_t\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_{3,t} = x_{3,t}\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\}), \end{aligned}$$

что доказывает марковость последовательности  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ .  $\square$

Убедившись в марковости последовательностей  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$  и  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ , приведем формулы для вычисления их переходных вероятностей.

**Теорема 1.4.** Пусть  $x, \tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$  и  $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$ . Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$  вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\right) = \\ = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3) \times \sum_{(a_1, a_2) \in A_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}), \quad (1.30) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{\text{trans}} &= A_{\text{trans}}^0 \cap A_{\text{trans}}^1 \cap A_{\text{trans}}^2, \\ A_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4\}, \\ A_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \tilde{x}_1 = \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}\}, \\ A_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \tilde{x}_2 = \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* В случае, если  $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ , искомая вероятность упростится следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\right) = \mathbf{P}\left(\varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\right)$$

По аналогии с выводом формул (1.25) и (1.26), для доказательства воспользуемся

формулой полной вероятности и учетом (1.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x \right) &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P} \left( \eta_i = a; \xi_i = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x \right) \times \\ &\times \mathbf{P} \left( \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x, \eta_i = a; \xi_i = b \right) = \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k, r, x) \zeta(b, k, r, x) \times \mathbf{P} \left( \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x, \eta_i = a; \xi_i = b \right). \end{aligned}$$

Теперь учтем функциональные зависимости (1.5) и (1.6), а также явный вид функций  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x \right) &= \\ &= \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - b_1\}} \times \\ &\times \sum_{a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - b_3\}} \times \\ &\times \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - b_2\}} \times \\ &\times \sum_{a_4, b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}} \delta_{b_4, x_4} \delta_{\tilde{x}_4, x_4 + a_4 - a_2} \end{aligned}$$

и после упрощения, полагая  $a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \varkappa_{i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x \right) &= \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} \times \\ &\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \left( \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \right. \\ &\times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}} \Big) = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), \tilde{x}_3) \times \\ &\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \left( \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \right. \\ &\times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}} \Big), \end{aligned}$$

что есть в точности (1.30).  $\square$

**Теорема 1.5.** Пусть  $x_3, \tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$  и  $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$ . Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  вычисляются

по следующей формуле:

$$\mathbf{P} \left( \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x \right) = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3), \quad (1.31)$$

*Доказательство.* Доказательство следует из равенства (1.26).  $\square$

#### 1.4. Классификация состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ по арифметическим свойствам

Введем множество

$$X^{(k,r)} = \{x \in \mathbb{Z}_+^4 : x_1 > 0, x_4 \geq \ell_{k,r,1}\},$$

где  $k$  и  $r$  такие, что  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $(\gamma, x)$  — произвольное состояние цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $x \in \mathbb{Z}_+^4$ . Тогда для любого  $r_1$ ,  $0 \leq r_1 \leq n_0$ , существует  $x_{3,1}$ ,  $x_{3,1} \leq L$ , такое, что вероятность попасть за конечное число переходов из состояния  $(\gamma, x)$  в состояние продления  $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$  положительна.

*Доказательство.* Доказательство начнем со случая, когда состояние  $\gamma$  соответствует некому циклу. Тогда на каждом последующем такте с ненулевой вероятностью по потокам  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  не будет приходить ни одного требования и, одновременно с этим, из очереди  $O_4$  все требования будут перенаправляться в очередь  $O_2$ . Тогда, в конечном итоге, обслуживающее устройство дойдет до выходного состояния этого цикла, в котором очередь  $O_3$  будет содержать  $x_{3,1} \leq L$  требований и прибор перейдет в режим продления. После нескольких тактов подобного же рода (отсутствия требований по потокам  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ , а также перенаправления всех требований из очереди  $O_4$  в очередь  $O_2$ ) требования в очередях  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_4$  кончатся и система придет в состояние  $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ .

В случае же, когда состояние прибора соответствует некому состоянию продления, отличие от второй части предыдущего случая состоит в том, что в очереди  $O_3$  может находиться больше  $L$  требований. Однако тогда система на следующем же такте "свалится" в один из циклов и задача будет сведена к предыдущей.  $\square$

**Лемма 1.2.** Для любых  $x_{3,1} \leq L$ ,  $x_{3,2} > L$ ,  $0 \leq r_1 \leq n_0$  и  $1 \leq k \leq d$  вероятность за конечное число переходов из состояния продления  $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$  попасть во входное состояние  $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,2}, 0))$  положительна.

*Доказательство.* Пусть  $\gamma \in \Gamma$  — состояние продления, из которого обслуживающий прибор может перейти в цикл  $C_k$  (в силу предположений о виде рассматриваемых графов такое состояние заведомо существует). Тогда предполагая, что по потокам  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  требования не поступают, обслуживающее устройство в конечном итоге дойдет до состояния  $\gamma$  с пустыми очередями  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_4$ . На этом самом такте, по потоку  $\Pi_3$ , в дополнение к уже имеющимся  $x_{3,1} \leq L$  требованиям, может придти любое количество требований, в том числе и количество, необходимое для перехода в состояние цикла  $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,2}, 0))$ ,  $x_{3,2} > L$ .  $\square$

**Лемма 1.3.** Для любых  $x_{3,1} > L$ ,  $x_2 \in X^{(k,r)} \cap \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 : x_{3,2} = x_{3,1} - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$ ,  $0 \leq r \leq n_k$  и  $1 \leq k \leq d$  вероятность за конечное число переходов из входного состояния цикла  $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$  попасть в произвольное состояние цикла  $(\Gamma^{(k,r)}, x_2)$  положительна.

*Доказательство.* Поскольку с ненулевой вероятностью по потоку  $\Pi_3$  на последующих тактах может приходить любое количество требований, положим, что на всех тактах, когда обслуживающее устройство находится в выходном состоянии  $\Gamma^{(k,n_k)}$ , в очередь  $O_3$  приходит ровно  $\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}$  требований. Причем на остальных тактах по потоку  $\Pi_3$  требования не поступают. Этим обеспечивается сколь угодно долгое пребывание прибора в цикле  $C_k$ , при этом сохраняя количество требований в очереди  $O_3$  неизменным и равным  $x_{3,1}$ .

Далее допустим, что на первом же такте (то есть в состоянии  $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ ) по потоку  $\Pi_1$  пришло  $x_{2,2} + x_{4,2} + \ell_{k,r \ominus_k 1,2} - \ell_{k,r \ominus_k 1,1}$  требований, которые все спустя несколько тактов перешли в очередь  $O_4$ . При этом перемещения требований из очереди  $O_4$  в очередь  $O_2$  не происходило. В состоянии  $(0, 0, x_{3,2}, x_{2,2} + x_{4,2} + \ell_{k,r \ominus_k 1,2} - \ell_{k,r \ominus_k 1,1})$  очереди могут оставаться сколь угодно долго, вплоть до такта, в котором обслуживающее устройство будет находиться в состоянии  $\Gamma^{(k,r \ominus_k 1)}$ . На этом такте по потоку  $\Pi_1$  придет  $x_{1,2} + \ell_{k,r \ominus_k 1,1}$  требований и из очереди  $O_4$  уйдет  $x_{2,2} + \ell_{k,r \ominus_k 1,2}$  требований. Таким образом, на следующем такте состояние системы будет  $(\Gamma^{(k,r)}, (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,1} - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}, x_{4,2}))$ .  $\square$

Из лемм 1.2 и 1.3 вытекает следующий результат.

**Лемма 1.4.** Для любых  $x_{3,1} \leq L$ ,  $x_2 \in X^{(k,r)} \cap \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 : x_{3,2} > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$ ,  $0 \leq r_1 \leq n_0$ ,  $0 \leq r_2 \leq n_k$ ,  $1 \leq k \leq d$  вероятность попасть за конечное число переходов из состояния продления  $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$  в состояние цикла  $(\Gamma^{(k,r_2)}, x_2)$  положительна.

**Лемма 1.5.** Для любых  $\Gamma^{(k_1,r_1)}, \Gamma^{(k_2,r_2)} \in \Gamma$  и  $x_1 \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \setminus X^{(k_1,r_1)}$  вероятность перейти на следующем такте из состояния  $(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_1)$  в состояние  $(\Gamma^{(k_2,r_2)}, x_2)$  равна нулю.

*Доказательство.* Действительно, предположим, что в начале очередного такта в очереди  $O_1$  находится  $x_{1,2} > 0$  требований. Это значит, что за предыдущий такт смогли обслужиться все  $\ell_{k_1, r_1, 1}$  требований. А поскольку все требования выходного потока  $\Pi_1^{\text{вых}}$  без исключения становятся требованиями входного потока  $\Pi_4$  и требования, пришедшие по потоку  $\Pi_4$  не покидают очередь  $O_4$  до начала следующего такта, то как минимум  $\ell_{k_1, r_1, 1}$  требований должно было остаться в очереди  $O_4$  с предыдущего такта. Значит с необходимостью  $x_{4,2} \geq \ell_{k_1, r_1, 1}$ .  $\square$

**Лемма 1.6.** Для любых  $0 \leq r_1, r_2 \leq n_0$  и  $x_{3,1} \leq L$ ,  $x_2 \in X^{(0, r_2)} \cap \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 : L \geq x_{3,2} > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}$  вероятность попасть за конечное число переходов из одного состояния продления  $(\Gamma^{(0, r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$  в другое состояние продления  $(\Gamma^{(0, r_2)}, x_2)$  положительна.

*Доказательство.* Действительно, из леммы (1.4) следует, что из состояния вида  $(\Gamma^{(0, r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ ,  $x_{3,1} \leq L$ ,  $r_1 \leq n_0$ , с ненулевой вероятностью и за конечное число шагов можно перейти в выходное состояние вида  $(\Gamma^{(k, n_k)}, x_3)$ ,  $x_3 \in X^{(k, n_k)} \cap \{x_3 \in \mathbb{Z}_+^4 : L - \sum_{t=0}^{n_k-1} \ell_{k,t,3} < x_{3,3}\}$ , причем для любого  $k = 1, 2, \dots, d$ . Наложим на количество  $x_{3,3}$  требований в очереди  $O_3$  еще одно ограничение:  $x_{3,3} \leq L + \ell_{k, n_k, 3}$ . Находясь в состоянии  $(\Gamma^{(k, n_k)}, x_3)$  и предполагая, что за текущий такт по потоку  $\Pi_3$  не поступит больше  $L - x_{3,3} + \ell_{k, n_k, 3}$  требований, система на следующем такте перейдет в состояние продления  $(\Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k, n_k)}))}, x_4)$ , где  $x_4 \in X^{(0, h_1(\Gamma^{(k, n_k)}))} \cap \{x_4 \in \mathbb{Z}_+^4 : L - \sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3} < x_{3,4} \leq L\}$ . Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 1.3, можно "опустошить" очереди  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_4$ , не допуская при этом поступления требований по потоку  $\Pi_3$ . Далее по схеме, описанной в лемме 1.3, можно привести систему в любое состояние вида  $(\Gamma^{(0, r_2)}, x_2)$ .  $\square$

**Лемма 1.7.** Для любых  $1 \leq k \leq d$ ,  $0 \leq r \leq n_k$ ,  $0 \leq r_1 \leq n_0$  и  $x_1 \in \{x_1 \in \mathbb{Z}_+^4 : x_{3,1} \leq L\}$ ,  $x_2 \in \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 : x_{3,2} \leq L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$  вероятность попасть за конечное число переходов из состояния продления  $(\Gamma^{(0, r_1)}, x_1)$  в состояние цикла  $(\Gamma^{(k, r)}, x_2)$  равна нулю.

*Доказательство.* Действительно, для того, чтобы попасть в состояние цикла из состояния продления, необходимо попасть сначала во входное состояние, в котором количество  $x_{3,2}$  требований в очереди  $O_3$  не может быть меньше  $L + 1$ , то есть  $x_{3,2} > L$ . А поскольку на каждом такте, с соответствующим состоянием обслуживающего устройства  $\Gamma^{(\bar{k}, \bar{r})}$  в цикле, до момента попадания обслуживающего устройства в состояние  $\Gamma^{(k, r)}$  может обслуживаться не более  $\ell_{\bar{k}, \bar{r}, 3}$  требований, то за время пребывания в цикле обслужиться больше, чем  $\sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}$  требований просто не могло. Поэтому в очереди  $O_3$  останется не меньше  $x_{3,2} - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3} > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}$  требований.  $\square$

**Лемма 1.8.** Для любых  $1 \leq k \leq d$ ,  $0 \leq r \leq n_k$ ,  $0 \leq r_1 \leq n_0$  и  $x_1 \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $x_2 \in \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 : x_{3,2} > L\} \cup \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 : x_{3,2} \leq L - \max_{k=1,2,\dots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}$  вероятность попасть за конечное число переходов из состояния цикла  $(\Gamma^{(k,r)}, x_1)$ ,  $x_1 \in \mathbb{Z}_+^4$  в состояние продления  $(\Gamma^{(0,r_1)}, x_2)$  равна нулю.

*Доказательство.* Действительно, поскольку из каждого состояния продления можно "свалиться" в цикл, то условие  $x_{3,2} \leq L$  должно быть выполнено в каждом состоянии продления (иначе в конце предыдущего такта было бы принято решение находиться в одном из циклов). А поскольку во время пребывания в цикле в очереди  $O_3$  должно находиться больше  $L - \sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}$  требований, и во время продления требования из очереди  $O_3$  не обслуживаются, то условие  $x_{3,2} > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}$  также должно быть выполнено.  $\square$

Введем множества

$$S_{0,r} = \{(\Gamma^{(0,r)}, x) : x \in X^{(0,r)}, L \geq x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}, \quad 1 \leq r \leq n_0$$

$$S_{k,r} = \{(\Gamma^{(k,r)}, x) : x \in X^{(k,r)}, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

В следующей теореме перечислены все существенные состояния марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ .

**Теорема 1.6.** Множествами существенных состояний марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$  являются множества  $\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}$ ,  $\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}$  и только они.

*Доказательство.* Пусть система находится в состоянии  $(\gamma_1, x_1) \in S_{0,r}$  для некоторого  $1 \leq r \leq n_0$ . Тогда в какое бы состояние после этого система ни перешла, по лемме 1.1 за конечное число шагов и с ненулевой вероятностью она попадет в состояние вида  $(\Gamma^{(0,\tilde{r}_1)}, (0, 0, \tilde{x}_{3,1}, 0))$ ,  $\tilde{x}_{3,1} \leq L$ ,  $1 \leq \tilde{r}_1 \leq n_0$ . Далее, по лемме 1.6, система из состояния  $(\Gamma^{(0,\tilde{r}_1)}, (0, 0, \tilde{x}_{3,1}, 0))$  с ненулевой вероятностью вернется в состояние продления  $(\gamma_1, x_1)$ , из которого она вышла. Следовательно, любое состояние  $(\gamma_1, x_1)$  из  $S_{0,r}$  является существенным.

Далее, пусть система находится в состоянии  $(\gamma_2, x_2) \in S_{k,r}$  для некоторых  $1 \leq k \leq d$  и  $1 \leq r \leq n_k$ . С помощью рассуждений, приведенных выше, используя вместо леммы 1.6 лемму 1.4, можно показать, что в какое бы состояние система в последствии не попала, она с положительной вероятностью и за конечное число шагов вернется в состояние  $(\gamma_2, x_2)$ . Следовательно, любое состояние  $(\gamma_2, x_2)$  из  $S_{k,r}$  также является существенным.

Из лемм 1.5, 1.7 и 1.8 следует, что никаких других существенных состояний, кроме  $\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}$  и  $\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}$ , нет.  $\square$

По аналогии введем подмножества пространства состояний цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ :

$$S_{0,r}^3 = \{(\Gamma^{(0,r)}, x_3) : x_3 \in Z_+, L \geq x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3} \right\}\}, \quad 1 \leq r \leq n_0$$

$$S_{k,r}^3 = \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3) : x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

Тогда для цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  с очевидностью применима аналогичная классификация состояний.

**Теорема 1.7.** Множествами существенных состояний марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  являются множества  $\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^3$ ,  $\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^3$  и только они.

## Литература

1. Zorine, A. V. Study of queues' sizes in tandem intersections under cyclic control in random environment / A. V. Zorine // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. — 2013. V. 356. — P. 206–215.
2. Zorine, A. V. On the conditions for the existence of a stationary mode in a tandem of queuing systems with cyclic control in a random environment / A. V. Zorine // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. V. 47. — P. 183–191.
3. Зорин, А. В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований / А. В. Зорин // Теория вероятностей и математическая статистика. — 2011. — Вып. 84. — С. 163–176.
4. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 1 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1988. — Т. 28. — № 4. — С. 783–784.
5. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 2 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 148–159.
6. Федоткин, М. А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1998. — Вып. 7. — С. 333–344.



7. Федоткин, М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1996. — Вып. 6. — С. 51–70.
8. Федоткин, М. А. Управление процессами обслуживания / М. А. Федоткин // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского “Математическое моделирование и оптимальное управление”. — 2001. — Вып. 2(24). — С. 169–188.
9. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин // М.: Государственное издательство физико-математической литературы. — 1963. — 236 с.
10. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // М.: Наука. — 1974. — 120 с.
11. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин // М.: Физматлит. — 2006. — 572 с.
12. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко // М.: Издательство ЛКИ. — 2007. — 448 с.
13. Ширяев, А. Н. Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1 / А. Н. Ширяев // М.: Наука. — 2007. — 552 с. (С. 348–351).
14. Кемени, Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепш // М.: Наука. — 1987. — 416 с.