Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем обслуживания при циклическом алгоритме с продлением

Кочеганов Виктор Михайлович[1], **Зорин Андрей Владимирович**[2]

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: kocheganov@gmail.com
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: zoav1602@gmail.com

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j = \overline{1,4}$. Для $j = \overline{1,3}$ дисциплина очереди O_j, имеет тип FIFO. Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки. Интенсивность простейшего потока Π_j будем обозначать λ_j, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu$, $j \in \{1,3\}$, которая предполагается аналитической при любом z из внутренности круга $|z| < (1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков. В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = \overline{0,d}; r = \overline{1,n_k}\}$. Здесь d, n_0, n_1, …, n_d суть заданные натуральные числа. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение неслучайного времени $T^{(k,r)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1,4}$, определяется как виртуальный выходной поток из очереди O_j при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j=\overline{1,3}$ еще и при неограниченно больших длинах соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j=\overline{1,3}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если обслуживается очередь O_j, и будет содержать 0 требований в противном случае.

Для задания информации о системе введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. В качестве дискретной временно̀й шкалы выберем последовательность $\tau_0=0$, τ_1, τ_2, $\ldots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим $\Gamma_i\in\Gamma$ состояние обслуживающего устройства в промежутке $(\tau_{i-1},\tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i}\in\mathbb{Z}_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i}\in\mathbb{Z}_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j за промежуток $(\tau_i,\tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i}\in\mathbb{Z}_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ за промежуток $(\tau_i,\tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i}\in\mathbb{Z}_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в промежутке $(\tau_i,\tau_{i+1}]$, $j=\overline{1,4}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением $\Gamma_{i+1}=h(\Gamma_i,\varkappa_{3,i})$, где отображение $h(\cdot,\cdot)$ определено следующим образом. Зададим непересекающиеся множества состояний $C_k=\{\Gamma^{(k,r)}\colon r=1,2,\ldots n_k\}\in\Gamma$, $k=\overline{1,d}$, называемые далее *циклами*. При $k=0$ состояния $\Gamma^{(0,r)}$, $r=\overline{0,n_0}$ будем называть состояниями продления. Положим $r\oplus_k 1=r+1$ для $r<n_k$ и $r\oplus_k 1=1$ при $r=n_k$, $k=0$, 1, $\ldots$, d. В цикле C_k выделим подмножества C_k^{O} выходных состояний, C_k^{I} входных состояний и $C_k^{\mathrm{N}}=C_k\setminus(C_k^{\mathrm{O}}\cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. При этом, будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. Наконец, все состояния продления образуют один цикл. Пусть задано положительное целое число L, множество $N_0=\{1,2,\ldots,n_0\}$ и заданы отображения $h_1(\cdot)\colon\bigcup_{k=1}^d C_k^{\mathrm{O}}\to N_0$, $h_2(\cdot)\colon N_0\to N_0$ и $h_3(\cdot)\colon N_0\to\bigcup_{k=1}^d C_k^{\mathrm{I}}$. Тогда $h(\Gamma^{(k,r)},y)$ принимает значение $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ при $\Gamma^{(k,r)}\in C_k\setminus C_k^{\mathrm{O}}$, значение $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ при $\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{O}}$ и $y>L$, значение $\Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,r)})}$ при $\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{O}}$ и $y\leqslant L$, значение $\Gamma^{(0,h_2(r))}$ при $k=0$ и $y\leqslant L$, наконец, значение $h_3(r)$ при $k=0$ и $y>L$.

Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i,\tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot,\cdot)$: $h_T(\Gamma_i,\varkappa_{3,i})=T^{(k,r)}$, где $\Gamma^{(k,r)}=h(\Gamma_i,\varkappa_{3,i})$. Далее, функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i}=\min\{\varkappa_{j,i}+\eta_{j,i},\xi_{j,i}\},\quad j=\overline{1,3},\tag{1}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Из равенства $\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}$ и соотношения (1) следует соотношение $\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}$ для $j = \overline{1,3}$. Из формулировки поставленной задачи также следуют соотношения для потока Π_4: $\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}$, $\varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}$ и $\xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}$.

Функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ зададим формулой $\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}$, $k, y \in Z_+$, $u \in [0,1]$. Для $j \in \{1,3\}$ и $t \in \mathbb{R}$ функцию $\varphi_j(\cdot,\cdot)$ введем из разложения $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t(f_j(z) - 1)\}$. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$. Индикатор равенства двух величин x и y будем выражать символом Кронекера $\delta_{x,y}$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении пары $(\Gamma_i; \varkappa_i)$ вероятность $\varphi(a,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть $\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times$ $\times\, \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1 + a_1\}}$. Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma_i; \varkappa_i)$ есть $\delta_{b_1, \ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4, x_4}$.

Указанные функциональные соотношения и свойства условных распределений позволяют построить веростноятное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и конструктивно задать на нем марковскую случайную последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$. Основной результат настоящей работы содержится в следующих теоремах

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ *и* $\varkappa_{3,0} = x_{3,0} \in \mathbb{Z}_+$ *фиксированы. Тогда последовательность* $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *является счетной цепью Маркова.*

Теорема 2. *Пусть* x_3, $\tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\Gamma^{(k,r)}$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$. *Тогда условная вероятность* $\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3\} | \{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3\})$ *равна* $\delta_{\tilde{x}_3,0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) + (1 - \delta_{\tilde{x}_3,0}) \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - x_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3))$.

Теорема 3. *Пусть для* $r = \overline{1, n_0}$ *определено множество* $S_{0,r}^3 = \big\{(\Gamma^{(0,r)}, x_3)\colon x_3 \in Z_+, L \geqslant x_3 > L - \max\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\colon k = \overline{1,d}\}\big\}$ *и для* $k = \overline{1,d}$, $r = \overline{1, n_k}$ *обозначено* $S_{k,r}^3 = \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3)\colon x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$. *Тогда множество существенных состояний марковской цепи* $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *есть* $\bigcup_{k=0}^{d} \big(\bigcup_{r=1}^{n_k} S_{k,r}^3\big)$.

Работа выполнена в рамках фундаментальной НИР «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных систем и процессов принятия решений» (номер госрегистрации: 01201456585) и государственной программы «Поддержка ведущих универсистетов РФ в целях повышения их конкурентноспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров».