

Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем обслуживания при циклическом алгоритме с продлением

Кочеганов Виктор Михайлович¹, Зорин Андрей Владимирович²

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: kocheganov@gmail.com

² Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: zoav1602@gmail.com

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j = \overline{1, 4}$. Для $j = \overline{1, 3}$ дисциплина очереди O_j имеет тип FIFO. Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки. Интенсивность простейшего потока Π_j будем обозначать λ_j , а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}$, $j \in \{1, 3\}$, которая предполагается аналитической при любом z из внутреннейности круга $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_{\nu}^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν . Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4 . Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков. В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$. Здесь d, n_0, n_1, \dots, n_d суть заданные натуральные числа. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение неслучайного времени $T^{(k,r)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1, 4}$, определяется как виртуальный выходной поток из очереди O_j при условии максимального ис-

пользования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j = \overline{1, 3}$ еще и при неограниченно больших длинах соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1, 3}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если обслуживается очередь O_j , и будет содержать 0 требований в противном случае.

Для задания информации о системе введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. Пусть \mathbb{Z}_+ — множество целых неотрицательных чисел. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим $\Gamma_i \in \Gamma$ состояние обслуживающего устройства в промежутке $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i , количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, количество $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $j = \overline{1, 4}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$, где отображение $h(\cdot, \cdot)$ определено следующим образом. Зададим непересекающиеся множества состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = 1, 2, \dots, n_k\} \in \Gamma$, $k = \overline{1, d}$, называемые далее *циклами*. При $k = 0$ состояния $\Gamma^{(0,r)}$, $r = \overline{0, n_0}$ будем называть состояниями продления. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r < n_k$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = 0, 1, \dots, d$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^O выходных состояний, C_k^I входных состояний и $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$ нейтральных состояний. При этом, будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. Наконец, все состояния продления образуют один цикл. Пусть задано положительное целое число L , множество $N_0 = \{1, 2, \dots, n_0\}$ и заданы отображения $h_1(\cdot) : \bigcup_{k=1}^d C_k^O \rightarrow N_0$, $h_2(\cdot) : N_0 \rightarrow N_0$ и $h_3(\cdot) : N_0 \rightarrow \bigcup_{k=1}^d C_k^I$. Тогда $h(\Gamma^{(k,r)}, y)$ принимает значение $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$ при $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$, значение $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$ при $\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O$ и $y > L$, значение $\Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}$ при $\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O$ и $y \leq L$, значение $\Gamma^{(0, h_2(r))}$ при $k = 0$ и $y \leq L$, наконец, значение $h_3(r)$ при $k = 0$ и $y > L$.

Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot) : h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}$, где $\Gamma^{(k,r)} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$. Далее, функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

между величиной $\bar{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию меха-

низма обслуживания требований. Из равенства $\kappa_{j,i+1} = \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}$ и соотношения (1) следует соотношение $\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}$ для $j = \overline{1, 3}$. Из формулировки поставленной задачи также следуют соотношения для потока Π_4 : $\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}$, $\kappa_{4,i+1} = \kappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}$ и $\xi_{4,i} = \kappa_{4,i}$.

Функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ зададим формулой $\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}$, $k, y \in \mathbb{Z}_+$, $u \in [0, 1]$. Для $j \in \{1, 3\}$ и $t \in \mathbb{R}$ функцию $\varphi_j(\cdot, \cdot)$ введем из разложения $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\}$. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$. Индикатор равенства двух величин x и y будем выражать символом Кронекера $\delta_{x,y}$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении пары $(\Gamma_i; \kappa_i)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть $\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}$. Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma_i; \kappa_i)$ есть $\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}$.

Указанные функциональные соотношения и свойства условных распределений позволяют построить веростоятное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и конструктивно задать на нем марковскую случайную последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}); i \geq 0\}$. Основной результат настоящей работы содержится в следующих теоремах

Теорема 1. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $\kappa_{3,0} = x_{3,0} \in \mathbb{Z}_+$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является счетной цепью Маркова.

Теорема 2. Пусть $x_3, \tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$. Тогда условная вероятность $\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \kappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3\} | \{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \kappa_{3,i} = x_3\})$ равна $\delta_{\tilde{x}_3, 0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) + (1 - \delta_{\tilde{x}_3, 0}) \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3))$.

Теорема 3. Пусть для $r = \overline{1, n_0}$ определено множество $S_{0,r}^3 = \{(\Gamma^{(0,r)}, x_3) : x_3 \in \mathbb{Z}_+, L \geq x_3 > L - \max\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3} : k = \overline{1, d}\}\}$ и для $k = \overline{1, d}$, $r = \overline{1, n_k}$ обозначено $S_{k,r}^3 = \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3) : x_3 \in \mathbb{Z}_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$. Тогда множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \kappa_{3,i}); i \geq 0\}$ есть $\bigcup_{k=0}^d (\bigcup_{r=1}^{n_k} S_{k,r}^3)$.

Работа выполнена в рамках фундаментальной НИР «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных систем и процессов принятия решений» (номер госрегистрации: 01201456585) и государственной программы «Поддержка ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров».