1. Постановка задачи и построение математической модели

1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

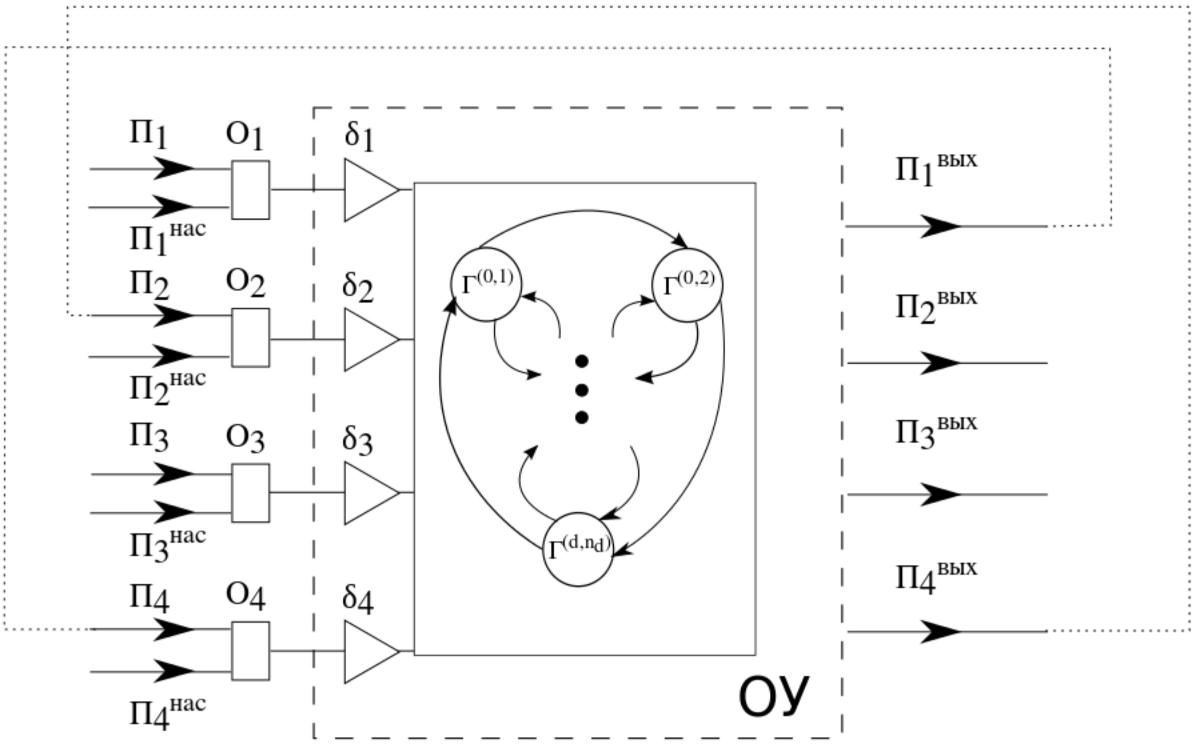

Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu \tag{1}$$

которая предполагается аналитической при любом z таком, что $|z| < (1+\varepsilon), \varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν, $j \in \{1, 3\}$. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots n_k\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, …, n_d. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Введем множества Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4. Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^1\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} \colon r = 1, 2, \ldots n_k\}$ будем называть k-м циклом, $k = 1, 2, \ldots, d$ (Рис. 2). При $k = 0$ состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = 0, 1, \ldots, n_0$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r < n_k$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^{O} выходных, C_k^{I} входных и $C_k^{\mathrm{N}} = C_k \setminus (C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ того же цикла C_k. При $\Gamma^{(k,r)}$ принадлежащем множеству C_k^{O} прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L. В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L, то новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}}$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L, где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^{\mathrm{I}}$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}}$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^{\mathrm{O}} \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^{\mathrm{I}} \subset {}^3\Gamma$.

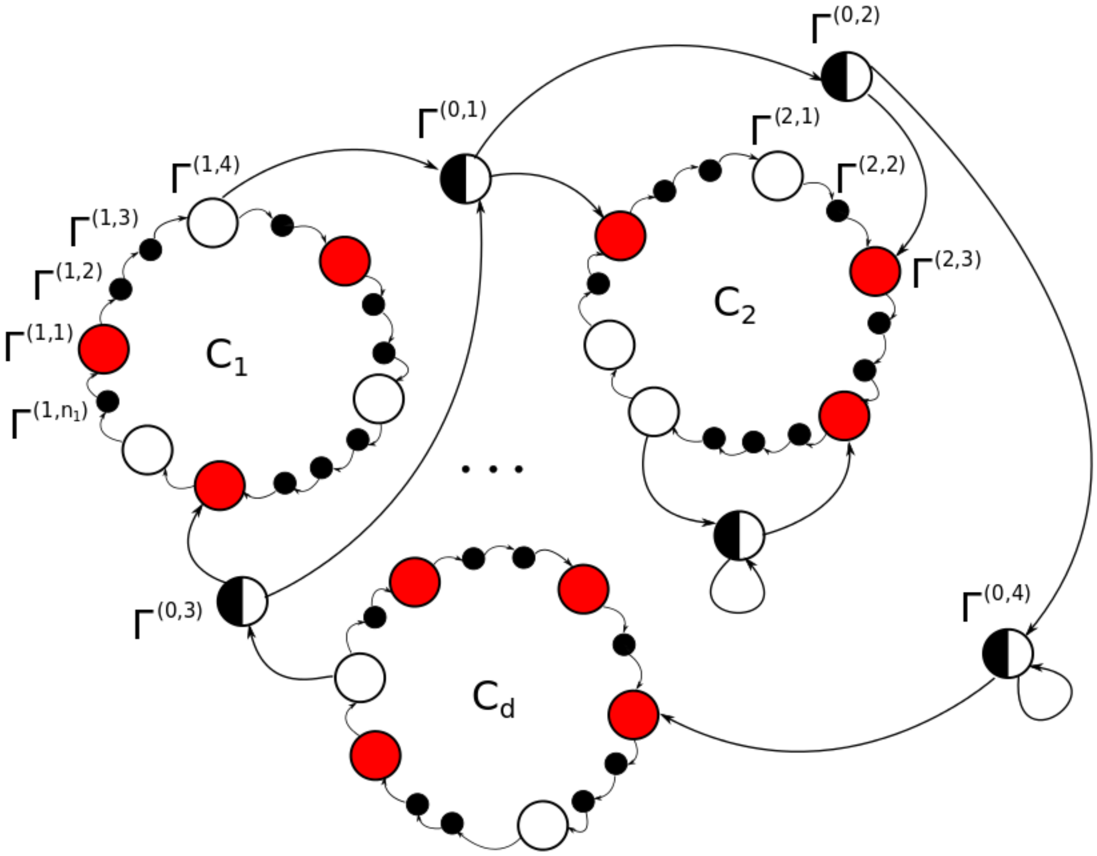

Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, x) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}; \\ \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } x > L; \\ \Gamma^{\left(k, h_1(\Gamma^{(k,r)})\right)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } x \leqslant L; \\ \Gamma^{\left(0, h_2(r)\right)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } x \leqslant L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } x > L. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим введеные обозначения на примере Рис. 2. Примерами входных состояний являются $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^{\mathrm{I}}$ и $\Gamma^{(2,3)} \in C_2^{\mathrm{I}}$, выходных состояний — $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^{\mathrm{O}}$ и $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^{\mathrm{O}}$, нейтральных состояний — $\Gamma^{(1,2)}, \Gamma^{(1,3)}, \Gamma^{(1,n_1)} \in C_1^{\mathrm{N}}$ и $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^{\mathrm{N}}$. Состояния продления представлены на графе вершинами $\Gamma^{(0,1)}$, $\Gamma^{(0,2)}$, $\Gamma^{(0,3)}$ и $\Gamma^{(0,4)}$. Далее, отображение $h_1(\cdot)$ на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние $\Gamma^{(1,4)}$ в число 1 — номер состояния продления $\Gamma^{(0,1)}$, то есть $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$. Аналогично $h_2(1) = 2$, $h_2(2) = 4$ и $h_2(3) = 1$. Примером отображения $h_3(\cdot)$ является $h_3(2) = \Gamma^{(2,3)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j \in \{1, 2, 3\}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$, и будет содержать 0 требований в противном случае: $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$. Пусть Z_+ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in Z_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1 - p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней средой,

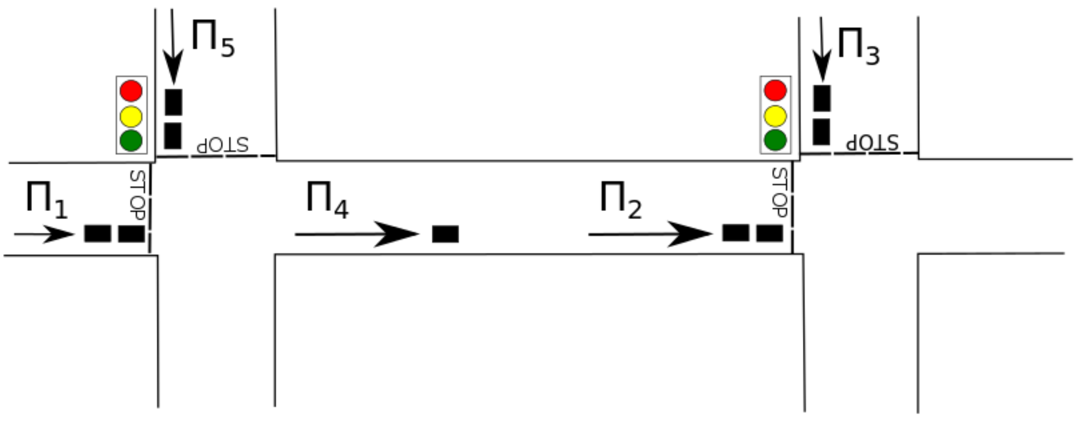

Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1, Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1, проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью ($p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\widetilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в течение времени $\widetilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_3 (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\widetilde{T}^{(2,1)}$, $\widetilde{T}^{(2,2)}$ и $\widetilde{T}^{(2,3)}$.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1–го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2–го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина s). Здесь T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определнности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4. За начальное состояние объединенной системы примем $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, то

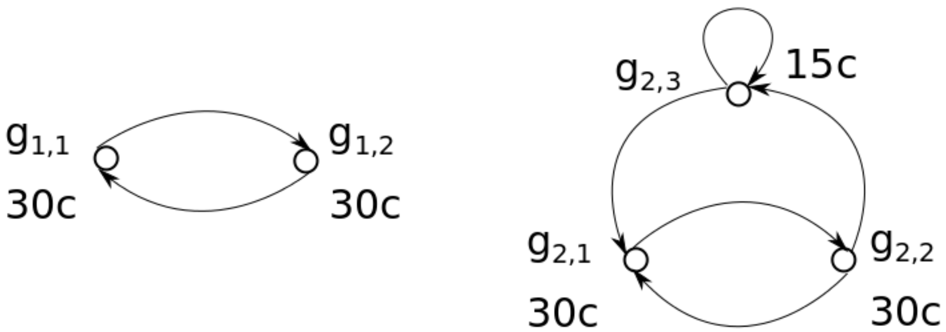

Рис. 4. Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

есть первый перекресток находится в состоянии $g_{1,1}$, второй — в состоянии $g_{2,1}$, и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами $s = 0$ и $t = 0$). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$. Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние $g_{2,1}$, так и в состояние продления $g_{2,3}$. Таким образом следущим состоянием тандема будет либо опять $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, либо $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следущий список всех возможных состояний системы:

$$
\begin{aligned}
&(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(1,1)}, \quad &&(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(1,2)}, \quad &&(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,1)},\\
&(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,2)}, &&(g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,3)}, &&(g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,4)},\\
&(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(4,1)}, &&(g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(4,2)}, &&(g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(4,3)},\\
&(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(4,4)}, &&(g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,5)}, &&(g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(3,1)},\\
&(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(3,2)}, &&(g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(2,1)}, &&(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(2,2)},\\
&(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(2,3)}, &&(g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(2,4)}.
\end{aligned}
$$

В соответсвии с приведенными выше обозначениями, множества C_1, C_2, C_3, C_4, а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут $C_1^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(1,1)}\}$, $C_2^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(2,1)}\}$, $C_3^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(3,1)}\}$ и $C_4^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(4,1)}\}$. Множествами выходных состояний будут $C_1^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(1,2)}\}$, $C_2^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(2,4)}\}$, $C_3^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(3,2)}\}$ и $C_4^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(4,4)}\}$. Функции $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ и $h_3(\cdot)$ задаются поточечно:

$$h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4 \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)} \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [3]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; 6) внутренняя память обслуживающего устройства — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\ldots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in Z_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in Z_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in Z_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \tag{3}$$

где отображение $h(\cdot, \cdot)$ определено в (2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \qquad \text{где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{4}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из (4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \tag{5}$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1) следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \tag{6}$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geqslant 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot,\cdot)$, $\varphi_3(\cdot,\cdot)$ из разложений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где $f_j(z)$ определены в (1), $j \in \{1, 3\}$. Функция $\varphi_j(x, t)$ есть вероятность поступления $x = 0,\ 1,\ \ldots$ требований по потоку Π_j за время $t \geqslant 0$. Функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k; x, u) = C_x^k u^k (1 - u)^{x-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k; x, u)$ есть вероятность поступления k требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит x требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u = p_{k,r}$.

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in Z_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x_1, x_2, x_3, x_4)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1 + a_1\}}, \tag{7}$$

где $0 \leqslant a_2 \leqslant x_2$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} ,$$

и для $j \in \{1,2,3\}$

$$\widetilde{\ell}(k,r,j) = \begin{cases} \ell_{k,r,j}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma, \\ 0, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma. \end{cases}$$

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Из содержательной постановки задачи следует, что вероятность $\zeta(b,k,r,x)$ выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x_1, x_2, x_3, x_4)$ есть

$$\delta_{b_1,\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}. \tag{8}$$

Из формулы (8) следует для $j \in \{1,2,3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i} = 0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i} = \ell_{\tilde{k},\tilde{r}}$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$.

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором общем вероятностном пространстве.

Теорема 1.1. Пусть $\gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in Z_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\overline{\xi}_{j,i} = \overline{\xi}_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1,2,3,4\}$, такие, что $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x_0$, выполняются соотношения (3), (5), (6) и для любых $a, b, x \in Z_+^4$ и векторов $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$, $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$, $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$ верно равенство

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i),$$

где функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ определяются формулами (7) и (8) соответственно.

Доказательство. В соответствии с теоремой Ионеску Тулчи (см. [13]) для доказательства достаточно задать на $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ вероятностную меру $P_0(\cdot)$ и далее, считая для $0 < i \leqslant n$ и каждого набора элементарных исходов $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$ заданной на $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ вероятностную меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \cdot)$, задать на $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \cdot)$, причем для любого множества $B \in \mathcal{F}_i$ функции $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, B)$ должны быть измеримыми функциями от $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$. Тогда для $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ и $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ будет существовать единственная вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ такая, что для любого $i \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i), \tag{9}$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i) = \int\limits_{A_0} P_0(d\omega_0) \int\limits_{A_1} P(\omega_0, d\omega_1) \ldots \int\limits_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, d\omega_i), \tag{10}$$

$i \geqslant 0$, $A_i \in \mathcal{F}_i$.

Итак, за описание элементарного исхода $\omega_i \in \Omega_i$ для произвольного $i \geqslant 0$ примем набор $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$, $\omega_{j,i} \in Z_+$. Таким образом, $\Omega_i = Z_+^3$ и в качестве σ-алгебры $\mathcal{F}_i$ возьмем множество всех подмножеств Ω_i: $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_{3,0})$. Тогда поскольку множество Ω_0 счетно, определим вероятностную меру $P_0(\cdot)$ на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)})). \tag{11}$$

Определим величины

$$\Gamma_0 = \gamma_0, \quad \varkappa_{j,0} = x_{j,0}, \quad \xi_{j,0}(\omega_0) = \widetilde{l}(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \tag{12}$$

$$\eta_{j,0} = \omega_{j,0}, \quad \eta_{4,0} = \min\{\xi_{1,0}, x_{1,0} + \eta_{1,0}\}, \quad \xi_{4,0} = x_{4,0}. \tag{13}$$

где $j \in \{1, 2, 3\}$. Теперь, предполагая заданными на $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ вероятностные меры $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \cdot)$, заданными величины Γ_i, $\varkappa_{j,i}$, $\xi_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и фиксируя набор $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$, определим на $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \cdot)$. Пусть

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(k^*,r^*)} = h(\Gamma_n, \varkappa_{3,n}), \quad \varkappa_{j,n+1} = \max\{0, \varkappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}, \tag{14}$$

$$\varkappa_{4,n+1} = \varkappa_{4,n} + \eta_{4,n} - \eta_{2,n}, \quad \xi_{j,n+1} = \widetilde{l}(k^*, r^*, j), \tag{15}$$

$$\eta_{j,n+1} = \omega_{j,n+1}, \quad \eta_{4,n+1} = \min\{\xi_{1,n+1}, \varkappa_{1,n+1} + \eta_{1,n+1}\}, \quad \xi_{4,n+1} = \varkappa_{4,n+1}, \tag{16}$$

для $j \in \{1,2,3\}$. Тогда

$$P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \{\omega_{n+1} \colon \omega_{1,n+1} = a_1, \omega_{2,n+1} = a_2, \omega_{3,n+1} = a_3\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{2,n}, p_{k^*,r^*}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})). \quad (17)$$

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ построено.

Теперь докажем, что введеные с помощью (12) – (16) случайные элементы $\Gamma_i(\omega)$ и случайные величины $\varkappa_{j,i}(\omega)$, $\eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i}$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1,2,3,4\}$ удовлетворяют условиям теоремы. Из построения следует, что случайные элементы Γ_i удовлетворяют (3), а случайные величины $\varkappa_{j,i}$ удовлетворяют (5) и (6), $j \in \{1,2,3,4\}$. Что касается $\xi_{j,i}$ и $\eta_{j,i}$, то для них найдем явное выражение для условной вероятности $\mathbf{P}\{\omega \colon \eta_{j,i}(\omega) = a_j, j \in \{1,2,3,4\} | \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega) = x\}$. Пусть $\Gamma^{\left(k_1^*,r_1^*\right)} = h(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x)$. Учитывая (15) и (16), распишем по определению условной вероятности:

$$\mathbf{P}\{\omega \colon \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}, a_4 = \min\{\tilde{\ell}(k_1^*, r_1^*, 1), x_1 + a_1\}; \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \\ \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = x\} / \mathbf{P}\{\omega \colon \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = x\} = \\ = \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(k^*,r^*,1), x_1 + a_1\}} \times \mathbf{P}\{\omega \colon \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}; \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \\ \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = x\} / \mathbf{P}\{\omega \colon \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = x\}.$$

Далее из (9) и (10) получим выражение для знаменателя последней дроби

$$\mathbf{P}\{\omega \colon \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = x\} = \\ = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{i-1} \colon \\ \Gamma_i = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i = x}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\})$$

и числителя

$$\mathbf{P}\{\omega \colon \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}; \Gamma_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}) = x\} = \\ = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{i-1} \colon \\ \Gamma_i = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i = x}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\ \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \{\omega_i\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{k_1^*,r_1^*}) \times \\ \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{i-1} \colon \\ \Gamma_i = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i = x}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\})$$

После сокращения одинаковых сумм получим:

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \eta_{j,i}(\omega) = a_j, j \in \{1,2,3,4\}|\Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_i(\omega) = x\} =$$
$$= \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{k_1^*,r_1^*}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(k_1^*, r_1^*, 1), x_1 + a_1\}},$$

что в точности совпадает с (7). Аналогичным образом вероятность одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при условии $\Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(k_1,r_1)}$ и $\varkappa_i(\omega) = x$ совпадает с (8). $\square$

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для исследования состояния обслуживающего устройства и длины всех очередей.

1.3. Марковское свойство последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$

Теперь перейдем к вопросу о марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$. Введем следующие события:

$$A_i(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) = \{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3\} \bigcap \{\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{2,i} = x_2, \varkappa_{4,i} = x_4\}, \quad (18)$$

$$B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) = \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3\} \bigcap \{\xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\} \quad (19)$$

Из теоремы (1.1) следует, что

$$P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) =$$
$$P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | A_i(k_i; r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})) \quad (20)$$

Далее, в силу того, что потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, входные потоки Π_1, Π_2, Π_3 условно независимы между собой, верно следующее соотношение:

$$P(B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$

$$=P(\eta_{1,i}=b_1|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times P(\eta_{3,i}=b_3|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times$$
$$P(\eta_{2,i}=b_2|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times P(\xi_{1,i}=y_1|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times$$
$$\times P(\xi_{2,i}=y_2|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times P(\xi_{3,i}=y_3|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}) \quad (21)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i});i\geqslant 0\}$.

Теорема 1.2. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0,\varkappa_{1,0},\varkappa_{2,0},\varkappa_{3,0},\varkappa_{4,0})$ последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i});i\geqslant 0\}$ является цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|A_i(k_i;r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i})) \quad (22)$$

Распишем сначала левую часть равенства (22). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий $B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)$ есть достоверное событие, $\cup_{b,y}B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)=\Omega$, получим

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$=\sum_{b,y}P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))=$$
$$=\sum_{b,y}P(B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}))\times$$
$$\times P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3))$$
$$(23)$$

Беря во внимание (3), (5) и (6) найдем второй множитель:

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)) =$$

$$= P\Big(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \Big| \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}) \bigcap$$

$$\bigcap\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\} \bigcap$$

$$\bigcap \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\}\Big) =$$

$$= P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1,$$

$$\max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4 \mid$$

$$\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t\{k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\} \bigcap\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\} \bigcap$$

$$\bigcap \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\}\Big) =$$

$$= P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1,$$

$$\max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4\ ), \tag{24}$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (21), (23) и (24) получаем выражение для левой части равенства (22):

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|\bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})) =$$

$$= \sum_{b,y} P(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times$$

$$\times P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1,$$

$$\max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4\ ) \tag{25}$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях $\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t})$, поэтому рассуждения для правой части (22) будут аналогичными:

$$P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|A_i(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i})) =$$
$$= \sum_{b,y} P(B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)|A_i(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}))\times$$
$$\times P(A_{i+1}(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4)|A_i(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i})\bigcap B_i(b_1;b_2;b_3;y_1;y_2;y_3)) =$$
$$= \sum_{b,y} P(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times$$
$$\times P\Big(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_{1,i+1}=x_1,\varkappa_{2,i+1}=x_2,\varkappa_{3,i+1}=x_3,\varkappa_{4,i+1}=x_4\Big|$$
$$\{\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\}\bigcap$$
$$\bigcap\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3\}\Big) =$$

откуда опять в силу (3), (5) и (6) получаем

$$= \sum_{b,y} P(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3|\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i})\times$$
$$\times P\Big(h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})=\Gamma^{(k,r)},\max\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\}=x_1,$$
$$\max\{0,x_{2,i}+b_2-y_2\}=x_2,\max\{0,x_{3,i}+b_3-y_3\}=x_3,x_{4,i}+\min\{y_1,x_{1,i}+b_1\}-\eta_{2,i}=x_4\Big).$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (22) совпадают, следовательно равенство верно и последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i});i\geqslant 0\}$ является цепью Маркова. $\square$

Литература

1. Zorine, A. V. Study of queues' sizes in tandem intersections under cyclic control in random environment / A. V. Zorine // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. — 2013. V. 356. — P. 206–215.

2. Zorine, A. V. On the conditions for the existence of a stationary mode in a tandem of queuing systems with cyclic control in a random environment / A. V. Zorine // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. V. 47. — P. 183–191.

3. Зорин, А. В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований / А. В. Зорин // Теория вероятностей и математическая статистика. — 2011. — Вып. 84. — С. 163–176.

4. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 1 / М. А.

Федоткин // Литовский математический сборник. — 1988. — Т. 28. — № 4. — С. 783–784.

5. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 2 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 148–159.

6. Федоткин, М. А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1998. — Вып. 7. — С. 333–344.

7. Федоткин, М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1996. — Вып. 6. — С. 51–70.

8. Федоткин, М. А. Управление процессами обслуживания / М. А. Федоткин // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского "Математическое моделирование и оптимальное управление". — 2001. — Вып. 2(24). — С. 169–188.

9. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я Хинчин // М.: Государственное издательство физико-математической литературы. — 1963. — 236 с.

10. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // М.: Наука. — 1974. — 120 с.

11. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин// М.: Физматилит. — 2006. — 572 с.

12. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко // М.: Издательство ЛКИ. — 2007. — 448 с.

13. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев // М.: Наука. — 1980. — 576 с.

14. Кемени, Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп // М.: Наука. — 1987. — 416 с.