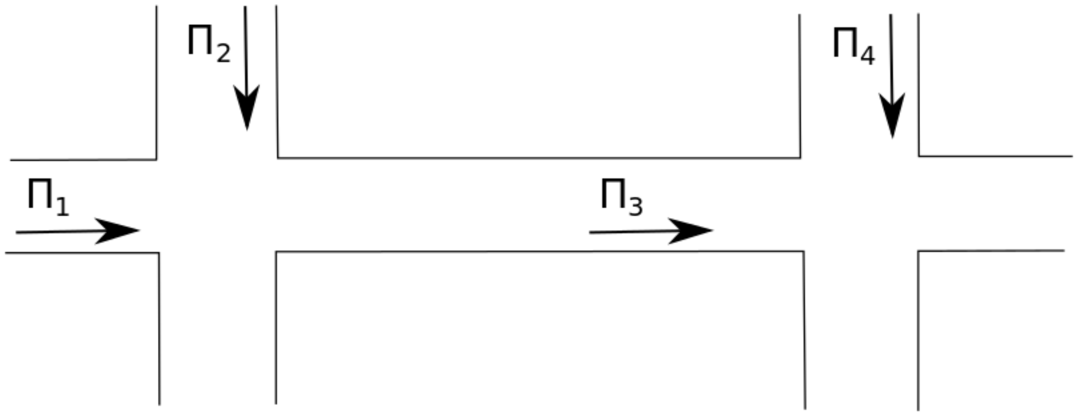
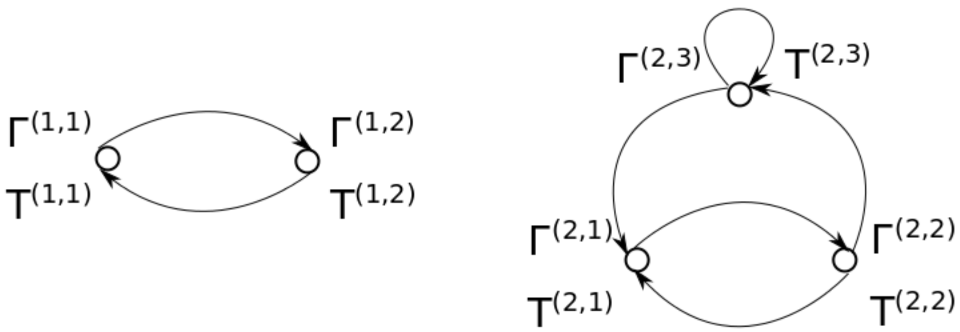
1. Постановка задачи и построение математической модели

1.1. Постановка задачи





Требования по потокам Π_j, $j = 1, 2, 4$, поступают пачками, причем пачки поступают в соответствии с Пуассоновским процессом с параметром λ_j. Требования из потока Π_1, будучи обслуженными, образуют поток Π_3. Требования по потоку Π_j поступают в соответствующую очередь O_j, $j = \overline{1,4}$.

Первый перекресток может находиться в одном из двух состояний:

- обслуживать поток Π_1 (состояние $\Gamma^{(1,1)}$ длительностью $T^{(1,1)}$) и
- обслуживать поток Π_2 (состояние $\Gamma^{(1,2)}$ длительностью $T^{(1,2)}$).

Второй перекресток имеет три состояния:

- обслуживание потока Π_3 (состояние $\Gamma^{(2,1)}$ длительностью $T^{(2,1)}$);
- обслуживание потока Π_4 (состояние $\Gamma^{(2,2)}$ длительностью $T^{(2,2)}$) и
- продолжение обслуживания потока Π_4 в случае превышения объема оставшейся очереди O_4 некого порога (состояние $\Gamma^{(2,3)}$ длительностью $T^{(2,3)}$);

Объединим рассматриваемые обслуживающие устройства в одно, состояние которого опишем с помощью вектора из множества $S_{general}\left(\Gamma^{(1,i_1)}; \Gamma^{(2,i_2)}; T\right)$, где $i_1 \in \{1, 2\}$, $i_2 \in \{1, 2, 3\}$, $T \in \left\{1, 2, \ldots, \max_{i_1,i_2}\left(T^{(1,i_1)}, T^{(2,i2)}\right)\right\}$. Свое состояние новое устройство меняет в моменты смены состояний одного из составляющих его устройств.

Теорема 1.1. Количество состояний полученного обслуживающего устройства конечно

Proof. Поскольку множество различных состояний Γ, в которые обслуживающее устройство может совершить переход, является подмножеством $S_{general}$ ($S \subset S_{general}$), то

$$|S| \leqslant \left|S_{general}\right| = 2 \times 3 \times \max_{i_1,i_2}\left(T^{(1,i_1)}, T^{(2,i2)}\right)$$

$\square$

В следствие этого результата мы можем перенумеровать состояния $\Gamma = \left\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(n)}\right\}$, а также соответствующие им длительности $T = \left\{T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(n)}\right\}$. Каждое состояние $\Gamma^{(r)}$ принадлежит одному из следующих четырех классов Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV}.

- в состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{I}$ обслуживаются только требования из очередей O_1 и O_3;
- в состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{II}$ обслуживаются только требования из очередей O_1 и O_4;
- в состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{III}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_3;
- в состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{IV}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4.

Для описания процесса обслуживания будут также использоваться потоки насыщения Π_j^{sat}, $j = \overline{1,4}$, определяемые как выходные потоки при максимальной загруженности обслуживающего устройства. Пусть

- для $j = 1$ ${}^{j}\Gamma = \Gamma^{I} \bigcup \Gamma^{II}$;
- для $j = 2$ ${}^{j}\Gamma = \Gamma^{III} \bigcup \Gamma^{IV}$;
- для $j = 3$ ${}^{j}\Gamma = \Gamma^{I} \bigcup \Gamma^{III}$;
- для $j = 4$ ${}^{j}\Gamma = \Gamma^{II} \bigcup \Gamma^{IV}$;

Тогда поток насыщения Π_j^{sat} будет содержать неслучайное число $l_{r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(r)}$, если $\Gamma^{(r)} \in^{j} \Gamma$, и не будет содержать требований в противном случае, $\Gamma^{(r)} \notin^{j} \Gamma$.

Моменты $\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots$ наблюдения за системой положим совпадающими с моментами переключения состояния обслуживающего устройства. Определим следующие случайные величины и элементы:

- количество $\varkappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i;
- состояние обслуживающего устройства $\Gamma_i \in \Gamma = \left\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(n)}\right\}$ в течение $(\tau_{i-1}; \tau_i]$;
- количество $\eta_{j,i}$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение $(\tau_i; \tau_{i+1}]$;
- количество $\xi_{j,i}$ требований по потоку насыщения Π_j^{sat} в течение $(\tau_i; \tau_{i+1}]$;
- количество $\overline{\xi_{j,i}}$ реально обслуженных требований по потоку Π_j.

1.2. Свойства условных распределений

Будем считать, что закон изменения состояния обслуживающего устройства нам известен и задается следующей функцией:

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{4,i}).$$

Также для определения длительности T_i состояния обслуживающего устройства в течение $(\tau_{i-1}; \tau_i]$, удобно ввести следующую функцию:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{4,i}) = T^{(r')}, \quad \text{где } \Gamma^{(r')} = h(\Gamma_i, \varkappa_{4,i}). \tag{1}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered} \overline{\xi}_{j,i} = \min\left\{\xi_{j,i}, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}\right\}, \quad \varkappa_{i+1} = \max\left\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\right\} \\ \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{4,i}), \quad \eta_{3,i} = \overline{\xi_{1,i}} = \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} + \min\left\{0, \xi_{1,i} - \left(\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\right)\right\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим через $\varphi_j(x,t)$ вероятность того, что за время $t > 0$ по потоку Π_j поступит ровно $x \in Z_+$ требований:

$$P\left(\left\{\omega\colon \eta_{j,i} = b\right\} \middle| \left\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{4,i} = x\right\}\right) = \varphi_j(b, T_{i+1}). \tag{3}$$

Учитывая закон распределения процесса Пуассона и количества требований в пачках, величины $\varphi_j(x,t)$ могут быть найдены из соотношений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x,t) = exp\left\{\lambda_j t \left(\sum_{b=1}^{\infty} z^b \pi(b,j) - 1\right)\right\} \tag{4}$$

Для потоков насыщения имеем следующие соотношения:

$$P\left(\xi_{j,i}=0\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r)}\right)=1,\quad \Gamma_{i+1}\notin^j \Gamma, \tag{5}$$
$$P\left(\xi_{j,i}=l_{r',j}\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r)}\right)=1,\quad \Gamma_{i+1}=\Gamma^{\left(r'\right)}\in^j \Gamma, \tag{6}$$

где $j=\overline{1,4}$.

Введем следующие события:

$$A_i\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)=\left\{\Gamma_i=\Gamma^{(r)},\varkappa_{4,i}=x_4\right\}\bigcap\left\{\varkappa_{1,i}=x_1,\varkappa_{2,i}=x_2,\varkappa_{3,i}=x_3\right\} \tag{7}$$
$$B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)=\left\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\right\} \tag{8}$$

В соответствии с описанной структурой системы, количество требований пришедших по потокам Π_1, Π_2, Π_4, Π_1^{out}, Π_2^{out}, Π_3^{out} и Π_4^{out} за $(i+1)$-ый такт зависит лишь от состояния обслуживающего устройства и размера очередей O_j, $j=\overline{1,4}$, в момент τ_i. Поэтому условные распределения рассматриваемых в системе потоков, учитывая все «прошлое» системы можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&P\left(B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\middle|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=\\
&=P\left(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)=\\
&=P\left(\eta_{1,i}=b_1\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)\times P\left(\eta_{2,i}=b_2\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)\times\\
&P\left(\eta_{4,i}=b_4\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)\times P\left(\xi_{1,i}=y_1\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)\times\\
&P\left(\xi_{2,i}=y_2\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)\times P\left(\xi_{3,i}=y_3\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)\times\\
&P\left(\xi_{4,i}=y_4\middle|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

В завершение построении математической модели рассматриваемой системы сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 1.2. При заданном распределении начального вектора $\left(\Gamma_0,\varkappa_{1,0},\varkappa_{2,0},\varkappa_{3,0},\varkappa_{4,0}\right)$ последовательность $\left\{\left(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i}\right),\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i},i\geqslant 0\right\}$ является цепью Маркова.

Proof. Для доказательства достаточно показать, что

$$\begin{aligned}
&P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=\\
&P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Распишем сначала левую часть равенства (10). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий $B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)$ есть достоверное событие Ω, $\bigcup_{b,y}B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)=\Omega$ получим

$$\begin{aligned}
&P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=\\
&=\sum_{b,y}P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\middle|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=\\
&=\sum_{b,y}P\left(B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\middle|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)\times\\
&\times P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Беря во внимание (2), найдем второй множитель:

$$P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\right)=$$

$$=P\Big(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(r)},\varkappa_{1,i+1}=x_1,\varkappa_{2,i+1}=x_2,\varkappa_{3,i+1}=x_3,\varkappa_{4,i+1}=x_4\Big|\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap$$

$$\bigcap\Big\{\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\Big\}\bigcap$$

$$\bigcap\Big\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\Big\}\Big)=$$

$$=P\Big(h\left(\Gamma^{(r_i)},x_{4,i}\right)=\Gamma^{(r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,\max\left\{0,x_{2,i}+b_2-y_2\right\}=x_2,$$

$$\max\Big\{0,x_{3,i}+x_{1,i}+b_1+\min\Big\{0,x_{1,i}-\left(x_{1,i}+b_1\right)\Big\}-y_3\Big\}=x_3,\max\left\{0,x_{4,i}+b_4-y_4\right\}=x_4,\Big|$$

$$\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap\Big\{\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\Big\}\bigcap$$

$$\bigcap\Big\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\Big\}\Big)=$$

$$=P\Big(h\left(\Gamma^{(r_i)},x_{4,i}\right)=\Gamma^{(r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,\max\left\{0,x_{2,i}+b_2-y_2\right\}=x_2,$$

$$\max\Big\{0,x_{3,i}+x_{1,i}+b_1+\min\Big\{0,x_{1,i}-\left(x_{1,i}+b_1\right)\Big\}-y_3\Big\}=x_3,\max\left\{0,x_{4,i}+b_4-y_4\right\}=x_4,\Big),\quad(12)$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (9), (11) и (12) получаем выражение для левой части равенства (10):

$$P\left(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$

$$=\sum_{b,y}P\Big(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\Big)\times$$

$$\times P\Big(h\left(\Gamma^{(r_i)},x_{4,i}\right)=\Gamma^{(r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,\max\left\{0,x_{2,i}+b_2-y_2\right\}=x_2,$$

$$\max\Big\{0,x_{3,i}+x_{1,i}+b_1+\min\Big\{0,x_{1,i}-\left(x_{1,i}+b_1\right)\Big\}-y_3\Big\}=x_3,\max\left\{0,x_{4,i}+b_4-y_4\right\}=x_4,\Big)\quad(13)$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях $\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t\left(r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)$, поэтому рассуждения для правой части (10) будут аналогичными:

$$P\Big(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\Big)=$$

$$=\sum_{b,y}P\Big(B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\Big)\times$$

$$\times P\Big(A_{i+1}\left(r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_2;b_4;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big)=$$

$$=\sum_{b,y}P\Big(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\Big)\times$$

$$\times P\Big(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(r)},\varkappa_{1,i+1}=x_1,\varkappa_{2,i+1}=x_2,\varkappa_{3,i+1}=x_3,\varkappa_{4,i+1}=x_4\Big|$$

$$\Big\{\Gamma_i=\Gamma^{(r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\Big\}\bigcap$$

$$\bigcap\Big\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{2,i}=b_2,\eta_{4,i}=b_4,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3,\xi_{4,i}=y_4\Big\}\Big)=$$

откуда опять в силу (2) получаем

$$= \sum_{b,y} P\left(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{4,i} = b_4, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3, \xi_{4,i} = y_4 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\right) \times$$

$$\times P\left(h\left(\Gamma^{(r_i)}, x_{4,i}\right) = \Gamma^{(r)}, \max\left\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\right\} = x_1, \max\left\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\right\} = x_2,\right.$$

$$\left.\max\left\{0, x_{3,i} + x_{1,i} + b_1 + \min\left\{0, x_{1,i} - \left(x_{1,i} + b_1\right)\right\} - y_3\right\} = x_3, \max\left\{0, x_{4,i} + b_4 - y_4\right\} = x_4,\right).$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (10) совпадают, следовательно равенство верно и последовательность $\left\{\left(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}\right), \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}, i \geqslant 0\right\}$ является цепью Маркова. $\square$