1. Постановка задачи и построение математической модели

1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

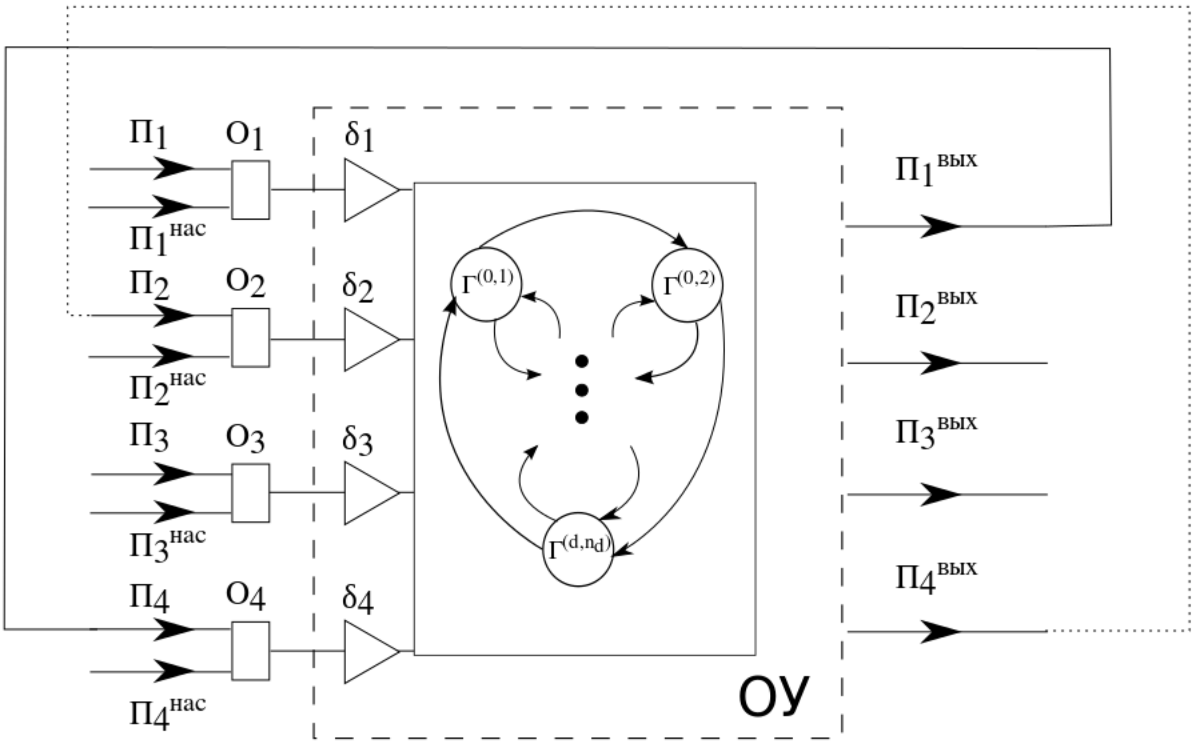

Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu, \quad j \in \{1, 3\}, \tag{1.1}$$

которая предполагается аналитической при любом $z \in \mathbb{C}$ таком, что $|z| < (1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4. Обслуженные требования потока Π_4 в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя поток Π_2. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots n_k\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, …, n_d. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Введем множества Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4. Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^1\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} \colon r = 1, 2, \ldots n_k\}$ будем называть k-м циклом, $k = 1, 2, \ldots, d$ (Рис. 2). При $k = 0$ состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = 1, 2, \ldots, n_0$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r < n_k$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^{O} выходных, C_k^{I} входных и $C_k^{\mathrm{N}} = C_k \setminus (C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ того же цикла C_k. При $\Gamma^{(k,r)}$ принадлежащем множеству C_k^{O} прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L. В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L, то новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}}$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L, где $r_2 = h_2(r)$ и

$h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^{\mathrm{I}}$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}}$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^{\mathrm{O}} \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^{\mathrm{I}} \subset {}^3\Gamma$. Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, то есть можем положить $h_2(r) = r \oplus_0 1$.

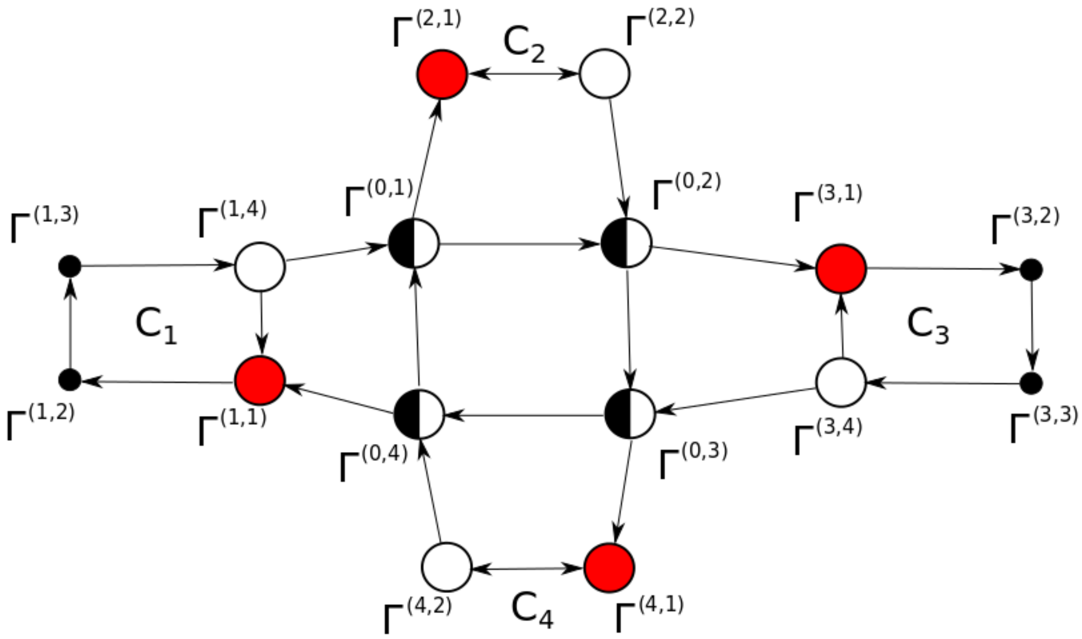

Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \ \& \ y > L); \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y \leqslant L; \\ \Gamma^{(0, r \oplus_0 1)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leqslant L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \tag{1.2}$$

Рассмотрим введеные обозначения на примере рис. 2. Входными состояниями обслуживающего устройства являются $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^{\mathrm{I}}$, $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^{\mathrm{I}}$, $\Gamma^{(3,1)} \in C_3^{\mathrm{I}}$ и $\Gamma^{(4,1)} \in C_4^{\mathrm{I}}$, выходных состояний — $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^{\mathrm{O}}$, $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^{\mathrm{O}}$, $\Gamma^{(3,4)} \in C_3^{\mathrm{O}}$ и $\Gamma^{(4,2)} \in C_4^{\mathrm{O}}$, нейтральных состояний — $\Gamma^{(1,2)}, \Gamma^{(1,3)} \in C_1^{\mathrm{N}}$ и $\Gamma^{(3,2)}, \Gamma^{(3,3)} \in C_3^{\mathrm{N}}$. Состояния продления на графе представлены вершинами $\Gamma^{(0,1)}$, $\Gamma^{(0,2)}$, $\Gamma^{(0,3)}$ и $\Gamma^{(0,4)}$. Далее, отображение $h_1(\cdot)$ на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние $\Gamma^{(1,4)}$ в число 1 — номер состояния продления $\Gamma^{(0,1)}$, то есть $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$. Аналогично, например, $h_2(1) = 2$ и $h_2(3) = 4$. Примером отображения $h_3(\cdot)$ является $h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j \in \{1, 2, 3\}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$. Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in \mathbb{Z}_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1-p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней средой,

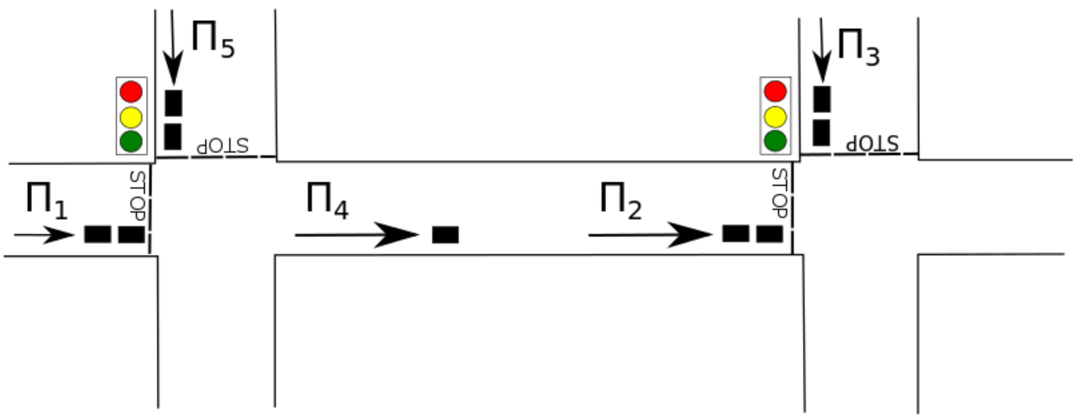

Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1, Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1, проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью ($p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\widetilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в течение времени $\widetilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_3 (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\widetilde{T}^{(2,1)}$, $\widetilde{T}^{(2,2)}$ и $\widetilde{T}^{(2,3)}$.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1–го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2–го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина s). Здесь T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определнности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4. За начальное состояние объединенной системы примем $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, то есть первый перекресток находится в состоянии $g_{1,1}$, второй — в состоянии $g_{2,1}$, и оба

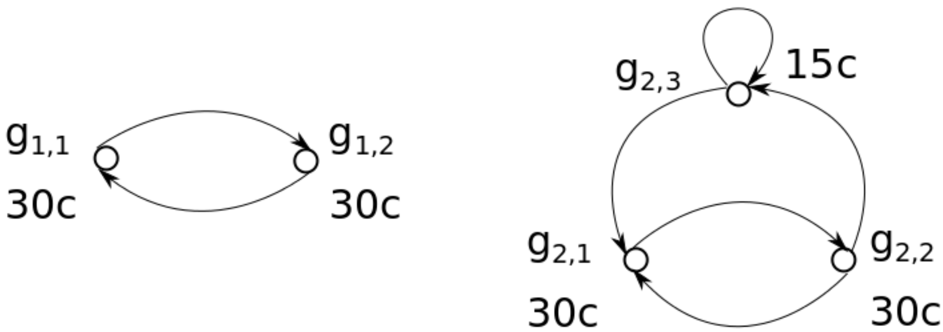

Рис. 4. Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами $s = 0$ и $t = 0$). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$. Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние $g_{2,1}$, так и в состояние продления $g_{2,3}$. Таким образом следущим состоянием тандема будет либо опять $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, либо $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следущий список всех возможных состояний системы:

$$\begin{array}{ccc}
(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,4)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(4,3)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(3,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(2,2)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(2,4)}. &
\end{array}$$

В соответсвии с приведенными выше обозначениями, множества C_1, C_2, C_3, C_4, а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут $C_1^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(1,1)}\}$, $C_2^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(2,1)}\}$, $C_3^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(3,1)}\}$ и $C_4^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(4,1)}\}$. Множествами выходных состояний будут $C_1^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(1,2)}\}$, $C_2^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(2,4)}\}$, $C_3^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(3,2)}\}$ и $C_4^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(4,4)}\}$. Функции $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ и $h_3(\cdot)$ задаются поточечно:

$$h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4 \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)} \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [3]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\ldots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1};\tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, $j \in \{1,2,3,4\}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \tag{1.3}$$

где отображение $h(\cdot,\cdot)$ определено в (1.2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot,\cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \qquad \text{где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{1.4}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из (1.4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \tag{1.5}$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1) следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \tag{1.6}$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geqslant 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_i)$, где $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot, \cdot)$ и $\varphi_3(\cdot, \cdot)$ из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где $f_j(z)$ определены в (1.1), $j \in \{1, 3\}$. Функция $\varphi_j(\nu, t)$ есть вероятность поступления $\nu = 0,\ 1,\ \ldots$ требований по потоку Π_j за время $t \geqslant 0$. Положим $\varphi_j(\nu, t)$ равной нулю при $\nu < 0$. Функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1 - u)^{y-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k; y, u)$ есть вероятность поступления k требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит y требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u = p_{k,r}$. При нарушении условия $0 \leqslant k \leqslant y$ положим $\psi(k; y, u)$ равной нулю.

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1 + a_1\}}, \tag{1.7}$$

где $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ и $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} .$$

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$ есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}. \tag{1.8}$$

Из формулы (1.8) следует для $j \in \{1, 2, 3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i} = 0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i} = \ell_{\tilde{k},\tilde{r},j}$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$.

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором общем вероятностном пространстве.

Теорема 1.1. Пусть $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)} \in \Gamma$ и $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, такие, что 1) имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x^0$; 2) выполняются соотношения (1.3), (1.5), (1.6); 3) для любых a, b, $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t,r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \ldots$, условное распределение векторов η_i, и ξ_i имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\{\omega \colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega \colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \tag{1.9}$$

где функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ определяются формулами (1.7) и (1.8) соответственно, $i \geqslant 0$.

Доказательство. В соответствии с теоремой Ионеску Тулчи (см. [13]) для доказательства достаточно задать на $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ вероятностную меру $P_0(\cdot)$ и далее, считая для $0 < i \leqslant n$ и каждого набора элементарных исходов $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$ заданной на $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ вероятностную меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \cdot)$, задать на $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \cdot)$, причем для любого множества $B \in \mathcal{F}_i$ функции $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; B)$ должны быть измеримыми функциями от $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$. Тогда для декартова произведения пространств элементарных исходов $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ и произведения σ-алгебр $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ будет существовать единственная вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ такая, что для любого $i \geqslant 0$ верно равенство

$$\mathbf{P}\{\omega\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i), \tag{1.10}$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i) = \int\limits_{A_0} P_0(d\omega_0) \int\limits_{A_1} P(\omega_0; d\omega_1) \ldots \int\limits_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \tag{1.11}$$

для любого A_i из $\mathcal{F}_i$.

Итак, за описание элементарного исхода $\omega_i \in \Omega_i$ для произвольного $i \geqslant 0$ примем набор $(\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$, $\omega_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$ и в качестве σ-алгебры $\mathcal{F}_i$ возьмем множество всех подмножеств множества Ω_i: $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x_{3,0})$. Тогда поскольку множество Ω_0 счетно, определим вероятностную меру $P_0(\cdot)$ на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0,r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0,r_0)})). \tag{1.12}$$

Для $j \in \{1, 2, 3\}$ определим величины

$$\Gamma_0 = \gamma_0, \quad \varkappa_{j,0} = x_{j,0}, \quad \xi_{j,0} = l(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \eta_{j,0} = \omega_{j,0}, \tag{1.13}$$

и

$$\varkappa_{4,0} = x_{4,0}, \quad \xi_{4,0} = x_{4,0}, \quad \eta_{4,0} = \min\{\xi_{1,0}, x_{1,0} + \eta_{1,0}\}. \tag{1.14}$$

Теперь, предполагая заданными на $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ вероятностные меры $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \cdot)$, заданными величины Γ_i, $\varkappa_{j,i}$, $\xi_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и фиксируя набор $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$, определим на $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \cdot)$. Положим для $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(k^*,r^*)} = h(\Gamma_n, \varkappa_{3,n}), \quad \varkappa_{j,n+1} = \max\{0, \varkappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}, \tag{1.15}$$

$$\varkappa_{4,n+1} = \varkappa_{4,n} + \eta_{4,n} - \eta_{2,n}, \quad \xi_{j,n+1} = l(k^*, r^*, j), \tag{1.16}$$

$$\eta_{j,n+1} = \omega_{j,n+1}, \quad \eta_{4,n+1} = \min\{\xi_{1,n+1}, \varkappa_{1,n+1} + \eta_{1,n+1}\}, \quad \xi_{4,n+1} = \varkappa_{4,n+1}. \tag{1.17}$$

Тогда, по аналогии с построением вероятностной меры $P_0(\cdot)$, зададим меру $P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \cdot)$

на одноточечных множествах $\{(a_1, a_2, a_3)\}$:

$$P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{4,n}, p_{k^*,r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})). \quad (1.18)$$

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ построено.

Теперь докажем, что введеные с помощью формул (1.13) – (1.17) случайные элементы $\Gamma_i(\omega)$ и случайные величины $\varkappa_{j,i}(\omega)$, $\eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i}(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ удовлетворяют условиям теоремы. Из формулы (1.15) следует, что случайные элементы Γ_i удовлетворяют соотношению (1.3), а случайные величины $\varkappa_{j,i}$ для $j \in \{1, 2, 3\}$ удовлетворяют соотношению (1.5). Из формулы (1.16) заключаем, что $\varkappa_{4,i}$ удовлетворяет соотношению (1.6). Далее, из (1.14) и (1.17) следует справедливость соотношений (1.6) для величин $\eta_{4,i}$ и $\xi_{4,i}$.

Перейдем к доказательству равенства (1.9). Для этого найдем явное выражение для условной вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} | \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x^i)$. Распишем по определению условной вероятности:

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^{i}\left\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\right\}\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) \Big/ \mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right). \quad (1.19)$$

Далее из (1.10), (1.11) и того факта, что Γ_i и $\varkappa_i$ не зависят от ω_i (этот факт следует из (1.13) – (1.16)), получим выражение для знаменателя последней дроби

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \\ = \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leqslant t \leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \quad (1.20)$$

Преобразуем множество $\{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$, учитывая соотношения (1.13) – (1.17):

$$
\begin{gathered}
\{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} = \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \\
\cap \left\{\eta_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}\right\} \cap \left\{\xi_{j,i} = b_j, j \in \{1,2,3\}\right\} \cap \left\{\xi_{4,i} = b_4\right\} \cap \left\{\eta_{4,i} = a_4\right\} = \\
= \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \left\{\omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}\right\} \cap \left\{b_j = \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j \in \{1,2,3\}\right\} \cap \\
\cap \left\{b_4 = x_{4,i}\right\} \cap \left\{a_4 = \min\left\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\right\}\right\}.
\end{gathered}
$$

Тогда для числителя дроби из (1.19) имеем:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \\
= \mathbf{P}\left(\{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \\
= \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\left\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\right\}} \times \prod_{j=1}^{3} \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \\
\times \mathbf{P}\left(\left\{\omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}\right\} \cap \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right)
\end{gathered}
\tag{1.21}
$$

И по аналогии со знаменателем (выражение (1.20)), распишем последнюю вероятность:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\left\{\omega_{j,i} = a_j, j \in \{1,2,3\}\right\} \cap \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \\
= \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leqslant t \leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\
\times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\}) =
\end{gathered}
$$

и подставляя (1.18), получим

$$
\begin{gathered}
= \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
\times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leqslant t \leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}).
\end{gathered}
\tag{1.22}
$$

Подставляя (1.22) в (1.21), а затем (1.21) и (1.20) в (1.19), получим:

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}\,\middle|\, \bigcap_{t=0}^{i} \left\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\right\}\right) =$$

$$= \delta_{b_4,x_{4,i}} \times \delta_{a_4,\min\left\{\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,1),x_{1,i}+a_1\right\}} \times \prod_{j=1}^{3} \delta_{b_j,\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i}))\times$$

$$\times\, \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i,\tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i}))\times$$

$$\times \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t,\forall 0\leqslant t\leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0;\{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\})\Big/$$

$$\Big/ \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t,\forall 0\leqslant t\leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0;\{\omega_1\}) \times \ldots \times P(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\})$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем в точности (1.9). □

Следствие 1.1. В условиях предыдущей теоремы верно равенство

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}\,\middle|\, \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}\,\middle|\, \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}\right) \quad (1.23)$$

Доказательство. Действительно, из (1.9) следует, что вероятность, стоящая в левой части равенства (1.23), равна величине $\varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i)$, зависящей только от значения $(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x^i)$ пары $(\Gamma_i, \varkappa_i)$ и не зависящей от значений остальных пар $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0\leqslant t\leqslant i-1}$. Таким образом, знание о значениях пар $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0\leqslant t\leqslant i-1}$ не влияет на вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$ и, следовательно, (1.23) верно.

□

Введем для y_0, y, $\tilde{y} \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ функции

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}(k, r, y_0, y, \tilde{y}) =\ & (1 - \delta_{\tilde{y},0})\psi(\tilde{y} + \ell(k, r, 2) - y, y_0, p_{k,r})+ \\ & + \delta_{\tilde{y},0} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,2)-y} \psi(a, y_0, p_{k,r}), \\ \widetilde{\varphi}_3(k, r, t, y, \tilde{y}) =\ & (1 - \delta_{\tilde{y},0})\varphi_3(\tilde{y} + \ell(k, r, 3) - y, t) + \delta_{\tilde{y},0} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,3)-y} \varphi_3(a, t). \end{aligned} \quad (1.24)$$

причем k и r такие, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$.

Следствие 1.2. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,t})$. Тогда в условиях теоремы 1.1 верны равенства

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \widetilde{\psi}(k_{i+1}, r_{i+1}, x_{4,i}, x_{2,i}, x_{2,i+1}), \tag{1.25}$$

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \widetilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}), \tag{1.26}$$

Доказательство. Начнем с доказательства равенства (1.25). Распишем по формуле полной вероятности, а затем учтем (1.9) и (1.23):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\
&\quad = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\})\times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\
&\quad = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\})\times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) = \\
&\quad = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i)\zeta(b, k_i, r_i, x^i)\times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) =
\end{aligned}$$

учитывая функциональную зависимость (1.5) и явное выражение для функций $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, продолжим цепочку рассуждений

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i)\zeta(b, k_i, r_i, x^i)\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}} = \\
&= \sum_{a_2,b_2\in\mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}}\times \sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}))\times \\
&\times \sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i})) \sum_{a_4\in\mathbb{Z}_+} \delta_{a_4,\min\{\ell(k_{i+1},r_{i+1},1),x_{1,i}+a_1\}} \sum_{b_1\in\mathbb{Z}_+} \delta_{b_1,\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)} \sum_{b_3\in\mathbb{Z}_+} \delta_{b_3,\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)}\times \\
&\times \sum_{b_4\in\mathbb{Z}_+} \delta_{b_4,x_{4,i}}.
\end{aligned}$$

Поскольку все кроме одной суммы сокращаются (равны 1), то искомая вероятность упрощается следующим образом:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1}=x_{2,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_2,b_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}}=$$
$$=\sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}$$

В случае, когда $x_{2,i+1}$ больше 0, величина $\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}$ отлична от нуля только при $x_{2,i+1}=x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)$, то есть при $a_2=x_{2,i+1}-x_{2,i}+\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)$. В случае же, когда $x_{2,i+1}$ равно 0, величина $\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}$ отлична от нуля только при $0\leqslant a_2\leqslant \ell(k_{i+1},r_{i+1},2)-x_2$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1}=x_{2,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}=$$
$$=\psi(x_{2,i+1}-x_{2,i}+\ell(k_{i+1},r_{i+1},2),x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})(1-\delta_{x_{2,i+1},0})+$$
$$+\delta_{x_{2,i+1},0}\sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)-x_2}\psi(a,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})=\widetilde{\psi}(k_{i+1},r_{i+1},x_{4,i},x_{2,i},x_{2,i+1})$$

и равенство (1.25) доказано.

Аналогичным образом доказывается равенство (1.26). А именно, расписывая по формуле полной вероятности с учетом (1.9) и (1.23), имеем:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\times\zeta(b,k_i,r_i,x^i)\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i=a,\xi_i=b,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_i=x^i\})=$$

учитывая (1.5) и явный вид функций $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, продолжим

$$=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\zeta(b,k_i,r_i,x^i)\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-b_3\}}=$$
$$=\sum_{a_3,b_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\delta_{b_3,\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)}\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-b_3\}}\times\sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\times$$
$$\times\sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\sum_{a_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{a_4,\min\{\ell(k_{i+1},r_{i+1},1),x_{1,i}+a_1\}}\sum_{b_1\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_1,\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)}\sum_{b_2\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\times$$
$$\times\sum_{b_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_4,x_{4,i}}=\sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_3))\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)\}}$$

В результате получаем, что

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}))\delta_{x_{3,i+1},\max\{0, x_{3,i}+a_3-\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)\}} =$$
$$= (1-\delta_{x_{3,i+1},0})\varphi_3(x_{3,i+1} - x_{3,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3), h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}))+$$
$$+\delta_{x_{3,i+1},0} \sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)-x_{3,i}} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i})) = \widetilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}).$$

и следствие полностью доказано. □

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для дальнейшего исследования состояния обслуживающего устройства и длины всех очередей.

1.3. Марковское свойство последовательностей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$

Введем для $i = 0, 1, \ldots$ следующие события:

$$A_i(k_i; r_i; x^i) = \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)} \varkappa_i = x^i\}, \quad B_i(a; b) = \{\eta_i = a, \xi_i = b\}.$$

В новых обозначениях равенство (1.23) перепишется следующим образом:

$$\mathbf{P}(B_i(a;b)| \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)) = \mathbf{P}(B_i(a;b)|A_i(k_i; r_i; x^i)). \tag{1.27}$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$.

Теорема 1.2. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $\varkappa_0 = x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| A_i(k_i; r_i; x^i)\right) \tag{1.28}$$

Распишем левую часть равенства (1.28). По формуле полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\,\middle|\,\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\right)=\sum_{a,b}\mathbf{P}\left(B_i(a;b)\,\middle|\,\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\right)\times$$
$$\times\,\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\,\middle|\,B_i(a;b)\cap\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\right)\quad(1.29)$$

Из равенства (1.27) следует, что вероятность $\mathbf{P}\left(B_i(a;b)\,\middle|\,\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\right)$ не зависит от предыстории $\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t(k_t;r_t;x^t)$. Далее, из соотношений (1.3), (1.5) и (1.6) можно заметить, что случайный элемент Γ_{i+1} и случайный вектор $\varkappa_{i+1}$ функционально выражается через Γ_i, $\varkappa_i$, η_i и ξ_i, поэтому вероятность $\mathbf{P}(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})|B_i(a;b)\cap\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t))$ не зависит от предыстории. Таким образом

$$\mathbf{P}\left(B_i(a;b)\,\middle|\,\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\right)=\mathbf{P}\left(B_i(a;b)\,\middle|\,A_i(k_i;r_i;x^i)\right)$$

и

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\,\middle|\,B_i(a;b)\cap\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\right)=$$
$$=\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\,\middle|\,B_i(a;b)\cap A_i(k_i;r_i;x^i)\right)$$

откуда заключаем верность равенства (1.28). □

Докажем марковость последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$.

Теорема 1.3. Пусть $\Gamma_0=\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$ и $\varkappa_{3,0}=x_{3,0}\in\mathbb{Z}_+$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Действительно, поскольку Γ_{i+1} функционально выражается через Γ_i и $\varkappa_{3,i}$ (см. (1.3)), то

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon\Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\delta_{\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})}\times\mathbf{P}(\{\omega\colon\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon\Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\}).$$

и учитывая равенство (1.26), убеждаемся, что вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\delta_{\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})}\times\widetilde{\varphi}_3(k_{i+1},r_{i+1},h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}),x_{3,i},x_{3,i+1})$$

зависит только от значений пар $(\Gamma_i,\varkappa_{3,i})$ и $(\Gamma_{i+1},\varkappa_{3,i+1})$. Следовательно

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_{3,t}=x_{3,t}\})=$$
$$=\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{3,i}=x_{3,i}\}),$$

что доказывает марковость последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}); i\geqslant 0\}$. □

Убедившись в марковости последовательностей $\{(\Gamma_i,\varkappa_i); i\geqslant 0\}$ и $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}); i\geqslant 0\}$, приведем формулы для вычисления их переходных вероятностей.

Теорема 1.4. Пусть x, $\tilde{x}\in\mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(k,r)}$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}=h(\Gamma^{(k,r)},x_3)\in\Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_i); i\geqslant 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},\varkappa_{i+1}=\tilde{x}|\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x)=$$
$$=\widetilde{\varphi}_3(\tilde{k},\tilde{r},h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3),x_3,\tilde{x}_3)\times\sum_{(a_1,a_2)\in A_{\mathrm{trans}}}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}}),\quad(1.30)$$

где

$$\begin{aligned}
&A_{\mathrm{trans}}=A^0_{\mathrm{trans}}\bigcap A^1_{\mathrm{trans}}\bigcap A^2_{\mathrm{trans}},\\
&A^0_{\mathrm{trans}}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}_+^2\colon a_2=\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}+x_4-\tilde{x}_4\},\\
&A^1_{\mathrm{trans}}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}_+^2\colon \tilde{x}_1=\max\{0,x_1+a_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}\},\\
&A^2_{\mathrm{trans}}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}_+^2\colon \tilde{x}_2=\max\{0,x_2+a_2-\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)\}\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. В случае, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}=h(\Gamma^{(k,r)},x_3)$, искомая вероятность упростится следующим образом:

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},\varkappa_{i+1}=\tilde{x})(\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x)=\mathbf{P}(\varkappa_{i+1}=\tilde{x})(\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x)$$

По аналогии с выводом формул (1.25) и (1.26), для доказательства воспользуемся формулой полной вероятности и учтем (1.9):

$$\mathbf{P}(\varkappa_{i+1} = \tilde{x} | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\eta_i = a; \xi_i = b | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\varkappa_{i+1} = \tilde{x} | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x, \eta_i = a; \xi_i = b) =$$
$$= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a,k,r,x)\zeta(b,k,r,x) \times \mathbf{P}(\varkappa_{i+1} = \tilde{x} | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x, \eta_i = a; \xi_i = b).$$

Теперь учтем функциональные зависимости (1.5) и (1.6), а также явный вид функций $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$:

$$\mathbf{P}(\varkappa_{i+1} = \tilde{x} | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x) =$$
$$= \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - b_1\}} \times$$
$$\times \sum_{a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - b_3\}} \times$$
$$\times \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - b_2\}} \times$$
$$\times \sum_{a_4, b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}} \delta_{b_4, x_4} \delta_{\tilde{x}_4, x_4 + a_4 - a_2}$$

и после упрощения, полагая $a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4$,

$$\mathbf{P}(\varkappa_{i+1} = \tilde{x} | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x) = \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} \times$$
$$\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \Big(\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times$$
$$\times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}} \Big) = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), \tilde{x}_3) \times$$
$$\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \Big(\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times$$
$$\times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}} \Big),$$

что есть в точности (1.30). □

Теорема 1.5. Пусть $x_3, \tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x} | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x) = \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3), \quad (1.31)$$

Доказательство. Доказательство следует из равенства (1.26). □

1.4. Классификация состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ по арифметическим свойствам

Введем множество

$$X^{(k,r)} = \{x \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_1 > 0, x_4 \geqslant \ell_{k,r,1}\},$$

где k и r такие, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$.

Лемма 1.1. Пусть (γ, x) — произвольное состояние цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда для любого r_1, $0 \leqslant r_1 \leqslant n_0$, существует $x_{3,1}$, $x_{3,1} \leqslant L$, такое, что вероятность попасть за конечное число переходов из состояния (γ, x) в состояние продления $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ положительна.

Доказательство. Доказательство начнем со случая, когда состояние γ соответствует некому циклу. Тогда на каждом последующем такте с ненулевой вероятностью по потокам Π_1 и Π_3 не будет приходить ни одного требования и, одновременно с этим, из очереди O_4 все требования будут перенаправляться в очередь O_2. Тогда, в конечном итоге, обслуживающее устройство дойдет до выходного состояния этого цикла, в котором очередь O_3 будет содержать $x_{3,1} \leqslant L$ требований и прибор перейдет в режим продления. После нескольких тактов подобного же рода (отсутствия требований по потокам Π_1 и Π_3, а также перенаправления всех требований из очереди O_4 в очередь O_2) требования в очередях O_1, O_2, O_4 кончатся и система придет в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$.

В случае же, когда состояние прибора соответствует некому состоянию продления, отличие от второй части предыдущего случая состоит в том, что в очереди O_3 может находиться больше L требований. Однако тогда система на следующем же такте "свалится"в один из циклов и задача будет сведена к предыдущей. □

Лемма 1.2. Для любых $x_{3,1} \leqslant L$, $x_{3,2} > L$, $0 \leqslant r_1 \leqslant n_0$ и $1 \leqslant k \leqslant d$ вероятность за конечное число переходов из состояния продления $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ попасть во входное состояние $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,2}, 0))$ положительна.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma$ — состояние продления, из которого обслуживающий прибор может перейти в цикл C_k (в силу предположений о виде рассматриваемых графов такое состояние заведомо существует). Тогда предполагая, что по потокам Π_1 и Π_3 требования не поступают, обслуживающее устройство в конечном итоге дойдет до состояния γ с пустыми очередями O_1, O_2 и O_4. На этом самом такте, по потоку Π_3, в дополнение к уже имеющимся $x_{3,1} \leqslant L$ требованиям, может придти любое количество требований, в том числе и количество, необходимое для перехода в состояние цикла $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,2}, 0))$, $x_{3,2} > L$. $\square$

Лемма 1.3. Для любых $x_{3,1} > L$, $x_2 \in X^{(k,r)} \cap \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_{3,2} = x_{3,1} - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$, $0 \leqslant r \leqslant n_k$ и $1 \leqslant k \leqslant d$ вероятность за конечное число переходов из входного состояния цикла $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ попасть в произвольное состояние цикла $(\Gamma^{(k,r)}, x_2)$ положительна.

Доказательство. Поскольку с ненулевой вероятностью по потоку Π_3 на последующих тактах может приходить любое количество требований, положим, что на всех тактах, когда обслуживающее устройство находится в выходном состоянии $\Gamma^{(k,n_k)}$, в очередь O_3 приходит ровно $\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}$ требований. Причем на остальных тактах по потоку Π_3 требования не поступают. Этим обеспечивается сколь угодно долгое пребывание прибора в цикле C_k, при этом сохраняя количество требований в очереди O_3 неизменным и равным $x_{3,1}$.

Далее допустим, что на первом же такте (то есть в состоянии $(\Gamma^{(k,0)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$) по потоку Π_1 пришло $x_{2,2} + x_{4,2} + \ell_{k,r\ominus_k 1,2} - \ell_{k,r\ominus_k 1,1}$ требований, которые все спустя несколько тактов перешли в очередь O_4. При этом перемещения требований из очереди O_4 в очередь O_2 не происходило. В состоянии $(0, 0, x_{3,2}, x_{2,2}+x_{4,2}+\ell_{k,r\ominus_k 1,2}-\ell_{k,r\ominus_k 1,1})$ очереди могут оставаться сколь угодно долгоо, вплоть до такта, в котором обслуживающее устройство будет находиться в состоянии $\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}$. На этом такте по потоку Π_1 придет $x_{1,2} + \ell_{k,r\ominus_k 1,1}$ требований и из очереди O_4 уйдет $x_{2,2} + \ell_{k,r\ominus_k 1,2}$ требований. Таким образом, на следующем такте состояние системы будет $(\Gamma^{(k,r)}, (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,1} - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}, x_{4,2}))$. $\square$

Из лемм 1.2 и 1.3 вытекает следующий результат.

Лемма 1.4. Для любых $x_{3,1} \leqslant L$, $x_2 \in X^{(k,r)} \cap \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_{3,2} > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$, $0 \leqslant r_1 \leqslant n_0$, $0 \leqslant r_2 \leqslant n_k$, $1 \leqslant k \leqslant d$ вероятность попасть за конечное число переходов из состояния продления $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0, 0, x_{3,1}, 0))$ в состояние цикла $(\Gamma^{(k,r_2)}, x_2)$ положительна.

Лемма 1.5. Для любых $\Gamma^{(k_1,r_1)}, \Gamma^{(k_2,r_2)} \in \Gamma$ и $x_1 \in \mathbb{Z}_+^4$, $x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \setminus X^{(k_1,r_1)}$ вероятность перейти на следующем такте из состояния $(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_1)$ в состояние $(\Gamma^{(k_2,r_2)}, x_2)$ равна нулю.

Доказательство. Действительно, предположим, что в начале очередного такта в очереди O_1 находится $x_{1,2} > 0$ требований. Это значит, что за предыдущий такт смогли обслужиться все $\ell_{k_1,r_1,1}$ требований. А поскольку все требования выходного потока $\Pi_1^{\text{вых}}$ без исключения становятся требованиями входного потока Π_4 и требования, пришедшие по потоку Π_4 не покидают очередь O_4 до начала следующего такта, то как минимум $\ell_{k_1,r_1,1}$ требований должно было остаться в очереди O_4 с предыдущего такта. Значит с необходимостью $x_{4,2} \geqslant \ell_{k_1,r_1,1}$. $\square$

Лемма 1.6. Для любых $0 \leqslant r_1, r_2 \leqslant n_0$ и $x_{3,1} \leqslant L$, $x_2 \in X^{(0,r_2)} \cap \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon L \geqslant x_{3,2} > L - \max\limits_{k=1,2,\ldots,d}\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}$ вероятность попасть за конечное число переходов из одного состояния продления $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0,0,x_{3,1},0))$ в другое состояние продления $(\Gamma^{(0,r_2)}, x_2)$ положительна.

Доказательство. Действительно, из леммы (1.4) следует, что из состояния вида $(\Gamma^{(0,r_1)}, (0,0,x_{3,1},0))$, $x_{3,1} \leqslant L$, $r_1 \leqslant n_0$, с ненулевой вероятностью и за конечное число шагов можно перейти в выходное состояние вида $(\Gamma^{(k,n_k)}, x_3)$, $x_3 \in X^{(k,n_k)} \cap \{x_3 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon L - \sum_{t=0}^{n_k-1} \ell_{k,t,3} < x_{3,3}\}$, причем для любого $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, d$. Наложим на количество $x_{3,3}$ требований в очереди O_3 еще одно ограничение: $x_{3,3} \leqslant L + \ell_{k,n_k,3}$. Находясь в состоянии $(\Gamma^{(k,n_k)}, x_3)$ и предполагая, что за текущий такт по потоку Π_3 не поступит больше $L - x_{3,3} + \ell_{k,n_k,3}$ требований, система на следующем такте перейдет в состояние продления $(\Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,n_k)}))}, x_4)$, где $x_4 \in X^{(0,h_1(\Gamma^{(k,n_k)}))} \cap \{x_4 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon L - \sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3} < x_{3,4} \leqslant L\}$. Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 1.3, можно "опустошить"очереди O_1, O_2 и O_4, не допуская при этом поступления требований по потоку Π_3. Далее по схеме, описанной в лемме 1.3, можно привести систему в любое состояние вида $(\Gamma^{(0,r_2)}, x_2)$. $\square$

Лемма 1.7. Для любых $1 \leqslant k \leqslant d$, $0 \leqslant r \leqslant n_k$, $0 \leqslant r_1 \leqslant n_0$ и $x_1 \in \{x_1 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_{3,1} \leqslant L\}$, $x_2 \in \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_{3,2} \leqslant L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$ вероятность попасть за конечное число переходов из состояния продления $(\Gamma^{(0,r_1)}, x_1)$ в состояние цикла $(\Gamma^{(k,r)}, x_2)$ равна нулю.

Доказательство. Действительно, для того, чтобы попасть в состояние цикла из состояния продления, необходимо попасть сначала во входное состояние, в котором количество $x_{3,2}$ требований в очереди O_3 не может быть меньше $L+1$, то есть $x_{3,2} > L$. А поскольку на каждом такте, с соответствующим состоянием обслуживающего устройства $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}$ в цикле, до момента попадания обслуживающего устройства в состояние $\Gamma^{(k,r)}$ может обслуживаться не более $\ell_{\tilde{k},\tilde{r},3}$ требований, то за время пребывания в цикле обслужиться больше, чем $\sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}$ требований просто не могло. Поэтому в очереди O_3 останется не меньше $x_{3,2} - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3} > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}$ требований. $\square$

Лемма 1.8. Для любых $1 \leqslant k \leqslant d$, $0 \leqslant r \leqslant n_k$, $0 \leqslant r_1 \leqslant n_0$ и $x_1 \in \mathbb{Z}_+^4$, $x_2 \in \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_{3,2} > L\} \cup \{x_2 \in \mathbb{Z}_+^4 \colon x_{3,2} \leqslant L - \max\limits_{k=1,2,\ldots,d}\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}$ вероятность попасть за конечное число переходов из состояния цикла $(\Gamma^{(k,r)}, x_1)$, $x_1 \in \mathbb{Z}_+^4$ в состояние продления $(\Gamma^{(0,r_1)}, x_2)$ равна нулю.

Доказательство. Действительно, поскольку из каждого состояния продления можно "свалиться"в цикл, то условие $x_{3,2} \leqslant L$ должно быть выполнено в каждом состоянии продления (иначе в конце предыдущего такта было бы принято решение находиться в одном из циклов). А поскольку во время пребывания в цикле в очереди O_3 должно находиться больше $L - \sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}$ требований, и во время продления требования из очереди O_3 не обслуживаются, то условие $x_{3,2} > L - \max\limits_{k=1,2,\ldots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}$ также должно быть выполнено. $\square$

Введем множества

$$\begin{aligned} S_{0,r} =& \{(\Gamma^{(0,r)}, x) \colon x \in X^{(0,r)}, L \geqslant x_3 > L - \max_{k=1,2,\ldots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_0 \\ S_{k,r} =& \{(\Gamma^{(k,r)}, x) \colon x \in X^{(k,r)}, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant d, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_k. \end{aligned}$$

В следующей теореме перечислены все существенные состояния марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$.

Теорема 1.6. Множествами существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ являются множества $\bigcup\limits_{1 \leqslant r \leqslant n_0} S_{0,r}$, $\bigcup\limits_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ 1 \leqslant r \leqslant n_k}} S_{k,r}$ и только они.

Доказательство. Пусть система находится в состоянии $(\gamma_1, x_1) \in S_{0,r}$ для некоторого $1 \leqslant r \leqslant n_0$. Тогда в какое бы состояние после этого система ни перешла, по лемме 1.1 за конечное число шагов и с ненулевой вероятностью она попадет в состояние вида $(\Gamma^{(0,\tilde{r}_1)}, (0, 0, \tilde{x}_{3,1}, 0))$, $\tilde{x}_{3,1} \leqslant L$, $1 \leqslant \tilde{r}_1 \leqslant n_0$. Далее, по лемме 1.6, система из состояния $(\Gamma^{(0,\tilde{r}_1)}, (0, 0, \tilde{x}_{3,1}, 0))$ с ненулевой вероятностью вернется в состояние продления (γ_1, x_1), из которого она вышла. Следовательно, любое состояние (γ_1, x_1) из $S_{0,r}$ является существенным.

Далее, пусть система находится в состоянии $(\gamma_2, x_2) \in S_{k,r}$ для некоорых $1 \leqslant k \leqslant d$ и $1 \leqslant r \leqslant n_0$. С помощью рассуждений, приведенных выше, используя вместо леммы 1.6 лемму 1.4, можно показать, что в какое бы состояние система в последствии не попала, она с положительной вероятностью и за конечное число шагов вернется в состояние (γ_2, x_2). Следовательно, любое состояние (γ_2, x_2) из $S_{k,r}$ также является существенным.

Из лемм 1.5, 1.7 и 1.8 следует, что никаких других существенных состояний, кроме $\bigcup\limits_{1 \leqslant r \leqslant n_0} S_{0,r}$ и $\bigcup\limits_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ 1 \leqslant r \leqslant n_k}} S_{k,r}$, нет. $\square$

По аналогии введем подмножества пространства состояний цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$:

$$
\begin{aligned}
S^3_{0,r} =& \{(\Gamma^{(0,r)}, x_3)\colon x_3 \in Z_+, L \geqslant x_3 > L - \max_{k=1,2,\ldots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_0 \\
S^3_{k,r} =& \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3)\colon x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant d, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_k.
\end{aligned}
$$

Тогда для цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ с очевидностью применима аналогичная классификация состояний.

Теорема 1.7. Множествами существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ являются множества $\bigcup\limits_{1 \leqslant r \leqslant n_0} S^3_{0,r}$, $\bigcup\limits_{\substack{1 \leqslant k \leqslant d \\ 1 \leqslant r \leqslant n_k}} S^3_{k,r}$ и только они.

Литература

1. Zorine, A. V. Study of queues' sizes in tandem intersections under cyclic control in random environment / A. V. Zorine // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. — 2013. V. 356. — P. 206–215.

2. Zorine, A. V. On the conditions for the existence of a stationary mode in a tandem of queuing systems with cyclic control in a random environment / A. V. Zorine // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. V. 47. — P. 183–191.

3. Зорин, А. В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований / А. В. Зорин // Теория вероятностей и математическая статистика. — 2011. — Вып. 84. — С. 163–176.

4. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 1 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1988. — Т. 28. — № 4. — С. 783–784.

5. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 2 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 148–159.

6. Федоткин, М. А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1998. — Вып. 7. — С. 333–344.

7. Федоткин, М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1996. — Вып. 6. — С. 51–70.

8. Федоткин, М. А. Управление процессами обслуживания / М. А. Федоткин // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского “Математическое моделирование и оптимальное управление”. — 2001. — Вып. 2(24). — С. 169–188.

9. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я Хинчин // М.: Государственное издательство физико-математической литературы. — 1963. — 236 с.

10. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // М.: Наука. — 1974. — 120 с.

11. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин// М.: Физматилит. — 2006. — 572 с.

12. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко // М.: Издательство ЛКИ. — 2007. — 448 с.

13. Ширяев, А. Н. Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1 / А. Н. Ширяев // М.: Наука. — 2007. — 552 с. (С. 348–351).

14. Кемени, Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп // М.: Наука. — 1987. — 416 с.