1. Постановка задачи и построение математической модели

1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

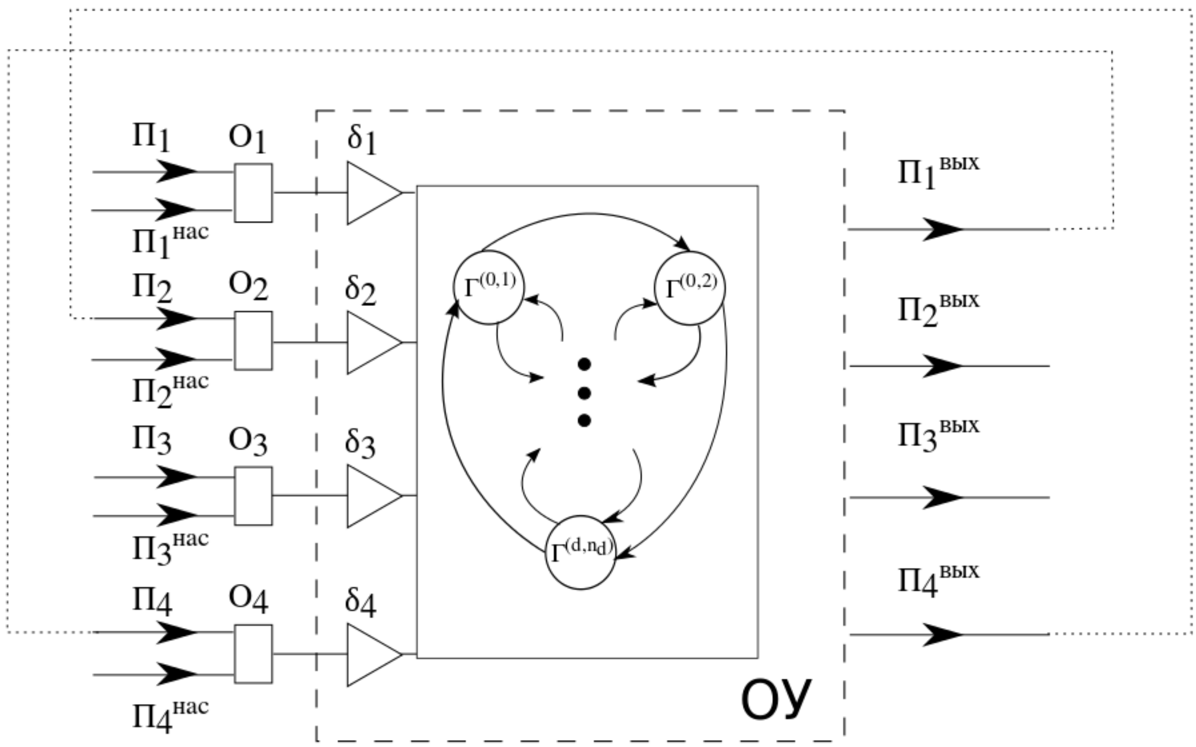

Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu \tag{1}$$

которая предполагается аналитической при $\forall z\colon |z| < (1+\varepsilon), \varepsilon > 0$ и $p_\nu^{(j)} > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν, $j \in \{1, 3\}$. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)}\colon k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots n_k\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, …, n_d. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Введем множества Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4. Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$ непересекающихся подмножеств.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)}\colon r = 1, 2, \ldots n_k\}$ будем называть k-м циклом, $k = 1$, 2, …, d (Рис. 2). При $k = 0$ состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = 0$, 1, …, n_0. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r < n_k$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = 0$, 1, …, d. В цикле C_k выделим подмножества C_k^{O} выходных, C_k^{I} входных и $C_k^{\mathrm{N}} = C_k \setminus (C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ того же цикла C_k. При $\Gamma^{(k,r)}$ принадлежащем множеству C_k^{O} прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L. В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L, то новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}}$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше L, где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^{\mathrm{I}}$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}}$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)} \in {}^2\Gamma$, все множества $C_k^{\mathrm{O}} \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^{\mathrm{I}} \subset {}^3\Gamma$.

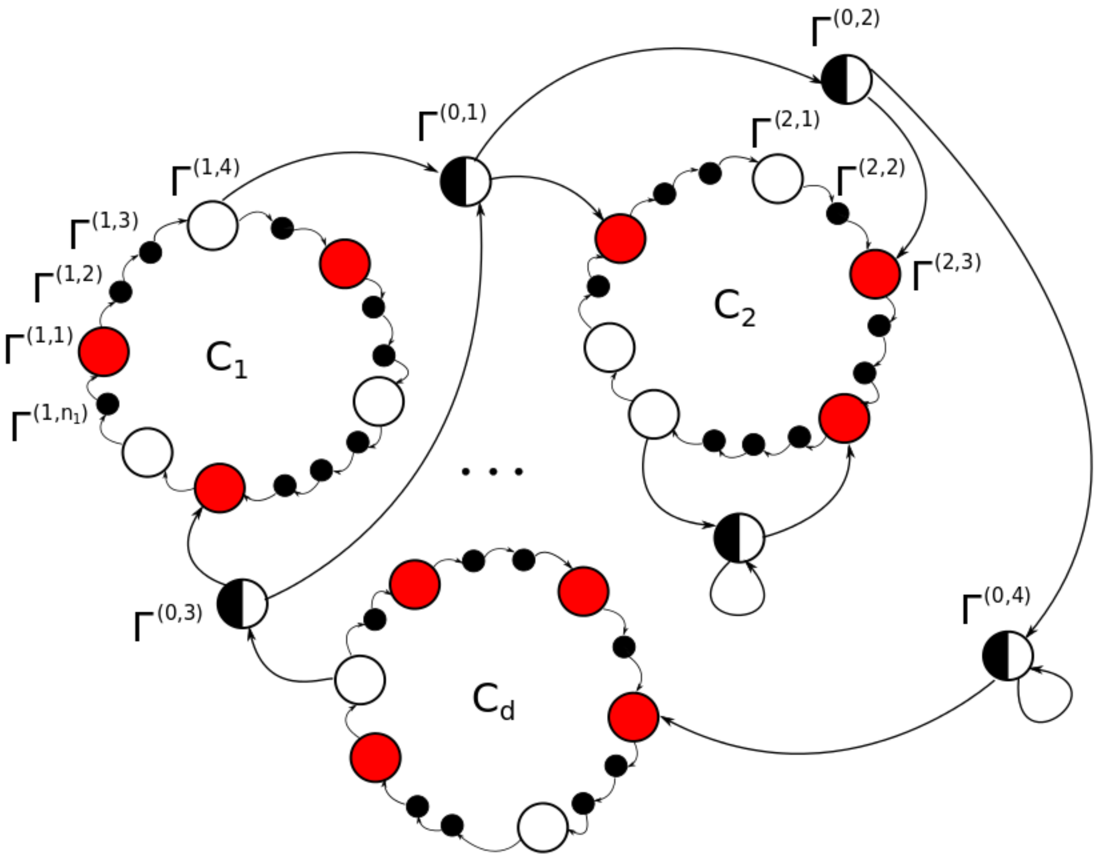

Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Рассмотрим введеные обозначения на примере Рис. 2. Примерами входных состояний являются $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^{\mathrm{I}}$ и $\Gamma^{(2,3)} \in C_2^{\mathrm{I}}$, выходных состояний — $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^{\mathrm{O}}$ и $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^{\mathrm{O}}$, нейтральных состояний — $\Gamma^{(1,2)}, \Gamma^{(1,3)}, \Gamma^{(1,n_1)} \in C_1^{\mathrm{N}}$ и $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^{\mathrm{N}}$. Состояния продления представлены на графе вершинами $\Gamma^{(0,1)}$, $\Gamma^{(0,2)}$, $\Gamma^{(0,3)}$ и $\Gamma^{(0,4)}$. Далее, отображение $h_1(\cdot)$ на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние $\Gamma^{(1,4)}$ в число 1 — номер состояния продления $\Gamma^{(0,1)}$, то есть $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$. Аналогично $h_2(1) = 2$, $h_2(2) = 4$ и $h_2(3) = 1$. Примером отображения $h_3(\cdot)$ является $h_3(2) = \Gamma^{(2,3)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j \in \{1, 2, 3\}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Пусть ${}^1\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$. Тогда поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$, и будет содержать 0 требований в противном случае: $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$. Пусть Z_+ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in Z_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1 - p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (Рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней сре-

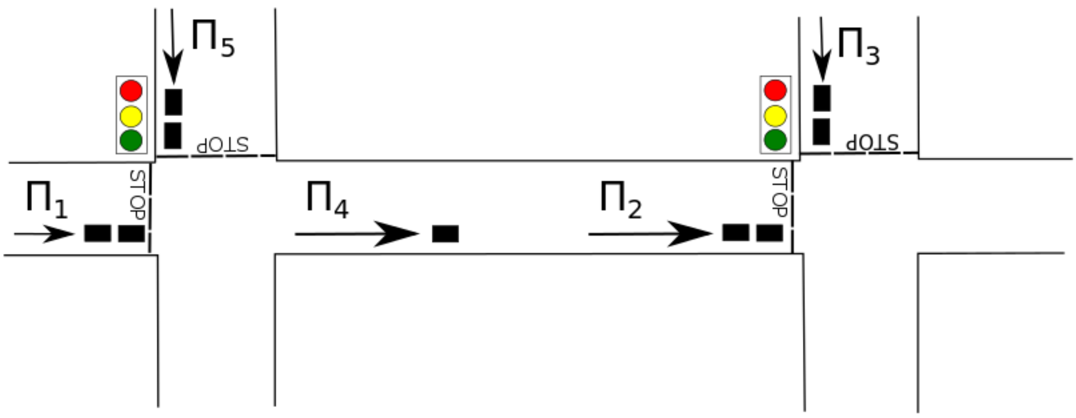

Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

дой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1, Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1, проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью ($p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния: в первом состоянии машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\widetilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для Π_1); во втором — простаивают в течение времени

$\widetilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: имеется два состояния обслуживания потока Π_2. Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\widetilde{T}^{(2,1)}$, $\widetilde{T}^{(2,2)}$ и $\widetilde{T}^{(2,3)}$.

Продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $\left(g^{(1)}, g^{(2)}, f, t\right)$, где $g^{(j)}$ — состояние j–го перекрестка, f — номер сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и t — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка. Тогда количество различных состояний не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$, где T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии, поскольку первый перекресток может находиться только в одном из двух состояний, а второй — в одном из трех.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная на содержательном уровне в предыдущем разделе система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (ссылка на федоткина, Зорина А.В. киевский сборник твмс). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4; 5) устройство по переработки информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; 6) внутренняя память обслуживающего устройства — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и укажем множество возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\ldots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in Z_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in Z_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in Z_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(r')}, \quad \text{где } \Gamma^{(r')} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\left\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\right\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{2}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из (2) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\left\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\right\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему (1)) следуют соотношения для потока Π_4

$$\overline{\xi}_{4,i} = \eta_{2,i} \quad \eta_{4,i} = \overline{\xi}_{1,i}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \overline{\xi}_{4,i}.$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\big\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geqslant 0\big\}$ и $\big\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geqslant 0\big\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i, \varkappa_i)$, где $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$.

Построим теперь вероятностное пространство $\big(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot)\big)$, чтобы можно было рассматривать введеные величины как случайные величины на этом пространстве. В соответствии с теоремой Ионеску Тулчи для этого достаточно задать вероятностное пространство $\big(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0(\cdot)\big)$ и далее, считая для $0 \leqslant i < n$ и каждого набора элементарных исходов $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$ заданными пространства $\big(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \cdot)\big)$, задать пространство $\big(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \cdot)\big)$, причем для любого множества $B \in \mathcal{F}_i$ функции $P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, B)$ должны быть измеримыми функциями от $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1})$. Тогда для $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ и $\mathcal{F} = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ будет существовать единственная вероятностная мера $P(\cdot)$ такая, что $\forall i \geqslant 0$

$$P\left\{\omega\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\right\} = P_i\left(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i\right),$$

где

$$P_i\left(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i\right) = \int\limits_{A_0} P_0(d\omega_0) \int\limits_{A_1} P_1(\omega_0, d\omega_1) \ldots \int\limits_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, d\omega_i) \qquad (3)$$

и $i \geqslant 0$, $A_i \in \mathcal{F}_i$. Более того, наряду с вероятностной мерой $P(\cdot)$ также будет существовать случайная последовательность $X = \big(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots\big)$ такая, что

$$P\big\{\omega\colon X_0(\omega) \in A_0, X_1(\omega) \in A_1, \ldots, X_i(\omega) \in A_i\big\} = P_i\left(A_0 \times A_1 \times \ldots, \times A_i\right), \qquad (4)$$

где $i \geqslant 0$, $A_i \in \mathcal{F}_i$.

Итак, за описание элементарного исхода $\omega_i \in \Omega_i$ для произвольного $i \geqslant 0$ примем набор $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$, $\omega_{j,i} \in Z_+$. Таким образом, $\Omega_i = Z_+^3$ и в качестве σ-алгебр $\mathcal{F}_i$ возьмем множество всех подмножеств Ω_i: $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$. Для задания вероятностных мер и случайных величин, упомянутых выше, введем следующие функции:

$$f_{\xi_j|\Gamma,\varkappa_3}(\gamma, x_3) = \ell_{k,r,j}, \text{ где } h(\gamma, x) = \Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma \text{ и } j \in \{1, 2, 3\}$$

$$f_{\eta_4|\xi_1,\eta_1,\varkappa_1}(a, b, x) = \begin{cases} a, & \text{если } x + b \geq a \\ x + b, & \text{если } x + b < a \end{cases},$$

и

$$P_{\eta_2|\Gamma,\varkappa_3,\varkappa_4}(a,\gamma,x_3,x_4)=\begin{cases}\binom{x_4}{a}p_{k,r}^a(1-p_{k,r})^{x_4-a}, & \text{если } h(\gamma,x_3)=\Gamma^{(k,r)}\\ 0, & \text{иначе}\end{cases},$$

$$P_{\eta_1|\Gamma,\varkappa_3}(a,\gamma,x)=\varphi_1(a,h_T(\gamma,x)),$$
$$P_{\eta_3|\Gamma,\varkappa_3}(a,\gamma,x)=\varphi_3(a,h_T(\gamma,x)),$$

где $0\leqslant a\leqslant x_4$, $b,x,x_3,x_4\in Z_+$, $\gamma\in\Gamma$ и функции $\varphi_1(\cdot,\cdot)$, $\varphi_3(\cdot,\cdot)$ находятся из соотношений

$$\sum_{x=0}^{\infty}z^x\varphi_j(x,t)=\exp\Big\{\lambda_j t\left(f_j(z)-1\right)\Big\},$$

и $f_j(z)$ определены в (1), $j\in\{1,3\}$.

Далее, зафиксируем $\gamma_0\in\Gamma$ и $(x_{1,0},x_{2,0},x_{3,0},x_{4,0})\in Z_+^4$, тогда $P_0(\cdot)$ определим следующим образом:

$$P_0(a_1,a_2,a_3)=P_0\Big\{\omega_0=(\omega_{1,0},\omega_{2,0},\omega_{3,0})\colon \omega_{1,0}=a_1,\omega_{2,0}=a_2,\omega_{3,0}=a_3\Big\}=$$
$$=P_{\eta_1|\Gamma,\varkappa_3}(a_1,\gamma_0,x_{3,0})\times P_{\eta_2|\Gamma,\varkappa_3,\varkappa_4}(a_2,\gamma_0,x_{3,0},x_{4,0})\times P_{\eta_3|\Gamma,\varkappa_3}(a_3,\gamma_0,x_{3,0}). \quad (5)$$

На построенном вероятностном пространстве $\big(\Omega_0,\mathcal{F}_0,P_0(\cdot)\big)$ определим случайные величины

$$\begin{aligned}\Gamma_0&=\gamma_0=\text{const},\\ \varkappa_{j,0}&=x_{j,0}=\text{const},\\ \xi_{j,0}(\omega_0)&=f_{\xi_j|\Gamma,\varkappa_3}(\gamma_0,x_{3,0})=\text{const},\\ \eta_{j,0}(\omega_0)&=\eta_{j,0}(\omega_{1,0},\omega_{2,0},\omega_{3,0})=\omega_{j,0},\\ \eta_{4,0}(\omega_0)&=f_{\eta_4|\xi_1,\eta_1,\varkappa_1}(\xi_{1,0}(\omega_0),\eta_{1,0}(\omega_0),x_{1,0}),\\ \overline{\xi}_{4,0}(\omega_0)&=\eta_{2,0}(\omega_0).\end{aligned} \quad (6)$$

где $j\in\{1,2,3\}$. Теперь, предполагая заданными вероятностные пространства $\big(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1},\cdot)\big)$, $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, заданными случайные величины

$$\begin{aligned}\Gamma_{i+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i+1})&=h\left(\Gamma_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i),\varkappa_{3,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)\right)=\text{const},\\ \varkappa_{j,i+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i+1})&=\max\big\{0,\varkappa_{j,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)+\eta_{j,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)-\\ &\quad-\xi_{j,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)\big\}=\text{const},\\ \varkappa_{4,i+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i+1})&=\varkappa_{4,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)+\eta_{4,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)-\\ &\quad-\overline{\xi}_{4,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)=\text{const},\end{aligned} \quad (7)$$

на пространствах $\big(\Omega_{i+1},\mathcal{F}_{i+1},P_{i+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i,\cdot)\big)$, $i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $j\in\{1,2,3\}$

(которые являются константами относительно рассматриваемых пространств), и случайные величины

$$
\begin{aligned}
&\xi_{j,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)=f_{\xi_j|\Gamma,\varkappa_3}(\Gamma_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i),x_{3,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)),\\
&\eta_{j,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)=\eta_{j,i}(\omega_i)=\eta_{j,i}(\omega_{1,i},\omega_{2,i},\omega_{3,i})=\omega_{j,i},\\
&\eta_{4,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)=f_{\eta_4|\xi_1,\eta_1,\varkappa_1}(\xi_{1,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i),\eta_{1,i}(\omega_i),\varkappa_{1,i}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)),\\
&\overline{\xi}_{4,0}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)=\eta_{2,0}(\omega_i)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

на пространствах $\big(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1},\cdot)\big)$, $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, $j\in\{1,2,3\}$, построим меру $P_{n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\big\{\omega_{n+1}=(\eta_{1,n+1},\eta_{2,n+1},\eta_{3,n+1})\colon \eta_{1,n+1}=a_1,\eta_{2,n+1}=a_2,\eta_{3,n+1}=a_3\big\})=\\
=P_{\eta_1|\Gamma,\varkappa_3}(a_1,\Gamma_{n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i),\varkappa_{3,n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i))\times\\
\times P_{\eta_2|\Gamma,\varkappa_3,\varkappa_4}(a_2,\Gamma_{n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n),\varkappa_{4,n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n))\times\\
\times P_{\eta_3|\Gamma,\varkappa_3}(a_3,\Gamma_{n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i),\varkappa_{3,n+1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_i)).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Вероятностное пространство $\big(\Omega,\mathcal{F},P(\cdot)\big)$ с определенной на нем случайной последовательностью $X=\big(X_0(\omega),X_1(\omega),\ldots\big)$ построены.

1.3. Свойства условных распределений

Изучим теперь свойства распределения $P(\cdot)$ построенного вероятностного пространства $\big(\Omega,\mathcal{F},P(\cdot)\big)$ и, в частности, убедимся в том, что оно отражает основные характеристики рассматриваемой системы массового обслуживания.

Начнем со связи последовательности $X(\omega)=\big(X_0(\omega),X_1(\omega),\ldots\big)$ со случайными величинами из (6), (7), (8). Поскольку (см. (3) и (4))

$$
P\left(X_0(\omega)=a_0\right)=P_0\left(\eta_0(\omega_0)=a_0\right)
$$

и

$$
\begin{aligned}
P\Big(X_n(\omega)=a_n\Big|\,X_0(\omega)=a_0,X_1(\omega)=a_1,\ldots,X_{n-1}(\omega)=a_{n-1}\Big)=\\
=P_n\Big(a_0,a_1,\ldots,\big\{\eta_n(\omega_n)=a_n\big\}\Big),
\end{aligned}
$$

то условные распределения случайных величин $X_n(\omega)$ и распределения случайных величин $\eta_n(\omega_n)=\big(\eta_{1,n}(\omega_n),\eta_{2,n}(\omega_n),\eta_{3,n}(\omega_n)\big)$ совпадают, $n\geqslant 0$. Таким, образом, $X_n(\omega)$ можно рассматривать как «продолжение» величин $\eta_n(\omega_n)$ на общее вероятностное пространство $\big(\Omega,\mathcal{F},P(\cdot)\big)$ с исходных пространств $\big(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},\cdot)\big)$.

Тогда определенные в прошлом разделе на качественном уровне величины теперь можно определить формально:

$$\begin{aligned} \eta_{j,n}(\omega) = X_{j,n}(\omega), \quad \overline{\xi}_{4,0}(\omega) = \eta_{2,0}(\omega), \qquad\qquad \Gamma_{i+1}(\omega) = h\left(\Gamma_i(\omega), \varkappa_{3,i}(\omega)\right), \\ \varkappa_{j,i+1}(\omega) = \max\left\{0, \varkappa_{j,i}(\omega) + \eta_{j,i}(\omega) - \xi_{j,i}(\omega)\right\}, \qquad \xi_{j,i}(\omega) = f_{\xi_j|\Gamma,\varkappa_3}(\Gamma_i(\omega), x_{3,i}(\omega)), \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\varkappa_{4,i+1}(\omega) = \varkappa_{4,i}(\omega) + \eta_{4,i}(\omega - \overline{\xi}_{4,i}(\omega)), \quad \eta_{4,i}(\omega) = f_{\eta_4|\xi_1,\eta_1,\varkappa_1}(\xi_{1,i}(\omega), \eta_{1,i}(\omega), \varkappa_{1,i}(\omega)), \tag{11}$$

Где $\Gamma_0 = \gamma_0 = \text{const}$ и $\varkappa_0 = \left(\varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \varkappa_{3,0}, \varkappa_{4,0}\right) = \left(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}\right) = \text{const}$. Величины, определенные в (10) и (11), являются случайными величинами, поскольку выражаются через конечное число случайных величин $X_{j,n}(\omega)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $n \geqslant 0$. Причем

$$\begin{aligned} P\left(\eta_{j,n}(\omega) = a_{j,n} \middle| \eta_0(\omega) = a_0, \eta_1(\omega) = a_1, \ldots, \eta_{n-1}(\omega) = a_{n-1}\right) = \\ = P\left(X_{j,n}(\omega) = a_{j,n} \middle| X_0(\omega) = a_0, X_1(\omega) = a_1, \ldots, X_{n-1}(\omega) = a_{n-1}\right) = \\ = \varphi_j(a_{j,n}, h_T(\Gamma_n(\omega), \varkappa_{3,n}(\omega))) \end{aligned}$$

для $j \in \{1, 3\}$ и

$$\begin{aligned} P\left(\eta_{2,n}(\omega) = a_{2,n} \middle| \eta_0(\omega) = a_0, \eta_1(\omega) = a_1, \ldots, \eta_{n-1}(\omega) = a_{n-1}\right) = \\ = P\left(X_{2,n}(\omega) = a_{2,n} \middle| X_0(\omega) = a_0, X_1(\omega) = a_1, \ldots, X_{n-1}(\omega) = a_{n-1}\right) = \\ = \begin{cases} \binom{x}{a} p_{k,r}^a (1 - p_{k,r})^{x-a}, & \text{если } h(\Gamma_n(\omega), \varkappa_{3,n}(\omega)) = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{4,n}(\omega) = x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

что соответствует вероятностным предпосылкам, заложенным в описание рассматриваемой системы массового обслуживания.

Теперь перейдем к вопросу о марковости последовательности $\left\{\left(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}\right), i \geqslant 0\right\}$. Введем следующие события:

$$A_i\left(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4\right) = \left\{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3\right\} \bigcap \left\{\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{2,i} = x_2, \varkappa_{4,i} = x_4\right\}, \tag{12}$$

$$B_i\left(b_1; b_3; y_1; y_2; y_3; y_4\right) = \left\{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{3,i} = b_3\right\} \bigcap \left\{\xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3, \overline{\xi}_{4,i} = y_4\right\} \tag{13}$$

В соответствии с описанной структурой системы, количество требований пришедших по потокам Π_1, Π_3, $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$ и $\Pi_4^{\text{вых}}$ за $(i+1)$-ый такт зависит только от состояния обслуживающего устройства и размера очередей в момент τ_i. Поэтому условные распределения рассматриваемых в системе потоков, учитывая все «прошлое» системы удовлетворяют соотношениям

$$P\left(B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$
$$P\left(B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\,A_i\left(k_i;r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\right) \quad (14)$$

Далее, в силу того, что потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, входные потоки Π_1, Π_3, а также выходной поток $\Pi_4^{\text{вых}}$ условно независимы между собой, верно следующее соотношение:

$$P\left(B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$
$$=P\left(\eta_{1,i}=b_1\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times P\left(\eta_{3,i}=b_3\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times$$
$$P\left(\xi_{1,i}=y_1\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times P\left(\xi_{2,i}=y_2\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times$$
$$P\left(\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times P\left(\overline{\xi}_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right) \quad (15)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности $\left\{\left(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i}\right),i\geqslant 0\right\}$:

Теорема 1.1. При заданном распределении начального вектора $\left(\Gamma_0,\varkappa_{1,0},\varkappa_{2,0},\varkappa_{3,0},\varkappa_{4,0}\right)$ последовательность $\left\{\left(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i}\right),i\geqslant 0\right\}$ является цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$
$$P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\,A_i\left(k_i;r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\right) \quad (16)$$

Распишем сначала левую часть равенства (16). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий $B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)$ есть достоверное событие, $\cup_{b,y}B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)=\Omega$, получим

$$P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$

$$=\sum_{b,y}P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$

$$=\sum_{b,y}P\left(B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)\times$$

$$\times P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\right) \tag{17}$$

Беря во внимание (10) и (11), найдем второй множитель:

$$P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\right)=$$

$$=P\Big(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_{1,i+1}=x_1,\varkappa_{2,i+1}=x_2,\varkappa_{3,i+1}=x_3,\varkappa_{4,i+1}=x_4\Big|\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap$$

$$\bigcap\left\{\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right\}\bigcap$$

$$\bigcap\left\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\right\}\Big)=$$

$$=P\Big(h\left(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}\right)=\Gamma^{(k,r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,$$

$$\max\left\{0,x_{2,i}+y_4-y_2\right\}=x_2,\max\left\{0,x_{3,i}+b_3-y_3\right\}=x_3,x_{4,i}+\min\left\{y_1,x_{1,i}+b_1\right\}-\overline{\xi}_{4,i}=x_4\ |$$

$$\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\bigcap\left\{\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right\}\bigcap$$

$$\bigcap\left\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\right\}\Big)=$$

$$=P\Big(h\left(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}\right)=\Gamma^{(k,r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,$$

$$\max\left\{0,x_{2,i}+y_4-y_2\right\}=x_2,\max\left\{0,x_{3,i}+b_3-y_3\right\}=x_3,x_{4,i}+\min\left\{y_1,x_{1,i}+b_1\right\}-\overline{\xi}_{4,i}=x_4\ \Big), \tag{18}$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (15), (17) и (18) получаем выражение для левой части равенства (16):

$$P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)\right)=$$

$$=\sum_{b,y}P\left(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times$$

$$\times P\left(h\left(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}\right)=\Gamma^{(k,r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,\right.$$

$$\left.\max\left\{0,x_{2,i}+y_4-y_2\right\}=x_2,\max\left\{0,x_{3,i}+b_3-y_3\right\}=x_3,x_{4,i}+\min\left\{y_1,x_{1,i}+b_1\right\}-\overline{\xi}_{4,i}=x_4\right)\tag{19}$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях $\bigcap_{t=0}^{i-1}A_t\left(k_t;r_t;x_{1,t};x_{2,t};x_{3,t};x_{4,t}\right)$, поэтому рассуждения для правой части (16) будут аналогичными:

$$P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\right)=$$

$$=\sum_{b,y}P\left(B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\Big|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\right)\times$$

$$\times P\left(A_{i+1}\left(k;r;x_1;x_2;x_3;x_4\right)\Big|\,A_i\left(r_i;x_{1,i};x_{2,i};x_{3,i};x_{4,i}\right)\bigcap B_i\left(b_1;b_3;y_1;y_2;y_3;y_4\right)\right)=$$

$$=\sum_{b,y}P\left(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times$$

$$\times P\left(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_{1,i+1}=x_1,\varkappa_{2,i+1}=x_2,\varkappa_{3,i+1}=x_3,\varkappa_{4,i+1}=x_4\Big|\right.$$

$$\left\{\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{1,i}=x_{1,i},\varkappa_{2,i}=x_{2,i},\varkappa_{3,i}=x_{3,i},\varkappa_{4,i}=x_{4,i}\right\}\bigcap$$

$$\left.\bigcap\left\{\eta_{1,i}=b_1,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\right\}\right)=$$

откуда опять в силу (10) и (11) получаем

$$=\sum_{b,y}P\left(\eta_{1,i}=b_1,\eta_{3,i}=b_3,\xi_{1,i}=y_1,\xi_{2,i}=y_2,\xi_{3,i}=y_3;\overline{\xi}_{4,i}=y_4\Big|\,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_{3,i}=x_{3,i}\right)\times$$

$$\times P\left(h\left(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}\right)=\Gamma^{(k,r)},\max\left\{0,x_{1,i}+b_1-y_1\right\}=x_1,\right.$$

$$\left.\max\left\{0,x_{2,i}+y_4-y_2\right\}=x_2,\max\left\{0,x_{3,i}+b_3-y_3\right\}=x_3,x_{4,i}+\min\left\{y_1,x_{1,i}+b_1\right\}-\overline{\xi}_{4,i}=x_4\right).$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (16) совпадают, следовательно равенство верно и последовательность $\left\{\left(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i}\right),i\geqslant 0\right\}$ является цепью Маркова. $\square$