МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель
педагогической практики

____________ Зорин А.В.

ОТЧЕТ ПО ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ

Аспиранта 4 года обучения
Кочеганова В.М.

Н.Новгород, 2017

Содержание

1 Проведение открытого занятия

Тема открытого занятия: *Ковариация и ее свойства. Корреляции.*

План открытого занятия.

Данная лекция является продолжением предыдущих лекций, в которых шла речь о числовых характеристиках одной случайной величины. Ковариация и корреляция являются характеристиками совокупности случайных величин.

В течение занятия планируется придерживаться следующих этапов.

1. Для большего вовлечения в тематику занятия, является важным вызвать рефлексию у студентов. Другими словами они должны прочувствовать проблематику, основываясь на собственном опыте. Для решения этого вопроса студентам будет предложена задача из области машинного обучения: задача определения рака у пациентов, основываясь на измерении показателей его здоровья (давление, температура, уровень лейкоцитов и т.п.). На этом примере будет видно, как можно упростить объем вычислений для предсказаний, вычислив корреляцию измеряемых величин.

2. Далее необходимо ввести определение ковариации двух случайных величин.

   Определение 1. *Пусть X, Y — случайные величины с конечными математическими ожиданиями $\mathsf{M}\,X$ и $\mathsf{M}\,Y$. Число*

   $$\mathsf{cov}(X,Y) = \mathsf{M}\,(X - \mathsf{M}\,X)(Y - \mathsf{M}\,Y)$$

   называется ковариацией *между случайными величинами X и Y.*

   Поскольку у студентов не было глубокого изучения теории меры и интеграла Лебега, важно сделать акцент на непрерывном и дискретном видах распределения. Далее следует привести пример вычисления ковариации для двумерного нормального распределения (со всеми выкладками).

   $$p(u,v) = \frac{\exp\Big\{-\dfrac{1}{2(1-r^2)}\Big(\Big(\dfrac{u-a}{\sigma_1}\Big)^2 - 2r\dfrac{(u-a)(v-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \Big(\dfrac{v-b}{\sigma_2}\Big)^2\Big)\Big\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}.$$

3. Рассказать про физический смысл ковариации. А именно, выберем направление на плоскости, задавшись направляющими косинусами (θ_1, θ_2), $\theta_1^2 + \theta_2^2 = 1$. Тогда проекция на единичный вектор (θ_1, θ_2) отклонения

$(X - \mathsf{M}\,X, Y - \mathsf{M}\,Y)$ случайной точки (X, Y) от ее среднего положения $(\mathsf{M}\,X, \mathsf{M}\,Y)$ равна

$$\theta_1(X - \mathsf{M}\,X) + \theta_2(Y - \mathsf{M}\,Y).$$

Естественно измерять степень разброса случайной точки (X, Y) относительно ее среднего положения в выбранном направлении с помощью дисперсии

$$\mathsf{D}\left(\theta_1(X - \mathsf{M}\,X) + \theta_2(Y - \mathsf{M}\,Y)\right) = \theta_1^2\mathsf{D}\,X + 2\theta_1\theta_2\mathsf{cov}(X, Y) + \theta_2^2\mathsf{D}\,Y =$$
$$= (\theta_1, \theta_2)\begin{pmatrix} \mathsf{D}\,X & \mathsf{cov}(X, Y) \\ \mathsf{cov}(X, Y) & \mathsf{D}\,Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Таким образом, ковариация позволяет находить разброс случайного вектора в заданном направлении.

4. Привести определение матрицы ковариации как характеристику совокупности случайных величин.

   Определение 2. *Пусть случайные величины X_1, X_2, $\ldots X_n$ имеют конечные математические ожидания. Обозначим $\sigma_i^2 = \mathsf{D}\,X_i$, $\sigma_{i,j} = \mathsf{cov}(X_i, X_j)$, $i \neq j$. Матрица*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \ldots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

   называется ковариационной матрицей *этих случайных величин.*

5. Важно перечислить и (выборочно) доказать основные свойства ковариации:

   - симметричность (следует из определения);
   - линейность (доказать самим);
   - формула для вычисления через маргинальные и совокупные математические ожидания (доказать самим);
   - вырождение ковариации для независимых случайных величин (доказать самим); дать определение некоррелированным случайным величинам;
   - Неравенство Чебышева (с доказательством).

6. Ввести определение коэффициента корреляции.

Определение 3. *Величина*

$$\mathsf{corr}(X, Y) = \frac{\mathsf{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathsf{D}\,X \mathsf{D}\,Y}}$$

называется коэффициентом корреляции *между величинами* X *и* Y.

Привести его свойства:

- симметричность;
- вырождение коэффициента корреляции для независмых случайных величин;
- линейная связанность случайных величин при коэффициенте корреляции равном 1.

7. Сделать заключение. Вспомнить основные темы занятия.

2 Подготовка учебно-методического пособия

В рамках педагогической практики был разработан проект учебно-методического пособия по теме «Аналитические и численные методы в теории очередей». Также была подготовлена первая глава «Введение», которую приведем в следующем разделе отчета. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии», и может быть использовано при чтении специальных курсов «Теория случайных процессов», «Дополнительные главы теории вероятностей», «Теория управляемых систем массового обслуживания», «Теория меры».

Предлагается следующая структура учебно-методического пособия:

- Глава 1. Введение
- Глава 2. Марковские процессы гибели и размножения с непрерывным временем
- Глава 3. Марковские квази-процессы рождения-гибели. Распределения фазового типа
- Глава 4. Дискретные марковские модели
- Решения

Во введении формулируется реальная задача и строится математическая модель для ее решения. На примере задачи продемонстрирован метод имитационного моделирования для определения некоторых числовых характеристик возникающего процесса обслуживания заявок.

Глава 2 знакомит с понятием процесса гибели и размножения, а также важным инструментом для его исследования: преобразование Лапласа — в применении к задаче о нахождении распределения периода занятости системы. В рамках спецкурсов «Вероятностные модели в теории очередей» и «Теория массового обслуживания», как правило, разбираются конкретные примеры простейших систем массового обслуживания в предположении о простейшем входящем потоке и экспоненциальном распределении длительности обслуживания произвольного требования. В качестве математической модели выбирался процесс $\{\varkappa(t); t \geqslant 0\}$, описывающий изменение длины очереди или числа требований в системе $\varkappa(t)$ в момент $t \geqslant 0$. Во всех рассмотренных там случаях (задачи Эрланга для конечного и бесконечного пуска, задача Пальма для n линий с потерями, система с ожиданием и n приборами) процесс $\{\varkappa(t); t \geqslant 0\}$ оказывался марковским, а система дифференциальных уравнений Чепмена–Колмогорова имела трёхдиагональную матрицу. Все рассмотренные тогда процессы являются частными случаями важного класса марковских процессов, носящего название процессов гибели и размножения. В заключении раздела предлагается перечень задач для самостоятельного решения.

Глава 3 содержит дальнейшее обобщение процессов гибели и рождения. В теории массового обслуживания исследователи зачастую предполагают экспоненциальное распределение для основных временных промежутков и концентрируют внимание на адекватном моделировании процессов обслуживания и управления. После того, как такая «экспоненциальная» модель исследована, наступает период расширения класса входящих потоков и законов длительностей обслуживания при прочих неизменных составляющих системы обслуживания. При этом могут возникать довольно сложные вероятностные процессы, такие как кусочно-линейные марковские процессы, регенерирующие процессы, и т.д. Через реальную задачу естественным образом вводится понятие однородного обобщенного процесса гибели и размножения. В завершении приводятся задачи для самостоятельного решения.

Глава 4 знакомит с мощным численным методом для поиска вероятностей дискретного распределения по известной производящей функции. Также формулируется задача об обслуживании конфликтных потоков по циклическому алгоритму и аналитически исследуется динамика длины одной из очередей.

Последняя глава содержит решения задач, встречающихся в тексте учебно-методического пособия.

3 Учебно-методическое пособие. Введение

Пусть есть кафе с $N = 10$ местами (индивидуальными столиками). Очереди нет, столики обслуживаются официантами. Клиент в среднем проводит в кафе пол-часа. Среднее число поступающих клиентов в час изменяется. В момент открытия, в 9:00, в кафе приходят 6 клиентов в час; с 9 до 15 интенсивность линейно растёт до 10 клиентов в час; с 15 до 18 часов она линейно убывает до 8 клиентов в час. В 18:00 кафе закрывается. В момент открытия кафе пустует. Как изменяется в течение дня число занятых мест?

Мы понимаем, что в работе такого кафе есть большая доля влияния случая: моменты, когда входят посетители, их заказы, их темп еды — всё заранее предвидеть и распланировать невозможно. Поэтому мы будет рассматривать эту задачу методами теории вероятностей. Итак, мы принимаем, что число занятых мест в каждый отдельно взятый момент времени есть случайная величина. Тогда вопрос можно переформулировать так: как изменяется среднее число клиентов? как изменяется дисперсия среднего числа клиентов?

Рассмотрим поподробнее входные данные задачи, поймём их вероятностный смысл. Во-первых, запишем выражение для мгновенной интенсивности прихода клиентов (то, что мы ранее назвали «число клиентов в час») для произвольного момента времени t. Выберем в качестве начального момента отсчёта времени $t = 0$ время 9:00 утра, тогда будем считать, что $0 \le t \le 9$. Обозначим эту интенсивность через $\lambda(t)$. Физический смысл этой характеристики такой: за интервал времени вида $(t, t+h)$ в среднем поступает $\lambda(t) \cdot h + o(h)$ требований. Имеем:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 6 + 2t/3, & 0 \le t \le 6 \\ 14 - 2t/3, & 6 < t \le 9. \end{cases}$$

Понятно, что такое условие не определяет полностью вероятностный закон поступления клиентов. Сформулируем следующие постулаты *нестационарного ординарного потока без последействия*: независимо от того, как приходили клиенты прежде момента t, за промежуток времени $(t, t+h)$ приходит ровно один новый клиент с вероятностью $\lambda(t)h + o(h)$, поступает более одного клиента с вероятностью $o(h)$ и не поступает ни одного клиента с вероятностью $1 - \lambda(t)h + o(h)$.

Дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda(t)p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p_i'(t) &= \lambda(t)p_{i-1}(t) - (\lambda(t) + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, N-1; \\ p_N'(t) &= \lambda(t)p_{N-1}(t) - N\mu p_N(t). \end{aligned}$$

Среднее число клиентов:

$$m(t) = \sum_{i=0}^{N} i p_i(t).$$

```
function pdot = kolm(p,t)
  m=2;
  if (t<6) l=6+2/3*t; else l=14-2/3*t; endif;
  sz = length(p);
  A = zeros(sz,sz);
  A(1:sz+1:sz^2) = -l-m*(0:sz-1);
  A(2:sz+1:sz^2) = l;
  A(sz+1:sz+1:sz^2) = m*(1:sz-1);
  A(sz^2) = -(sz-1)*m;
  pdot = A*p;
endfunction;

N=10;
tt = 0:0.1:9;
pp0 = [1, zeros(1,N)];
pp = lsode("kolm", pp0, tt);
plot(tt,pp); ## распределение вероятностей
plot(tt,pp*(0:N)'); ## среднее число клиентов
```

Как мы можем проверить этот результат и, главное, объяснить его «заказчику»? Ключевой момент здесь — связать вероятность с частотой и заодно увидеть собственными глазами, как выглядят *траектории случайного процесса*.

Итак, в оставшейся части Введения мы продемонстрируем один важный метод анализа процессов обслуживания: метод имитационного моделирования — и больше про него не будем вспоминать, так как это отдельная большая наука. В качестве рабочего определения примем, что имитационное моделирование состоит в выделении некоторых существенных событий, происходящих в сложной системе, и в «розыгрыше» возможной последовательности наступления этих событий с учётом известных распределений вероятностей для «входных управляющих событий».

Во-первых, давайте разберёмся в том, как же всё-таки разворачивается поступление клиентов во времени.

Надо определить моменты поступления требований в систему. Введём вспомогательную функцию $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(s)\,ds$. Она равна

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 6t + t^2/3, & 0 \le t \le 6 \\ 14t - t^2/3 - 24, & 6 < t \le 9. \end{cases}$$

Пусть $T_0 = 0$, а величины T_1, T_2, $\ldots$ — независимые случайные величины с экспоненциальным распределением с параметром 1, $\Lambda(t)$ — вспомогательная функция, определённая выше. Для момента $t \ge 0$ введём величину

$$\eta(t) = \sup\{n\colon T_0 + T_1 + \ldots + T_n < \Lambda(t)\}.$$

Можно показать, что как функция от t, семейство случайных величин $\{\eta(t); t \ge 0\}$ ведёт себя как *счётчик числа пришедших клиентов* в нестационарном ординарном потоке без последействия с мгновенной интенсивностью $\lambda(t)$, $t \ge 0$. Пусть $V(t)$ — функция, обратная к $\Lambda(t)$. Тогда моменты поступления клиентов (моменты скачков считающей функции $\eta(t)$) суть

$$\tau_1 = V(T_1),\ \tau_2 = V(T_1 + T_2),\ \tau_3 = V(T_1 + T_2 + T_3),\ \ldots$$

В нашем случае:

$$V(t) = \begin{cases} \sqrt{3(t+27)} - 9, & 0 \le t \le 48, \\ \sqrt{21 - 3(123 - t)}, & 48 < t \le 75. \end{cases}$$

Теперь определим моменты поступления клиентов на всём промежутке наблюдения $[0, 9]$ и нарисуем вид функции $\eta(t)$ (а точнее, её *выборочную реализацию*).

```
function v = Vfunc(tt)
         whr = (tt>48);
         v = zeros(size(tt));
         v = sqrt(3*(tt+27))-9;
         v(whr) = 21-sqrt(3*(123-tt(whr)));
endfunction;

function taus = ClientsIn()
  taus = [];
  Tn = -log( rand() );
  y = Vfunc(Tn);
  while(y<=9)
    taus(end+1)=y;
```

```
    Tn = Tn - log( rand() );
    y = Vfunc(Tn);
  endwhile
endfunction

taus = ClientsIn();
stairs( taus, 0:(length(taus)-1) );
```

Обозначим $W_{j,i}$ время, через которое в кафе освободится не менее j мест в момент прихода i-го клиента (мы следуем классической работе Кифера и Вольфовица, в которой число мест в кафе было не ограничено). Объединим эти величины с одинаковым индексом i в вектор $W_i = (W_{1,i}, \ldots, W_{N,i})$. Из определения устанавливаем справедливость неравенств $0 \le W_{1,i} \le W_{2,i} \le \ldots \le W_{N,i}$. Этот вектор несёт в себе много интересной информации. Например, если ровно k его первых элементов равны нулю, это означает, что в момент прихода i-го клиента есть k свободных мест. В частности, первый клиент за день застаёт все места свободными, так что $W_1 = (0, 0, \ldots, 0)$. Пусть теперь для i-го клиента вектор $0 = W_{k,i} < W_{k+1,i}$. Этот клиент, очевидно, сразу займёт свободное место. Каким тогда будет вектор W_{i+1}? Следующий клиент придёт через промежуток $\alpha_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$, время обслуживания i-го клиента обозначим S_i. Значит, в момент прихода $(i+1)$-го клиента оставшееся время до ухода i-го клиента равно $(S_i - \alpha_{i+1})^+ = \max\{0, S_i - \alpha_{i+1}\}$. Обозначим через $R(\cdot)$ оператор упорядочивания по возрастанию элементов вектора, подставленного на место точки в качестве его аргумента. Тогда будем иметь, очевидно,

$$W_{i+1} = R\big(0, \ldots, 0, (S_i - \alpha_i)^+, (W_{k+1,i} - \alpha_{i+1})^+, \ldots, (W_{N,i} - \alpha_{i+1})^+\big).$$

Здесь на первых местах стоят $(k-1)$ нуль. Если же в момент прихода i-клиента все места заняты, $W_{1,i} > 0$, то этот клиент просто теряется, и

$$W_{i+1} = \big((W_{1,i} - \alpha_{i+1})^+, \ldots, (W_{N,i} - \alpha_{i+1})^+\big).$$

Алгоритм имитации будет следующий: 1) определить моменты прихода клиентов; 2) для каждого клиента вычислить его вектор остаточных длительностей; 3) если клиент не видит свободных мест, помещаем его в поток потерянных клиентов; если места есть, то определяем момент выхода этого клиента и помещаем в выходящий поток; 4) соединяем с сортировкой список моментов начала обслуживания и моментов выхода клиентов с учётом изменения числа клиентов $(+1, -1)$; 5) вычисляем актуальное число клиентов в каждый момент скачка.

```
function [jmps qs taus lost srvd] = RunSim(mu, NN)
         taus = ClientsIn;
```

```
        jmps_temp = [];
        lost = [];
        W = zeros(1, NN);
        tprev=0;
        for tau = taus
            if W(1)>0
               lost(end+1)=tau;
               W = W+tprev-tau;
               W( W<0 ) = 0;
            else
                jmps_temp(end+1)=tau;
                W = W+tprev-tau;
                S = -log(rand())/mu;
                srvd(end+1) = tau+S;
                W(1) = max([0, W(1)-log(rand())/mu]);
                W = sort(W);
            endif
            tprev=tau;
        endfor
        [jmps idx] = sort([0 jmps_temp srvd]);
        qs = cumsum([0 ones(1, length(jmps_temp)), ...
              -ones(1, length(srvd))](idx));
endfunction
```

Список литературы

[1] Дружкин А.В., Капичникова О.Б., Капичников А.И. Педагогика высшей школы : учебное пособие. Саратов : Наука, 2013. – 124 с.

[2] Голованова, Н. Ф. Педагогика : учебник для студ. проф. вузов. 2-е изд., стер. М. : Академия, 2013. – 240 с.

[3] Столяренко Л.Д., Столяренко В.Е. Психология и педагогика [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов. СГАУ. - 4-е изд. - Электрон. текстовые дан. - М. : Юрайт, 2011. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - (Учебник для вузов. Электронная версия).