МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**
Кафедра программной инженерии

«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель
исследовательской практики

_______________ Зорин А.В.

# ОТЧЕТ ПО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ПРАКТИКЕ

**по теме:**
«Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания»

Аспиранта 4 года обучения
Кочеганова В.М.

Н.Новгород, 2018

**Информация об исследовательской практике**

1. Сроки прохождения исследовательской практики: с 02.10.2017 по 31.01.2018.

2. База исследовательской практики: Кафедра программной инженерии, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

## Введение

В связи со стремительным ростом числа машин в современных городах все больший интерес стала представлять теория потоков транспортных средств. Результаты ранних исследований по этой тематике собраны, например, в книгах [1–3]. В этих монографиях потоки машин моделируются с помощью традиционных стохастических потоков событий, весьма полно изученных в классической теории массового обслуживания. Однако классические модели не удается использовать для адекватного описания реальных потоков машин (см. [4–6]). В работах [7–9] предлагается учитывать не только вероятностные свойства последовательности моментов пересечения машинами так называемой виртуальной стоп-линии, но и определять свойства случайных конфигураций автомобилей на дороге. В указанных работах изучается возникновение так называемых пачек машин. Каждая пачка состоит из медленной головной машины и ожидающих возможности обгона машин за ней. Динамика длины пачки определяется возможностью обгона машинами из хвоста всей пачки. Другая динамика, обусловленная возможностью съезда машин с трассы, рассматривается в работах [10–12]. Основным объектом изучения в этих работах является плотность потока машин как функция от расстояния, а знание плотности, в свою очередь, позволяет делать выводы о пропускной способности перекрестков.

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания на одном устройстве поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. Одной из первых работ, посвященная тандемам систем массового обслуживания, является работа [13]. В ней изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлением заявок в систему и времени обслуживания независимы и имею экпоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора.

Основные результаты теории тандемов в случае простейших стационарных входных потоков и экспоненциального времени обслуживания широко представлены, например, в работах [14–16]. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены в статьях [17–19]. Более общие модели включают в себя так называемые входные BMAP (Batch Markovian Arrival Process) потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Системы обслуживания с входными потоками типа BMAP рассмотрены, например, в работах [20–22], где проведены аналитические рассчеты условий стационарности и изучено поведение характеристик обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями. Модель последовательных перекрестков с немгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах [23, 24]. В этих работах динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернулиевской случайной величиной: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью $0 < p < 1$ успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью $1 - p$ остается «между» перекрестками.

Статья [25] отличается от работ [23, 24] введением продления в алгоритм обслуживания во второй системе. В данной работе рассматривается тандем из двух систем массового обслуживания. В первой системе управление осуществляется по циклическому алгоритму. После обслуживания в первой системе, требования немгновенно поступают на вторую, где обслуживаются по циклическому алгоритму с продлением. Целью этой статьи является исследование условий существования стационарного режима очередей первичных требований, то есть требований, генерируемых внешней средой.

### Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (рис. 1). Пусть в систему с

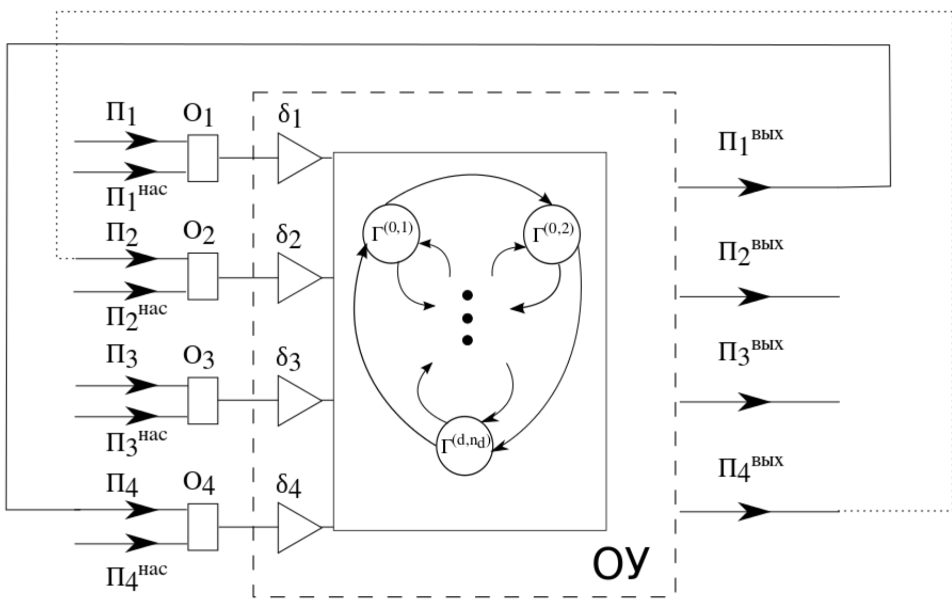


Рис. 1: Структурная схема системы обслуживания

одним обслуживающим устройством поступают потоки $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ и $\Pi_4$. Требования по потоку $\Pi_j$ становятся в соответствующую очередь $O_j$ с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди $O_j$, поддерживаемая устройством $\delta_j$, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди $O_4$ будет описана ниже. Входные потоки $\Pi_1$ и $\Pi_3$ формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков $\Pi_1$ и $\Pi_3$ формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для $\Pi_1$ и $\Pi_3$ будем обозначать $\lambda_1$ и $\lambda_3$, а распределение числа заявок в группе по потоку $\Pi_j$ будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu, \quad j \in \{1, 3\}, \tag{1}$$

которая предполагается аналитической при любом $z \in \mathbb{C}$ таком, что $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку $\Pi_j$ число требований в группе равно $\nu$. Обслуженные требования потока $\Pi_1$ поступают на повторное обслуживание, формируя на выходе поток $\Pi_4$. Обслуженные требования потока $\Pi_4$ в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток $\Pi_2$. Потоки $\Pi_2$ и $\Pi_3$ являются конфликтными, что

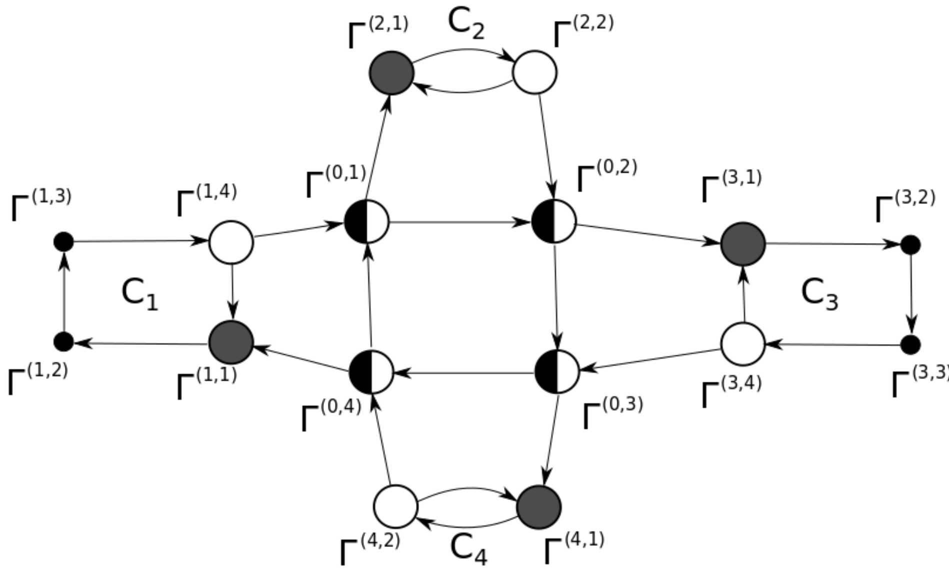


Рис. 2: Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, большие черные вершины — входные, небольшие черные — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)}\colon k = \overline{0,d}; r = \overline{1,n_k}\}$ с заданными натуральными числами $d$, $n_0$, $n_1$, …, $n_d$. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение неслучайного времени $T^{(k,r)}$. Введем непересекающиеся подмножества $\Gamma^{\mathrm{I}}$, $\Gamma^{\mathrm{II}}$, $\Gamma^{\mathrm{III}}$ и $\Gamma^{\mathrm{IV}}$ множества $\Gamma$ следующим образом. В состоянии $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ обслуживаются только требования из очередей $O_1$, $O_2$ и $O_4$. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ обслуживаются только требования из очередей $O_2$ и $O_4$. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ обслуживаются только требования из очередей $O_1$, $O_3$ и $O_4$. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$ обслуживаются только требования из очередей $O_3$ и $O_4$. Тогда множество $\Gamma$ есть объединение $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^{1}\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$, ${}^{2}\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}}$, ${}^{3}\Gamma = \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)}\colon r = \overline{1,n_k}\}$ будем называть $k$-м циклом, $k = \overline{1,d}$ (Рис. 2). Состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = \overline{1,n_0}$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r = \overline{1, n_k - 1}$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = \overline{0,d}$. В цикле $C_k$ выделим подмножества $C_k^{\mathrm{O}}$ выходных, $C_k^{\mathrm{I}}$ входных и $C_k^{\mathrm{N}} = C_k \setminus (C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ того же цикла $C_k$. При $\Gamma^{(k,r)}$ принадлежащем множеству $C_k^{\mathrm{O}}$ прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$, если число требований в очереди $O_3$ в момент переключения больше заданного порога $L$. В противном случае, то есть если число требований в очереди $O_3$ меньше либо равно $L$, новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}}$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди $O_3$ меньше или равно $L$, где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается

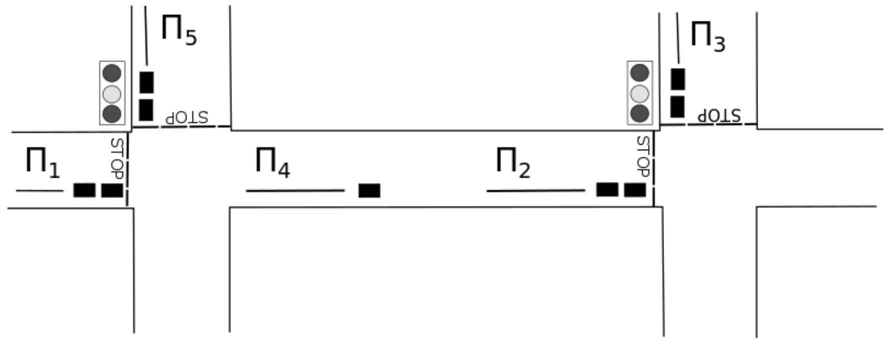


Рис. 3: Пример: тандем перекрестков

входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^{\mathrm{I}}$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}}$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^{\mathrm{O}} \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^{\mathrm{I}} \subset {}^3\Gamma$. Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, то есть можем положить $h_2(r) = r \oplus_0 1$.

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \ \&\ y > L); \\ \Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y \leqslant L; \\ \Gamma^{(0,r \oplus_0 1)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leqslant L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \tag{2}$$

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В роли потоков требований, формируемых внешней средой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки $\Pi_1$, $\Pi_5$ на первом перекрестке, а также поток $\Pi_3$ на втором. Каждая машина из потока $\Pi_1$, проезжая первый перекресток, становится в очередь $O_4$ потока $\Pi_4$ и затем с некой вероятностью ($p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди $O_4$ до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди $O_4$ успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь $O_2$ и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока $\Pi_1$ пропускаются фиксированное количество времени $\widetilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для $\Pi_1$); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в течение времени $\widetilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для $\Pi_1$). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока $\Pi_3$ (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока $\Pi_2$ (состояния $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока $\Pi_3$, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока $\Pi_2$ длина очереди $O_3$ не превосходит уровня $L$. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\widetilde{T}^{(2,1)}$, $\widetilde{T}^{(2,2)}$ и $\widetilde{T}^{(2,3)}$.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состоя-

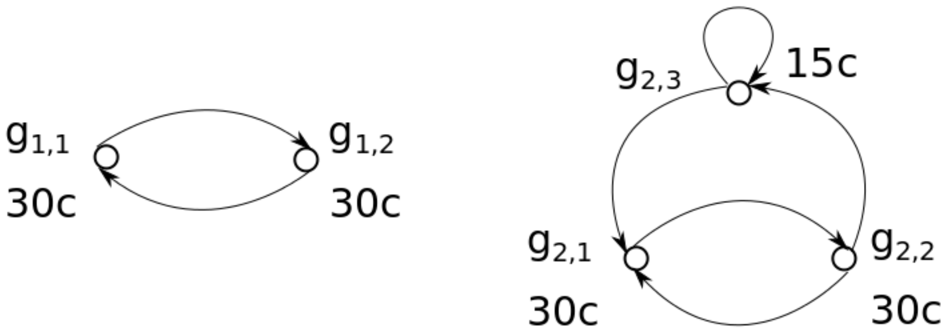


Рис. 4: Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

ния хотя бы одного из светофоров, можно показать, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1–го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2–го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина $s$). Здесь $T$ — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток $\Pi_5$ не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определнности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4.

За начальное состояние объединенной системы примем $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, то есть первый перекресток находится в состоянии $g_{1,1}$, второй — в состоянии $g_{2,1}$, и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами $s = 0$ и $t = 0$). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$. Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние $g_{2,1}$, так и в состояние продления $g_{2,3}$. Таким образом следущим состоянием тандема будет либо опять $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, либо $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следущий список всех возможных состояний системы:

$$
\begin{array}{lll}
(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,4)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(4,3)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(3,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(2,2)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(2,4)}. &
\end{array}
$$

В соответсвии с приведенными выше обозначениями, множества $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут $C_1^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(1,1)}\}$, $C_2^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(2,1)}\}$, $C_3^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(3,1)}\}$ и $C_4^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(4,1)}\}$. Множествами выходных состояний будут $C_1^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(1,2)}\}$, $C_2^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(2,4)}\}$, $C_3^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(3,2)}\}$ и $C_4^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(4,4)}\}$. Функции $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ и $h_3(\cdot)$ задаются поточечно:

$$
h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,
$$

$$
h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4 \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,
$$
$$
h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)} \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.
$$

Этим завершается построение числового примера.

### Математическая модель

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [26]). Схема управляющей системы приведена на Рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_1$, $\tau_2$, … моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим $\Gamma_i$, $i \geqslant 1$, из множества $\Gamma$ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — в момент времени $\tau_0$, количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований в очереди $O_j$ в момент времени $\tau_i$, количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований, поступивших в очередь $O_j$ по потоку $\Pi_j$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\underline{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, реально обслуженных требований по потоку $\Pi_j$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; $j = \overline{1,4}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$
\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \tag{3}
$$

где отображение $h(\cdot,\cdot)$ определено в (2). Для определения длительности $T_{i+1}$ состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot,\cdot)$:

$$T_{i+1}=h_T(\Gamma_i,\varkappa_{3,i})=T^{(k,r)},\qquad \text{где } k \text{ и } r \text{ таковы, что } \Gamma^{(k,r)}=\Gamma_{i+1}=h(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i}=\min\{\varkappa_{j,i}+\eta_{j,i},\xi_{j,i}\},\quad j\in\{1,2,3\},\tag{4}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1}=\varkappa_{j,i}+\eta_{j,i}-\overline{\xi}_{j,i},\quad j\in\{1,2,3\},$$

то из выражения (4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1}=\max\{0,\varkappa_{j,i}+\eta_{j,i}-\xi_{j,i}\},\quad j\in\{1,2,3\}.\tag{5}$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на Рис. 1) следуют соотношения для потока $\Pi_4$:

$$\eta_{4,i}=\min\{\xi_{1,i},\varkappa_{1,i}+\eta_{1,i}\},\quad \varkappa_{4,i+1}=\varkappa_{4,i}+\eta_{4,i}-\eta_{2,i},\quad \xi_{4,i}=\varkappa_{4,i}.\tag{6}$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения заключается в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i$ и $\xi_i$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i,\nu_i,\eta_i);i\geqslant 0\}$ и $\{(\tau_i,\nu_i,\xi_i);i\geqslant 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i=(\Gamma_i;\varkappa_i)$, где $\eta_i=(\eta_{1,i},\eta_{2,i},\eta_{3,i},\eta_{4,i})$, $\xi_i=(\xi_{1,i},\xi_{2,i},\xi_{3,i},\xi_{4,i})$ и $\varkappa_i=(\varkappa_{1,i},\varkappa_{2,i},\varkappa_{3,i},\varkappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot,\cdot)$ и $\varphi_3(\cdot,\cdot)$ из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu}\varphi_j(\nu,t)=\exp\{\lambda_j t(f_j(z)-1)\},$$

где $f_j(z)$ определены выражением (1), $j\in\{1,3\}$. Функция $\varphi_j(\nu,t)$ по своему смыслу есть вероятность поступления $\nu=0,\,1,\,\ldots$ требований по потоку $\Pi_j$ за время $t\geqslant 0$. Положим $\varphi_j(\nu,t)$ равной нулю при $\nu<0$. Функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k;y,u)=C_y^k u^k(1-u)^{y-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k;y,u)$ есть вероятность поступления $k$ требований по потоку $\Pi_2$ при условии, что очередь $O_4$ содержит $y$ требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u=p_{k,r}$. При нарушении условия $0\leqslant k\leqslant y$ положим $\psi(k;y,u)$ равной нулю.

Пусть $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{Z}_+^4$ и $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\nu_i=(\Gamma^{(k,r)};x)$ вероятность $\varphi(a,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i}=a_1$, $\eta_{2,i}=a_2$, $\eta_{3,i}=a_3$, $\eta_{4,i}=a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}})\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\delta_{a_4,\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}},\tag{7}$$

где $\tilde{k}$ и $\tilde{r}$ таковы, что $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ и $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma^{(k,r)}; x)$ метки $\nu_i$ есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}. \tag{8}$$

Из формулы (8) следует для $j \in \{1, 2, 3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i} = 0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i} = \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, j)$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$.

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором вероятностном пространстве.

**Теорема 1.** *Пусть $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)} \in \Gamma$ и $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j = \overline{1,4}$, такие, что 1) имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x^0$; 2) выполняются соотношения* (3), (5), (6)*; 3) для любых $a \in \mathbb{Z}_+^4$, $b \in \mathbb{Z}_+^4$ и любых $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t,r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \ldots$, таких, что $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Big) > 0$, условное распределение векторов $\eta_i$ и $\xi_i$, $i \geqslant 0$, имеет вид*

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\middle|\, \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \tag{9}$$

*где функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ определяются формулами* (7) *и* (8).

*Доказательство.* Для построения вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ воспользуемся теоремой И. Тулчи (см. [27], с. 348).

Введем последовательность измеримых пространств $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$,..., где $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$, $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i}) \in \Omega_i$, а $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ есть множество всех подмножеств множества $\Omega_i$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x_{3,0})$. Зададим на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ вероятностную меру $P_0(\cdot)$ ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0,r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0,r_0)})). \tag{10}$$

Для $j \in \{1, 2, 3\}$ определим величины

$$\tilde{\Gamma}_0(\omega_0) = \gamma_0, \quad \tilde{\varkappa}_{j,0}(\omega_0) = x_{j,0}, \quad \tilde{\xi}_{j,0}(\omega_0) = l(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \tilde{\eta}_{j,0}(\omega_0) = \omega_{j,0}, \tag{11}$$

и

$$\tilde{\varkappa}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\xi}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\eta}_{4,0}(\omega_0) = \min\{\tilde{\xi}_{1,0}(\omega_0), \tilde{\varkappa}_{1,0}(\omega_0) + \tilde{\eta}_{1,0}(\omega_0)\}. \tag{12}$$

Теперь предположим, что заданы вероятностные меры $P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \cdot)$ на измеримом пространстве $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = \overline{0, n}$, и фиксирован набор $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$. Положим для $j \in \{1, 2, 3\}$ и $i = \overline{0, n}$

$$\tilde{\Gamma}_{i+1} = \Gamma^{(k^*, r^*)} = h(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\varkappa}_{3,i}), \quad \tilde{\varkappa}_{j,i+1} = \max\{0, \tilde{\varkappa}_{j,i} + \tilde{\eta}_{j,i} - \tilde{\xi}_{j,i}\}, \tag{13}$$

$$\tilde{\varkappa}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i} + \tilde{\eta}_{4,i} - \tilde{\eta}_{2,i}, \quad \tilde{\xi}_{j,i+1} = l(k^*, r^*, j), \quad \tilde{\eta}_{j,i+1} = \omega_{j,i+1} \tag{14}$$

$$\tilde{\eta}_{4,i+1} = \min\{\tilde{\xi}_{1,i+1}, \tilde{\varkappa}_{1,i+1} + \tilde{\eta}_{1,i+1}\}, \quad \tilde{\xi}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i+1}. \tag{15}$$

Заметим, что значения $\tilde{\Gamma}_{j,i}$, $\tilde{\xi}_{j,i}$, $\tilde{\eta}_{j,i}$, $\tilde{\varkappa}_{j,i}$, найденные по формулам (13)–(15) по наборам $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ и $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_i)$, $n \geqslant i$, совпадают. Определим на измеримом пространстве $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ вероятностную меру $P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \cdot)$ ее значениями на одноточечных множествах $\{(a_1, a_2, a_3)\}$, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3$:

$$P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})) \times \psi(a_2, \tilde{\varkappa}_{4,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})). \tag{16}$$

Тогда (в соответствии с теоремой Ионеску Тулчи) для декартова произведения $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ пространств элементарных исходов и произведения $\sigma$-алгебр $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ будет существовать единственная вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ такая, что для любого $i \geqslant 0$ верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\}) = P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i), \tag{17}$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i) = \int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P_1(\omega_0; d\omega_1) \ldots \int_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \tag{18}$$

для любого $A_i$ из $\mathcal{F}_i$. Итак, вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ построено.

Теперь введем на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ следующие случайные величины и элементы, $i \geqslant 0$, $j = \overline{1, 4}$:

$$\Gamma_i(\omega) = \tilde{\Gamma}_i, \quad \varkappa_{j,i}(\omega) = \tilde{\varkappa}_{j,i}, \quad \xi_{j,i}(\omega) = \tilde{\xi}_{j,i}, \quad \eta_{j,i}(\omega) = \tilde{\eta}_{j,i}.$$

и докажем, что они удовлетворяют условиям теоремы. Для сокращения записи зависимость от $\omega$ в обозначении случайных элементов и случайных величин далее будем опускать. Из формулы (13) следует, что случайные элементы $\Gamma_i$ удовлетворяют соотношению (3), а случайные величины $\varkappa_{j,i}$ для $j \in \{1, 2, 3\}$ удовлетворяют соотношению (5). Из формулы (14) заключаем, что $\varkappa_{4,i}$ удовлетворяет соотношению (6). Далее, из условий (12) и (15) следует справедливость соотношений (6) для величин $\eta_{4,i}$ и $\xi_{4,i}$.

Перейдем к доказательству равенства (9). Для сокращения записи введем множества $B_i = \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega \colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}$, $i \geqslant 0$. Найдем явное выражение для условной вероятности $\mathbf{P}(\{\omega \colon \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i)$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$. Запишем по определению условной вероятности, предполагая, что $\mathbf{P}(B_i) > 0$:

$$\mathbf{P}\big(\{\omega \colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \, | B_i\big) = \mathbf{P}\big(\{\omega \colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap B_i\big) \times \big(\mathbf{P}(B_i)\big)^{-1}. \tag{19}$$

Далее из соотношений (17), (18) и того факта, что значения $\Gamma_i$ и $\varkappa_i$ зависят только от $\omega_0$, $\omega_1$ , …, $\omega_{i-1}$, но не от $\omega_i$, (этот факт следует из формул (11) – (14)), получим выражение для второго сомножителя последнего выражения

$$\mathbf{P}\big(B_i\big) = \\ = \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}:\\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\,\varkappa_t=x^t,\\ t=\overline{0,i-1}}} P_0(\omega_0)\times P_1(\omega_0;\{\omega_1\})\times\ldots\times P_{i-1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\}). \quad (20)$$

Преобразуем множество $\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$, учитывая соотношения (11) – (15):

$$\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \big\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} = \big\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} \cap \\ \cap \big\{\omega\colon \eta_{j,i} = a_j, j=\overline{1,3}\big\} \cap \big\{\omega\colon \xi_{j,i} = b_j, j=\overline{1,3}\big\} \cap \{\omega\colon \xi_{4,i} = b_4\} \cap \{\omega\colon \eta_{4,i} = a_4\} = \\ = \big\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} \cap \big\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j=\overline{1,3}\big\} \cap \\ \cap \Big\{\omega\colon b_j = \ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,j), j=\overline{1,3}\Big\} \cap \{\omega\colon b_4 = x_{4,i}\} \cap \\ \cap \Big\{\omega\colon a_4 = \min\Big\{\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,1), x_{1,i}+a_1\Big\}\Big\}.$$

Тогда для второго множителя из правой части выражения (19) имеем:

$$\mathbf{P}\big(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap B_i\big) = \\ = \mathbf{P}\big(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \big\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} \cap B_{i-1}\big) = \\ = \delta_{b_4,x_{4,i}} \times \delta_{a_4,\min\left\{\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,1),x_{1,i}+a_1\right\}} \times \prod_{j=1}^{3} \delta_{b_j,\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,j)} \times \\ \times \mathbf{P}\big(\big\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j=\overline{1,3}\big\} \cap \big\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} \cap B_{i-1}\big). \quad (21)$$

И по аналогии со вторым множителем в выражении (20) преобразуем последний сомножитель правой части равенства (21):

$$\mathbf{P}\big(\big\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j=\overline{1,3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} \cap B_{i-1}\big) = \\ = \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}:\\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\,\varkappa_t=x^t,\\ t=\overline{0,i-1}}} P_0(\omega_0)\times P_1(\omega_0;\{\omega_1\})\times\ldots\times P_{i-1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\})\times \\ \times P_i(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1};\{(a_1,a_2,a_3)\})$$

и, учитывая выражение (16), получим

$$\mathbf{P}\big(\big\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j=\overline{1,3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\big\} \cap B_{i-1}\big) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i,\tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i}))\times \\ \times \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}:\\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\,\varkappa_t=x^t,\\ t=\overline{0,i-1}}} P_0(\omega_0)\times P_1(\omega_0;\{\omega_1\})\times\ldots\times P_{i-1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\}). \quad (22)$$

Подставляя выражение (22) в правую часть равенств (21), а затем выражения (21) и (20) в равенство (19), получим:

$$\mathbf{P}\Big(\{\omega\colon \eta_i=a,\xi_i=b\}\,\Big|B_i\Big)=$$
$$=\delta_{b_4,x_{4,i}}\times\delta_{a_4,\min\left\{\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,1),x_{1,i}+a_1\right\}}\times\prod_{j=1}^{3}\delta_{b_j,\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,j)}\times\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma_i,x_{3,i}))\times$$
$$\times\psi(a_2,x_{4,i},p_{\tilde{k}_i,\tilde{r}_i})\times\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma_i,x_{3,i}))\times$$
$$\times\sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\dots\omega_{i-1}\colon\\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t,\forall 0\leqslant t\leqslant i-1}}P_0(\omega_0)\times P_1(\omega_0;\{\omega_1\})\times\ldots\times P_{i-1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\})\times$$
$$\times\Bigg(\sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\dots\omega_{i-1}\colon\\ \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t,\forall 0\leqslant t\leqslant i-1}}P_0(\omega_0)\times P_1(\omega_0;\{\omega_1\})\times\ldots\times$$
$$\times P_{i-1}(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-2};\{\omega_{i-1}\})\Bigg)^{-1}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем требуемое равенство (9). □

### Очереди первичных требований

Рассмотрим случайную последовательность

$$\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\},$$

включающую в себя состояния $\varkappa_{1,i}$ и $\varkappa_{3,i}$ очередей $O_1$ и $O_3$ первичных требований в момент $\tau_i$. Приведем ниже несколько результатов, касающихся этой последовательности.

**Утверждение 1.** *Пусть $\Gamma_0=\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$ и $(\varkappa_{1,0},\varkappa_{3,0})=(x_{1,0},x_{3,0})\in\mathbb{Z}_+^2$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.*

Обозначим для $\gamma\in\Gamma$ и $(x_1,x_3)\in\mathbb{Z}_+^2$

$$Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)=\mathbf{P}(\Gamma_i=\gamma,\varkappa_{1,i}=x_1,\varkappa_{3,i}=x_3),\tag{23}$$

а также введем множество

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)},x_3)=\{\gamma\in\Gamma\colon h(\gamma,x_3)=\Gamma^{(k,r)}\}.$$

Положим $r\ominus_k 1=r-1$ для $r=\overline{2,n_k}$ и $r\ominus_k 1=n_k$ при $r=1$, $k=\overline{0,d}$. Из определения (2) находим явный вид множества для различных $\Gamma^{(k,r)}$ и $x_3$:

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)},x_3)=\begin{cases}\{\Gamma^{(k_1,r_1)},\Gamma^{(0,r\ominus_0 1)}\}, & \text{если } (k=0\ \&\ x_3\leqslant L);\\ \{\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)},\Gamma^{(0,r_2)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{I}}\ \&\ x_3>L);\\ \{\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{O}}) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{N}});\\ \varnothing, & \text{если } (k=0\,\&\,x_3>L)\\ & \quad\text{или } (\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{I}}\,\&\,x_3\leqslant L),\end{cases}\tag{24}$$

где $k_1, r_1$ таковы, что $h_1(\Gamma^{(k_1,r_1)}) = r$, и $r_2$ таково, что $h_3(r_2) = \Gamma^{(k,r)}$.

Важным шагом при исследовании стационарного режима цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ является нахождение множества ее существенных состояний. Введем множества

$$S^1_{0,r} = \left\{(\Gamma^{(0,r)}, x_1, x_3)\colon\ (x_1, x_3) \in Z^2_+,\ x_3 > L - \max_{k=1,2,\ldots,d}\left\{\sum_{t=1}^{n_k} \ell(k,t,3)\right\}\right\},$$

для $1 \leqslant r \leqslant n_0$ и множества

$$S^1_{k,r} = \left\{(\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3)\colon\ (x_1, x_3) \in Z^2_+,\ x_3 > L - \sum_{t=1}^{r} \ell(k,t,3)\right\},$$

для $1 \leqslant k \leqslant d$, $1 \leqslant r \leqslant n_k$. Тогда верно следующее

**Утверждение 2.** *Множество существенных состояний марковской цепи* $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *имеет вид* $\left(\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant n_0} S^1_{0,r}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant d\\ 1\leqslant r\leqslant n_k}} S^1_{k,r}\right)$.

Пусть $k$ и $r$ таковы, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Введем частичные производящие функции

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3) = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) v_1^{w_1} v_3^{w_3},$$

и вспомогательные функции

$$q^{(1)}(k, r, v_1) = v_1^{-\ell(k,r,1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k,r)}) v_1^{w};$$

$$q^{(3)}(k, r, v_3) = v_3^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v_3^{w}.$$

В введенных обозначениях верна следующая

**Лемма 1.** *Пусть* $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$. *Тогда верно следующее рекуррентное соотношение:*

$$\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, w_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times$$

$$\times \left[ v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\mathrm{I}}) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(1 - v_1^{w_1+a-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}) \right] \times$$

$$\times \left[ v_3^{w_3} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\mathrm{III}}) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-w_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(1 - v_3^{w_3+a-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}) \right].$$

*Доказательство.* Пусть $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Учитывая соотношения (5) и вид условных распределений (9) для $\eta_i$ и $\xi_i$, $i \geqslant 0$, запишем по формуле повторного математического ожидания:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3) = \\
&\quad = E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{1,i+1}} I(\Gamma_{i+1}=\tilde{\gamma})] = \sum_{w_1=0}^{\infty}\sum_{w_3=0}^{\infty}\sum_{\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)},w_1,w_3)\times \\
&\quad \times E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{1,i+1}} I(\Gamma_{i+1}=\tilde{\gamma})|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}] = \\
&\quad = \sum_{w_1=0}^{\infty}\sum_{w_3=0}^{\infty}\sum_{\Gamma^{(k,r)}\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)},w_1,w_3)\times \\
&\quad \times E[v_1^{\max\{0,w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}} v_3^{\max\{0,w_3+\eta_{3,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\}}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}] = \\
&\quad = \sum_{w_1=0}^{\infty}\sum_{w_3=0}^{\infty}\sum_{\Gamma^{(k,r)}\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)},w_1,w_3)\times \\
&\quad \times E[v_1^{\max\{0,w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}]\times \\
&\quad \times E[v_3^{\max\{0,w_3+\eta_{3,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\}}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}]. \qquad (25)
\end{aligned}$$

В случае $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^{\mathrm{I}}$ очередь $O_1$ не обслуживается и, следовательно, $\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)=0$. Поэтому $\max\{0,w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\} = w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)$. Аналогично при $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^{\mathrm{III}}$ очередь $O_3$ не обслуживается и $\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)=0$. Откуда получаем, что $\max\{0,w_3+\eta_{3,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\} = w_3+\eta_{3,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)$.

Рассмотрим подробнее случай $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\mathrm{I}}$:

$$\begin{aligned}
&E[v_1^{\max\{0,w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}] = \\
&\quad = E[v_1^{w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}]+ \\
&\quad + E[v_1^{\max\{0,w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}} - v_1^{w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}] = \\
&\quad = v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-w_1} \varphi_1(a,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(1-v_1^{w_1+a-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}), \qquad (26)
\end{aligned}$$

поскольку при $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ величина $\max\{0,w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}$ отличается от величины $w_1+\eta_{1,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)$ только при $0 \leqslant \eta_{1,i} < \ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-w_1$.

С помощью аналогичных рассуждений получим для $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\mathrm{III}}$:

$$\begin{aligned}
&E[v_3^{\max\{0,w_3+\eta_{3,i}-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\}}|\varkappa_{1,i}=w_1,\varkappa_{3,i}=w_3,\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)}] = \\
&\quad = v_3^{w_1} q^{(3)}(\tilde{k},\tilde{r},v_3) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-w_3} \varphi_3(a,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(1-v_3^{w_3+a-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}) \qquad (27)
\end{aligned}$$

и подставляя полученные выражения (26), (27) в выражение (25), получаем утверждение леммы. □

Из этой леммы следует существование величин $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v_1,v_3)$ хотя бы в некоторой окресности точки $(v_1,v_3)=(1,1)$, для $i>0$, $k=\overline{0;d}$, $r=\overline{1;n_k}$.

В работе [25] доказана ограниченность частичных производящих функций $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v_3) = E[v_3^{\varkappa_{3,i}} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)})]$ по $i \geqslant 0$ для всех $v_3 \in [1, 1+\varepsilon_3]$, при некотором $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ определено в (1). Причем заметим, что в наших обозначениях $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v_3) = \mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,1,v_3)$. Цель следующей леммы — доказать аналогичный результат для величин $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v_1,1)$, $i \geqslant 0$.

**Лемма 2.** *Если*

$$\min_{k=\overline{0,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1,$$

*то числовая последовательность* $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v,1); i \geqslant 0\}$ *ограничена при* $v \in [1, 1+\varepsilon_1]$, *для некоторого* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ *определено в* (1).

*Доказательство.* Введем случайные последовательности $\{\varkappa_1^{(1)}(i); i \geqslant 0\}$ и $\{\varkappa_1^{(2)}(i); i \geqslant 0\}$ следующим образом. Положим для $i = 0$: $\varkappa_1^{(1)}(0) = 0$ и $\varkappa_1^{(2)}(0) = \varkappa_{1,0}$. Далее введем рекуррентные соотношения:

$$\varkappa_1^{(1)}(i+1) = \begin{cases} \max\{0, \varkappa_1^{(1)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1,n_k}; \\ \varkappa_1^{(1)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1,n_0}; \end{cases}$$

$$\varkappa_1^{(2)}(i+1) = \begin{cases} \varkappa_1^{(2)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1,n_k}; \\ \max\{0, \varkappa_1^{(2)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1,n_0}. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\varkappa_{1,i}^{+} = \varkappa_1^{(1)}(i) + \varkappa_1^{(2)}(i)$ является мажорирующей для последовательности $\varkappa_{1,i}$, т.е. $\varkappa_{1,i}(\omega) \leqslant \varkappa_{1,i}^{+}(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Доказательство этого факта проводится по индукции и в данной статье его приводить не будем. Заметим только, что из него следует для $v \geqslant 1$ неравенство

$$E[v^{\varkappa_{1,i}}] \leqslant E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} v^{\varkappa_1^{(2)}(i)}]. \tag{28}$$

Наблюдение за вновь введенными величинами $\varkappa_1^{(1)}(i)$ и $\varkappa_1^{(2)}(i)$ будем осуществлять в случайные моменты времени $\theta_i^{(1)}$ и $\theta_i^{(2)}$, соответственно, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\theta_0^{(1)} = 0; \quad \theta_{i+1}^{(1)} = \theta_i^{(1)} + \min\{s > 0 \colon \Gamma_{\theta_i^{(1)}+s} = \Gamma^{(k,n_k)}, k > 0\}; \\ &\theta_0^{(2)} = 0; \quad \theta_{i+1}^{(2)} = \theta_i^{(2)} + \min\{s > 0 \colon \Gamma_{\theta_i^{(2)}+s} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1,n_0}\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Также нам понадобятся следующие обозначения:

$$\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)} = \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}), \quad \hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)} = \varkappa_1^{(2)}(\theta_i^{(2)}). \tag{30}$$

Пусть $k > 0$, $r \in \{2, 3, \ldots, n_k\}$. В веденных обозначениях рассмотрим выражение для $E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)})]$:

$$\begin{aligned} &E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)})] = \\ &\quad = \sum_{w_1 \geqslant 0} \sum_{w_3 \geqslant 0} \sum_{\gamma \in \Gamma} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma)] = \\ &\quad = \sum_{w_1 \geqslant 0} \sum_{w_3 \geqslant 0} E[v^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(k,r,1)} I(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)})] + \widetilde{C}_1 = \\ &\quad = \sum_{w_1 \geqslant 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)}) q^{(1)}(k,r,v) + \widetilde{C}_1 = \\ &\quad = q^{(1)}(k,r,v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)})] + \widetilde{C}_1. \end{aligned}$$

И далее по индукции:

$$E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+n_k-1)}I(\Gamma_{i+n_k-1}=\Gamma^{(k,n_k)})]=\prod_{r=2}^{n_k}q^{(1)}(k,r,v)E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)}I(\Gamma_i=\Gamma^{(k,1)})].$$

Для $w_1,w_3\in Z_+,\ \gamma,\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma,\ C\subset[0,+\infty)$ введем множества

$$A_i^{(1)}(w_1,w_3,\gamma)=\{\omega\colon \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)})=w_1;\varkappa_{3,\theta_i^{(1)}}=w_3,\Gamma_{\theta_i^{(1)}}=\gamma\};$$
$$A_i^{(1)}(w_1,C,\gamma)=\bigcup_{w_3\in C}A_i^{(1)}(w_1,w_3,\gamma);\quad B_i^{(1)}(\gamma)=\{\omega\colon \Gamma_{\theta_i^{(1)}}=\gamma\};$$
$$C_i^{(1)}(\gamma_1,w_1,w_3,\gamma_2)=B_{i+1}^{(1)}(\gamma_1)\cap A_i^{(1)}(w_1,w_3,\gamma_2).$$

Пусть $\tilde{k}>0$. Тогда

$$E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}}=\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})]=$$
$$=E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}))]=E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\theta_{i+1}^{(1)})}I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}))]=$$
$$=\prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}}q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)}I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}))]+\widetilde{C}_1=$$
$$=\prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}}q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)\sum_{\substack{w_1\geqslant 0,\\ w_3\leqslant L}}\sum_{k=1}^{d}E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)}I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})},w_1,w_3,\Gamma^{(k,n_k)}))]+$$
$$+\prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}}q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)\sum_{\substack{w_1\geqslant 0,\\ w_3>L}}E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)}I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})},w_1,w_3,\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}))]+\widetilde{C}_1,$$

где мы обозначили для краткости $\tau=\theta_{i+1}^{(1)}-n_{\tilde{k}}+1$. Далее поскольку

$$\varkappa_1^{(1)}(\tau)=\max\{0;\varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)})+\eta_{1,\tau}-\ell(1,\tilde{k},1)\},$$

то продолжим цепочку рассуждений:

$$E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}}=\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})]=\prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}}q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)\sum_{\substack{w_1\geqslant 0,\\ w_3\leqslant L}}\sum_{k=1}^{d}v^{w_1}v^{-\ell(1,\tilde{k},1)}\times$$
$$\times E[v^{\eta_{1,\tau}}I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})},w_1,w_3,\Gamma^{(k,n_k)}))]+\prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}}q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)\times$$
$$\times\sum_{\substack{w_1\geqslant 0,\\ w_3>L}}v^{w_1}v^{-\ell(1,\tilde{k},1)}E[v^{\eta_{1,\tau}}I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})},w_1,w_3,\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}))]+\widetilde{C}_2=$$
$$=Q_1(v,\tilde{k})\Bigg(\sum_{w_1\geqslant 0}\sum_{k=1}^{d}v^{w_1}\mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})},w_1,[0;L],\Gamma^{(k,n_k)}))+$$
$$+\sum_{w_1\geqslant 0}v^{w_1}\mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})},w_1,(L;\infty),\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}))\Bigg)+\widetilde{C}_2,\quad(31)$$

где $Q_1(v,\tilde{k}) = \prod_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)$. Просуммируем по $\tilde{k}$ получившийся в (31) результат:

$$\sum_{\tilde{k}=1}^{d} E[v^{\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i+1}} I(\Gamma_{\theta^{(1)}_{i+1}} = \Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})] = E[v^{\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i+1}}] =$$

$$= \sum_{\tilde{k}=1}^{d} Q_1(v,\tilde{k}) \Bigg( \sum_{w_1 \geqslant 0} \sum_{k=1}^{d} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, w_1, [0;L], \Gamma^{(k,n_k)})) +$$

$$+ \sum_{w_1 \geqslant 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, w_1, (L;\infty), \Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})) \Bigg) + \widetilde{C}_3 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tilde{k}=\overline{1;d}} \{Q_1(v,\tilde{k})\} \sum_{w_1 \geqslant 0} v^{w_1} \Bigg( \sum_{\tilde{k}=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, w_1, [0;L], \Gamma^{(k,n_k)})) +$$

$$+ \sum_{\tilde{k}=1}^{d} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, w_1, (L;\infty), \Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})) \Bigg) + \widetilde{C}_3 =$$

$$= \max_{\tilde{k}=\overline{1;d}} \{Q_1(v,\tilde{k})\} \sum_{w_1 \geqslant 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i} = w_1) + \widetilde{C}_3 = \max_{\tilde{k}=\overline{1;d}} \{Q_1(v,\tilde{k})\} E[v^{\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i}}] + \widetilde{C}_3.$$

Для $\hat{\varkappa}^{(2)}_{1,i}$ можно провести похожие рассуждения и в итоге получить оценки:

$$E[v^{\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i+1}}] \leqslant \max_{\tilde{k}=\overline{1;d}} \{Q_1(v,\tilde{k})\} E[v^{\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i}}] + \widetilde{C}_3; \tag{32}$$

$$E[v^{\hat{\varkappa}^{(2)}_{1,i+n_0}}] \leqslant Q_1(v,0) E[v^{\hat{\varkappa}^{(2)}_{1,i}}] + \widetilde{C}_4, \tag{33}$$

где $r = \overline{1,n_0}$. Для $k = \overline{0;d}$ верны равенства $Q_1(1,k) = 1$. Предположив выполненным условие $\min_{k=\overline{0,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1$, получим, что величины

$$(Q_1(v,k))'\Big|_{v_1=1} = \left( \prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k,r,1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k,r)}) v^w \right)'\Bigg|_{v_1=1} =$$

$$= \left( \prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k,r,1)} \exp(\lambda_1 T^{(k,r)}(f_1(v)-1)) \right)'\Bigg|_{v_1=1} =$$

$$= \left( v^{-\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,1)} \exp(\lambda_1 (f_1(v)-1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}) \right)'\Bigg|_{v_1=1} =$$

$$= \lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,1), \tag{34}$$

определяющие знак производной, отрицательны. Поэтому $|Q_1(v,k)| < 1$ для всех $k = \overline{1;d}$ хотя бы в некоторой правой окрестности $1 \leqslant v \leqslant (1+\varepsilon_1)^{1/2}$ точки $v = 1$. Этот факт, в свою очередь, обеспечивает ограниченность в этой же окрестности величин $E[v^{\hat{\varkappa}^{(1)}_{1,i}}]$ и $E[v^{\hat{\varkappa}^{(2)}_{1,i}}]$ равномерно по $i$.

Далее из определений (29) и (30) следует, что для любого $i \geqslant 0$ существуют такие $j_1$ и $j_2$, что

$$\varkappa_1^{(1)}(i) \leqslant \hat{\varkappa}^{(1)}_{1,j_1}, \quad \varkappa_1^{(2)}(i) \leqslant \hat{\varkappa}^{(2)}_{1,j_2}.$$

Следовательно, из (28) и неравенства Коши-Буняковского заключаем, что

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v,1) \leqslant \left(E[v^{2\varkappa_1^{(1)}(i)}]E[v^{2\varkappa_1^{(2)}(i)}]\right)^{1/2} \leqslant \left(E[v^{2\hat{\varkappa}_{1,j_1}^{(1)}}]E[v^{2\hat{\varkappa}_{1,j_2}^{(2)}}]\right)^{1/2}$$

и, значит, для любого $v$ хотя бы из окрестности $[1, 1+\varepsilon_1]$ исходная последовательность $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v,1); i \geqslant 0\}$ ограничена равномерно по $i$.

□

Основным результатом работы является достаточное условие существования стационарного режима последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имела стационарное распределение $Q_1(\gamma, x_1, x_3)$, $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$, достаточно выполнения неравенств*

$$\min_{k=\overline{0,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \quad \min_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \tag{35}$$

*Доказательство.* Предположим обратное, а именно, что при выполнении условия (35) марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ не имеет стационарного распределения. Тогда для любого состояния $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$ и независимо от начального распределения $\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,0} = x_1, \varkappa_{3,0} = x_3)$, $(\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$, имеют место предельные равенства

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2. \tag{36}$$

Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть все возможные случаи, предполагая апериодичность рассматриваемой цепи (см. рассуждения [27, гл. 3, § 3-4]):

1. все состояния цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ невозвратные, тогда предельные соотношения выполняются в силу [27, с. 541, лемма 2];

2. существует хотя бы одно возвратное состояние, тогда все состояния возвратные (поскольку все состояния сообщающиеся); и пусть все состояния нулевые, тогда предельное соотношение также выполняется [27, с. 541, лемма 3];

3. все состояния возвратные и существует хотя бы одно положительное, тогда все состояния положительные и пределы $\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) > 0$ являются стационарными вероятностями ([27, с. 549, теорема 1]), что противоречит предположению.

Для периодической цепи приведенные рассуждения достаточно провести для циклических подклассов.

Выберем начальное распределение так, что при некоторых $v_1 > 1$, $v_3 > 1$ будут выполнены неравенства $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k,r,v_1,1) < \infty$, $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k,r,1,v_3) < \infty$ для всех $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Это ограничение, в силу леммы (2) и результатов работы [25], обеспечивает при любом конечном $i \geqslant 0$ существование функций

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v_1,1), \quad \mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,1,v_3) \tag{37}$$

$$\frac{d}{dv_1}\left[\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v_1,1)\right], \quad \frac{d}{dv_3}\left[\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,1,v_3)\right] \tag{38}$$

по крайней мере в некоторой окрестности точек $v_1 = 1$, $v_3 = 1$.

В силу равенств (36) для любого натурального $N$ найдется некоторое число $\mathfrak{I}$, что для всех $i > \mathfrak{I}$ будет выполнено условие

$$1 > (1+N)\sum_{x_1=0}^{N}\sum_{x_3=0}^{N}\sum_{\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma}\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$$

и, значит, $1 > (1+N)\sum_{x_1=0}^{N}\sum_{x_3=0}^{N}\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$. Тогда

$$\begin{gathered}
E[\varkappa_{3,i} + \varkappa_{1,i}] = \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}(x_1+x_3)\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geqslant \\
\geqslant \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=N+1}^{\infty}x_3\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}x_1\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geqslant \\
\geqslant \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=N+1}^{\infty}(N+1)\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}(N+1)\times \\
\times \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geqslant (N+1)\Big[\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=N+1}^{\infty}\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \\
+ \sum_{x_1=N+1}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)\Big] \geqslant (N+1)(1-\mathbf{P}(\varkappa_{1,i} \leqslant N, \varkappa_{3,i} \leqslant N)) \geqslant \\
\geqslant (N+1)\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = N.
\end{gathered}$$

Следовательно, $E[\varkappa_{3,i} + \varkappa_{1,i}]$ неограниченно возрастает при $i \to \infty$.

Другое рассуждение, однако, приводит к противоположному результату. Действительно, поскольку последовательность $\{E[\varkappa_{3,i}]; i \geqslant 0\}$ ограничена, и нетрудно проверить, что

$$E[\varkappa_{1,i}] = \sum_{\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma}\frac{d}{dv}\left(\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v_1,1)\right)\Big|_{v_1=1},$$

где величина справа в силу интегральной формулы Коши и леммы 2 равномерно по $i$ ограничена некоторой постоянной величиной. Поэтому принятое предположение не будет справедливым. Доказательство этим завершается. □

### Заключение

В работе рассмотрен тандем систем массового обслуживания. При помощи кибернетического подхода было построено вероятное пространство и заданы случайные величины и элементы, описывающие тандем. Была исследована стохастическая последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$, состоящая из состояния обслуживающего устройства и длин очередей первичных требований. Проведена классификация ее состояний и выделено множество существенных состояний. При помощи рекуррентных соотношений для вероятностей состояний и частичных производящих функций было найдено достаточное условие существования стационарного распределения цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$.

# Список литературы


[1] Haight F.A. Mathematical Theories of Traffic Flow. New York: Academic Press, 1963. 242 p.

[2] Drew D.R. Traffic Flow Theory and Control. New York: McGraw-Hill, 1968. 467 p.

[3] Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. Москва: Транспорт. 1983. 248 с.

[4] Bartlett M.S., The Spectral Analysis of Point Processes // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). Vol. 25. № 2. 1963. Pp. 264–296.

[5] Кокс Д.Р., П. Льюис. Статистический анализ последовательности событий. М.: Мир, 1969. 312 с.

[6] D.L. Jagerman, B. Melamed, W. Willinger Stochastic modeling of traffic process // In: Frontiers in queuing: models and applications in science and engineering / edited by J.H. Dshalalov. Boca Raton: CRC Press. 1997. Pp. 271–320.

[7] Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., Rachinskaya M.A. About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway // Proceedings of 36 International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2010). Moscow. 2010. Pp. 86–93.

[8] Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density // Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks». Minsk: BSU-RIVH. 2011. № 21. Pp. 82–87.

[9] Fedotkin M., Rachinskaya M. Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // Distributed Computer and Communication Networks. Springer International Publishing, «Communications in Computer and Information Science» series. 2014. V. 279. Pp. 154–168.

[10] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Estimation of transport systems capacity // Traffic and Granular Flow '11. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 2013. Pp. 63–77.

[11] Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды Московского физико-технического института (государственного университета). 2010. Т. 2. № 4. С. 6–21.

[12] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // Methodology and Computing in Applied Probability, Springer. 2013. V. 15. № 4. Pp. 935–950.

[13] Reich E. Waiting times when queues are in tandem // The Annals of Mathematical Statistics. 1957. V.28. №3. Pp. 768-773.

[14] Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // Performance Evaluation 51. 2003. Pp. 269–288.

[15] Gnedenko B.W., Konig D. Handbuch der Bedienungstheorie. Berlin: Akademie Verlag. 1983.

[16] Perros H.G. Queuing networks with blocking, in: Exact and Approximate Solutions. New York: Oxford University Press, 1994. 358 p.

[17] Gomez-Corral A. A tandem queue with blocking and Markovian arrival process // Queuing Systems 41. 2002. Pp. 343–370.

[18] Gomez-Corral A. On a tandem G-network with blocking // Advances in Applied Probability 34 (3). 2002. Pp. 626–661.

[19] Gomez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // Operations Research Letters 30. 2002. Pp. 360–374.

[20] Klimenok V.I., Breuer L., Tsarenkov G.V., Dudin A.N. The $BMAP/G/1/N \to PH/1/M$ system with losses // Performance Evaluation 61. 2005. Pp. 17–40.

[21] Клименок В.И., Тарамин О.С. Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами // Автоматика и телемеханика. 2010. № 1. С. 3–17 .

[22] Клименок В.И., Савко Р.Ч. Двухфазная система с повторными попытками и нетерпеливостью запросов // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 78–93.

[23] Zorine A.V. Stability of a tandem of queuing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 84. Pp. 173–188.

[24] Zorine A.V. Study of Queues' Sizes in Tandem Intersections under Cyclic Control in Random Environment // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. 2013. V. 356. Pp. 206-215.

[25] Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017. Выпуск 50. С. 47–55.

[26] Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Выпуск 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 7–38.

[27] Ширяев А.Н. Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1. М.: Наука, 2007. 552 с.