Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

УДК 519.21

Кочеганов В.М., Зорин А.В.

Вероятностная модель тандема управляющих систем обслуживания по циклическому алгоритму с продлением

Нижний Новгород, 2016

Введение

Теория массового обслуживания является прикладной дисциплиной, использующей методы теории вероятностей и случайных процессов для изучения математических моделей многих реальных технических комплексов, телекоммуникационных систем и организаций обслуживания потребителей. Первичными понятиями теории массового обслуживания являются заявка (требование, потребитель, вызов), очередь (бункер, накопитель), обслуживание требований, обслуживающее устройство. Отличительной особенностью моделей теории массового обслуживания является как случайный характер поступления требований, так и случайные длительности ожидания в очереди и актов обслуживания. Особую роль играет изучение систем обслуживания, в которых обслуживающее устройство несет управляющую функцию.

Первые работы по теории массового обслуживания принадлежат А.К. Эрлангу, [1, 2], и Ф. Поллачеку, [3], в которых методами теории вероятностей из физических соображений были составлены и решены дифференциальные и интегральные уравнения для функции распределения времени ожидания и числа занятых линий на телефонной станции. Становлением и расцветом в 20-м веке теория массового обслуживания обязана трудам крупных отечественных математиков А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, Б.В. Гнеденко, Ю.В. Прохорова, А.А. Боровкова, И.Н. Коваленко, Г.П. Климова, А.Д. Соловьева, Г.П. Башарина, Б.А. Севастьянова, Ю.К. Беляева, а также зарубежных ученых Л. Такача, Т. Саати, Д.Р. Кокса, У.Д. Смита, Л. Клейнрока, Дж.Ф. Кингмэна, Д.Дж. Кендалла, М.С. Бартлетта и др. Классические методы построения моделей системы обслуживания и фундаментальные результаты анализа широко представлены в монографиях [4–11].

В настоящее время известны достаточно сложные технические системы, в которых требования неоднородны и потоки требований разных типов оказываются конфликтными. Конфликтность означает, что в каждый момент времени могут обслуживаться требования не более чем из одного потока. Примерами таких систем являются пересечение транспортных магистралей — перекрестки, взлетно-посадочные комплексы в аэропортах, локальные вычислительные сети и сети передачи данных. В конфликтных системах обслуживания обслуживающее устройство с необходимостью выполняет функцию управления потоками. В существующей литературе алгоритмы управления конфликтными потоками делятся на два типа: независящие от состояния системы [12, 13] и зависящие от нее [14–17]. В частности, в работе Ю.И. Неймарка и М.А. Федоткина ([13]) строится модель перекрестка, для которого длительности сигналов светофора фиксированы, и находятся вероятностные характеристики стационарного режима. В работе [14] авторы изучают алгоритм, учитывающий информацию о количестве машин в очередях в момент принятия решения. Обобщение на случай произвольного числа конфликтных потоков впервые было осуществлено в [18]. В этой работе рассматривается система обслуживания с произвольным конечным числом пуассоновских входных потоков и найдены оценки для средней задержки заявки в системе, а также оценки оптимальных параметров алгоритма управления.

В связи со стремительным ростом числа машин в современных городах, все больший интерес стала представлять теория потоков транспортных средств. Результаты ранних исследований по этой тематике собраны, например, в книгах [19–21]. В этих монографиях потоки машин моделируются с помощью традиционных стохастических потоков событий, весьма полно изученных в классической теории массового обслуживания. Однако классические модели не удается использовать для адекватного описания реальных потоков машин [23]. В работах [22,24–30] предлагается учитывать не только вероятностные свойства последовательности моментов пересечения машинами так называемой виртуальной стоп-линии, но и определять свойства случайных конфигураций автомобилей на дороге. В указанных работах изучается возникновение так называемых пачек машин. Каждая пачка состоит из медленной головной машины и ожидающих возможности обгона машин за ней. Динамика длины пачки определяется возможностью обгона машинами из хвоста всей пачки. Другая динамика, обусловленная возможностью съезда машин с трассы, рассматривается в [31–33]. Основным объектом изучения в этих работах является плотность потока машин как функция от расстояния, на основе которой делаются выводы о пропускной способности перекрестков.

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания на одном устройстве поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. Одной из первых работ, посвященная тандемам систем массового обслуживания, является работа [34]. В ней изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлением заявок в систему и времени обслуживания независимы и имею экпоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора.

Основные результаты теории тандемов в случае простейших стационарных входных потоков и экспоненциального времени обслуживания широко представлены, например, в работах [35–38]. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены в [39–41]. Более общие модели включают в себя так называемые BMAP (Batch Markovian Arrival Process) входные потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Такие потоки рассмотрены, например, в работах [42–46], где проведены аналитические рассчеты условий стационарности и изучено поведение некоторых характеристик обслуживания для некоторых частных видов входных потоков и распределений времени обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями. Модель последовательных перекрестков с немгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах А.В. Зорина ([47,49,50]). В них динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернулиевской случайной величиной: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью $0 < p < 1$ успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью $1-p$ остается «между» ними.

Целью настоящей работы является расширение тандемных моделей для задач исследования транспортных сетей.

1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1). Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени.

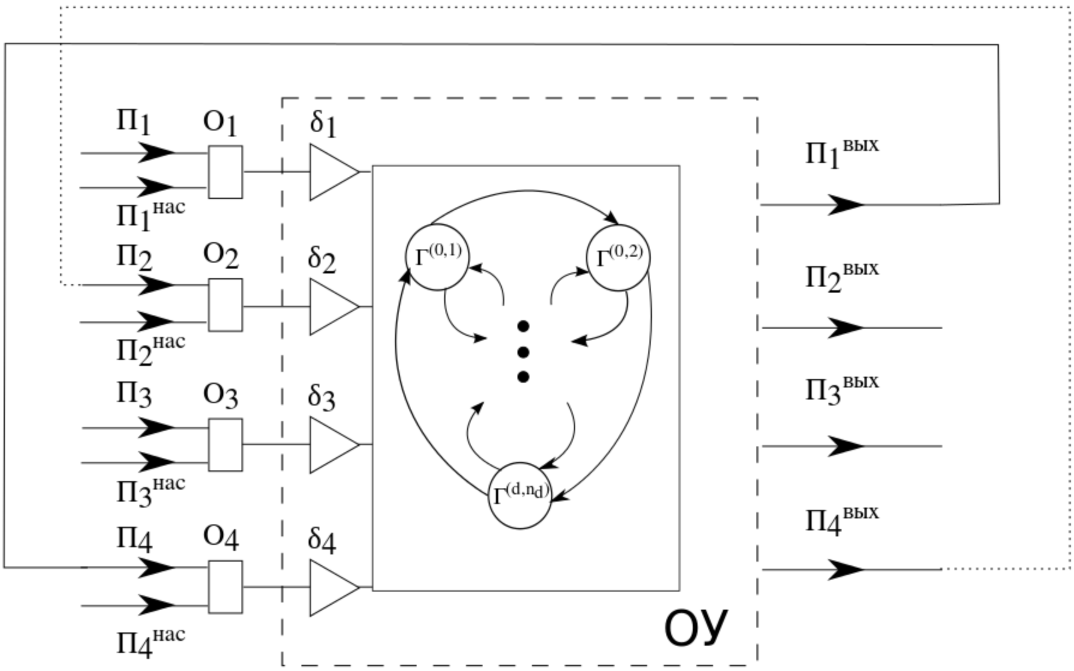

Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu, \quad j \in \{1, 3\}, \tag{1.1}$$

которая предполагается аналитической при любом $z \in \mathbb{C}$ таком, что $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя на выходе поток Π_4. Обслуженные требования потока Π_4 в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_2. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$ с заданными натуральными числами $d, n_0, n_1, \ldots, n_d$. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Введем множества Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{I}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{II}}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{III}}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{IV}}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4. Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^1\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{III}}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma^{\mathrm{II}}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{\mathrm{III}} \cup \Gamma^{\mathrm{IV}}$.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)}\colon r = \overline{1, n_k}\}$ будем называть k-м циклом, $k = \overline{1, d}$ (Рис. 2). Состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = \overline{1, n_0}$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r = \overline{1, n_k - 1}$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = \overline{0, d}$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^{O} выходных, C_k^{I} входных и $C_k^{\mathrm{N}} = C_k \setminus (C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{I}})$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$ того же цикла C_k. При $\Gamma^{(k,r)}$ принадлежащем множеству C_k^{O} прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L. В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L, новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}}$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L, где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^{\mathrm{I}}$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\bigcup\limits_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}}$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^{\mathrm{O}} \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^{\mathrm{I}} \subset {}^3\Gamma$. Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, то есть можем положить $h_2(r) = r \oplus_0 1$.

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотноше-

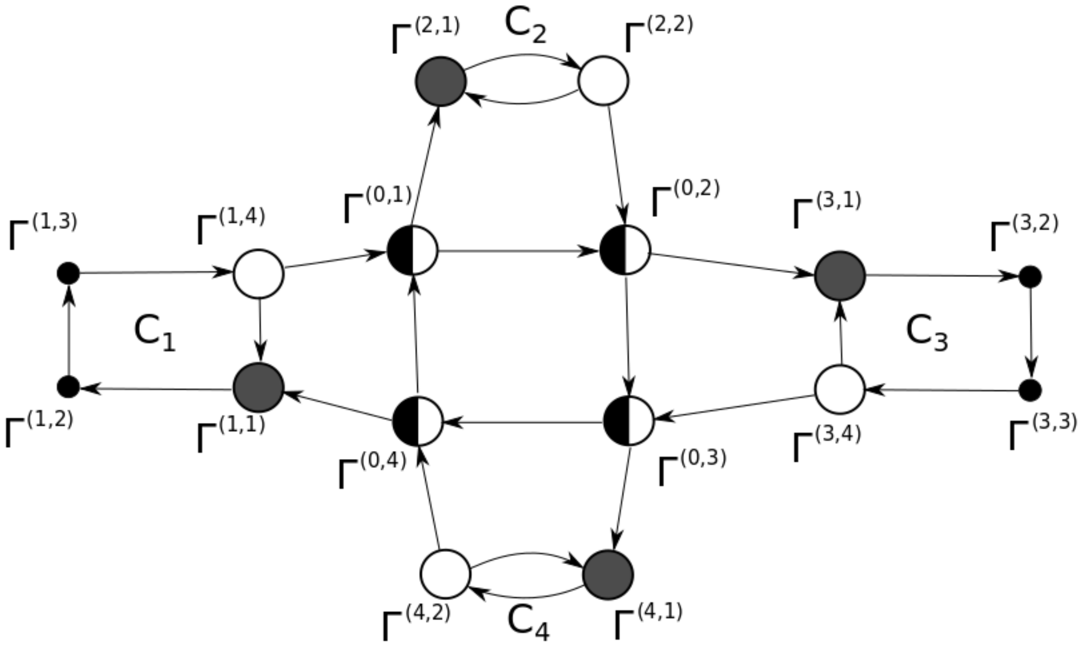

Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, Большие черные вершины — входные, небольшие черные — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

нием:

$$h(\Gamma^{(k,r)},y)=\begin{cases}\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)}\in C_k\setminus C_k^{\mathrm{O}}) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{O}} \ \&\ y>L);\\ \Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)}\in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y\leqslant L;\\ \Gamma^{(0,r\oplus_0 1)}, & \text{если } k=0 \text{ и } y\leqslant L;\\ h_3(r), & \text{если } k=0 \text{ и } y>L.\end{cases} \tag{1.2}$$

Рассмотрим введеные обозначения на примере рис. 2. Входными состояниями обслуживающего устройства являются $\Gamma^{(1,1)}\in C_1^{\mathrm{I}}$, $\Gamma^{(2,1)}\in C_2^{\mathrm{I}}$, $\Gamma^{(3,1)}\in C_3^{\mathrm{I}}$ и $\Gamma^{(4,1)}\in C_4^{\mathrm{I}}$, выходные состояния — $\Gamma^{(1,4)}\in C_1^{\mathrm{O}}$, $\Gamma^{(2,2)}\in C_2^{\mathrm{O}}$, $\Gamma^{(3,4)}\in C_3^{\mathrm{O}}$ и $\Gamma^{(4,2)}\in C_4^{\mathrm{O}}$, нейтральные состояния — $\Gamma^{(1,2)},\Gamma^{(1,3)}\in C_1^{\mathrm{N}}$ и $\Gamma^{(3,2)},\Gamma^{(3,3)}\in C_3^{\mathrm{N}}$. Состояния продления на графе представлены вершинами $\Gamma^{(0,1)}$, $\Gamma^{(0,2)}$, $\Gamma^{(0,3)}$ и $\Gamma^{(0,4)}$. Далее, отображение $h_1(\cdot)$ на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние $\Gamma^{(1,4)}$ в число 1 — номер состояния продления $\Gamma^{(0,1)}$, то есть $h_1(\Gamma^{(1,4)})=1$. Аналогично, например, $h_2(1)=2$ и $h_2(3)=4$. Примером отображения $h_3(\cdot)$ является $h_3(2)=\Gamma^{(3,1)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1,4}$, определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j = \overline{1,3}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1,3}$, будет содержать неслучайное число $\ell(k,r,j)$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$. Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in \mathbb{Z}_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1 - p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней средой,

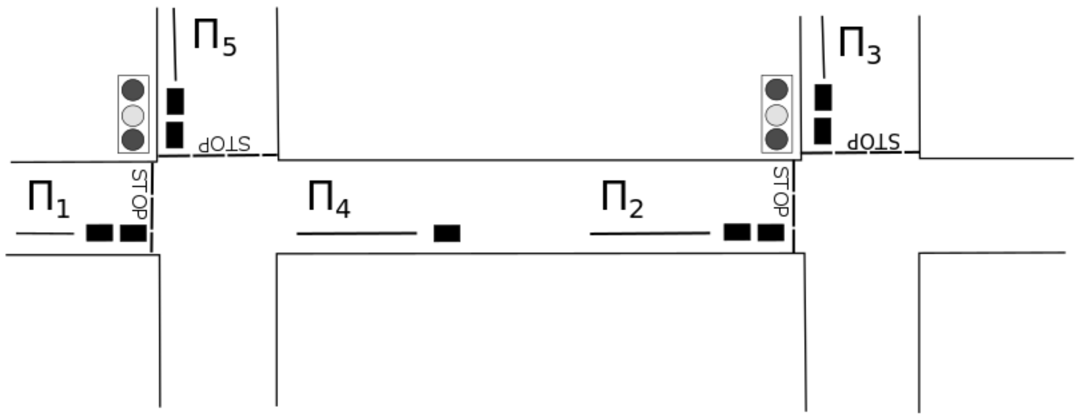

Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1, Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1, проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью ($p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\widetilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в течение времени $\widetilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_3 (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\widetilde{T}^{(2,1)}$, $\widetilde{T}^{(2,2)}$ и $\widetilde{T}^{(2,3)}$.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1–го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2–го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина s). Здесь T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определнности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4. За начальное состояние объединенной системы примем $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, то есть первый перекресток находится в состоянии $g_{1,1}$, второй — в состоянии $g_{2,1}$, и оба

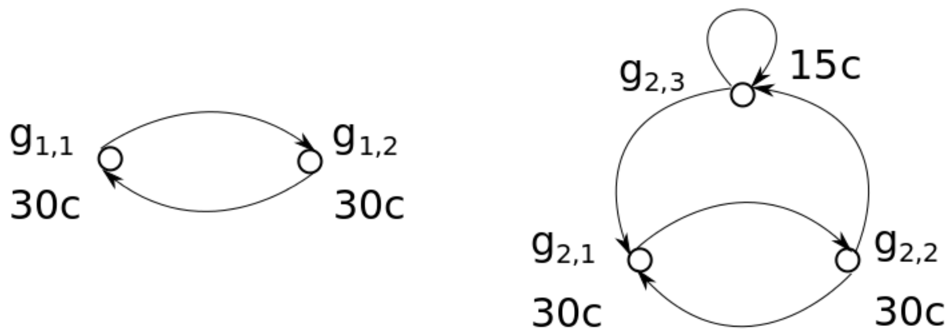

Рис. 4. Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами $s = 0$ и $t = 0$). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$. Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние $g_{2,1}$, так и в состояние продления $g_{2,3}$. Таким образом следущим состоянием тандема будет либо опять $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, либо $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следущий список всех возможных состояний системы:

$$
\begin{aligned}
&(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(1,1)}, && (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(1,2)}, && (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,1)}, \\
&(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,2)}, && (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,3)}, && (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,4)}, \\
&(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(4,1)}, && (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(4,2)}, && (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(4,3)}, \\
&(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(4,4)}, && (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,5)}, && (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(3,1)}, \\
&(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(3,2)}, && (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(2,1)}, && (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(2,2)}, \\
&(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(2,3)}, && (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(2,4)}.
\end{aligned}
$$

В соответсвии с приведенными выше обозначениями, множества C_1, C_2, C_3, C_4, а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут $C_1^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(1,1)}\}$, $C_2^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(2,1)}\}$, $C_3^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(3,1)}\}$ и $C_4^{\mathrm{I}} = \{\Gamma^{(4,1)}\}$. Множествами выходных состояний будут $C_1^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(1,2)}\}$, $C_2^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(2,4)}\}$, $C_3^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(3,2)}\}$ и $C_4^{\mathrm{O}} = \{\Gamma^{(4,4)}\}$. Функции $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ и $h_3(\cdot)$ задаются поточечно:

$$
h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,
$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4 \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)} \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [49]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\ldots$ моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i, $i \geqslant 1$, из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — в момент времени τ_0, количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; $j = \overline{1,4}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \tag{2.1}$$

где отображение $h(\cdot,\cdot)$ определено в (1.2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot,\cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \qquad \text{где } k \text{ и } r \text{ таковы, что } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{2.2}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1,2,3\},$$

то из выражения (2.2) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{2.3}$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1) следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \tag{2.4}$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geqslant 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_i)$, где $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot,\cdot)$ и $\varphi_3(\cdot,\cdot)$ из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где $f_j(z)$ определены выражением (1.1), $j \in \{1,3\}$. Функция $\varphi_j(\nu,t)$ по своему смыслу есть вероятность поступления $\nu = 0,\ 1,\ \ldots$ требований по потоку Π_j за время $t \geqslant 0$.

Положим $\varphi_j(\nu,t)$ равной нулю при $\nu<0$. Функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k;y,u)=C_y^k u^k(1-u)^{y-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k;y,u)$ есть вероятность поступления k требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит y требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u=p_{k,r}$. При нарушении условия $0\leqslant k\leqslant y$ положим $\psi(k;y,u)$ равной нулю.

Пусть $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{Z}_+^4$ и $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\nu_i=(\Gamma^{(k,r)};x)$ вероятность $\varphi(a,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i}=a_1$, $\eta_{2,i}=a_2$, $\eta_{3,i}=a_3$, $\eta_{4,i}=a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\times\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}})\times\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\times\delta_{a_4,\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}},\tag{2.5}$$

где $\tilde{k}$ и $\tilde{r}$ таковы, что $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}=h(\Gamma^{(k,r)},x_3)$ и $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Пусть $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i}=b_1$, $\xi_{2,i}=b_2$, $\xi_{3,i}=b_3$, $\xi_{4,i}=b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma^{(k,r)};x)$ метки ν_i есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\times\delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)}\times\delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\times\delta_{b_4,x_4}.\tag{2.6}$$

Из формулы (2.6) следует для $j\in\{1,2,3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i}=0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)},x_3)\notin{}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i}=\ell(\tilde{k},\tilde{r},j)$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}=h(\Gamma^{(k,r)},x_3)\in{}^j\Gamma$.

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором вероятностном пространстве.

Теорема 2.1. Пусть $\gamma_0=\Gamma^{(k_0,r_0)}\in\Gamma$ и $x^0=(x_{1,0},x_{2,0},x_{3,0},x_{4,0})\in\mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \overline{1,4}$, такие, что 1) имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x^0$; 2) выполняются соотношения (2.1), (2.3), (2.4); 3) для любых $a \in \mathbb{Z}_+^4$, $b \in \mathbb{Z}_+^4$ и любых $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t,r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \ldots$, таких, что $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Big) > 0$, условное распределение векторов η_i и ξ_i, $i \geqslant 0$, имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\middle|\, \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \tag{2.7}$$

где функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ определяются формулами (2.5) и (2.6).

Доказательство. Для построения вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ воспользуемся теоремой Ионеску Тулчи (см. [64], с. 348).

Введем последовательность измеримых пространств $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$,..., где $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$, $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i}) \in \Omega_i$, а σ-алгебра $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ есть множество всех подмножеств множества Ω_i. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x_{3,0})$. Зададим на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ вероятностную меру $P_0(\cdot)$ ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0,r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0,r_0)})). \tag{2.8}$$

Для $j \in \{1, 2, 3\}$ определим величины

$$\tilde{\Gamma}_0(\omega_0) = \gamma_0, \quad \tilde{\varkappa}_{j,0}(\omega_0) = x_{j,0}, \quad \tilde{\xi}_{j,0}(\omega_0) = l(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \tilde{\eta}_{j,0}(\omega_0) = \omega_{j,0}, \tag{2.9}$$

и

$$\tilde{\varkappa}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\xi}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\eta}_{4,0}(\omega_0) = \min\{\tilde{\xi}_{1,0}(\omega_0), \tilde{\varkappa}_{1,0}(\omega_0) + \tilde{\eta}_{1,0}(\omega_0)\}. \tag{2.10}$$

Теперь предположим, что заданы вероятностные меры $P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \cdot)$ на измеримом пространстве $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = \overline{0,n}$, и фиксирован набор $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$. Положим для $j \in \{1, 2, 3\}$ и $i = \overline{0,n}$

$$\tilde{\Gamma}_{i+1} = \Gamma^{(k^*,r^*)} = h(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\varkappa}_{3,i}), \quad \tilde{\varkappa}_{j,i+1} = \max\{0, \tilde{\varkappa}_{j,i} + \tilde{\eta}_{j,i} - \tilde{\xi}_{j,i}\}, \tag{2.11}$$

$$\tilde{\varkappa}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i} + \tilde{\eta}_{4,i} - \tilde{\eta}_{2,i}, \quad \tilde{\xi}_{j,i+1} = l(k^*, r^*, j), \quad \tilde{\eta}_{j,i+1} = \omega_{j,i+1} \tag{2.12}$$

$$\tilde{\eta}_{4,i+1} = \min\{\tilde{\xi}_{1,i+1}, \tilde{\varkappa}_{1,i+1} + \tilde{\eta}_{1,i+1}\}, \quad \tilde{\xi}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i+1}. \tag{2.13}$$

Заметим, что значения $\tilde{\Gamma}_{j,i}$, $\tilde{\xi}_{j,i}$, $\tilde{\eta}_{j,i}$, $\tilde{\varkappa}_{j,i}$, найденные по формулам (2.11)–(2.13) по наборам $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ и $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_i)$, $n \geqslant i$, совпадают. Определим на измеримом пространстве $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ вероятностную меру $P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \cdot)$ ее значениями на одноточечных множествах $\{(a_1, a_2, a_3)\}$, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3$:

$$P(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})) \times \psi(a_2, \tilde{\varkappa}_{4,n}, p_{k^*,r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})). \tag{2.14}$$

Тогда (в соответствии с теоремой Ионеску Тулчи) для декартова произведения $\Omega = \prod\limits_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ пространств элементарных исходов и произведения σ-алгебр $\mathcal{F} = \bigotimes\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ будет существовать единственная вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ такая, что для любого $i \geqslant 0$ верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_i \in A_i\}) = P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i), \tag{2.15}$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i) = \int\limits_{A_0} P_0(d\omega_0) \int\limits_{A_1} P_1(\omega_0; d\omega_1) \ldots \int\limits_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \tag{2.16}$$

для любого A_i из $\mathcal{F}_i$. Итак, вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ построено.

Теперь введем на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ следующие случайные величины и элементы, $i \geqslant 0$, $j = \overline{1,4}$:

$$\Gamma_i(\omega) = \tilde{\Gamma}_i, \quad \varkappa_{j,i}(\omega) = \tilde{\varkappa}_{j,i}, \quad \xi_{j,i}(\omega) = \tilde{\xi}_{j,i}, \quad \eta_{j,i}(\omega) = \tilde{\eta}_{j,i}.$$

и докажем, что они удовлетворяют условиям теоремы. Для сокращения записи зависимость от ω в обозначении случайных элементов и случайных величин далее будем опускать. Из формулы (2.11) следует, что случайные элементы Γ_i удовлетворяют соотношению (2.1), а случайные величины $\varkappa_{j,i}$ для $j \in \{1, 2, 3\}$ удовлетворяют соотношению (2.3). Из формулы (2.12) заключаем, что $\varkappa_{4,i}$ удовлетворяет соотношению (2.4). Далее, из условий (2.10) и (2.13) следует справедливость соотношений (2.4) для величин $\eta_{4,i}$ и $\xi_{4,i}$.

Перейдем к доказательству равенства (2.7). Для этого найдем явное выражение для условной вероятности $\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} | \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$. Пусть $\Gamma^{(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x^i)$. Запишем по определению условной вероятности, предполагая, что $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Big) > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^{i}\left\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\right\}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right)\right)^{-1}. \quad (2.17)$$

Далее из соотношений (2.15), (2.16) и того факта, что значения Γ_i и $\varkappa_i$ зависят только от ω_0, ω_1 , ..., ω_{i-1}, но не от ω_i, (этот факт следует из формул (2.9) – (2.12)), получим выражение для второго сомножителя последнего выражения

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t=\overline{0,i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \quad (2.18)$$

Преобразуем множество $\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$, учитывая соотношения (2.9) – (2.13):

$$\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \left\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} = \left\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap$$
$$\cap \left\{\omega\colon \eta_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}\right\} \cap \left\{\omega\colon \xi_{j,i} = b_j, j = \overline{1,3}\right\} \cap \left\{\omega\colon \xi_{4,i} = b_4\right\} \cap \left\{\omega\colon \eta_{4,i} = a_4\right\} =$$
$$= \left\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \left\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}\right\} \cap \left\{\omega\colon b_j = \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j = \overline{1,3}\right\} \cap$$
$$\cap \left\{\omega\colon b_4 = x_{4,i}\right\} \cap \left\{\omega\colon a_4 = \min\left\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\right\}\right\}.$$

Тогда для второго множителя из правой части выражения (2.17) имеем:

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \left\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) =$$

$$= \delta_{b_4,x_{4,i}} \times \delta_{a_4,\min\left\{\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,1),x_{1,i}+a_1\right\}} \times \prod_{j=1}^{3} \delta_{b_j,\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,j)} \times$$

$$\times \mathbf{P}\Bigg(\left\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}\right\} \cap \left\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Bigg). \tag{2.19}$$

И по аналогии со вторым множителем в выражении (2.18) преобразуем последний сомножитель правой части равенства (2.19):

$$\mathbf{P}\Bigg(\left\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)},\, \varkappa_t = x^t, \\ t=\overline{0,i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times$$

$$\times P_i(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\})$$

и, учитывая выражение (2.14), получим

$$\mathbf{P}\Bigg(\left\{\omega\colon \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Bigg) =$$

$$= \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i,\tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)},\, \varkappa_t = x^t, \\ t=\overline{0,i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \tag{2.20}$$

Подставляя выражение (2.20) в правую часть равенств (2.19), а затем выражения (2.19) и (2.18) в равенство (2.17), получим:

$$\mathbf{P}\Bigg(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \Bigg| \bigcap_{t=0}^{i} \left\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\right\}\Bigg) =$$

$$= \delta_{b_4,x_{4,i}} \times \delta_{a_4,\min\left\{\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,1),x_{1,i}+a_1\right\}} \times \prod_{j=1}^{3} \delta_{b_j,\ell(\tilde{k}_i,\tilde{r}_i,j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times$$

$$\times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i,\tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times$$

$$\times \sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leqslant t \leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\substack{\omega_0,\omega_1,\ldots\omega_{i-1}\colon \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leqslant t \leqslant i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \ldots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \Bigg)^{-1}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем в точности требуемое равенство (2.7). □

Следствие 2.1. В условиях предыдущей теоремы верно равенство

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\middle|\, \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\middle|\, \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}\right). \quad (2.21)$$

Доказательство. Действительно, из формулы (2.7) следует, что вероятность, стоящая в левой части равенства (2.21), равна величине $\varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i)$, зависящей только от значения $(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x^i)$ пары $(\Gamma_i, \varkappa_i)$ и не зависящей от значений остальных пар $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0 \leqslant t \leqslant i-1}$.

Использовав формулу полной вероятности, получим для правой части равенства (2.21):

$$\mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\middle|\, \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}\right) = \\ = \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{\Gamma_t \in \Gamma, \varkappa_t \in Z_+^4} \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\middle|\, \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) \times \\ \times \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \\ \times \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{\Gamma_t \in \Gamma, \varkappa_t \in Z_+^4} \mathbf{P}\left(\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i).$$

Поскольку левая часть выражения (2.21) равна правой, то следствие доказано. □

Введем для y_0, y, $\tilde{y} \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$ функции

$$\widetilde{\psi}(k, r, y_0, y, \tilde{y}) = (1 - \delta_{\tilde{y},0})\psi(\tilde{y} + \ell(k, r, 2) - y, y_0, p_{k,r}) + \delta_{\tilde{y},0} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,2)-y} \psi(a, y_0, p_{k,r}),$$
$$\widetilde{\varphi}_1(k, r, t, y, \tilde{y}) = (1 - \delta_{\tilde{y},0})\varphi_1(\tilde{y} + \ell(k, r, 1) - y, t) + \delta_{\tilde{y},0} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,1)-y} \varphi_1(a, t),$$
$$\widetilde{\varphi}_3(k, r, t, y, \tilde{y}) = (1 - \delta_{\tilde{y},0})\varphi_3(\tilde{y} + \ell(k, r, 3) - y, t) + \delta_{\tilde{y},0} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,3)-y} \varphi_3(a, t). \quad (2.22)$$

причем k и r таковы, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$.

Следствие 2.2. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i})$, $i = 0,\ 1,\ \ldots$. Тогда в условиях теоремы 2.1 верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} \mid \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \widetilde{\psi}(k_{i+1}, r_{i+1}, x_{4,i}, x_{2,i}, x_{2,i+1}), \tag{2.23}$$

Доказательство. Запишем по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}| \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\})\times$$
$$\times\, \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}).$$

Поскольку для величин $\varkappa_{2,i+1}$, η_i и ξ_i история до момента времени τ_i значения не имеет (см. формулы (2.21) и (2.3)), то

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}| \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}|\{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\})\times$$
$$\times\, \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\})$$

и, учитывая формула (2.7), продолжим

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}| \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i)\zeta(b, k_i, r_i, x^i)\times$$
$$\times\, \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}).$$

Функциональная зависимость (2.3) позволяет упростить последнюю вероятность:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\}| \bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i)\zeta(b, k_i, r_i, x^i)\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}}.$$

Учтем явное выражение функций $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ из определений (2.5) и (2.6):

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1}=x_{2,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\times\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\times\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\times$$
$$\times\,\delta_{a_4,\min\{\ell(k_{i+1},r_{i+1},1),x_{1,i}+a_1\}}\times\delta_{b_1,\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)}\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\delta_{b_4,x_{4,i}}.\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}}$$

и перегруппируем множители:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1}=x_{2,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_2,b_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}}\times$$
$$\times\sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\times\sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\times$$
$$\times\sum_{a_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{a_4,\min\{\ell(k_{i+1},r_{i+1},1),x_{1,i}+a_1\}}\sum_{b_1\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_1,\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)}\sum_{b_3\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_3,\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)}\times\sum_{b_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_4,x_{4,i}}.$$

Поскольку все суммы кроме первой равны единице, то искомая вероятность упрощается следующим образом:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1}=x_{2,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_2,b_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-b_2\}}=$$
$$=\sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}.$$

В случае, когда $x_{2,i+1}$ больше 0, величина $\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}$ отлична от нуля только при $x_{2,i+1}=x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)$, то есть при $a_2=x_{2,i+1}-x_{2,i}+$ $+\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)$. В случае, когда $x_{2,i+1}$ равно 0, величина $\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}$ отлична от нуля только при $a_2\leqslant\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)-x_{2,i}$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{2,i+1}=x_{2,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\delta_{x_{2,i+1},\max\{0,x_{2,i}+a_2-\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)\}}=$$
$$=(1-\delta_{x_{2,i+1},0})\psi(x_{2,i+1}-x_{2,i}+\ell(k_{i+1},r_{i+1},2),x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})+$$

$$+\,\delta_{x_{2,i+1},0}\sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)-x_{2,i}}\psi(a,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})=\widetilde{\psi}(k_{i+1},r_{i+1},x_{4,i},x_{2,i},x_{2,i+1})$$

и равенство (2.23) доказано. $\square$

Следствие 2.3. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}=h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})$, $i=0,\,1,\,\ldots$. Тогда в условиях теоремы 2.1 верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\widetilde{\varphi}_3(k_{i+1},r_{i+1},h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}),x_{3,i},x_{3,i+1}).\quad(2.24)$$

Доказательство. Запишем по формуле полной вероятности с учетом формул (2.7) и (2.21):

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\times$$
$$\times\,\zeta(b,k_i,r_i,x^i)\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i=a,\xi_i=b,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_i=x^i\}).$$

Из условия (2.3) следует

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\zeta(b,k_i,r_i,x^i)\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-b_3\}}$$

и, раскрывая по определению $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, получим

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_3,b_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\delta_{b_3,\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)}\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-b_3\}}\times$$
$$\times\sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_{4,i},p_{k_{i+1},r_{i+1}})\times\sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\sum_{a_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{a_4,\min\{\ell(k_{i+1},r_{i+1},1),x_{1,i}+a_1\}}\times$$
$$\times\sum_{b_1\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_1,\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)}\sum_{b_2\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)}\times$$
$$\times\sum_{b_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{b_4,x_{4,i}}=\sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_3))\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)\}}.$$

И результат леммы получаем после следующих преобразований:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)\}}=$$
$$=(1-\delta_{x_{3,i+1},0})\varphi_3(x_{3,i+1}-x_{3,i}+\ell(k_{i+1},r_{i+1},3),h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))+\delta_{x_{3,i+1},0}\times$$
$$\times\sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)-x_{3,i}}\varphi_3(a,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))=\widetilde{\varphi}_3(k_{i+1},r_{i+1},h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}),x_{3,i},x_{3,i+1}).\quad\square$$

Следствие 2.4. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}=h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})$, $i=0,\,1,\,\ldots$. Тогда в условиях теоремы 2.1 верны равенства

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{1,i+1}=x_{1,i+1},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\widetilde{\varphi}_3(k_{i+1},r_{i+1},h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}),x_{3,i},x_{3,i+1}),\quad i\geqslant 0.\quad (2.25)$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущего следствия. А именно, записывая по формуле полной вероятности с учетом формул (2.7) и (2.21), имеем:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{1,i+1}=x_{1,i+1},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\zeta(b,k_i,r_i,x^i)\times$$
$$\times\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{1,i+1}=x_{1,i+1},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\{\omega\colon \eta_i=a,\xi_i=b,\Gamma_i=\Gamma^{(k_i,r_i)},\varkappa_i=x^i\}).$$

Из условий (2.3) опять следует

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{1,i+1}=x_{1,i+1},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4}\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\zeta(b,k_i,r_i,x^i)\delta_{x_{1,i+1},\max\{0,x_{1,i}+a_1-b_1\}}\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-b_3\}}$$

и, раскрывая $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, получим

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{1,i+1}=x_{1,i+1},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\sum_{a_3,b_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}))\delta_{b_3,\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)}\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-b_3\}}\times$$

$$\times \sum_{a_1,b_1\in\mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}))\delta_{b_1,\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)}\delta_{x_{1,i+1},\max\{0,x_{1,i}+a_1-b_1\}}\times$$
$$\times \sum_{a_2\in\mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1},r_{i+1}}) \times \sum_{a_4\in\mathbb{Z}_+} \delta_{a_4,\min\{\ell(k_{i+1},r_{i+1},1),x_{1,i}+a_1\}}\times$$
$$\times \sum_{b_2\in\mathbb{Z}_+} \delta_{b_2,\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)} \times \sum_{b_4\in\mathbb{Z}_+} \delta_{b_4,x_{4,i}}\,.$$

И после упращения сумм в предыдущем выражении, получим

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\}|\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_3))\delta_{x_{3,i+1},\max\{0,x_{3,i}+a_3-\ell(k_{i+1},r_{i+1},3)\}}\times$$
$$\times \sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_1))\delta_{x_{1,i+1},\max\{0,x_{1,i}+a_1-\ell(k_{i+1},r_{i+1},1)\}} =$$
$$= \widetilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}) \times \widetilde{\varphi}_1(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{1,i}, x_{1,i+1}).$$

Следствие доказано. $\square$

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для дальнейшего исследования состояния обслуживающего устройства и длины всех очередей.

3. Марковское свойство последовательностей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$

Введем для $i = 0, 1, \ldots$ следующие события:

$$A_i(k_i; r_i; x^i) = \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}\varkappa_i = x^i\}, \quad B_i(a; b) = \{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\}.$$

В новых обозначениях равенство (2.21) перепишется следующим образом:

$$\mathbf{P}(B_i(a;b)|\bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)) = \mathbf{P}(B_i(a;b)|A_i(k_i; r_i; x^i)). \tag{3.1}$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$.

Теорема 3.1. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $\varkappa_0 = x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| A_i(k_i; r_i; x^i)\right), \tag{3.2}$$

для $x_t \in \mathbb{Z}_+$ и k_t, r_t таких, что $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$ и $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) > 0$.

Рассмотрим сначала левую часть равенства (3.2). По формуле полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \sum_{a\in Z_+^4,\, b\in Z_+^4} \mathbf{P}\left(B_i(a; b) \middle| \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right). \tag{3.3}$$

Из равенства (3.1) следует, что вероятность $\mathbf{P}\left(B_i(a; b) \middle| \bigcap\limits_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right)$ не зависит от конкретных значений k_t, r_t, x^t. Далее, из соотношений (2.1), (2.3) и (2.4) можно заметить, что случайный элемент Γ_{i+1} и случайный вектор $\varkappa_{i+1}$ функционально выражаются через Γ_i, $\varkappa_i$, η_i и ξ_i, поэтому

$$\mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \middle| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \mathbf{P}(\tilde{A}_{i+1} | B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)),$$

при $\mathbf{P}(B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)) > 0$, где

$$\tilde{A}_{i+1} = \{\omega \colon \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{j,i+1} = \max\{0, x_{j,i} + a_j - b_j\}, j = \overline{1,3},$$
$$x_{4,i+1} = x_{4,i} + a_4 - a_2\},$$

где A_{i+1} либо достоверно, либо невозможно. Таким образом, подставляя выражения

$$\mathbf{P}\left(B_i(a; b) \middle| \bigcap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \mathbf{P}\left(B_i(a; b) \middle| A_i(k_i; r_i; x^i)\right)$$

и

$$\mathbf{P}\Big(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\Big|B_i(a;b)\cap\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\Big)=$$
$$=\mathbf{P}\Big(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\Big|B_i(a;b)\cap A_i(k_i;r_i;x^i)\Big)$$

в выражение (3.3), получим

$$\mathbf{P}\Big(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\Big|\bigcap_{t=0}^{i}A_t(k_t;r_t;x^t)\Big)=$$
$$=\sum_{a,b}\mathbf{P}\Big(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\Big|B_i(a;b)\cap A_i(k_i;r_i;x^i)\Big)\times$$
$$\times\mathbf{P}\Big(A_{i+1}(k_{i+1};r_{i+1};x^{i+1})\Big|B_i(a;b)\cap A_i(k_i;r_i;x^i)\Big).$$

Так как последнее выражение является разложением по формуле полной вероятности правой части равенства (3.2), то равенство (3.2) доказано. □

Докажем марковость последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$.

Теорема 3.2. Пусть $\Gamma_0=\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$ и $\varkappa_{3,0}=x_{3,0}\in\mathbb{Z}_+$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Действительно, поскольку Γ_{i+1} функционально выражается через Γ_i и $\varkappa_{3,i}$ (см. условие (2.1)), то

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon\Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})=$$
$$=\delta_{\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})}\times\mathbf{P}(\{\omega\colon\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon\Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})$$

для $\Gamma^{(k_i,r_i)}\in\Gamma$, $x_{3,i}\in\mathbb{Z}_+$, $i\geqslant 0$. Учитывая равенство (2.24), убеждаемся, что вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},\varkappa_{3,i+1}=x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\omega\colon\Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\varkappa_t=x^t\})$$

равна

$$\delta_{\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})}\times\widetilde{\varphi}_3(k_{i+1},r_{i+1},h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i}),x_{3,i},x_{3,i+1})$$

и зависит только от значений пар $(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$ и $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{3,i+1})$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\
&\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\}) = \\
&\quad = \mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_{3,t} = x_{3,t}\}),
\end{aligned}$$

что доказывает марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$. $\square$

Убедившись в марковости последовательностей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ и $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$, приведем формулы для вычисления их одношаговых переходных вероятностей.

Теорема 3.3. Пусть x, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(k,r)}$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) = \\
&= \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3) \times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3))\psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}), \quad (3.4)
\end{aligned}$$

где $\mathbb{A}_{\text{trans}} = \mathbb{A}_{\text{trans}}(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}), \quad (3.5)$$

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2\colon a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4\}, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2\colon \tilde{x}_1 = \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}\}, \quad (3.7)$$

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2\colon \tilde{x}_2 = \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}\}. \quad (3.8)$$

Доказательство. В случае если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, искомая вероятность упростится следующим образом:

$$\mathbf{P}(A_{i+1}(\tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{x}) | A_i(k, r, x)) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | A_i(k, r, x)).$$

По аналогии с выводом формул (2.23) и (2.24), для доказательства воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|A_i(k,r,x)) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega\colon \eta_i=a,\xi_i=b\}|A_i(k,r,x))\times$$
$$\times\,\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|A_i(k,r,x)\cap\{\omega\colon \eta_i=a;\xi_i=b\}).$$

Учтем формулы (2.7) и (2.21):

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x\}) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \varphi(a,k,r,x)\zeta(b,k,r,x)\times$$
$$\times\,\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x,\eta_i=a;\xi_i=b\}).$$

Из условий (2.3) и (2.4) следует

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x\}) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_+^4} \varphi(a,k,r,x)\zeta(b,k,r,x)\times\delta_{\tilde{x}_1,\max\{0,x_1+a_1-b_1\}}\times$$
$$\times\,\delta_{\tilde{x}_3,\max\{0,x_3+a_3-b_3\}}\times\delta_{\tilde{x}_2,\max\{0,x_2+a_2-b_2\}}\times\delta_{\tilde{x}_4,x_4+a_4-a_2}$$

Раскроем функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и перегруппируем множители:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}|\Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x\}) =$$
$$=\sum_{a_1,b_1\in\mathbb{Z}_+}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\delta_{\tilde{x}_1,\max\{0,x_1+a_1-b_1\}}\times$$
$$\times\sum_{a_3,b_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\delta_{\tilde{x}_3,\max\{0,x_3+a_3-b_3\}}\times$$
$$\times\sum_{a_2,b_2\in\mathbb{Z}_+}\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}})\delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)}\delta_{\tilde{x}_2,\max\{0,x_2+a_2-b_2\}}\times$$
$$\times\sum_{a_4,b_4\in\mathbb{Z}_+}\delta_{a_4,\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}}\delta_{b_4,x_4}\delta_{\tilde{x}_4,x_4+a_4-a_2}.$$

Поскольку произведение $\delta_{\tilde{x}_4,x_4+a_4-a_2}\times\delta_{a_4,\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}}$ отлично от нуля, если и только если $a_2=\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}+x_4-\tilde{x}_4$, то

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x\}) =$$
$$=\sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\delta_{\tilde{x}_3,\max\{0,x_3+a_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\}}\times\sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\times$$
$$\times\,\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}})\times\delta_{\tilde{x}_1,\max\{0,x_1+a_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}}\delta_{\tilde{x}_2,\max\{0,x_2+a_2-\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)\}},$$

Из определений (2.22) видно, что

$$\sum_{a_3\in\mathbb{Z}_+}\varphi_3(a_3,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\delta_{\tilde{x}_3,\max\{0,x_3+a_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\}}=\tilde{\varphi}_3(\tilde{k},\tilde{r},h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3),\tilde{x}_3),$$

значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa_{i+1}=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_i=x\})=\tilde{\varphi}_3(\tilde{k},\tilde{r},h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3),\tilde{x}_3)\times$$
$$\times\sum_{a_1\in\mathbb{Z}_+}\varphi_1(a_1,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))\psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}})\times\delta_{\tilde{x}_1,\max\{0,x_1+a_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)\}}\delta_{\tilde{x}_2,\max\{0,x_2+a_2-\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)\}}.$$

что есть в точности (3.4). □

Теорема 3.4. Пусть x_3, $\tilde{x}_3\in\mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}=h(\Gamma^{(k,r)},x_3)\in\Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1}=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},\varkappa_{3,i+1}=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_i=\Gamma^{(k,r)},\varkappa_{3,i}=x\})=$$
$$=\widetilde{\varphi}_3(\tilde{k},\tilde{r},h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3),x_3,\tilde{x}_3),\quad(3.9)$$

Доказательство. Доказательство следует из равенства (2.24). □

4. Классификация состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_i);i\geqslant 0\}$

Введем множество

$$\mathbb{X}^{(k,r)}=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_+^4\colon (x_1>0)\Rightarrow(x_4\geqslant\ell(k,r,1))\},$$

где k и r такие, что $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$.

Лемма 4.1. Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)},x^0)$, $r_0=\overline{1,n_0}$, $x^0\in\mathbb{Z}_+^4$, $x_{3,0}\leqslant L$, и $(\Gamma^{(0,\tilde{r})},(0,0,\tilde{x}_3,0))$, $\tilde{r}=\overline{1,n_0}$, $\tilde{x}_3\geqslant x_{3,0}$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_N=\Gamma^{(0,\tilde{r})},\varkappa_N=(0,0,\tilde{x}_3,0)\}|\{\omega\colon \Gamma_0=\Gamma^{(0,r_0)},\varkappa_0=x^0\})>0.$$

Доказательство. Пусть система стартовала в состоянии ($\Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0$). Из формул (1.2) и (2.1) следует, что

$$\Gamma_1 = h(\Gamma_0, \varkappa_{3,0}) = h(\Gamma^{(0,r_0)}, x_{3,0}) = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 1)}.$$

Положим

$$x^1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}) = \big(\max\{0, x_{1,0} - \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 1)\};$$
$$\max\{0, x_{2,0} + x_{4,0} - \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 2)\}; x_{3,0}; \min\{x_{1,0}.\ell(0, r_0 \oplus_0 1, 1)\}\big).$$

Тогда, учитывая формулу (3.4), имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0) =$$
$$= \widetilde{\varphi}_3(0, r_0 \oplus_0 1, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, x_{3,0}, x_{3,0}\}) \times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)})\psi(a_2, x_{4,0}, p_{0,r_0 \oplus_0 1}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, x_{4,0})$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}(x^0, x^1, 0, r_0 \oplus_0 1) = \mathbb{A}^0_{\mathrm{trans}} \cap \mathbb{A}^1_{\mathrm{trans}} \cap \mathbb{A}^2_{\mathrm{trans}},$$
$$\mathbb{A}^0_{\mathrm{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon a_2 = \min\{\ell(0, r_0 \oplus_0 1, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - x_{4,1}\},$$
$$\mathbb{A}^1_{\mathrm{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon x_{1,1} = \max\{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 1)\}\},$$
$$\mathbb{A}^2_{\mathrm{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon x_{2,1} = \max\{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 2)\}\}.$$

Из определения (2.22) находим

$$\widetilde{\varphi}_3(0, r_0 \oplus_0 1, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, x_{3,0}, x_{3,0}) =$$
$$= (1 - \delta_{x_{3,1},0})\varphi_3(x_{3,0} + \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 3) - x_{3,0}, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)}) + \delta_{x_{3,0},0}\varphi_3(0, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)}) > 0.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{\varphi}_3(0, r_0 \oplus_0 1, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, x_{3,0}, x_{3,0}) \times \varphi_1(0, T^{(0,r_0 \oplus_0 1)})\psi(x_{4,0}, x_{4,0}, p_{0,r_0 \oplus_0 1}) > 0.$$

Таким образом вероятность за один такт перейти из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ в состояние

$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^1)$ положительна.

Поскольку никаких ограничений на вектор $x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$, кроме $x_{3,0} \leqslant L$, наложено не было, то аналогично получаем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_2 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\}|\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\}) > 0,$$

для

$$x^2 = \big(\max\{0, x_{1,1} - \ell(0, r_0 \oplus_0 2, 1)\};\\ \max\{0, x_{2,1} + x_{4,1} - \ell(0, r_0 \oplus_0 2, 2)\}; x_{3,0}; \min\{x_{1,1}.\ell(0, r_0 \oplus_0 2, 1)\}\big).$$

и вообще

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_j = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 j)}, \varkappa_j = x^j\}) > 0,$$

для

$$x^{j+1} = \big(\max\{0, x_{1,j} - \ell(0, r_0 \oplus_0 j+1, 1)\};\\ \max\{0, x_{2,j} + x_{4,j} - \ell(0, r_0 \oplus_0 j+1, 2)\}; x_{3,0}; \min\{x_{1,j}.\ell(0, r_0 \oplus_0 j+1, 1)\}\big),$$

для $j = 1, 2, \ldots, N_2$. Число N_2 будет определено ниже.

Так как для каждой очереди O_s, $s = 1, 2, 4$, найдется состояние продления, в котором она обслуживается, т.е. $\ell(0, r_0 \oplus_0 j, s) > 0$, то для некоторого $N_1 > 0$ количество требований x^{N_1} в очередях O_1, O_2 и O_4 станет равным нулю, т.е.

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_1)}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_1-1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 (N_1-1))}, \varkappa_{N_1-1} = x^{N_1-1}\}) > 0,$$

для $x^{N_1} = \big(0; 0; x_{3,0}; 0\big)$. Поскольку все состояния продления образуют цикл, то существует такое число $N_2 > N_1$, что $r_0 \oplus_0 N_2 = \tilde{r} \ominus_0 1$ и

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 (N_2-1))}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\}) > 0,$$

где $x^{N_2} = (0, 0, x_{3,0}, 0)$. Для завершения доказательства теперь необходимо оценить вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1}=\Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_{N_2+1}=x^{N_2+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_2}=\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2}=x^{N_2}\}),$$

где $x^{N_2+1}=(0,0,\tilde x_3,0)$. Опять учитывая формулу (3.4), имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1}=\Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_{N_2+1}=x^{N_2+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_2}=\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2}=x^{N_2}\}) = \\ = \widetilde\varphi_3(0,\tilde r, T^{(0,\tilde r)}, x_{3,0}, \tilde x_3)\times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}}\varphi_1(a_1,T^{(0,\tilde r)})\psi(a_2,0,p_{0,\tilde r}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1,a_2)=(0,0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}(x^{N_2},x^{N_2+1},0,\tilde r)=\mathbb{A}^0_{\mathrm{trans}}\cap\mathbb{A}^1_{\mathrm{trans}}\cap\mathbb{A}^2_{\mathrm{trans}},\\
&\mathbb{A}^0_{\mathrm{trans}}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2_+\colon a_2=\min\{\ell(0,\tilde r,1),a_1\}\},\\
&\mathbb{A}^1_{\mathrm{trans}}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2_+\colon 0=\max\{0,a_1-\ell(0,\tilde r,1)\}\},\\
&\mathbb{A}^2_{\mathrm{trans}}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2_+\colon 0=\max\{0,a_2-\ell(0,\tilde r,2)\}\}.
\end{aligned}$$

Из определений (2.22) находим

$$\widetilde\varphi_3(0,\tilde r,T^{(0,\tilde r)},x_{3,0},\tilde x_3)=(1-\delta_{\tilde x_3,0})\varphi_3(\tilde x_3+0-x_{3,0},T^{(0,\tilde r)})+\delta_{\tilde x_3,0}\varphi_3(0,T^{(0,\tilde r)})>0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1}=\Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_{N_2+1}=x^{N_2+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_2}=\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2}=x^{N_2}\}) \geqslant \\ \geqslant \widetilde\varphi_3(0,\tilde r,T^{(0,\tilde r)},x_{3,0},\tilde x_3)\times\varphi_1(0,T^{(0,\tilde r)})\psi(0,0,p_{0,\tilde r})>0.$$

Положим $N=N_2+1$ и соберем все воедино:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_N=\Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_N=x^N\}|\{\omega\colon \Gamma_0=\Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0=x^0\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1}=\Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_{N_2+1}=x^{N_2+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_0=\Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0=x^0\}) \geqslant \\ \geqslant \mathbf{P}(C|\{\omega\colon \Gamma_0=\Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0=x^0\}),$$

где

$$C = \Big\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\Big\} \cap \Big\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde r\ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\Big\} \cap \ldots$$
$$\ldots \cap \Big\{\omega\colon \Gamma_2 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\Big\} \cap \Big\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\Big\}.$$

Наконец, из теоремы умножения и марковского свойства заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\Big\{\omega\colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_N = x^N\Big\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geqslant \\
&\geqslant \mathbf{P}\bigg(\Big\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\Big\}\bigg|\Big\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde r\ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\Big\}\bigg)\times \\
&\times \mathbf{P}\bigg(\Big\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde r\ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\Big\}\bigg|\Big\{\omega\colon \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0,\tilde r\ominus_0 2)}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\Big\}\bigg) \times \ldots \\
&\ldots \times \mathbf{P}\bigg(\Big\{\omega\colon \Gamma_2 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\Big\}\bigg|\Big\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\Big\}\bigg)\times \\
&\times \mathbf{P}\bigg(\Big\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\Big\}\bigg|\Big\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\Big\}\bigg) > 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.2. Для любых состояний $(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0)$, $k_0 > 0$, $r_0 = \overline{1, n_{k_0}}$ $x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$, и $(\Gamma^{(0,\tilde r)}, \tilde x)$, $\tilde r = \overline{1, n_0}$, $\tilde x = (0, 0, L+1, 0)$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde r)}, \varkappa_N = \tilde x\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Доказательство. Как и в прошлой лемме рассмотрим последовательность состояний:

$$(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0) \to (\Gamma^{(k_0,r_0\oplus_{k_0} 1)}, x^1) \to (\Gamma^{(k_0,r_0\oplus_{k_0} 2)}, x^2) \to \ldots \to (\Gamma^{(k_0,r_0\oplus_{k_0} N_1)}, x^{N_1}),$$

где $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0})$ и число N_1 определены следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned}
x^{j+1} = \bigg(&\max\Big\{0, x_{1,0} - \sum_{s=1}^{j+1} \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} s, 1)\Big\}; \max\Big\{0, x_{2,0} - \sum_{s=1}^{j+1} \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} s, 2)\Big\}; \\
&\max\Big\{0, x_{3,0} - \sum_{s=1}^{j+1} \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} s, 3)\Big\}; x_{4,0} + \min\Big\{x_{1,0}, \sum_{s=1}^{j+1} \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} s, 1)\Big\}\bigg),
\end{aligned}$$

$j = \overline{0, N_1 - 1}$. Пусть, далее, N_1 — первый номер, при котором одновременно выполнено два условия: 1) обслуживающее устройство находится в выходном состоянии, то есть $r_0 \oplus_{k_0} N_1 = n_{k_0}$, и 2) количество требований в очереди O_3 не превышает порог L, то есть $x_{3,N_1} \leqslant L$. Такое N_1 всегда существует, так как пока $x_{3,j} > L$ и $r_0 \oplus_{k_0} s \neq n_0$, обслуживающее устройство будет находиться в цикле и периодически обслуживать третью очередь, то есть $\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} s, 1) > 0$ для некоторых s.

Тогда, учитывая формулу (3.4) имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) =$$
$$= \widetilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}) \times$$
$$\times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) \psi(a_2, x_{4,0}, p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1) = \mathbb{A}^0_{\text{trans}} \cap \mathbb{A}^1_{\text{trans}} \cap \mathbb{A}^2_{\text{trans}},$$

и

$$\mathbb{A}^0_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon a_2 = \min\{\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} -$$
$$- x_{4,0} - \min\{x_{1,0}, \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1)\}\},$$
$$\mathbb{A}^1_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon \max\{0, x_{1,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1)\} =$$
$$= \max\{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1)\}\},$$
$$\mathbb{A}^2_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon \max\{0, x_{2,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 2)\} =$$
$$= \max\{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 2)\}\}.$$

Из определений (2.22) находим

$$\widetilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}) =$$
$$= (1 - \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0}) \times$$
$$\times \varphi_3(\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\} + \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3) - x_{3,0}, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) +$$
$$+ \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}),$$

а после приведения подобных слагаемых, получим

$$\widetilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}) =$$
$$= (1 - \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0}) \times \varphi_3(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) +$$
$$+ \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) > 0.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, x_{3,1}) \varphi_1(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) \psi(0, x_{4,0}, p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1}) > 0.$$

Таким образом, вероятность за один такт перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x^1)$ положительна.

Аналогичные рассуждения верны и для произвольного $j = \overline{1, N_1 - 1}$ при переходе из состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} j)}, x^j)$ в состояние $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} (j+1))}, x^j)$, поскольку в качестве x^0 был взят произвольный вектор из $\mathbb{Z}_+^4$, а в качестве $\Gamma^{(k_0, r_0)}$ — произвольное состояние цикла из Γ, $k_0 > 0$. Единственным предположением было лишь невозможность выхода из цикла на следующем такте.

Теперь рассмотрим переход из состояния $(\Gamma_{N_1}, \varkappa_{N_1}) = (\Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, x^{N_1})$ в состояние $(\Gamma_{N_1+1}, \varkappa_{N_1+1}) = (\Gamma^{(0, r_1)}, x^{N_1+1})$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, x_{3, N_1})$ и

$$x^{N_1+1} = \big(\max\{0, x_{1,N_1} - \ell(0, r_1, 1)\}; \max\{0, x_{2,N_1} - \ell(0, r_1, 2)\}; x_{3,N_1};$$
$$x_{4,N_1} + \min\{x_{1,N_1}, \ell(0, r_1, 1)\}\big).$$

Из формулы (3.4) имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_1+1} = \Gamma^{(0, r_1)}, \varkappa_{N_1+1} = x^{N_1+1}\} | \{\omega\colon \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}) =$$
$$= \widetilde{\varphi}_3(0, r_1, T^{(0, r_1)}, x_{3,N_1}, x_{3,N_1}) \times$$
$$\times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0, r_1)}) \psi(a_2, x_{4,N_1}, p_{0, r_1}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^{N_1}, x^{N_1+1}, 0, r_1) = \mathbb{A}^0_{\text{trans}} \cap \mathbb{A}^1_{\text{trans}} \cap \mathbb{A}^2_{\text{trans}},$$
$$\mathbb{A}^0_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon a_2 = \min\{\ell(0, r_1, 1), x_{1,N_1} + a_1\} + x_{4,N_1} - x_{4,N_1+1}\},$$
$$\mathbb{A}^1_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon x_{1,N_1+1} = \max\{0, x_{1,N_1} + a_1 - \ell(0, r_1, 1)\}\},$$
$$\mathbb{A}^2_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon x_{2,N_1+1} = \max\{0, x_{2,N_1} + a_2 - \ell(0, r_1, 2)\}\},$$

Из определений (2.22) находим

$$\widetilde{\varphi}_3(0, r_1, T^{(0,r_1)}, x_{3,N_1}, x_{3,N_1}) =$$
$$= (1 - \delta_{x_{3,N_1+1},0}) \times \varphi_3(x_{3,N_1+1} + \ell(0, r_1, 3) - x_{3,N_1}, T^{(0,r_1)}) + \delta_{x_{3,N_1+1},0}\varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) =$$
$$= (1 - \delta_{x_{3,N_1+1},0}) \times \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) + \delta_{x_{3,N_1+1},0}\varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) = \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) > 0$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_1+1} = \Gamma^{(0,r_1)}, \varkappa_{N_1+1} = x^{N_1+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(k_0,n_{k_0})}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) \times \varphi_1(0, T^{(0,r_1)})\psi(0, x_{4,N_1}, p_{0,r_1}) > 0,$$

и вероятность перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0,n_{k_0})}, x^{N_1})$ в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^{N_1+1})$ за один такт положительна.

Таким образом, вероятность перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0)$, $k_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{Z}^4_+$, в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^{N_1+1})$, $r_1 = h_1(\Gamma^{(k_0,n_{k_0})}, x_{3,N_1}) \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, за $(N_1 + 1)$ шагов положительна. По предыдущей лемме существует такое число шагов N_2, за которое можно перейти из состояния вида $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^{N_1+1})$ в состояние $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, L + 1, 0))$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$. Полагая $N = N_1 + 1 + N_2$, получаем утверждение леммы. □

Лемма 4.3. Для любых состояний $(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0)$, $k_0 = \overline{0, d}$, $r_0 = \overline{1, n_{k_0}}$, $x^0 \in \mathbb{Z}^4_+$, и $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$, $\tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0)$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Доказательство. В леммах (4.1) и (4.2) решен вопрос для всех начальных состояний, кроме состояний вида $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x_{3,0} > L$. Но нетрудно проверить, что на следующем такте (после состояния $(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0)$) с ненулевой вероятностью из этого состояния можно перейти в состояние цикла вида $(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x^1)$, где $\Gamma^{(k_1,r_1)} = h_3(r_0)$, $k_1 > 0$, и

$$x^1 = \big(\max\{0, x_{1,0} - \ell(k_1,r_1,1)\}; \max\{0, x_{2,0} - \ell(k_1,r_1,2)\};$$
$$\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1,r_1,3)\}; x_{4,0} + \min\{x_{1,0}, \ell(k_1,r_1,1)\}\big).$$

Действительно, из формулы (3.4) имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) =$$
$$= \widetilde{\varphi}_3(k_1, r_1, T^{(k_1,r_1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1,r_1,3)\})\times$$
$$\times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(k_1,r_1)})\psi(a_2, x_{4,0}, p_{k_1,r_1}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1,a_2) = (0,0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}(x^0, x^1, k_1, r_1) = \mathbb{A}^0_{\mathrm{trans}} \cap \mathbb{A}^1_{\mathrm{trans}} \cap \mathbb{A}^2_{\mathrm{trans}},$$
$$\mathbb{A}^0_{\mathrm{trans}} = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon a_2 = \min\{\ell(k_1,r_1,1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - x_{4,1}\},$$
$$\mathbb{A}^1_{\mathrm{trans}} = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon x_{1,1} = \max\{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(k_1,r_1,1)\}\},$$
$$\mathbb{A}^2_{\mathrm{trans}} = \{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon x_{2,1} = \max\{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(k_1,r_1,2)\}\},$$

Из определений (2.22) находим

$$\widetilde{\varphi}_3(k_1, r_1, T^{(k_1,r_1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1,r_1,3)\}) = (1 - \delta_{x_{3,1},0})\times$$
$$\times \varphi_3(\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1,r_1,3)\} + \ell(k_1,r_1,3) - x_{3,0}, T^{(k_1,r_1)}) +$$
$$+ \delta_{x_{3,1},0} \sum_{a=0}^{\ell(k_1,r_1,3)-x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(k_1,r_1)}) > 0.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(k_1,r_1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{\varphi}_3(k_1, r_1, T^{(k_1,r_1)}, x_{3,0}, x_{3,1}) \times \varphi_1(0, T^{(k_1,r_1)})\psi(0, x_{4,0}, p_{k_1,r_1}) > 0.$$

Таким образом вероятность за один такт перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(k_0,r_0\oplus_{k_0}1)}, x^1)$ положительна. Далее, по лемме (4.2) за N_1 шагов можно перейти в искомое конечное состояние $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0,0,L+1,0))$. Полагая $N = N_1 + 1$, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 4.4. Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x_0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$, и $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$, $\tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0))$, $\tilde{x}_3 \geqslant \max\{0, L+1-\sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$ и $\tilde{k} > 0$ такое, что $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h_3(r_0)$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_N = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Доказательство. Поскольку $h(\Gamma^{(0,r_0)}, L+1) = \Gamma^{(\tilde{k},1)}$, то $\Gamma_1 = \Gamma^{(\tilde{k},1)}$. Докажем, что вероятность перехода за один такт из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(\tilde{k},1)}, x^1)$, $x^1 = (0, 0, \max\{0, L+1-\ell(\tilde{k}, 1, 3)\}, 0)$, положительна. Действительно, из формулы (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(\tilde{k},1)}, \varkappa_1 = x^1\}|\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) = \\
= \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, 1, T^{(\tilde{k},1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\})\times \\
\times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k},1)})\psi(a_2, x_{4,0}, p_{\tilde{k},1}),
\end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, \tilde{k}, 1) = \mathbb{A}^0_{\text{trans}} \bigcap \mathbb{A}^1_{\text{trans}} \bigcap \mathbb{A}^2_{\text{trans}}, \\
&\mathbb{A}^0_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, 1, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - x_{4,1}\}, \\
&\mathbb{A}^1_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon x_{1,1} = \max\{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(k_1, r_1, 1)\}\}, \\
&\mathbb{A}^2_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon x_{2,1} = \max\{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(k_1, r_1, 2)\}\}.
\end{aligned}$$

Из определений (2.22) находим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, 1, T^{(\tilde{k},1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\}) = (1 - \delta_{x_{3,1},0})\times \\
\times \varphi_3(\max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\} + \ell(\tilde{k}, 1, 3) - x_{3,0}, T^{(\tilde{k},1)}) + \\
+ \delta_{x_{3,1},0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},1,3)-x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},1)}) > 0.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_1 = \Gamma^{(\tilde{k},1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, 1, T^{(\tilde{k},1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\}) \times \varphi_1(0, T^{(\tilde{k},1)}) \psi(0, x_{4,0}, p_{\tilde{k},1}) > 0,$$

Теперь рассмотрим переход из состояния x^j в состояние x^{j+1}, $j = \overline{1, \tilde{r} - 2}$, где

$$x^j = (0, 0, \max\{0, L + 1 - \sum_{s=1}^{j} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, 0).$$

Из формулы (3.4) имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(\tilde{k},j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\} | \{\omega\colon \Gamma_j = \Gamma^{(\tilde{k},j)}, \varkappa_j = x^j\}) =$$
$$= \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, j+1, T^{(\tilde{k},j+1)}, x_{3,j}, \max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\}) \times$$
$$\times \sum_{(a_1,a_2)\in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k},j+1)}) \psi(a_2, x_{4,j}, p_{\tilde{k},j+1}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^j, x^{j+1}, \tilde{k}, j+1) = \mathbb{A}^0_{\text{trans}} \bigcap \mathbb{A}^1_{\text{trans}} \bigcap \mathbb{A}^2_{\text{trans}},$$
$$\mathbb{A}^0_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, j+1, 1), x_{1,j} + a_1\} + x_{4,j} - x_{4,j+1}\},$$
$$\mathbb{A}^1_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon x_{1,j+1} = \max\{0, x_{1,j} + a_1 - \ell(\tilde{k}, j+1, 1)\}\},$$
$$\mathbb{A}^2_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+\colon x_{2,j+1} = \max\{0, x_{2,j} + a_2 - \ell(\tilde{k}, j+1, 2)\}\},$$

Из определений (2.22) находим

$$\widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, j+1, T^{(\tilde{k},j+1)}, x_{3,j}, \max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\}) = (1 - \delta_{x_{3,j+1},0}) \times$$
$$\times \varphi_3(\max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\} + \ell(\tilde{k}, j+1, 3) - x_{3,j}, T^{(\tilde{k},j+1)}) +$$
$$+ \delta_{x_{3,j+1},0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},j+1,3)-x_{3,j}} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},j+1)}) > 0.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{j+1}=\Gamma^{(\tilde{k},j+1)}, \varkappa_{j+1}=x^{j+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_j=\Gamma^{(\tilde{k},j)}, \varkappa_j=x^j\}) \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, j+1, T^{(\tilde{k},j+1)}, x_{3,j}, \max\{0, x_{3,j}-\ell(\tilde{k}, j+1, 3)\})\times$$
$$\times\, \varphi_1(0, T^{(\tilde{k},j+1)})\psi(0, x_{4,j}, p_{\tilde{k},j+1}) > 0,$$

Поскольку переход из состояния $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}-1)}, x^{\tilde{r}-1})$ в состояние $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$ осуществляется похожим образом, только по очереди O_3 поступает дополнительные $\tilde{x}_3 - \max\left\{0, L+1-\sum\limits_{s=1}^{\tilde{r}}\ell(\tilde{k}, s, 3)\right\} \geqslant 0$ требований, то полагая $N=\tilde{r}$, получаем утверждение леммы. □

Лемма 4.5. Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x_0=(0,0,L+1,0)$, $r_0=\overline{1,n_0}$, и $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$, $\tilde{x}=(0,0,\tilde{x}_3,0))$, $\tilde{x}_3 \geqslant \max\{0, L+1-\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}}\ell(\tilde{k}, s, 3)\}$, $\tilde{k}=\overline{1,d}$ и $\tilde{r}=\overline{1,n_0}$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_N=\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N=\tilde{x}\}|\{\omega\colon \Gamma_0=\Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0=x^0\}) > 0.$$

Доказательство. Действительно, по лемме 4.3 существует такое натуральное число N_1, что за N_1 шагов из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ можно перейти в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^1)$, $\Gamma^{(\tilde{k},1)}=h_3(r_1)$, $x^1=(0,0,L+1,0)$. По лемме 4.4 существует такое число шагов N_2, за которое можно перейти далее в состояние $(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, x^2)$,

$$x^2=(0,0,\max\{0, L+1-\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}}\ell(\tilde{k}, s, 3)\}, 0).$$

Теперь достаточно показать, что из состояния $(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, x^2)$ можно перейти за один шаг в состояние $(\Gamma^{(0,r_3)}, x^3)$, $r_3=h_1(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})$, $x^3=x^2$, поскольку по лемме 4.1 за конечное число N_3 шагов из последнего можно перейти в состояние $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$.

Итак, из формулы (3.4) имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{N_1+N_2+1}=\Gamma^{(0,r_3)}, \varkappa_{N_1+N_2+1}=x^3\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_1+N_2}=\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, \varkappa_{N_1+N_2}=x^2\}) =$$
$$=\widetilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, \max\{0, x_{3,2}-\ell(0, r_3, 3)\})\times]$$
$$\times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_3)})\psi(a_2, x_{4,2}, p_{0,r_3}) =$$
$$=\widetilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) \times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\mathrm{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_3)})\psi(a_2, 0, p_{0,r_3}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (3.5)–(3.8) имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^2, x^3, 0, r_3) = \mathbb{A}^0_{\text{trans}} \bigcap \mathbb{A}^1_{\text{trans}} \bigcap \mathbb{A}^2_{\text{trans}},\\
&\mathbb{A}^0_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon a_2 = \min\{\ell(0, r_3, 1), x_{1,2} + a_1\} + x_{4,2} - x_{4,3}\},\\
&\mathbb{A}^1_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon x_{1,3} = \max\{0, x_{1,2} + a_1 - \ell(0, r_3, 1)\}\},\\
&\mathbb{A}^2_{\text{trans}} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \colon x_{2,3} = \max\{0, x_{2,2} + a_2 - \ell(0, r_3, 2)\}\},
\end{aligned}$$

Из определений (2.22) находим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, \max\{0, x_{3,2} - \ell(0, r_3, 3)\}) = (1 - \delta_{x_{3,3},0})\times\\
\times \varphi_3(\max\{0, x_{3,2} - \ell(0, r_3, 3)\} + \ell(0, r_3, 3) - x_{3,2}, T^{(0,r_3)}) +\\
+ \delta_{x_{3,3},0} \sum_{a=0}^{\ell(0,r_3,3)-x_{3,2}} \varphi_3(a, T^{(0,r_3)}) > 0.
\end{aligned}$$

и после упрощений:

$$\widetilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) = (1 - \delta_{x_{3,2},0}) \times \varphi_3(0, T^{(0,r_3)}) + \delta_{x_{3,2},0}\varphi_3(0, T^{(0,r_3)}) > 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_{N_1+N_2+1} = \Gamma^{(0,r_3)}, \varkappa_{N_1+N_2+1} = x^3\} | \{\omega \colon \Gamma_{N_1+N_2} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, \varkappa_{N_1+N_2} = x^2\}) \geqslant\\
\geqslant \widetilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) \times \varphi_1(0, T^{(0,r_3)})\psi(0, 0, p_{0,r_3}) > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, полагая $N = N_1 + N_2 + 1 + N_3$, получаем утверждение леммы. $\square$

Из предыдущей леммы легко следует следующая лемма.

Лемма 4.6. Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x^0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$, и $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$, $\tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0)$, $\tilde{x}_3 \geqslant \max\{0, L + 1 - \max_{k=\overline{1,d}}\{\sum_{s=1}^{n_k} \ell(k, s, 3)\}\}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Лемма 4.7. Если из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x^0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1; n_0}$, можно перейти за конечное число шагов в состояние $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, \min\{L, \tilde{x}_3\}, 0))$, $\tilde{r} = \overline{1; n_0}$,

$\tilde{x}_3 \geqslant 0$, то для любого $\tilde{x} \in \{x \in Z_+^4 \colon x_3 = \tilde{x}_3; (x_1 > 0) \to (x_4 \geqslant \ell(0, \tilde{r}, 1))\}$, существует такое число N шагов, что

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Доказательство. Опираясь на рассуждения, аналогичные рассуждениям доказательств предыдущих лемм, доказательство проведем в три этапа.

Первый этап. Из сделанных предположений следует существование такого натурального числа N_1, что

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_1)}, \varkappa_{N_1} = (0,0,x_3,0)\} | \{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = (0,0,L+1,0)\}) > 0,$$

где $x_3 = \min\{L, \tilde{x}_3\}$.

Второй этап. Пусть

$$r_1 = r_0 \oplus_0 N_1, \quad r_2 = r_1 \oplus_0 N_2, \quad r_3 = r_2 \oplus_0 2 = \tilde{r},$$
$$x_4 = \tilde{x}_4 - \delta_{\tilde{x}_1,0}\ell(0,\tilde{r},1) + \ell(0,r_3,2),$$

причем N_2 таково, что

$$\sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1+s, 1) < x_4 + \tilde{x}_2 \leqslant \sum_{s=1}^{N_2+1} \ell(0, r_1+s, 1).$$

Аналогично доказательствам предыдущих лемм, доказывается, что далее за N_2 шагов можно перейти в состояние

$$(\Gamma^{(0,r_2)}, (x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1+s, 1), 0, x_3, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1+s, 1))).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_{N_1+N_2} = \Gamma^{(0,r_2)}, \varkappa_{N_1+N_2} = x^{N_1+N_2})\} | \{\omega \colon \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_1)}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}) > 0,$$

где

$$x^{N_1+N_2} = (x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1+s, 1), 0, x_3, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1+s, 1)).$$

И заключительный, третий этап. В нем доказывается (аналогично предыдущему), что вероятности

$$\mathbf{P}(A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus 1, x^{N_1+N_2+1}) | A_{N_1+N_2}(0, r_2, x^{N_1+N_2})),$$

и

$$\mathbf{P}(A_{N_1+N_2+2}(0, r_2 \oplus 2, x^{N_1+N_2+2}) | A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus 1, x^{N_1+N_2+1}))$$

положительны. Здесь

$$x^{N_1+N_2+1} = (0, 0, x_3, \tilde{x}_2 + x_4), \quad x^{N_1+N_2+2} = \tilde{x}.$$

Это доказывает утверждение леммы. □

Лемма 4.8. Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x^0 = (0, 0, L+1, 0)$, $\Gamma^{(0,r_0)} \in \Gamma$, и $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$, где $\tilde{x}$ таково, что $\tilde{x}_1 \geqslant 0$, $\tilde{x}_2 \geqslant 0$, $\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L+1 - \max\limits_{k=\overline{1,d}}\Big\{\sum\limits_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\Big\}\Big\}$, $\tilde{x}_4 \geqslant 0$ и $(x_1 > 0) \Rightarrow (x_4 \geqslant \ell(0, \tilde{r}, 1))$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Лемма 4.9. Для любых состояний $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x_0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$, и $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$, где $\tilde{k} = \overline{1,d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$ и $\tilde{x}$ таково, что $\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L+1 - \sum\limits_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\Big\}$, $(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geqslant \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1))$, существует такое натуральное число N, что

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \Gamma_N = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Доказательство. Действительно, из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ за конечное число N_1 шагов можно перейти в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^1)$, $h_3(r_1) = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}$,

$$x_{1,1} = 0, \qquad x_{3,1} = \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3) + \tilde{x}_3 \geqslant L + 1,$$

$$x_{2,1} = \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 2) + \tilde{x}_2, \qquad x_{4,1} = \tilde{x}_4 - (1 - \delta_{\tilde{x}_1, 0}) \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1).$$

На следующем такте цепь попадает в состояние цикла и далее за $\tilde{r}$ шагов пападает в конечное состояние. Полагая $N = N_1 + \tilde{r}$, получаем утверждение леммы. □

Лемма 4.10. Состояния вида $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$, где $\tilde{k} = \overline{0,d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$,

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geqslant \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)), \tag{4.1}$$

$$\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(k, s, 3)\Big\}, \text{ если } \tilde{k} > 0, \tag{4.2}$$

$$\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L + 1 - \max_{k=\overline{1,d}} \{\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}\Big\}, \text{ если } \tilde{k} = 0, \tag{4.3}$$

и только они достижимы из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x^0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$.

Пусть

$$S^3_{0,r} = \left\{(\Gamma^{(0,r)}, x_3)\colon\ x_3 \in Z_+,\ x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d}\left\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell(k,t,3)\right\}\right\}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_0,$$

$$S^3_{k,r} = \left\{(\Gamma^{(k,r)}, x_3)\colon\ x_3 \in Z_+,\ x_3 > L - \sum_{t=0}^{r} \ell(k,t,3)\right\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant d, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_k.$$

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 4.1. Множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i});$ $i \geqslant 0\}$ имеет вид $\left(\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant n_0} S^3_{0,r}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant d\\ 1\leqslant r\leqslant n_k}} S^3_{k,r}\right)$.

5. Рекуррентные соотношения для производящих функций последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$

Пусть $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $x_3 \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \{\gamma \in \Gamma\colon h(\gamma, x_3) = \Gamma^{(k,r)}\}.$$

Тогда из определения (1.2) находим явный вид множества для различных $\Gamma^{(k,r)}$ и x_3:

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \begin{cases} \{\Gamma^{(k_1,r_1)}, \Gamma^{(0,r\ominus_0 1)}\}, & \text{если } (k = 0 \;\&\; x_3 \leqslant L); \\ \{\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}, \Gamma^{(0,r_2)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{I}} \;\&\; x_3 > L); \\ \{\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}}) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{N}}); \\ \varnothing, & \text{если } (k = 0 \,\&\, x_3 > L) \\ & \quad \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{I}} \,\&\, x_3 \leqslant L), \end{cases} \tag{5.1}$$

где k_1, r_1 таковы, что $h_1(\Gamma^{(k_1,r_1)}) = r$, и r_2 таково, что $h_3(r_2) = \Gamma^{(k,r)}$.

Обозначим для $\gamma \in \Gamma$ и $x_3 \in \mathbb{Z}_+$

$$Q_{3,i}(\gamma, x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$ и $\tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для переходных вероятностей $\{Q_{3,i}(\cdot,\cdot)\}$, $i \geqslant 0$ марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) = (1 - \delta_{\tilde{x}_3,0}) \sum_{x_3=0}^{\tilde{x}_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) + \\ + \delta_{\tilde{x}_3,0} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) &= \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3) = \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3) \times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3) = \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \delta_{\tilde{\gamma},h(\gamma,x_3)} \times \mathbf{P}(\varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3). \end{aligned}$$

Тогда из определения $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)$ следует, что

$$Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) = \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \mathbf{P}(\varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3)$$

и учитывая равенство (2.24) продолжаем цепочку выкладок

$$\begin{aligned} Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}, x_3, \tilde{x}_3) = \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times [(1 - \delta_{\tilde{x}_3,0}) \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) + \\ &\qquad + \delta_{\tilde{x}_3,0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})]. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_3(x,t)=0$ для $x<0$, получаем утверждение теоремы

$$Q_{3,i+1}(\tilde\gamma,\tilde x_3)=(1-\delta_{\tilde x_3,0})\sum_{x_3=0}^{\tilde x_3+\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\times\varphi_3(\tilde x_3+\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3,T^{(\tilde k,\tilde r)})+\\+\delta_{\tilde x_3,0}\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\sum_{a=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde k,\tilde r)}).$$

□

Пусть k и r таковы, что $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$. Введем производящую функцию

$$\mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v)=\sum_{w=0}^{\infty}Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r)},w)v^w,$$

вспомогательные функции

$$q_{k,r}(v)=v^{-\ell(k,r,3)}\sum_{w=0}^{\infty}\varphi_3(w,T^{(k,r)})v^w.$$

а также для чисел k_1, r_1 и r_2, удовлетворяющих соотношениям $h_1(\Gamma^{(k_1,r_1)})=\tilde r$ и $h_3(r_2)=\Gamma^{(\tilde k,\tilde r)}$, определим функции

$$\tilde\alpha_i(\tilde k,\tilde r,v)=\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\sum_{a=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde k,\tilde r)})-\\-\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3-\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\sum_{w=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde k,\tilde r)})v^w\quad(5.4)$$

$$\alpha_i(0,\tilde r,v)=\tilde\alpha_i(0,\tilde r,v)+q_{0,\tilde r}(v)\times\sum_{x_3=0}^{L}\Big[Q_{3,i}(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3)+Q_{3,i}(\Gamma^{(0,\tilde r\ominus_0 1)},x_3)\Big]v^{x_3},\\ \Gamma^{(0,\tilde r)}\in\Gamma.\quad(5.5)$$

$$\alpha_i(\tilde k,\tilde r,v)=\tilde\alpha_i(\tilde k,\tilde r,v)-q_{\tilde k,\tilde r}(v)\sum_{x_3=0}^{L}\Big[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)},x_3)+Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\Big]v^{x_3}+\\+q_{\tilde k,\tilde r}(v)\sum_{x_3\geqslant 0}Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)v^{x_3},\quad\Gamma^{(\tilde k,\tilde r)}\in C_{\tilde k}^{\mathrm{I}}\quad(5.6)$$

$$\alpha_i(\tilde{k},\tilde{r},v)=\tilde{\alpha}_i(\tilde{k},\tilde{r},v),\quad \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}\cup C^{\mathrm{N}}_{\tilde{k}} \tag{5.7}$$

Теорема 5.2. Пусть $\tilde{\gamma}=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in\Gamma$. Тогда имеют место следующие рекуррентные по $i\geqslant 0$ соотношения для производящих функций Марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$:

1) для $\Gamma^{(0,\tilde{r})}\in\Gamma$, $\tilde{r}=\overline{1,n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(0,\tilde{r},v)=\alpha_i(0,\tilde{r},v); \tag{5.8}$$

2) для $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in\Gamma$, $\tilde{k}=\overline{1,d}$, $\tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}$

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)=q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v)\times\mathfrak{M}^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,v)+\alpha_i(\tilde{k},\tilde{r},v); \tag{5.9}$$

Доказательство. Учитывая рекуррентные соотношения (5.3), выпишем

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)=\sum_{w=0}^{\infty}Q_{3,i+1}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},w)v^w=Q_{3,i+1}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},0)+\sum_{w=1}^{\infty}Q_{3,i+1}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},w)v^w=\\=\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})+\\+\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\times\varphi_3(w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^w.\end{gathered} \tag{5.10}$$

После изменения порядка суммирования по x_3 и w второе слагаемое распадается еще на два слагаемых

$$\begin{gathered}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\times\varphi_3(w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^w=\\=\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\times\varphi_3(w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^w+\\+\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty}\sum_{w=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\times\varphi_3(w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^w.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Преобразуем их.

$$\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\times\varphi_3(w+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^w=$$

$$= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{w=1}^{\infty} \varphi_3(w + \ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w =$$

$$= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1-x_3}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w. \quad (5.12)$$

Аналогично для второго слагаемого

$$\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty} \sum_{w=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w =$$

$$= \sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w =$$

$$= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w -$$

$$- \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w \quad (5.13)$$

Подставляя упрощенные выражения (5.12) и (5.13) в равенство (5.11), и затем равентсво (5.11) в последнее равенство (5.10), получим:

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v) = \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) +$$

$$+ \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1-x_3}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w +$$

$$+ \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w -$$

$$- \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^w.$$

Сгруппируем второе и четвертое слагаемые:

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)=\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})+$$
$$+\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}[\sum_{w=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1-x_3}^{\infty}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^{w}-$$
$$-\sum_{w=0}^{\infty}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^{w}]+q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v)\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3}$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)=\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)\sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})-$$
$$-\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v^{w}+$$
$$+q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v)\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3}=\tilde{\alpha}_i(\tilde{k},\tilde{r},v)+q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v)\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3}. \tag{5.14}$$

Рассмотрим более подробно сумму $\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3}$ в зависимости от $\tilde{\gamma}$. В случае, если $\tilde{\gamma}=\Gamma^{(0,\tilde{r})}$, то из определения $\mathbb{H}_{-1}(\cdot,\cdot)$ следует, что $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\{\Gamma^{(k_1,r_1)},\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)}\}$ для $x_3\leqslant L$ и $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\emptyset$ для $x_3>L$. Здесь пара (k_1,r_1) такая, что $h_1(\Gamma^{(k_1,r_1)})=\tilde{r}$. Тогда сумма примет вид

$$\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3}=\sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_{3,i}(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3)+Q_{3,i}(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_3)\right]v^{x_3}. \tag{5.15}$$

В случае, если $\tilde{\gamma}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}}$, из определения $\mathbb{H}_{-1}(\cdot,\cdot)$ находим, что $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\emptyset$ для $x_3\leqslant L$ и $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\{\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},\Gamma^{(0,r_2)}\}$ для $x_3>L$. Здесь r_2 таково, что $h_3(r_2)=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}$. Сумма принимает вид

$$\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)} Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3} = \sum_{x_3=L+1}^{\infty}\left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)},x_3)+Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\right]v^{x_3} =$$
$$= \sum_{x_3=0}^{\infty}\left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)},x_3)+Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\right]v^{x_3} -$$
$$- \sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)},x_3)+Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\right]v^{x_3}. \quad (5.16)$$

И, наконец, если $\tilde\gamma \in C^{\mathrm{O}}_{\tilde k}\cup C^{\mathrm{N}}_{\tilde k}$, то $\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3) = \{\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)}\}$ для всех $x_3 \geqslant 0$. Тогда сумма будет выглядеть следующим образом

$$\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)} Q_{3,i}(\gamma,x_3)v^{x_3} = \sum_{x_3=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)},x_3)v^{x_3}. \quad (5.17)$$

Подставляя найденные выражения (5.15), (5.16) и (5.17) в правую часть равенств (5.14), получаем утверждение теоремы. □

6. Достаточное условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$

Получение достаточных условий будет проведено с использованием итеративно-мажорантного подхода ([56, 57]). В основе этого подхода лежит изучение динамики одномерных сечений счетной марковской цепи.

Лемма 6.1. Для величин $\alpha_i(k,r,v)$, $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$, некоторого фиксированного $0 < \varepsilon_0 < 1$, существуют конечные постоянные $M(k,r)$, $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$, не зависящих от v и i, такие, что верны следующие неравенства равномерно для всех $i\geqslant 0$ и $1-\varepsilon_0 < v < 1+\varepsilon_0$:

$$|\alpha_i(k,r,v)| \leqslant M(k,r), \quad (6.1)$$

Доказательство. Начнем с оценки величины $\tilde\alpha_i(k,r,v)$, входящей в выражение для всех величин $\alpha_i(k,r,v)$. Из определения величин $\tilde{\alpha}_i(k,r,v)$ имеем

$$|\tilde{\alpha}_i(k,r,v)| \leqslant \left|\sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)},x_3)} Q_{3,i}(\gamma,x_3) \sum_{a=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(a,T^{(k,r)})\right| +$$
$$+ \left|\sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)},x_3)} Q_{3,i}(\gamma,x_3) v^{x_3-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(w,T^{(k,r)}) v^w\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)},x_3)} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(a,T^{(k,r)})\right| +$$
$$+ \left|\sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)},x_3)} v^{x_3-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(w,T^{(k,r)}) v^w\right|,$$

где правая часть последнего неравенства ограничена и не зависит от i. Поскольку все суммы состоят из конечного числа ограниченных слагаемых, то

$$|\tilde{\alpha}_i(k,r,v)| \leqslant \tilde{M}(k,r)$$

для некоторой конечной величины $\tilde{M}(k,r)$.

Теперь рассмотрим оставшиеся величины. Для $\Gamma^{(0,r)} \in \Gamma$, $r=\overline{1,n_0}$:

$$|\alpha_i(0,r,v)| = |\tilde{\alpha}_i(0,r,v) + q_{0,r}(v) \times \sum_{x_3=0}^{L} \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r\ominus_0 1)},x_3)\right] v^{x_3}|$$

Поскольку $\tilde{\alpha}_i(0,r,v)$ ограничена, а приведенная сумма состоит из конечного числа ограниченных слагаемых, то для ограниченности $|\alpha_i(0,r,v)|$ достаточно показать ограниченность $|q_{0,r}(v)|$. Учитывая определение $\varphi_3(\cdot,\cdot)$, имеем

$$|q_{k,r}(v)| = |v^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w,T^{(k,r)}) v^w| = |v^{-\ell(k,r,3)} \exp\left(\lambda_3 T^{(k,r)}(f_3(v)-1)\right) \leqslant$$
$$\leqslant |(1-\varepsilon_0)^{-\ell(k,r,3)} \exp\left(\lambda_3 T^{(k,r)}(f_3(1+\varepsilon_0)-1)\right),$$

где последнее выражение, очевидно, ограничено, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Следовательно,

$$|\alpha_i(0,r,v)| \leqslant M(0,r).$$

Для $\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{I}}$ имеем:

$$|\alpha_i(k,r,v)| = |\tilde{\alpha}_i(k,r,v) - q_{k,r}(v) \sum_{x_3=0}^{L} \Big[Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_3) \Big] v^{x_3} +$$
$$+ q_{k,r}(v) \sum_{x_3 \geqslant 0} Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r)}, x_3) v^{x_3}| = |\tilde{\alpha}_i(k,r,v) -$$
$$- q_{k,r}(v) \sum_{x_3=0}^{L} \Big[Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_3) \Big] v^{x_3} + q_{k,r}(v) \times \mathfrak{M}^{(3,i)}(0,r,v)|.$$

Поскольку $\mathfrak{M}^{(3,i)}(0,r,v) = \alpha_{i-1}(0,r,v)$, то

$$|\alpha_i(k,r,v)| = |\tilde{\alpha}_i(k,r,v) q_{k,r}(v) \sum_{x_3=0}^{L} \Big[Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_3) \Big] v^{x_3} +$$
$$+ q_{k,r}(v) \times \alpha_{i-1}(0,r,v)|,$$

где все слагаемые ограничены в силу уже доказанного. Значит,

$$|\alpha_i(k,r,v)| \leqslant M(k,r), \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{I}}.$$

В выражении $|\alpha_i(k,r,v)|$ для $\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{N}}$, все величины также ограничены, следовательно,

$$|\alpha_i(k,r,v)| \leqslant M(k,r), \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{N}}.$$

Этим завершается доказательство.

□

Найденные рекуррентные соотношения для производящих функций позволяют сформулировать и доказать следующую теорему:

Теорема 6.1. Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имела стационарное распределение $Q(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$ достаточно выполнения неравенства

$$\min_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \tag{6.2}$$

Доказательство. Предположим обратное, а именно, что при выполнении условия (6.2) марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ не имеет стационарного распределения. Тогда для любого состояния $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$ и независимо от начального распределения

$\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,0} = x)$, $(\Gamma^{(k,r)}, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, имеют место предельные равенства

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+. \tag{6.3}$$

Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть все возможные случаи, предполагая апериодичность рассматриваемой цепи (см. рассуждения [64, гл. 3, § 3-4]):

1) все состояния цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ невозвратные, тогда предельные соотношения выполняются в силу [64, с. 541, лемма 2];

2) существует хотя бы одно возвратное состояние, тогда все состояния возвратные (поскольку все состояния сообщающиеся); и пусть все состояния нулевые, тогда предельное соотношение также выполняется [64, с. 541, лемма 3];

3) все состояния возвратные и существует хотя бы одно положительное, тогда все состояния положительные и пределы $\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x) > 0$ являются стационарными вероятностями ([64, с. 549, теорема 1]), что противоречит предположению.

Для периодической цепи приведенные рассуждения достаточно провести для циклических подклассов.

Выберем это начальное распределение так, что при некотором $v_0 > 1$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{M}^{(3,0)}(k, r, v_0) < \infty$ для всех $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Это ограничение, в силу теоремы (8.3), обеспечивает при любом конечном $i \geqslant 0$ существование функций

$$\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v), \quad \frac{d}{dv}\left[\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v)\right], \quad \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma, \tag{6.4}$$

по крайней мере в некоторой окрестности точки $v = 1$.

В силу равенств (6.3) для любого натурального N найдется некоторое число $\mathfrak{I}$, что для всех $i > \mathfrak{I}$ будет $1 > (1+N)\sum_{x=0}^{N}\sum_{\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x)$ и, значит,

$1 > (1+N)\sum_{x=0}^{N}\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x)$. Тогда

$$E[\varkappa_{3,i}] = \sum_{x=0}^{\infty} x\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x) = \sum_{x=0}^{N} x\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x) + \sum_{x=N+1}^{\infty} x\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{x=N+1}^{\infty} x\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x) \geqslant \sum_{x=N+1}^{\infty}(N+1)\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x) \geqslant (N+1)\sum_{x=N+1}^{\infty}\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x) =$$
$$= (N+1)\left(1-\sum_{x=0}^{N}\mathbf{P}(\varkappa_{3,i}=x)\right) \geqslant (N+1)\left(1-\frac{1}{N+1}\right) = N$$

Следовательно, $E[\varkappa_{3,i}]$ неограниченно возрастает при $i\to\infty$.

Другое рассуждение, однако, приводит к противоположному результату. Действительно, при $\min_{k=\overline{1,d}}\frac{\sum_{r=1}^{n_k}\ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1)\sum_{r=1}^{n_k}T^{(k,r)}} > 1$ имеем для $k=\overline{1,d}$:

$$\left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v)\right)'\Bigg|_{v=1} = \left(\prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k,r,3)}\sum_{w=0}^{\infty}\varphi_3(w,T^{(k,r)})v^w\right)'\Bigg|_{v=1} =$$
$$= \left(\prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k,r,3)}\exp(\lambda_3 T^{(k,r)}(f_3(v)-1))\right)'\Bigg|_{v=1} =$$
$$= \left(v^{-\sum_{r=1}^{n_k}\ell(k,r,3)}\exp(\lambda_3(f_3(v)-1)\sum_{r=1}^{n_k}T^{(k,r)})\right)'\Bigg|_{v=1} =$$
$$= \lambda_3 f_3'(1)\sum_{r=1}^{n_k}T^{(k,r)} - \sum_{r=1}^{n_k}\ell(k,r,3) < 0. \quad (6.5)$$

Пусть $\mathfrak{M}_+^{(3,0)}(k,r,v) = \mathfrak{M}^{(3,0)}(k,r,v)$. В некоторй окрестности точки $v=1$ последовательности $\left\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,r,v)\colon i\geqslant 0\right\}$, $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$, рекуррентного отображения

1) для $\Gamma^{(0,r)}\in\Gamma$
$$\mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(0,r,v) = M(0,r);$$

2) для $\Gamma^{(k,r)}\in C_k$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,d$,
$$\mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k,r,v) = q_{k,r}(v)\times\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,r\ominus_k 1,v) + M(k,r);$$

будут мажорантными соответственно для последовательностей $\{\mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v)\colon i\geqslant 0\}$, $\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$, рекуррентного отображения из теоремы 8.3.

Из приведенного рекуррентного отображения для мажорантной последовательности видно, что компонента $\mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k,r,v)$ зависит только от величины $\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,r\ominus_k$

$1, v)$ того же цикла C_k, $k = \overline{1, d}$, и не зависит от величин других циклов. И поскольку числа $M(k, r)$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, конечны и не зависят от v и i, для сходимости всего мажорантного отображения $\left\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v)\colon i \geqslant 0\right\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, достаточно сходимости для каждого $k = \overline{1, d}$ подблока $\left\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v)\colon i \geqslant 0\right\}$, $r = \overline{1, n_k}$.

Пусть $k = \overline{1, d}$ фиксировано. В матричном виде рекуррентное отображение для блока $\left\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v)\colon i \geqslant 0\right\}$, $r = \overline{1, n_k}$, будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k,1,v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k,2,v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k,3,v) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k,n_k,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & q_{k,1} \\ q_{k,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_{k,3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{k,n_k} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,1,v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,2,v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,3,v) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k,n_k,v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(k,1) \\ M(k,2) \\ M(k,3) \\ \dots\dots\dots \\ M(k,n_k) \end{bmatrix}$$

Тогда характеристический многочлен для этого отображения легко подсчитывается и имеет вид

$$x^{n_k} - \prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v),$$

и приравнивая его к нулю, находим, что норма всех собственных чисел одинакова и равна $\left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v)\right)^{1/n_k}$. В точке $v = 1$ модуль собственного числа $|\left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v)\right)^{1/n_k}|$ равен 1, а его производная

$$\left(\frac{1}{n_k}\left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v)\right)^{1/n_k - 1} \times \left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v)\right)'\right)\Bigg|_{v=1} = \frac{1}{n_k}\left(\lambda_3 f_3'(1)\sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)\right),$$

в соответствии с условием (6.5), отрицательна.

Следовательно, в некоторой правой окрестности $v \in (1, 1+\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 > 0$, точки $v = 1$ модуль всех собственных чисел $\left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v)\right)^{1/n_k}$, $k = \overline{1, d}$, будет меньше 1 и, значит, мажорантная последовательность сходится. Этот факт, в свою очередь, влечет сходимость исходной последовательности $\left\{\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v)\colon i \geqslant 0\right\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, для $v \in [1, 1+\varepsilon_1)$.

Последовательности $\left\{\mathfrak{M}_{+}^{(3,i)}(k,r,v_1)\colon i \geqslant 0\right\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, сходятся при $v_1 \in [1, 1+\varepsilon_1)$ и, следовательно, их сумма $\sum_{k,r} \mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v)$ при любом $i \geqslant 0$ является аналитической, ограниченной функцией. И поскольку

$$\sum_{k,r} \mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v) = \sum_{k,r} \sum_{w=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r)}, w) v^w = \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = w) v^w, \tag{6.6}$$

теперь без труда получается, что числовая последовательность

$$\left\{\sum_{k,r} \frac{d}{dv} \left(\mathfrak{M}^{(3,i)}(k,r,v)\right)_{v=1} = E[\varkappa_{3,i}]; i \geqslant 0\right\}$$

в силу интегральной формулы Коши равномерно по i ограничена некоторой постоянной величиной. Поэтому принятое предположение не будет справедливым. Доказательство этим завершается. □

7. Необходимое условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$

Теорема 7.1. Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имела стационарное распределение $Q_3(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$ необходимо выполнение неравенства

$$\max_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1.$$

Доказательство. Допустим, что стационарное распределение марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i});$ $i \geqslant 0\}$ существует. Тогда выбрав это распределение в качестве начального $Q_3(\gamma, w)$, $(\gamma, w) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, обеспечивается существование пределов

$$\lim_{i\to\infty} Q_{3,i}(\gamma, w) = Q_3(\gamma, w),$$

равных стационарным вероятностям соответствующих состояний.

Определив производящие функции

$$\mathfrak{M}^{(3)}(k,r,v)=\sum_{w=0}^{\infty}Q_3(\gamma,w)v^w,$$

можем переписать соотношения (5.8) и (5.9) в новом виде:

1) для $\Gamma^{(0,\tilde r)}\in\Gamma$, $\tilde r=\overline{1,n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(3)}(0,\tilde r,v)=\alpha(0,\tilde r,v); \tag{7.1}$$

2) для $\Gamma^{(\tilde k,\tilde r)}\in\Gamma$, $\tilde k=\overline{1,d}$, $\tilde r=\overline{1,n_{\tilde k}}$

$$\mathfrak{M}^{(3)}(\tilde k,\tilde r,v)=q_{\tilde k,\tilde r}(v)\times\mathfrak{M}^{(3)}(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1,v)+\alpha(\tilde k,\tilde r,v); \tag{7.2}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde\alpha(\tilde k,\tilde r,v)=&\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\ \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_3(\gamma,x_3)\sum_{a=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde k,\tilde r)})-\\&-\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\ \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde k,\tilde r)})v^{w-(\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3)}\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\alpha(0,\tilde r,v)=\tilde\alpha(0,\tilde r,v)+q_{0,\tilde r}(v)\times\sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3)+Q_3(\Gamma^{(0,\tilde r\ominus_0 1)},x_3)\right]v^{x_3},\quad \Gamma^{(0,\tilde r)}\in\Gamma. \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}\alpha(\tilde k,\tilde r,v)=&\tilde\alpha(\tilde k,\tilde r,v)-q_{\tilde k,\tilde r}(v)\sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_3(\Gamma^{(\tilde k,\tilde r\ominus_{\tilde k}1)},x_3)+Q_3(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\right]v^{x_3}+\\&+q_{\tilde k,\tilde r}(v)\mathfrak{M}^{(3)}(0,r_2,v),\quad \Gamma^{(\tilde k,\tilde r)}\in C_{\tilde k}^{\mathrm{I}}\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\alpha(\tilde k,\tilde r,v)=\tilde\alpha(\tilde k,\tilde r,v),\quad \Gamma^{(\tilde k,\tilde r)}\in C_{\tilde k}^{\mathrm{O}}\cup C_{\tilde k}^{\mathrm{N}} \tag{7.6}$$

Разложим функцию $q_{k,r}(v)$ по формуле Тейлора по степеням $(v-1)$

$$\begin{aligned}q_{k,r}(v)=&v^{-\ell(k,r,3)}\exp\left(\lambda_3T^{(k,r)}(f_3(v)-1)\right)=\\&=1+(\lambda_3T^{(k,r)}f_3'(1)-\ell(k,r,3))(v-1)+O((v-1)^2)).\end{aligned}$$

Просуммируем соотношения (7.1) и (7.2)

$$\sum_{k=0}^{d}\sum_{r=1}^{n_k}\mathfrak{M}^{(3)}(k,r,v)=\sum_{r=1}^{n_0}\alpha(0,r,v)+\sum_{k=1}^{d}\sum_{r=1}^{n_k}\big[q_{k,r}(v)\mathfrak{M}(k,r\ominus_k 1,v)+\alpha(k,r,v)\big]=$$
$$=\sum_{k=1}^{d}\sum_{r=1}^{n_k}q_{k,r}(v)\mathfrak{M}(k,r\ominus_k 1,v)+\sum_{k=1}^{d}\sum_{r=1}^{n_k}\alpha(k,r,v)+\sum_{r=1}^{n_0}\alpha(0,r,v). \quad (7.7)$$

Разложим по формуле Тейлора слагаемые $\sum_{k=1}^{d}\sum_{r=1}^{n_k}\alpha(k,r,v)$ и $\sum_{r=1}^{n_0}\alpha(0,r,v)$.

$$\tilde{\alpha}(\tilde{k},\tilde{r},v)=\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(1-v^{w-(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3)})=$$
$$=-(v-1)\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(w-(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3))+$$
$$+O((v-1)^2).$$

В частности, для $k=0$ величина $\ell(k,r,3)$ равна нулю, поэтому $\tilde{\alpha}(0,r,v)=O((v-1)^2)$.

Теперь непосредственно

$$\sum_{\tilde{r}=1}^{n_0}\alpha(0,\tilde{r},v)=\sum_{\tilde{r}=1}^{n_0}q_{0,\tilde{r}}(v)\times\sum_{x_3=0}^{L}\big[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3)+Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_3)\big]v^{x_3}+O((v-1)^2)=$$
$$=\sum_{\tilde{r}=1}^{n_0}(1+(\lambda_3T^{(0,\tilde{r})}f_3'(1)-\ell(0,\tilde{r},3))(v-1))\times\sum_{x_3=0}^{L}\Big[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3)+Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_3)\Big]v^{x_3}+O((v-1)^2).$$

$$\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}}}\alpha(\tilde{k},\tilde{r},v)=$$
$$=\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}}}q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v)\Big[\mathfrak{M}^{(3)}(0,r_2,v)-\sum_{x_3=0}^{L}\big(Q_3(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_3)+Q_3(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\big)v^{x_3}\Big]+$$
$$+\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}}}\tilde{\alpha}(\tilde{k},\tilde{r},v)=\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}}}(1+(\lambda_3T^{(\tilde{k},\tilde{r})}f_3'(1)-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3))(v-1))\times$$
$$\times\Big[\mathfrak{M}^{(3)}(0,r_2,v)-\sum_{x_3=0}^{L}\big(Q_3(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_3)+Q_3(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\big)v^{x_3}\Big]-$$
$$-(v-1)\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}}}\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(w-(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3))+$$
$$+O((v-1)^2)$$

$$\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}} \alpha(\tilde{k},\tilde{r},v) = \sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}} \tilde{\alpha}(\tilde{k},\tilde{r},v) =$$

$$= -(v-1) \sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_3(\gamma,x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(w-(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3))+ \\ + O((v-1)^2)$$

Подставим получившиеся соотношения в выражение (7.7). Поскольку любому входному состоянию системы соответсвует одно и только одно состояние продления и наоборот, то выражение (7.7) примет вид:

$$0 = O((v-1)^2) + (v-1)\sum_{\tilde{k}=1}^{d}\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}}(\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))\mathfrak{M}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}} 1, v)+ \\ + (v-1)\sum_{\tilde{r}=1}^{n_0}(\lambda_3 T^{(0,\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(0,\tilde{r},3)) \times \sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3) + Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_3)\right] v^{x_3}+ \\ + (v-1) \sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\,\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))\times \\ \times\left[\mathfrak{M}(0,r_2,v) - \sum_{x_3=0}^{L}\big(Q_3(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_3) + Q_3(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\big)v^{x_3}\right]- \\ - (v-1)\sum_{\tilde{k}=1}^{d}\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}}\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(w-(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3)) \tag{7.8}$$

Разделим обе части равенства на $(v-1)$, устремим v к единице и сгруппируем слагаемые.

$$0 = \sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\ \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))\times$$

$$\times\left[\mathfrak{M}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,1) - \sum_{x_3=0}^{L} Q_3(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_3) + \mathfrak{M}(0,r_2,1) - \sum_{x_3=0}^{L} Q_3(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\right]+$$

$$+\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\ \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}\cup C^{\mathrm{N}}_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))\mathfrak{M}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,1)+$$

$$+\sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \lambda_3 T^{(0,\tilde{r})} f_3'(1)\times\sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3) + Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_3)\right]+$$

$$+\sum_{\tilde{k}=1}^{d}\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}}\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3-w) \quad (7.9)$$

Подставим в (7.1) и (7.2) значение $v=1$:

$$\mathfrak{M}(0,r,1) = \sum_{x_3=0}^{L}\left(Q(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3) + Q(\Gamma^{(k,r\ominus_0 1)},x_3)\right),$$

$$\mathfrak{M}(k,r,1) = \mathfrak{M}(k,r\ominus_k 1,1) + \mathfrak{M}(0,r_2,1) - \sum_{x_3=0}^{L}\left(Q(\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)},x_3) + Q(\Gamma^{(0,r_2)},x_3)\right),\quad \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}}$$

$$\mathfrak{M}(k,r,1) = \mathfrak{M}(k,r\ominus_k 1,1),\quad \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}\bigcup C^{\mathrm{N}}_{\tilde{k}}.$$

Из последнего равенства следует, что $\mathfrak{M}(k,n_k,1) = \mathfrak{M}(k,n_k\ominus_k 1,1) = \ldots = \mathfrak{M}(k,1,1) = M_k$. Упростим с помощью получившихся равенств выражение (7.9):

$$0 = \sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\ \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))\times M_{\tilde{k}}+$$

$$+\sum_{\tilde{k},\tilde{r}:\ \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}\cup C^{\mathrm{N}}_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))M_{\tilde{k}}+$$

$$+\sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \lambda_3 T^{(0,\tilde{r})} f_3'(1)\times\sum_{x_3=0}^{L}\left[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_3) + Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_3)\right]+$$

$$+\sum_{\tilde{k}=1}^{d}\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}}\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3-w) \quad (7.10)$$

Сгруппируем слагаемые:

$$0 = \sum_{\tilde{k}=1}^{d}\Bigg(M_{\tilde{k}} \times \sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}}(\lambda_3 T^{(\tilde{k},\tilde{r})} f_3'(1) - \ell(\tilde{k},\tilde{r},3))\Bigg) +$$
$$+ \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \lambda_3 T^{(0,\tilde{r})} f_3'(1) \times \sum_{x_3=0}^{L}\Big[Q_3(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)}, x_3)\Big] +$$
$$+ \sum_{\tilde{k}=1}^{d}\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}}\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_3(\gamma,x_3)\sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3}\varphi_3(w,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3-w) \quad (7.11)$$

Предположение, что для любых $\tilde{k} = \overline{1;d}$ выражение $\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k},\tilde{r},3)\big/\lambda_3 f_3'(1)\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} T^{(\tilde{k},\tilde{r})}$ меньше либо равно 1, приводит к невозможному выводу $Q_3(\Gamma^{(0,1)}, 0) = 0$. Что и требовалось доказать.

□

8. Учтем первую очередь

Докажем марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$.

Теорема 8.1. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $(\varkappa_{1,0}, \varkappa_{3,0}) = (x_{1,0}, x_{3,0}) \in \mathbb{Z}_+^2$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Действительно, поскольку Γ_{i+1} функционально выражается через Γ_i и $\varkappa_{3,i}$ (см. (2.1)), то

$$\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \delta_{\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})} \times \mathbf{P}(\{\varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}),$$

для $\Gamma^{(k_i,r_i)} \in \Gamma$, $(x_{1,i}, x_{3,i}) \in \mathbb{Z}_+^2$, $i \geqslant 0$. Учитывая равенство (2.25), убеждаемся, что вероятность

$$\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\}|\cap_{t=0}^{i}\{\Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \delta_{\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})},h(\Gamma^{(k_i,r_i)},x_{3,i})} \times \widetilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1})\times$$
$$\times \widetilde{\varphi}_1(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{1,i}, x_{1,i+1})$$

зависит только от значений $(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i})$ и $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1})$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^{i} \{\Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} |$$
$$\{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} |$$
$$| \cap_{t=0}^{i} \{\Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_{1,t} = x_{1,t}, \varkappa_{3,t} = x_{3,t}\}),$$

что доказывает марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$. $\square$

Обозначим для $\gamma \in \Gamma$ и $(x_1, x_3) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3). \tag{8.1}$$

Теорема 8.2. Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \in \mathbb{Z}_+^2$. Тогда для переходных вероятностей $\{Q_{1,i}(\cdot,\cdot,\cdot)\}_{i\geqslant 0}$ марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times$$
$$\times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}), \quad \tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_3 = 0,$$

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{x_3=0}^{\tilde{x}_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times$$
$$\times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}), \quad \tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_3 > 0,$$

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \sum_{x_1=0}^{\tilde{x}_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times$$
$$\times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \varphi_1(\tilde{x}_1 + \ell(\tilde{k},\tilde{r},1) - x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}), \quad \tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_3 = 0,$$

$$Q_{1,i+1}(\tilde\gamma,\tilde x_1,\tilde x_3)=\sum_{x_1=0}^{\tilde x_1+\ell(\tilde k,\tilde r,1)}\sum_{x_3=0}^{\tilde x_3+\ell(\tilde k,\tilde r,3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(\tilde x_3+\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3,T^{(\tilde k,\tilde r)})\times\varphi_1(\tilde x_1+\ell(\tilde k,\tilde r,1)-x_1,T^{(\tilde k,\tilde r)}),\quad \tilde x_1>0,\tilde x_3>0.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$Q_{1,i+1}(\tilde\gamma,\tilde x_1,\tilde x_3)=\mathbf{P}(\Gamma_{i+1}=\tilde\gamma,\varkappa_{1,i+1}=\tilde x_1,\varkappa_{3,i+1}=\tilde x_3)=$$
$$=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\Gamma}\mathbf{P}(\Gamma_i=\gamma,\varkappa_{1,i}=x_1,\varkappa_{3,i}=x_3)\times$$
$$\times\mathbf{P}(\Gamma_{i+1}=\tilde\gamma,\varkappa_{1,i+1}=\tilde x_1,\varkappa_{3,i+1}=\tilde x_3|\Gamma_i=\gamma,\varkappa_{1,i}=x_1,\varkappa_{3,i}=x_3)=$$
$$=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\Gamma}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times\delta_{\tilde\gamma,h(\gamma,x_3)}\times$$
$$\times\mathbf{P}(\varkappa_{1,i+1}=\tilde x_1,\varkappa_{3,i+1}=\tilde x_3|\Gamma_i=\gamma,\varkappa_{1,i}=x_1,\varkappa_{3,i}=x_3).$$

Тогда из определения $\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)$ следует, что

$$Q_{1,i+1}(\tilde\gamma,\tilde x_1,\tilde x_3)=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times$$
$$\times\mathbf{P}(\varkappa_{1,i+1}=\tilde x_1,\varkappa_{3,i+1}=\tilde x_3|\Gamma_i=\gamma,\varkappa_{1,i}=x_1,\varkappa_{3,i}=x_3)$$

и учитывая (2.25) продолжаем цепочку выкладок

$$Q_{1,i+1}(\tilde\gamma,\tilde x_1,\tilde x_3)=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times\tilde\varphi_3(\tilde k,\tilde r,T^{(\tilde k,\tilde r)},x_3,\tilde x_3)\times$$
$$\times\tilde\varphi_1(\tilde k,\tilde r,T^{(\tilde k,\tilde r)},x_1,\tilde x_1)=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde\gamma,x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times$$
$$\times[(1-\delta_{\tilde x_3,0})\varphi_3(\tilde x_3+\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3,T^{(\tilde k,\tilde r)})+\delta_{\tilde x_3,0}\sum_{a=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,3)-x_3}\varphi_3(a,T^{(\tilde k,\tilde r)})]\times$$
$$\times[(1-\delta_{\tilde x_1,0})\varphi_1(\tilde x_1+\ell(\tilde k,\tilde r,1)-x_1,T^{(\tilde k,\tilde r)})+\delta_{\tilde x_1,0}\sum_{a=0}^{\ell(\tilde k,\tilde r,1)-x_1}\varphi_1(a,T^{(\tilde k,\tilde r)})].$$

Поскольку $\varphi_i(x,t)=0$ для $x<0$, $i=1,2$, получаем утверждение теоремы. □

Пусть k и r таковы, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Введем производящие функции

$$\mathfrak{M}_1^{(3,i)}(k,r,v_1,v_3) = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) v_1^{w_1} v_3^{w_3},$$

вспомогательные функции

$$q_{k,r}(1,v_1,v_3) = v^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^w.$$

и

$$\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3) = \sum_{w_3=0}^{\infty} Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma},0,w_3) v_3^{w_3} + \sum_{w_1=1}^{\infty} Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma},w_1,0) v_1^{w_1} +$$
$$+ \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{w_3=1}^{\infty} \sum_{w_1=1}^{\infty} \sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3) \times$$
$$\times \varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times v_1^{w_1} v_3^{w_3} +$$
$$+ \sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty} \sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty} \sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{w_1=1}^{\infty} \sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3) \times$$
$$\times \varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times v_1^{w_1} v_3^{w_3} -$$
$$- \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty} \sum_{w_1=x_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3) \times$$
$$\times \varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times v_1^{w_1} v_3^{w_3} -$$
$$\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty} \sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty} \sum_{w_1=x_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3) \times$$
$$\times \varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times \varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \times v_1^{w_1} v_3^{w_3}$$

$$\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3) = \sum_{x_3=0}^{L} \sum_{x_1=0}^{\infty} [Q_{1,i}(\Gamma^{(k_1,r_1)}, x_1, x_3) +$$
$$+ Q_{1,i}(\Gamma^{(0,\tilde{r} \ominus_0 1)}, x_1, x_3)] \times v_1^{x_1} v_3^{x_3}, \quad \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{r} = \overline{1,n_0};$$

$$\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3) = -\sum_{x_3=0}^{L-1} \sum_{x_1=0}^{\infty} [Q_{1,i}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_1, x_3) + Q_{1,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_1, x_3)] \times v_1^{x_1} v_3^{x_3}, \quad \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}};$$

$$\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)=0, \quad \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}};$$

Теорема 8.3. Пусть $\tilde{\gamma}=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in\Gamma$. Тогда имеют место следующие рекуррентные по $i\geqslant 0$ соотношения для производящих функций марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$:

1) для $\Gamma^{(0,\tilde{r})}\in\Gamma$, $\tilde{r}=\overline{1,n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(0,\tilde{r},v)=q^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1)q^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_3)\times\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)+\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3);$$

2) для $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{I}}_{\tilde{k}}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)=q^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1)q^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_3)\times[\mathfrak{M}^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,v_1,v_3)+\\ +\mathfrak{M}^{(1,i)}(0,r_2,v_1,v_3)+\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)]+\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3);\end{aligned}$$

3) для $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}\in C^{\mathrm{O}}_{\tilde{k}}\cup C^{\mathrm{N}}_{\tilde{k}}$

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v)=q^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1)q^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_3)\times\mathfrak{M}^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,v_1,v_3)+\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3);$$

Доказательство. В соответствии с теоремой (8.2) выделим из суммы

$$\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)=\sum_{w_1=0}^{\infty}\sum_{w_3=0}^{\infty}Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma},w_1,w_3)v_1^{w_1}v_3^{w_3}.$$

слагаемое вида

$$\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{w_3=1}^{\infty}Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma},w_1,w_3)v_1^{w_1}v_3^{w_3}$$

и исследуем его. Из теоремы (8.2) следует:

$$\begin{aligned}\sum_{w_3=1}^{\infty}\sum_{w_1=1}^{\infty}Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma},w_1,w_3)\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}=\sum_{w_3=1}^{\infty}\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\sum_{x_3=0}^{w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times\\ \times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}\end{aligned}$$

Поменяв порядок суммирования по w_3 и x_3, получим

$$\sum_{w_3=1}^{\infty}\sum_{w_1=1}^{\infty} Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, w_1, w_3)\times v_1^{w_1}v_3^{w_3} = \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\sum_{w_3=1}^{\infty}\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}+$$
$$+\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty}\sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty}\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}$$

Во втором слагаемом поменяем порядок суммирования по w_1 и x_1:

$$\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty}\sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty}\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3} =$$
$$=\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty}\sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\sum_{w_1=1}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}+$$
$$+\sum_{x_3=\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)+1}^{\infty}\sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty}\sum_{x_1=\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)+1}^{\infty}\sum_{w_1=x_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}$$

Таким образом:

$$\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3) = \sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{w_3=x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}^{\infty}\sum_{w_1=x_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)\times$$
$$\times\varphi_3(w_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times\varphi_1(w_1+\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)-x_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})})\times v_1^{w_1}v_3^{w_3}+\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3),$$

где к последней сумме мы добавили и вычли одно и то же выражение.

Сделаем замены переменных в индексах суммирования:

$$\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)=\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times v_1^{x_1-\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)}v_3^{x_3-\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)}\times$$

$$\times\sum_{w_3=0}^{\infty}\varphi_3(w_3,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v_3^{w_3}\times\sum_{w_1=0}^{\infty}\varphi_1(w_1,T^{(\tilde{k},\tilde{r})})v_1^{w_1}+\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)=$$

$$=q^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1)q^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_3)\times\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}+$$

$$+\alpha_1^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)$$

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от $\tilde{\gamma}$. Если $\tilde{\gamma}=\Gamma^{(0,\tilde{r})}$, то из определения $\mathbb{H}_{-1}(\cdot,\cdot)$ следует, что $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\{\Gamma^{(k_1,r_1)},\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)}\}$ для $x_3\leqslant L$ и $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\emptyset$ для $x_3>L$. Здесь пара (k_1,r_1) такая, что $h_1(\Gamma^{(k_1,r_1)})=\tilde{r}$. Тогда

$$\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}=\sum_{x_3=0}^{L}\sum_{x_1=0}^{\infty}[Q_{1,i}(\Gamma^{(k_1,r_1)},x_1,x_3)+$$

$$+Q_{1,i}(\Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)},x_1,x_3)]\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}=\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)$$

Если $\tilde{\gamma}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{I}}$, из определения $\mathbb{H}_{-1}(\cdot,\cdot)$ находим, что $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\emptyset$ для $x_3\leqslant L$ и $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\{\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},\Gamma^{(0,r_2)}\}$ для $x_3>L$. Здесь r_2 таково, что $h_3(r_2)=\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}$. Сумма принимает вид

$$\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)}Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}=\sum_{x_3=L}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}[Q_{1,i}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_1,x_3)+$$

$$+Q_{1,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_1,x_3)]\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}=\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}[Q_{1,i}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_1,x_3)+Q_{1,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_1,x_3)]\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}-$$

$$-\sum_{x_3=0}^{L-1}\sum_{x_1=0}^{\infty}[Q_{1,i}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_1,x_3)+Q_{1,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_1,x_3)]\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}=\mathfrak{M}^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,v_1,v_3)+$$

$$+\mathfrak{M}^{(1,i)}(0,r_2,v_1,v_3)-\sum_{x_3=0}^{L-1}\sum_{x_1=0}^{\infty}[Q_{1,i}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_1,x_3)+Q_{1,i}(\Gamma^{(0,r_2)},x_1,x_3)]\times v_1^{x_1}v_3^{x_3}=$$

$$=\mathfrak{M}^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,v_1,v_3)+\mathfrak{M}^{(1,i)}(0,r_2,v_1,v_3)+\alpha_2^{(3,i)}(\tilde{k},\tilde{r},v_1,v_3)$$

И, наконец, если $\tilde{\gamma}\in C_{\tilde{k}}^{\mathrm{O}}\cup C_{\tilde{k}}^{\mathrm{N}}$, то $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)=\{\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)}\}$ для всех $x_3\geqslant 0$. Тогда сумма будет выглядеть следующим образом

$$\sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{\gamma\in\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma},x_3)} Q_{1,i}(\gamma,x_1,x_3)\times v_1^{x_1}v_3^{x_3} =$$

$$= \sum_{x_3=0}^{\infty}\sum_{x_1=0}^{\infty} Q_{1,i}(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1)},x_1,x_3)\times v_1^{x_1}v_3^{x_3} = \mathfrak{M}^{(1,i)}(\tilde{k},\tilde{r}\ominus_{\tilde{k}}1,v_1,v_3)$$

□

9. Заключение

В приведенной работе был рассмотрен тандем систем массового обслуживания конкретного вида. Тандем был представлен в виде кибернетической управляющей системы, а вероятностное пространство, на котором реализуются введенные последовательности случайных величин и элементов, построено конструктивно. Доказана марковость как всей последовательности, включающей в себя состояние прибора и состояния всех очередей, так и последовательности, включающей в себя состояние прибора и состояние низко-приоритетной очереди. Найдены переходные вероятности марковской цепи с низкоприоритетной очередью, рекурретные соотношения для ее производящих функций, а также проведена классификация ее состояний по арифметическим свойствам последовательности. В результате была найдено достаточное условие существования стационарного распределения марковской цепи, включающей в себя состояние прибора и состояние низкоприоритетной очереди.

Литература

1. Erlang A.K. The Theory of Probabilities and Telephone Conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik, 1909. – V. 20. – P. 33-39.

2. Erlang A.K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // Elektrotkeknikeren, 1917. – V. 13. – P. 5-13.

3. Pollaczek F. Uber das warteproblem // Mathematische Zeitschrift, 1934. – V. 38. – №. 1. – P. 492-537.

4. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – Либроком, 2010. – 240 с.

5. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1966. —

243 с.

6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – ЛКИ, 2012. — 400 с.

7. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее применение. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.

8. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. – М.: Издательство РУДН, 1995. – 529 с.

9. Asmussen S. Applied probability and queues. – Springer Science and Business Media, 2008. – V. 51. – 438 p.

10. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – Рипол Классик, 1972. – 368 с.

11. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – Наука, 1980. – 384 с.

12. Darroch J.N. On the traffic-light queue // The Annals of Mathematical Statistics, 1964. – V. 35 – № 1. — P. 380-388.

13. Неймарк Ю.И., Федоткин М.А. О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке // Автоматика и телемеханика, 1967. – № 3. – С. 78—87.

14. Неймарк Ю.И., Преображенская А.М., Федоткин М.А. Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1968. – № 5. – С. 129—141.

15. Федоткин М.А. О существовании эргодического распределения в системе с переменной структурой обслуживания конфликтных потоков // Теория вероятн. и ее примен, 1976. – Т. 21 – В. 4. – С. 792—801.

16. Ferguson M.J., Aminetzah Y.J. Exact results for nonsymmetric token ring systems // IEEE Transactions on Communications, 1985. – V. 33. – № 3. – P. 223—231.

17. Takagi H. Mean message waiting times in symmetric multiqueue systems with cyclic service // Performance Evaluation, 1985. – V. 5. – № 4 – P. 271—277.

18. Якушев Ю.Ф. Об оптимальном обслуживании конфликтных потоков // Теория вероятн. и ее примен, 1990. – Т. 35 – В. 1 – С. 161–167.

19. Haight F.A. Mathematical Theories of Traffic Flow. – New York: Academic, 1963.

20. Drew D.R. Traffic Stream Theory and Control. – New York: McGraw-Hill – 1968.

21. Inose H., Hamada T. Road Traffic Control. – Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1975.

22. Fedotkin M.A. Математические модели на автомагистрали и на управляемом по циклическому алгоритму перекрестке // Нижегородский государственный уни-

верситет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2009. – 30 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 5-V2009.

23. Bartlett, M.S., The Spectral Analysis of Point Processes // J. R. Statist. Soc. B, 1963. – V. 25. – № 2. – P. 264–296.

24. Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., Rachinskaya M.A. About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway // Proceedings 36 of International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2010), Moscow, 2010. – P.86-93.

25. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density // Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks». Minsk: BSU-RIVH, 2011. – № 21. – P. 82-87.

26. Федоткин М.А., Рачинская М.А. Исследование математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова – Яблонского // Материалы XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики», Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – С. 508-512.

27. Fedotkin M.A., Kudryavtcev E.V., Rachinskaya M.A. Simulation and Research of Probabilistic Regularities in Motion of Traffic Flows // Proceedings of the International Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference» AMSA'2011, Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 2011. – P. 11-18.

28. Рачинская М.А., Федоткин М.А. Изучение характеристик потока машин в условиях малой плотности // Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 2012. – 36 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.01.12, № 27-B2012.

29. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Parameters estimator of the probabilistic model of batches traffic flow with the non-intensive movement // Proceedings of International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2013), Moscow, 2013 – P. 357-364.

30. Fedotkin M., Rachinskaya M. Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // Distributed Computer and Communication Networks. Springer International Publishing, «Communications in Computer and Information Science» series, 2014. – V. 279. – P. 154-168.

31. Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Estimation of transport systems capacity //

Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2013. – P. 63–77.

32. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды Московского физико-технического института (государственного университета), 2010. – Т. 2 – № 4. – С. 6–21.

33. Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // Methodology and Computing in Applied Probability, Springer, 2013. – V. 15. – № 4. – P. 935–950.

34. Reich E. Waiting times when queues are in tandem // The Annals of Mathematical Statistics, 1957. – V.28. – №3. – P. 768-773.

35. Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // Performance Evaluation 51, 2003. – P. 269–288.

36. Gnedenko B.W., Konig D. Handbuch der Bedienungstheorie // Akademie Verlag, Berlin, 1983.

37. Perros H.G. Queueing networks with blocking, in: Exact and Approximate Solutions // Oxford University Press, New York. – 1994.

38. Perros H.G. A bibliography of papers on queueing networks with finite capacity queues // Performance Evaluation 10, 1989. – P. 255–260.

39. Gomez-Corral A. A tandem queue with blocking and Markovian arrival process // Queueing Systems 41, 2002. – P. 343–370.

40. Gomez-Corral A. On a tandem G-network with blocking // Advances in Applied Probability 34 (3), 2002. – P. 626–661.

41. Gomez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // Operations Research Letters 30, 2002. – P. 360–374.

42. Klimenok V.I., Breuer L., Tsarenkov G.V., Dudin A.N. The $BMAP/G/1/N \to PH/1/M$ system with losses // Performance Evaluation 61, 2005 – P. 17–40.

43. Бройер Л., Дудин А.Н., Клименок В.И., Царенков Г.В. Двухфазная система $BMAP|G|1|N \to PH|1|M-1-1$ с блокировкой // Автомат. и телемех, 2004 – № 1. – P. 117–130

44. Клименок В.И., Тарамин О.С. Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами // Автомат. и телемех. – 2010 – № 1. – P. 3–17

45. Клименок В.И., Тарамин О.С. Двухфазная система $GI/PH/1 \to /PH/1/0 GI/PH/1 \to /PH/1/0$ с потерями // Автомат. и телемех, 2011. –

№ 5. – P. 113–126.

46. Клименок В.И., Савко Р.Ч. Двухфазная система с повторными попытками и нетерпеливостью запросов // Автомат. и телемех., 2015. – № 8. – P. 78–93.

47. Zorine .A.V. Stability of a tandem queueing system with delayed Bernoulli transition of customers // Abstracts of international conference "Modern stochastics: theory and applications II"Dedicated to the anneversaries of prominent Ukranian scientists: Anatolij Skorokhod, Volodymyr Korolyuk and Igor Kovalenko, Kyiv, Ukrain, September 7-11, 2010. – P. 76.

48. Зорин А.В. Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2011. – С. 179-183.

49. Зорин А.В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований // Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 84, 2011. – С. 163-176.

50. Zorine A.V. Stability of a tandem of queueing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers // Theor. Probability and Math. Statist., 2012. – V.84. – P. 173-188.

51. Zorine A.V. Study of queues' sizes in tandem intersections under cyclic control in random environment // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science, 2013. – V. 356. – P. 206-215.

52. Zorine A.V. On the conditions for the existence of a stationary mode in a tandem of queuing systems with cyclic control in a random environment // Automatic Control and Computer Sciences, 2013. – v. 47. – P. 183-191. Зорин А.В. Об условиях существования стационарного режима в тандеме систем массового обслуживания с цикличнским управлением в случайной среде // Автоматика и вычислительная техника, 2013, № 4, С. 28-39.

53. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февр. 2015. – С. 94–99.

54. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания при циклическом алгоритме с продлением // Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Международная конференция, Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015. – С. 126–129.

55. Kocheganov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue fluctuations in tandem of queueing systems under cyclic control with prolongations // Распределенные компьютерные и телекоммуникационнные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015) : материалы Восемнадцатой междунар. науч. конфер., 19–22 окт. 2015 г., Москва: / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук ; под общ. ред. В.М. Вишневского. —М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 517–524.

56. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 1 // Литовский математический сборник, 1988. – Т. 28. – № 4. – С. 783-784.

57. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 2 // Литовский математический сборник, 1989. – Т. 29. – № 1. – С. 148-159.

58. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1998. – Вып. 7. – С. 333-344.

59. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6. – С. 51–70.

60. Федоткин М.А. Управление процессами обслуживания // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского “Математическое моделирование и оптимальное управление”, 2001. – Вып. 2(24). – С. 169–188.

61. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с.

62. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматилит, 2006. – 572 с.

63. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 448 с.

64. Ширяев А.Н. Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1. – М.: Наука, 2007. – 552 с.

65. Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А. Счетные цепи Маркова. – М.: Наука, 1987. – 416 с.