

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И.  
Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики  
Кафедра программной инженерии**

**«УТВЕРЖДАЮ»**

Руководитель  
исследовательской практики

\_\_\_\_\_ Зорин А.В.

**ОТЧЕТ ПО  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ПРАКТИКЕ**

**по теме:**

«Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных  
требований в тандеме систем массового обслуживания»

Аспиранта 4 года обучения  
Кочеганова В.М.

Н.Новгород, 2018

## **Информация об исследовательской практике**

1. Сроки прохождения исследовательской практики: с 02.10.2017 по 31.01.2018.
2. База исследовательской практики: Кафедра программной инженерии,  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
г. Нижний Новгород

## Введение

В связи со стремительным ростом числа машин в современных городах все больший интерес стала представлять теория потоков транспортных средств. Результаты ранних исследований по этой тематике собраны, например, в книгах [1–3]. В этих монографиях потоки машин моделируются с помощью традиционных стохастических потоков событий, весьма полно изученных в классической теории массового обслуживания. Однако классические модели не удается использовать для адекватного описания реальных потоков машин (см. [4–6]). В работах [7–9] предлагается учитывать не только вероятностные свойства последовательности моментов пересечения машинами так называемой виртуальной стоп-линии, но и определять свойства случайных конфигураций автомобилей на дороге. В указанных работах изучается возникновение так называемых пачек машин. Каждая пачка состоит из медленной головной машины и ожидающих возможности обгона машин за ней. Динамика длины пачки определяется возможностью обгона машинами из хвоста всей пачки. Другая динамика, обусловленная возможностью съезда машин с трассы, рассматривается в работах [10–12]. Основным объектом изучения в этих работах является плотность потока машин как функция от расстояния, а знание плотности, в свою очередь, позволяет делать выводы о пропускной способности перекрестков.

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания на одном устройстве поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. Одной из первых работ, посвященная тандемам систем массового обслуживания, является работа [13]. В ней изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлением заявок в систему и времени обслуживания независимы и имеют экспоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора.

Основные результаты теории тандемов в случае простейших стационарных входных потоков и экспоненциального времени обслуживания широко представлены, например, в работах [14–16]. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены в статьях [17–19]. Более общие модели включают в себя так называемые входные ВМАР (Batch Markovian Arrival Process) потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Системы обслуживания с входными потоками типа ВМАР рассмотрены, например, в работах [20–22], где проведены аналитические расчеты условий стационарности и изучено поведение характеристик обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями. Модель последовательных перекрестков с немгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах [23, 24]. В этих работах динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернулиевской случайной величиной: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью  $0 < p < 1$  успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью  $1 - p$  остается «между» перекрестками.

Статья [25] отличается от работ [23, 24] введением продления в алгоритм обслуживания во второй системе. В данной работе рассматривается тандем из двух систем массового обслуживания. В первой системе управление осуществляется по циклическому алгоритму. После

обслуживания в первой системе, требования немедленно поступают на вторую, где обслуживаются по циклическому алгоритму с продлением. Целью этой статьи является исследование условий существования стационарного режима очередей первичных требований, то есть требований, генерируемых внешней средой.

## Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (рис. 1). Пусть в систе-

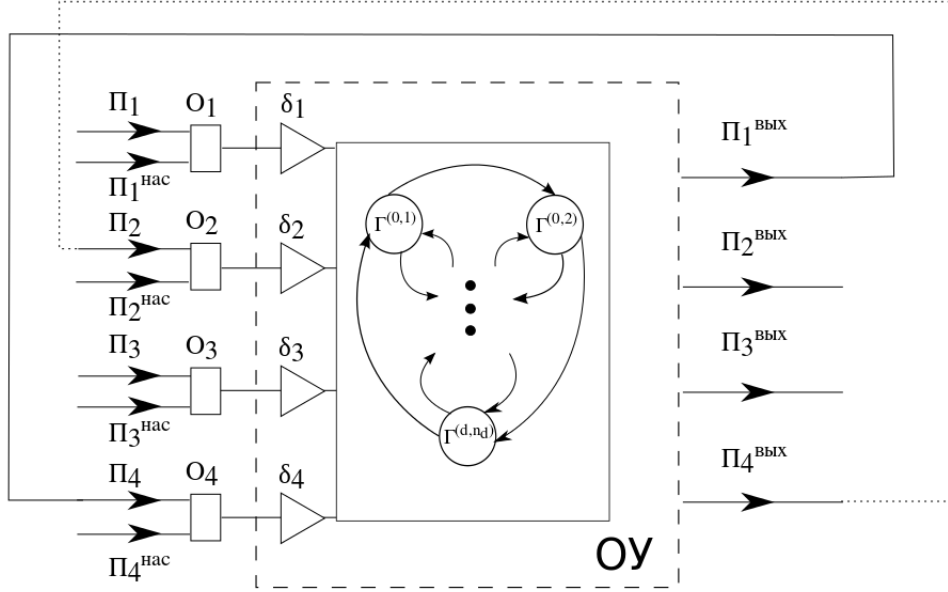


Рис. 1: Структурная схема системы обслуживания

му с одним обслуживающим устройством поступают потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ . Требования по потоку  $\Pi_j$  становятся в соответствующую очередь  $O_j$  с неограниченной вместимостью,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  дисциплина очереди  $O_j$ , поддерживаемая устройством  $\delta_j$ , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди  $O_4$  будет описана ниже. Входные потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  будем обозначать  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ , а распределение числа заявок в группе по потоку  $\Pi_j$  будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}, \quad j \in \{1, 3\}, \quad (1)$$

которая предполагается аналитической при любом  $z \in \mathbb{C}$  таком, что  $|z| < (1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Величина  $p_{\nu}^{(j)}$  определяет вероятность того, что по потоку  $\Pi_j$  число требований в группе равно  $\nu$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_1$  поступают на повторное обслуживание, формируя на

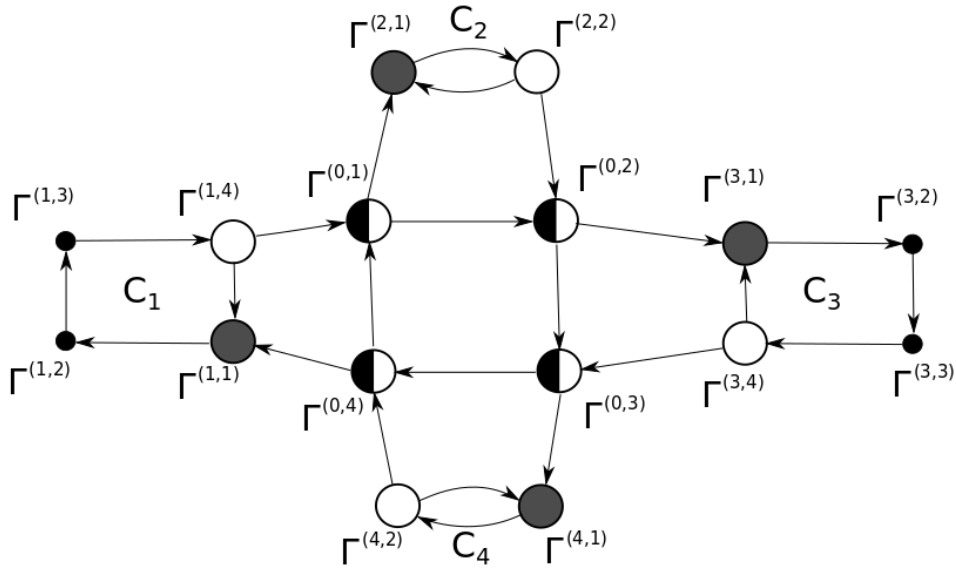


Рис. 2: Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, большие черные вершины — входные, небольшие черные — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

выходе поток  $\Pi_4$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_4$  в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток  $\Pi_2$ . Потоки  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний  $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$  с заданными натуральными числами  $d, n_0, n_1, \dots, n_d$ . В каждом состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающее устройство находится в течение неслучайного времени  $T^{(k,r)}$ . Введем непересекающиеся подмножества  $\Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$  и  $\Gamma^{IV}$  множества  $\Gamma$  следующим образом. В состоянии  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma^I$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{II}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{III}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_3$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{IV}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_3$  и  $O_4$ . Тогда множество  $\Gamma$  есть объединение  $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$  непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества  ${}^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}, {}^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}, {}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ .

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний  $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = \overline{1, n_k}\}$  будем называть  $k$ -м циклом,  $k = \overline{1, d}$  (Рис. 2). Состояние вида  $\Gamma^{(0,r)}$  будем называть состоянием продления,  $r = \overline{1, n_0}$ . Положим  $r \oplus_k 1 = r + 1$  для  $r = \overline{1, n_k - 1}$  и  $r \oplus_k 1 = 1$  при  $r = n_k, k = \overline{0, d}$ . В цикле  $C_k$  выделим подмножества  $C_k^O$  выходных,  $C_k^I$  входных и  $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$  нейтральных состояний. Тогда после состояния  $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$  обслуживающее устройство переходит в состояние  $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$  того же цикла  $C_k$ . При  $\Gamma^{(k,r)}$  принадлежащем множеству  $C_k^O$  прибор переходит в состояние  $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  в момент переключения больше заданного порога  $L$ . В противном случае, то есть если число требований в очереди  $O_3$  меньше либо равно  $L$ , новое состояние прибора будет состоянием продления  $\Gamma^{(0, r_1)}$ , где  $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$  и  $h_1(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$  во множество  $\{1, 2, \dots, n_0\}$ . После состояния  $\Gamma^{(0,r)}$  выбирает-

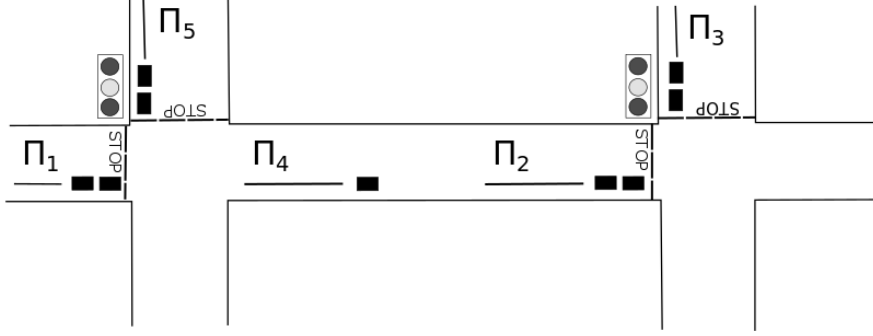


Рис. 3: Пример: тандем перекрестков

ся состояние того же вида  $\Gamma^{(0,r_2)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  меньше или равно  $L$ , где  $r_2 = h_2(r)$  и  $h_2(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на себя; в противном случае включается входное состояние  $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$ , где  $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$  и  $h_3(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на множество  $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$ . Считается, что все состояния продления  $\Gamma^{(0,r)}$  принадлежат множеству  ${}^2\Gamma$ , а также верны соотношения  $C_k^O \subset {}^2\Gamma$  и  $C_k^I \subset {}^3\Gamma$ . Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, то есть можем положить  $h_2(r) = r \oplus_0 1$ .

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \ \& \ y > L); \\ \Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y \leq L; \\ \Gamma^{(0,r \oplus_0 1)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \quad (2)$$

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В роли потоков требований, формируемых внешней средой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки  $\Pi_1, \Pi_5$  на первом перекрестке, а также поток  $\Pi_3$  на втором. Каждая машина из потока  $\Pi_1$ , проезжая первый перекресток, становится в очередь  $O_4$  потока  $\Pi_4$  и затем с некой вероятностью ( $p_{k,r}$  для состояния  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди  $O_4$  до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди  $O_4$  успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь  $O_2$  и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния  $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ : в состоянии  $g_{1,1}$  машины потока  $\Pi_1$  пропускаются фиксированное количество времени  $\tilde{T}^{(1,1)}$  («зеленый» свет для  $\Pi_1$ ); в состоянии  $g_{1,2}$  — простаивают в течение времени  $\tilde{T}^{(1,2)}$  («красный» свет для  $\Pi_1$ ). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока  $\Pi_3$  (состояние  $g_{2,1}$ ), также имеется два состояния обслуживания потока  $\Pi_2$  (состояния  $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$ ). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока  $\Pi_3$ , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока  $\Pi_2$  длина очереди  $O_3$  не превосходит уровня  $L$ . Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть  $\tilde{T}^{(2,1)}$ ,  $\tilde{T}^{(2,2)}$  и  $\tilde{T}^{(2,3)}$ .

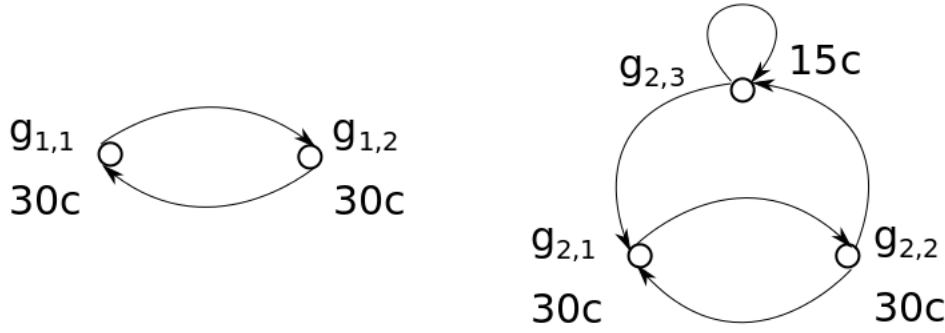


Рис. 4: Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, можно показать, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор  $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$ , где  $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$  — состояние 1-го перекрестка,  $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$  — состояние 2-го перекрестка,  $s \in \{0, 1, 2\}$  — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и  $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$  — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина  $s$ ). Здесь  $T$  — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины  $2 \times 3 \times 3 \times T$ .

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток  $\Pi_5$  не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определенности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4.

За начальное состояние объединенной системы примем  $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , то есть первый перекресток находится в состоянии  $g_{1,1}$ , второй — в состоянии  $g_{2,1}$ , и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами  $s = 0$  и  $t = 0$ ). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию  $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$ . Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние  $g_{2,1}$ , так и в состояние продления  $g_{2,3}$ . Таким образом следующим состоянием тандема будет либо опять  $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , либо  $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$ . Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следующий список всех возможных состояний системы:

$$\begin{array}{lll}
(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) = \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,4)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(4,3)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) = \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) = \Gamma^{(3,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) = \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) = \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) = \Gamma^{(2,2)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) = \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) = \Gamma^{(2,4)}. &
\end{array}$$

В соответствии с приведенными выше обозначениями, множества  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут  $C_1^I = \{\Gamma^{(1,1)}\}$ ,  $C_2^I = \{\Gamma^{(2,1)}\}$ ,  $C_3^I = \{\Gamma^{(3,1)}\}$  и  $C_4^I = \{\Gamma^{(4,1)}\}$ . Множествами выходных состояний будут  $C_1^O = \{\Gamma^{(1,2)}\}$ ,  $C_2^O = \{\Gamma^{(2,4)}\}$ ,  $C_3^O = \{\Gamma^{(3,2)}\}$  и  $C_4^O = \{\Gamma^{(4,4)}\}$ . Функции  $h_1(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$  и  $h_3(\cdot)$  задаются поточечно:

$$\begin{aligned}
h_1(\Gamma^{(1,2)}) &= 1, & h_1(\Gamma^{(2,4)}) &= 2, & h_1(\Gamma^{(3,2)}) &= 3, & h_1(\Gamma^{(4,4)}) &= 5, \\
h_2(1) &= 2, & h_2(2) &= 3, & h_2(3) &= 4, & h_2(4) &= 1, & h_2(5) &= 1, \\
h_3(1) &= \Gamma^{(2,1)}, & h_3(2) &= \Gamma^{(3,1)}, & h_3(3) &= \Gamma^{(4,1)}, & h_3(4) &= \Gamma^{(1,1)}, & h_3(5) &= \Gamma^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

Этим завершается построение числового примера.

## Математическая модель

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [26]). Схема управляющей системы приведена на Рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ ; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$ ; 4) внешняя память — очереди  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса  $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$ . Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$  моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим  $\Gamma_i, i \geq 1$ , из множества  $\Gamma$  состояние обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$  и  $\Gamma_0 \in \Gamma$  — в момент времени  $\tau_0$ , количество  $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i$ , количество  $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , требований, поступивших в очередь  $O_j$  по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , требований по потоку насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , реально обслуженных требований по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ ;  $j = \overline{1, 4}$ .

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad (3)$$



где отображение  $h(\cdot, \cdot)$  определено в (2). Для определения длительности  $T_{i+1}$  состояния обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$  удобно ввести функцию  $h_T(\cdot, \cdot)$ :

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } k \text{ и } r \text{ таковы, что } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4)$$

между величиной  $\bar{\xi}_{j,i}$  и величинами  $\varkappa_{j,i}$ ,  $\eta_{j,i}$ ,  $\xi_{j,i}$  реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из выражения (4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (5)$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на Рис. 1) следуют соотношения для потока  $\Pi_4$ :

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \quad (6)$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения заключается в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент  $\eta_i$  и  $\xi_i$  маркированных точечных процессов  $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$  и  $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geq 0\}$  при фиксированных значениях метки  $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_i)$ , где  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ ,  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$  и  $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$ . Введем функции  $\varphi_1(\cdot, \cdot)$  и  $\varphi_3(\cdot, \cdot)$  из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где  $f_j(z)$  определены выражением (1),  $j \in \{1, 3\}$ . Функция  $\varphi_j(\nu, t)$  по своему смыслу есть вероятность поступления  $\nu = 0, 1, \dots$  требований по потоку  $\Pi_j$  за время  $t \geq 0$ . Положим  $\varphi_j(\nu, t)$  равной нулю при  $\nu < 0$ . Функцию  $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$  зададим формулой

$$\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1 - u)^{y-k}.$$

По своему смыслу  $\psi(k; y, u)$  есть вероятность поступления  $k$  требований по потоку  $\Pi_2$  при условии, что очередь  $O_4$  содержит  $y$  требований и обслуживающее устройство находится в состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$ , так что  $u = p_{k,r}$ . При нарушении условия  $0 \leq k \leq y$  положим  $\psi(k; y, u)$  равной нулю.

Пусть  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$  и  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ . Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки  $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$  вероятность  $\varphi(a, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\eta_{1,i} = a_1$ ,  $\eta_{2,i} = a_2$ ,  $\eta_{3,i} = a_3$ ,  $\eta_{4,i} = a_4$  есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}, \quad (7)$$

где  $\tilde{k}$  и  $\tilde{r}$  таковы, что  $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$  и  $\delta_{i,j}$  есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ . Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность  $\zeta(b, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\xi_{1,i} = b_1$ ,  $\xi_{2,i} = b_2$ ,  $\xi_{3,i} = b_3$ ,  $\xi_{4,i} = b_4$  при фиксированном значении  $(\Gamma^{(k,r)}; x)$  метки  $\nu_i$  есть

$$\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует для  $j \in \{1, 2, 3\}$ , что вероятность события  $\xi_{j,i} = 0$  равна 1 в случае  $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$  и что вероятность события  $\xi_{j,i} = \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, j)$  равна 1, если  $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$ .

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором вероятностном пространстве.

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma$  и  $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$  фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  и заданные на нем случайные величины  $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$ ,  $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$ ,  $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$  и случайные элементы  $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$ ,  $i \geq 0$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , такие, что 1) имеют место равенства  $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$  и  $\varkappa_0(\omega) = x^0$ ; 2) выполняются соотношения (3), (5), (6); 3) для любых  $a \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $b \in \mathbb{Z}_+^4$  и любых  $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , таких, что  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) > 0$ , условное распределение векторов  $\eta_i$  и  $\xi_i$ ,  $i \geq 0$ , имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \quad (9)$$

где функции  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  определяются формулами (7) и (8).

*Доказательство.* Для построения вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  воспользуемся теоремой И. Тулчи (см. [27], с. 348).

Введем последовательность измеримых пространств  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ ,  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), \dots$ , где  $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$ ,  $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i}) \in \Omega_i$ , а  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$  есть множество всех подмножеств множества  $\Omega_i$ . Пусть  $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x_{3,0})$ . Зададим на измеримом пространстве  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$  вероятностную меру  $P_0(\cdot)$  ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})). \quad (10)$$

Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  определим величины

$$\tilde{\Gamma}_0(\omega_0) = \gamma_0, \quad \tilde{\varkappa}_{j,0}(\omega_0) = x_{j,0}, \quad \tilde{\xi}_{j,0}(\omega_0) = \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \tilde{\eta}_{j,0}(\omega_0) = \omega_{j,0}, \quad (11)$$

и

$$\tilde{\varkappa}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\xi}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\eta}_{4,0}(\omega_0) = \min\{\tilde{\xi}_{1,0}(\omega_0), \tilde{\varkappa}_{1,0}(\omega_0) + \tilde{\eta}_{1,0}(\omega_0)\}. \quad (12)$$

Теперь предположим, что заданы вероятностные меры  $P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$  на измеримом пространстве  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , и фиксирован набор  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ . Положим для  $j \in \{1, 2, 3\}$  и  $i = \overline{0, n}$

$$\tilde{\Gamma}_{i+1} = \Gamma^{(k^*, r^*)} = h(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\varkappa}_{3,i}), \quad \tilde{\varkappa}_{j,i+1} = \max\{0, \tilde{\varkappa}_{j,i} + \tilde{\eta}_{j,i} - \tilde{\xi}_{j,i}\}, \quad (13)$$

$$\tilde{\varkappa}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i} + \tilde{\eta}_{4,i} - \tilde{\eta}_{2,i}, \quad \tilde{\xi}_{j,i+1} = l(k^*, r^*, j), \quad \tilde{\eta}_{j,i+1} = \omega_{j,i+1} \quad (14)$$

$$\tilde{\eta}_{4,i+1} = \min\{\tilde{\xi}_{1,i+1}, \tilde{\varkappa}_{1,i+1} + \tilde{\eta}_{1,i+1}\}, \quad \tilde{\xi}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i+1}. \quad (15)$$

Заметим, что значения  $\tilde{\Gamma}_{j,i}$ ,  $\tilde{\xi}_{j,i}$ ,  $\tilde{\eta}_{j,i}$ ,  $\tilde{\varkappa}_{j,i}$ , найденные по формулам (13)–(15) по наборам  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  и  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_i)$ ,  $n \geq i$ , совпадают. Определим на измеримом пространстве  $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$  вероятностную меру  $P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$  ее значениями на одноточечных множествах  $\{(a_1, a_2, a_3)\}$ ,  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ :

$$P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})) \times \psi(a_2, \tilde{\varkappa}_{4,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})). \quad (16)$$

Тогда (в соответствии с теоремой Ионеску Тулчи) для декартова произведения  $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i$  пространств элементарных исходов и произведения  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  будет существовать единственная вероятностная мера  $\mathbf{P}(\cdot)$  такая, что для любого  $i \geq 0$  верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega: \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_i \in A_i\}) = P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i), \quad (17)$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i) = \int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P_1(\omega_0; d\omega_1) \dots \int_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \quad (18)$$

для любого  $A_i$  из  $\mathcal{F}_i$ . Итак, вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  построено.

Теперь введем на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  следующие случайные величины и элементы,  $i \geq 0$ ,  $j = \overline{1, 4}$ :

$$\Gamma_i(\omega) = \tilde{\Gamma}_i, \quad \varkappa_{j,i}(\omega) = \tilde{\varkappa}_{j,i}, \quad \xi_{j,i}(\omega) = \tilde{\xi}_{j,i}, \quad \eta_{j,i}(\omega) = \tilde{\eta}_{j,i}.$$

и докажем, что они удовлетворяют условиям теоремы. Для сокращения записи зависимость от  $\omega$  в обозначении случайных элементов и случайных величин далее будем опускать. Из формулы (13) следует, что случайные элементы  $\Gamma_i$  удовлетворяют соотношению (3), а случайные величины  $\varkappa_{j,i}$  для  $j \in \{1, 2, 3\}$  удовлетворяют соотношению (5). Из формулы (14) заключаем, что  $\varkappa_{4,i}$  удовлетворяет соотношению (6). Далее, из условий (12) и (15) следует справедливость соотношений (6) для величин  $\eta_{4,i}$  и  $\xi_{4,i}$ .

Перейдем к доказательству равенства (9). Для сокращения записи введем множества  $B_i = \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}$ ,  $i \geq 0$ . Найдем явное выражение для условной вероятности  $\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i)$ . Пусть  $\Gamma^{(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$ . Запишем по определению условной вероятности, предполагая, что  $\mathbf{P}(B_i) > 0$ :

$$\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i) = \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap B_i) \times (\mathbf{P}(B_i))^{-1}. \quad (19)$$

Далее из соотношений (17), (18) и того факта, что значения  $\Gamma_i$  и  $\varkappa_i$  зависят только от  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}$ , но не от  $\omega_i$ , (этот факт следует из формул (11) – (14)), получим выражение для второго сомножителя последнего выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_i) &= \\ &= \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t = \overline{0, i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \end{aligned} \quad (20)$$

Преобразуем множество  $\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$ , учитывая соотношения (11) – (15):

$$\begin{aligned} \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} &= \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap \\ &\cap \{\omega: \eta_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: \xi_{j,i} = b_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: \xi_{4,i} = b_4\} \cap \{\omega: \eta_{4,i} = a_4\} = \\ &= \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap \{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \\ &\cap \{\omega: b_j = \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: b_4 = x_{4,i}\} \cap \\ &\cap \left\{ \omega: a_4 = \min \left\{ \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда для второго множителя из правой части выражения (19) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap B_i) &= \\ &= \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}) = \\ &= \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

И по аналогии со вторым множителем в выражении (20) преобразуем последний сомножитель правой части равенства (21):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}) &= \\ &= \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t = \overline{0, i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\ &\times P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\}) \end{aligned}$$

и, учитывая выражение (16), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}) &= \\ &= \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\ &\times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t = \overline{0, i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя выражение (22) в правую часть равенств (21), а затем выражения (21) и (20) в равенство (19), получим:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i) = \\
& = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
& \quad \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
& \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \mathcal{K}_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\
& \quad \times \left( \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \mathcal{K}_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times \right. \\
& \quad \left. \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем требуемое равенство (9).  $\square$

## Очереди первичных требований

Рассмотрим случайную последовательность

$$\{(\Gamma_i, \mathcal{K}_{1,i}, \mathcal{K}_{3,i}); i \geq 0\},$$

включающую в себя состояния  $\mathcal{K}_{1,i}$  и  $\mathcal{K}_{3,i}$  очередей  $O_1$  и  $O_3$  первичных требований в момент  $\tau_i$ . Приведем ниже несколько результатов, касающихся этой последовательности.

**Утверждение 1.** Пусть  $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$  и  $(\mathcal{K}_{1,0}, \mathcal{K}_{3,0}) = (x_{1,0}, x_{3,0}) \in \mathbb{Z}_+^2$  фиксированы. Тогда последовательность  $\{(\Gamma_i, \mathcal{K}_{1,i}, \mathcal{K}_{3,i}); i \geq 0\}$  является однородной счетной цепью Маркова.

Обозначим для  $\gamma \in \Gamma$  и  $(x_1, x_3) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \mathcal{K}_{1,i} = x_1, \mathcal{K}_{3,i} = x_3), \quad (23)$$

а также введем множество

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \{\gamma \in \Gamma: h(\gamma, x_3) = \Gamma^{(k,r)}\}.$$

Положим  $r \ominus_k 1 = r - 1$  для  $r = \overline{2, n_k}$  и  $r \ominus_k 1 = n_k$  при  $r = 1$ ,  $k = \overline{0, d}$ . Из определения (2) находим явный вид множества для различных  $\Gamma^{(k,r)}$  и  $x_3$ :

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \begin{cases} \{\Gamma^{(k_1, r_1)}, \Gamma^{(0, r \ominus_0 1)}\}, & \text{если } (k = 0 \ \& \ x_3 \leq L); \\ \{\Gamma^{(k, r \ominus_k 1)}, \Gamma^{(0, r_2)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I \ \& \ x_3 > L); \\ \{\Gamma^{(k, r \ominus_k 1)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^N); \\ \emptyset, & \text{если } (k = 0 \ \& \ x_3 > L) \\ & \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I \ \& \ x_3 \leq L), \end{cases} \quad (24)$$

где  $k_1, r_1$  таковы, что  $h_1(\Gamma^{(k_1, r_1)}) = r$ , и  $r_2$  таково, что  $h_3(r_2) = \Gamma^{(k, r)}$ .

Важным шагом при исследовании стационарного режима цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  является нахождение множества ее существенных состояний. Введем множества

$$S_{0,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(0,r)}, x_1, x_3) : (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3) \right\} \right\},$$

для  $1 \leq r \leq n_0$  и множества

$$S_{k,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) : (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k, t, 3) \right\},$$

для  $1 \leq k \leq d, 1 \leq r \leq n_k$ . Тогда верно следующее

**Утверждение 2.** *Множество существенных состояний марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  имеет вид  $\left( \bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^1 \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^1 \right)$ .*

Пусть  $k$  и  $r$  таковы, что  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ . Введем частичные производящие функции

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3) = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) v_1^{w_1} v_3^{w_3},$$

и вспомогательные функции

$$q^{(1)}(k, r, v_1) = v_1^{-\ell(k,r,1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k,r)}) v_1^w;$$

$$q^{(3)}(k, r, v_3) = v_3^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v_3^w.$$

В введенных обозначениях верна следующая

**Лемма 1.** *Пусть  $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$ . Тогда верно следующее рекуррентное соотношение:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) &= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, w_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\ &\times \left[ v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\text{I}}) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (1 - v_1^{w_1 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)}) \right] \times \\ &\times \left[ v_3^{w_3} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\text{III}}) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - w_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (1 - v_3^{w_3 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}) \right]. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ . Учитывая соотношения (5) и вид условных распределений (9) для  $\eta_i$  и  $\xi_i$ ,  $i \geq 0$ , запишем по формуле повторного математического ожидания:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) &= \\
&= E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{3,i+1}} I(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma})] = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\
&\quad \times E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{3,i+1}} I(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}) | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] = \\
&= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\
&\quad \times E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] = \\
&= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\
&\quad \times E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] \times \\
&\quad \times E[v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}]. \quad (25)
\end{aligned}$$

В случае  $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^I$  очередь  $O_1$  не обслуживается и, следовательно,  $\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) = 0$ . Поэтому  $\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\} = w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)$ . Аналогично при  $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^{III}$  очередь  $O_3$  не обслуживается и  $\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) = 0$ . Откуда получаем, что  $\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\} = w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)$ .

Рассмотрим подробнее случай  $\tilde{\gamma} \in \Gamma^I$ :

$$\begin{aligned}
E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] &= \\
&= E[v_1^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] + \\
&+ E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} - v_1^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] = \\
&= v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(1 - v_1^{w_1 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)}), \quad (26)
\end{aligned}$$

поскольку при  $\tilde{\gamma} \in \Gamma^I$  величина  $\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}$  отличается от величины  $w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)$  только при  $0 \leq \eta_{1,i} < \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1$ .

С помощью аналогичных рассуждений получим для  $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{III}$ :

$$\begin{aligned}
E[v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] &= \\
&= v_3^{w_3} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - w_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(1 - v_3^{w_3 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}) \quad (27)
\end{aligned}$$

и подставляя полученные выражения (26), (27) в выражение (25), получаем утверждение леммы.  $\square$

Из этой леммы следует существование величин  $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3)$  хотя бы в некоторой окрестности точки  $(v_1, v_3) = (1, 1)$ , для  $i > 0$ ,  $k = \overline{0; d}$ ,  $r = \overline{1; n_k}$ .

В работе [25] доказана ограниченность частичных производящих функций  $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v_3) = E[v_3^{\varkappa_3^{(i)}} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)})]$  по  $i \geq 0$  для всех  $v_3 \in [1, 1 + \varepsilon_3]$ , при некотором  $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  определено в (1). Причем заметим, что в наших обозначениях  $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v_3) = \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3)$ . Цель следующей леммы — доказать аналогичный результат для величин  $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1)$ ,  $i \geq 0$ .

**Лемма 2.** *Если*

$$\min_{k=0,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1,$$

то числовая последовательность  $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1); i \geq 0\}$  ограничена при  $v \in [1, 1 + \varepsilon_1]$ , для некоторого  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  определено в (1).

*Доказательство.* Введем случайные последовательности  $\{\varkappa_1^{(1)}(i); i \geq 0\}$  и  $\{\varkappa_1^{(2)}(i); i \geq 0\}$  следующим образом. Положим для  $i = 0$ :  $\varkappa_1^{(1)}(0) = 0$  и  $\varkappa_1^{(2)}(0) = \varkappa_{1,0}$ . Далее введем рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \varkappa_1^{(1)}(i+1) &= \begin{cases} \max\{0, \varkappa_1^{(1)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1, n_k}; \\ \varkappa_1^{(1)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}; \end{cases} \\ \varkappa_1^{(2)}(i+1) &= \begin{cases} \varkappa_1^{(2)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1, n_k}; \\ \max\{0, \varkappa_1^{(2)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда последовательность  $\varkappa_{1,i}^+ = \varkappa_1^{(1)}(i) + \varkappa_1^{(2)}(i)$  является мажорирующей для последовательности  $\varkappa_{1,i}$ , т.е.  $\varkappa_{1,i}(\omega) \leq \varkappa_{1,i}^+(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ . Доказательство этого факта проводится по индукции и в данной статье его приводить не будем. Заметим только, что из него следует для  $v \geq 1$  неравенство

$$E[v^{\varkappa_{1,i}}] \leq E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} v^{\varkappa_1^{(2)}(i)}]. \quad (28)$$

Наблюдение за вновь введенными величинами  $\varkappa_1^{(1)}(i)$  и  $\varkappa_1^{(2)}(i)$  будем осуществлять в случайные моменты времени  $\theta_i^{(1)}$  и  $\theta_i^{(2)}$ , соответственно, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta_0^{(1)} &= 0; \quad \theta_{i+1}^{(1)} = \theta_i^{(1)} + \min\{s > 0: \Gamma_{\theta_i^{(1)}+s} = \Gamma^{(k, n_k)}, k > 0\}; \\ \theta_0^{(2)} &= 0; \quad \theta_{i+1}^{(2)} = \theta_i^{(2)} + \min\{s > 0: \Gamma_{\theta_i^{(2)}+s} = \Gamma^{(0, r)}, r = \overline{1, n_0}\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Также нам понадобятся следующие обозначения:

$$\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)} = \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}), \quad \hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)} = \varkappa_1^{(2)}(\theta_i^{(2)}). \quad (30)$$

Пусть  $k > 0, r \in \{2, 3, \dots, n_k\}$ . В введенных обозначениях рассмотрим выражение для  $E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)})]$ :

$$\begin{aligned} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)})] &= \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_3 \geq 0} \sum_{\gamma \in \Gamma} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma)] = \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_3 \geq 0} E[v^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(k,r,1)} I(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)})] + \tilde{C}_1 = \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)}) q^{(1)}(k, r, v) + \tilde{C}_1 = \\ &= q^{(1)}(k, r, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)})] + \tilde{C}_1. \end{aligned}$$



И далее по индукции:

$$E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+n_k-1)} I(\Gamma_{i+n_k-1} = \Gamma^{(k, n_k)})] = \prod_{r=2}^{n_k} q^{(1)}(k, r, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k, 1)})].$$

Для  $w_1, w_3 \in Z_+$ ,  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ,  $C \subset [0, +\infty)$  введем множества

$$\begin{aligned} A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma) &= \{\omega: \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}) = w_1; \varkappa_{3, \theta_i^{(1)}} = w_3, \Gamma_{\theta_i^{(1)}} = \gamma\}; \\ A_i^{(1)}(w_1, C, \gamma) &= \bigcup_{w_3 \in C} A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma); \quad B_i^{(1)}(\gamma) = \{\omega: \Gamma_{\theta_i^{(1)}} = \gamma\}; \\ C_i^{(1)}(\gamma_1, w_1, w_3, \gamma_2) &= B_{i+1}^{(1)}(\gamma_1) \cap A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma_2). \end{aligned}$$

Пусть  $\tilde{k} > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} E[v^{\hat{\varkappa}_{1, i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})] &= \\ &= E[v^{\hat{\varkappa}_{1, i+1}^{(1)}} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] = E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\theta_{i+1}^{(1)})} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] = \\ &= \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] + \tilde{C}_1 = \\ &= \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 \leq L}} \sum_{k=1}^d E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k)})))] + \\ &\quad + \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 > L}} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] + \tilde{C}_1, \end{aligned}$$

где мы обозначили для краткости  $\tau = \theta_{i+1}^{(1)} - n_{\tilde{k}} + 1$ . Далее поскольку

$$\varkappa_1^{(1)}(\tau) = \max \{0; \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}) + \eta_{1, \tau} - \ell(1, \tilde{k}, 1)\},$$

то продолжим цепочку рассуждений:

$$\begin{aligned} E[v^{\hat{\varkappa}_{1, i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})] &= \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 \leq L}} \sum_{k=1}^d v^{w_1} v^{-\ell(1, \tilde{k}, 1)} \times \\ &\times E[v^{\eta_{1, \tau}} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k)})))] + \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \times \\ &\times \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 > L}} v^{w_1} v^{-\ell(1, \tilde{k}, 1)} E[v^{\eta_{1, \tau}} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] + \tilde{C}_2 = \\ &= Q_1(v, \tilde{k}) \left( \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{k=1}^d v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, (L; \infty), \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))}) \right) + \tilde{C}_2, \quad (31) \end{aligned}$$

где  $Q_1(v, \tilde{k}) = \prod_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v)$ . Просуммируем по  $\tilde{k}$  получившийся в (31) результат:

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{k}=1}^d E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})] &= E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}] = \\
&= \sum_{\tilde{k}=1}^d Q_1(v, \tilde{k}) \left( \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{k=1}^d v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, (L; \infty), \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})) \right) + \tilde{C}_3 \leq \\
&\leq \max_{\tilde{k}=\overline{1; d}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \left( \sum_{\tilde{k}=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\tilde{k}=1}^d \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, (L; \infty), \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})) \right) + \tilde{C}_3 = \\
&= \max_{\tilde{k}=\overline{1; d}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)} = w_1) + \tilde{C}_3 = \max_{\tilde{k}=\overline{1; d}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)}}] + \tilde{C}_3.
\end{aligned}$$

Для  $\hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)}$  можно провести похожие рассуждения и в итоге получить оценки:

$$E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}] \leq \max_{\tilde{k}=\overline{1; d}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)}}] + \tilde{C}_3; \quad (32)$$

$$E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+n_0}^{(2)}}] \leq Q_1(v, 0) E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)}}] + \tilde{C}_4, \quad (33)$$

где  $r = \overline{1, n_0}$ . Для  $k = \overline{0; d}$  верны равенства  $Q_1(1, k) = 1$ . Предположив выполненным условие  $\min_{k=\overline{0; d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)}} > 1$ , получим, что величины

$$\begin{aligned}
(Q_1(v, k))' \Big|_{v=1} &= \left( \prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k, r, 1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k, r)}) v^w \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \left( \prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k, r, 1)} \exp(\lambda_1 T^{(k, r)} (f_1(v) - 1)) \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \left( v^{-\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)} \exp(\lambda_1 (f_1(v) - 1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)}) \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1), \quad (34)
\end{aligned}$$

определяющие знак производной, отрицательны. Поэтому  $|Q_1(v, k)| < 1$  для всех  $k = \overline{1; d}$  хотя бы в некоторой правой окрестности  $1 \leq v \leq (1 + \varepsilon_1)^{1/2}$  точки  $v = 1$ . Этот факт, в свою очередь, обеспечивает ограниченность в этой же окрестности величин  $E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)}}]$  и  $E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)}}]$  равномерно по  $i$ .

Далее из определений (29) и (30) следует, что для любого  $i \geq 0$  существуют такие  $j_1$  и  $j_2$ , что

$$\varkappa_1^{(1)}(i) \leq \hat{\varkappa}_{1,j_1}^{(1)}, \quad \varkappa_1^{(2)}(i) \leq \hat{\varkappa}_{1,j_2}^{(2)}.$$

Следовательно, из (28) и неравенства Коши-Буняковского заключаем, что

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1) \leqslant (E[v^{2\kappa_1^{(1)}(i)}]E[v^{2\kappa_1^{(2)}(i)}])^{1/2} \leqslant (E[v^{2\hat{\kappa}_{1,j_1}^{(1)}}]E[v^{2\hat{\kappa}_{1,j_2}^{(2)}}])^{1/2}$$

и, значит, для любого  $v$  хотя бы из окрестности  $[1, 1 + \varepsilon_1]$  исходная последовательность  $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1); i \geqslant 0\}$  ограничена равномерно по  $i$ .  $\square$

Основным результатом работы является достаточное условие существования стационарного режима последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ .

**Теорема 2.** *Для того, чтобы марковская цепь  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$  имела стационарное распределение  $Q_1(\gamma, x_1, x_3)$ ,  $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$ , достаточно выполнения неравенств*

$$\min_{k=0,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \quad \min_{k=1,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \quad (35)$$

*Доказательство.* Предположим обратное, а именно, что при выполнении условия (35) марковская цепь  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$  не имеет стационарного распределения. Тогда для любого состояния  $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$  и независимо от начального распределения  $\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \kappa_{1,0} = x_1, \kappa_{3,0} = x_3)$ ,  $(\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$ , имеют место предельные равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2. \quad (36)$$

Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть все возможные случаи, предполагая апериодичность рассматриваемой цепи (см. рассуждения [27, гл. 3, § 3-4]):

1. все состояния цепи  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$  невозвратные, тогда предельные соотношения выполняются в силу [27, с. 541, лемма 2];
2. существует хотя бы одно возвратное состояние, тогда все состояния возвратные (поскольку все состояния сообщающиеся); и пусть все состояния нулевые, тогда предельное соотношение также выполняется [27, с. 541, лемма 3];
3. все состояния возвратные и существует хотя бы одно положительное, тогда все состояния положительные и пределы  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) > 0$  являются стационарными вероятностями ([27, с. 549, теорема 1]), что противоречит предположению.

Для периодической цепи приведенные рассуждения достаточно провести для циклических подклассов.

Выберем начальное распределение так, что при некоторых  $v_1 > 1$ ,  $v_3 > 1$  будут выполнены неравенства  $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k, r, v_1, 1) < \infty$ ,  $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k, r, 1, v_3) < \infty$  для всех  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ . Это ограничение, в силу леммы (2) и результатов работы [25], обеспечивает при любом конечном  $i \geqslant 0$  существование функций

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1), \quad \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3) \quad (37)$$

$$\frac{d}{dv_1} [\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1)], \quad \frac{d}{dv_3} [\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3)] \quad (38)$$

по крайней мере в некоторой окрестности точек  $v_1 = 1, v_3 = 1$ .

В силу равенств (36) для любого натурального  $N$  найдется некоторое число  $\mathfrak{J}$ , что для всех  $i > \mathfrak{J}$  будет выполнено условие

$$1 > (1 + N) \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_3=0}^N \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$$

и, значит,  $1 > (1 + N) \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_3=0}^N \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$ . Тогда

$$\begin{aligned} E[\varkappa_{3,i} + \varkappa_{1,i}] &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (x_1 + x_3) \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geq \\ &\geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} x_3 \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} x_1 \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geq \\ &\geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} (N+1) \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (N+1) \times \\ &\times \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geq (N+1) \left[ \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \right. \\ &+ \left. \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \right] \geq (N+1)(1 - \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} \leq N, \varkappa_{3,i} \leq N)) \geq \\ &\geq (N+1) \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) = N. \end{aligned}$$

Следовательно,  $E[\varkappa_{3,i} + \varkappa_{1,i}]$  неограниченно возрастает при  $i \rightarrow \infty$ .

Другое рассуждение, однако, приводит к противоположному результату. Действительно, поскольку последовательность  $\{E[\varkappa_{3,i}]; i \geq 0\}$  ограничена, и нетрудно проверить, что

$$E[\varkappa_{1,i}] = \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \frac{d}{dv} (\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1)) \Big|_{v_1=1},$$

где величина справа в силу интегральной формулы Коши и леммы 2 равномерно по  $i$  ограничена некоторой постоянной величиной. Поэтому принятое предположение не будет справедливым. Доказательство этим завершается.  $\square$

## Заключение

В работе рассмотрен тандем систем массового обслуживания. При помощи кибернетического подхода было построено вероятное пространство и заданы случайные величины и элементы, описывающие тандем. Была исследована стохастическая последовательность  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ , состоящая из состояния обслуживающего устройства и длин очередей первичных требований. Проведена классификация ее состояний и выделено множество существенных состояний. При помощи рекуррентных соотношений для вероятностей состояний и частичных производящих функций было найдено достаточное условие существования стационарного распределения цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ .

## Список литературы

- [1] Haight F.A. Mathematical Theories of Traffic Flow. New York: Academic Press, 1963. 242 p.
- [2] Drew D.R. Traffic Flow Theory and Control. New York: McGraw-Hill, 1968. 467 p.
- [3] Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. Москва: Транспорт. 1983. 248 с.
- [4] Bartlett M.S., The Spectral Analysis of Point Processes // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). Vol. 25. № 2. 1963. Pp. 264–296.
- [5] Кокс Д.Р., П. Льюис. Статистический анализ последовательности событий. М.: Мир, 1969. 312 с.
- [6] D.L. Jagerman, B. Melamed, W. Willinger Stochastic modeling of traffic process // In: Frontiers in queuing: models and applications in science and engineering / edited by J.H. Dshalalov. Boca Raton: CRC Press. 1997. Pp. 271–320.
- [7] Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., Rachinskaya M.A. About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway // Proceedings of 36 International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2010). Moscow. 2010. Pp. 86–93.
- [8] Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density // Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks». Minsk: BSU-RIVH. 2011. № 21. Pp. 82–87.
- [9] Fedotkin M., Rachinskaya M. Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // Distributed Computer and Communication Networks. Springer International Publishing, «Communications in Computer and Information Science» series. 2014. V. 279. Pp. 154–168.
- [10] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Estimation of transport systems capacity // Traffic and Granular Flow '11. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 2013. Pp. 63–77.
- [11] Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды Московского физико-технического института (государственного университета). 2010. Т. 2. № 4. С. 6–21.
- [12] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // Methodology and Computing in Applied Probability, Springer. 2013. V. 15. № 4. Pp. 935–950.
- [13] Reich E. Waiting times when queues are in tandem // The Annals of Mathematical Statistics. 1957. V.28. №3. Pp. 768–773.
- [14] Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // Performance Evaluation 51. 2003. Pp. 269–288.
- [15] Gnedenko B.W., Konig D. Handbuch der Bedienungstheorie. Berlin: Akademie Verlag. 1983.

- [16] Perros H.G. Queuing networks with blocking, in: Exact and Approximate Solutions. New York: Oxford University Press, 1994. 358 p.
- [17] Gomez-Corral A. A tandem queue with blocking and Markovian arrival process // Queuing Systems 41. 2002. Pp. 343–370.
- [18] Gomez-Corral A. On a tandem G-network with blocking // Advances in Applied Probability 34 (3). 2002. Pp. 626–661.
- [19] Gomez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // Operations Research Letters 30. 2002. Pp. 360–374.
- [20] Klimenok V.I., Breuer L., Tsarenkov G.V., Dudin A.N. The  $BMAP/G/1/N \rightarrow PH/1/M$  system with losses // Performance Evaluation 61. 2005. Pp. 17–40.
- [21] Клименок В.И., Тарамин О.С. Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами // Автоматика и телемеханика. 2010. № 1. С. 3–17.
- [22] Клименок В.И., Савко Р.Ч. Двухфазная система с повторными попытками и нетерпеливостью запросов // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 78–93.
- [23] Zorine A.V. Stability of a tandem of queuing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 84. Pp. 173–188.
- [24] Zorine A.V. Study of Queues' Sizes in Tandem Intersections under Cyclic Control in Random Environment // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. 2013. V. 356. Pp. 206–215.
- [25] Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017. Выпуск 50. С. 47–55.
- [26] Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Выпуск 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 7–38.
- [27] Ширяев А.Н. Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1. М.: Наука, 2007. 552 с.