

Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем обслуживания при циклическом алгоритме с продлением

Кочеганов Виктор Михайлович¹, Зорин Андрей Владимирович²

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: kocheganol@gmail.com

² Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: zoav1602@gmail.com

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида. Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j = \overline{1, 4}$. Для $j = \overline{1, 3}$ дисциплина очереди O_j имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки. Интенсивность простейшего потока Π_j будем обозначать λ_j , а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}$, $j \in \{1, 3\}$, которая предполагается аналитической при любом z из внутренности круга $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_{\nu}^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν . Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4 . Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков. В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, \dots, n_d . В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1, 4}$, определяются как

виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j = \overline{1, 3}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1, 3}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если обслуживается очередь O_j , и будет содержать 0 требований в противном случае.

Для задания информации о системе введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. Пусть \mathbb{Z}_+ — множество целых неотрицательных чисел. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, количество $\kappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i , количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, количество $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, $j = \overline{1, 4}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \kappa_{3,i})$, где вид отображения $h(\cdot, \cdot)$ описан в работе [1]. Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$: $h_T(\Gamma_i, \kappa_{3,i}) = T^{(k,r)}$, где $\Gamma^{(k,r)} = h(\Gamma_i, \kappa_{3,i})$. Далее, функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

между величиной $\bar{\xi}_{j,i}$ и величинами $\kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку $\kappa_{j,i+1} = \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}$, то из (1) следует соотношение $\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}$ для $j = \overline{1, 3}$. Из формулировки поставленной задачи также следуют соотношения для потока Π_4 : $\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}$, $\kappa_{4,i+1} = \kappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}$ и $\xi_{4,i} = \kappa_{4,i}$.

Для $j \in \{1, 3\}$ и $t \in \mathbb{R}$ функцию $\varphi_j(\cdot, \cdot)$ введем из разложения $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\}$. Функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ зададим формулой $\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}$, $k, y \in \mathbb{Z}_+$, $u \in [0, 1]$. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$. Индикатор равенства двух величин x и y будем выражать символом кронекера $\delta_{x,y}$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении пары $(\Gamma_i; \kappa_i)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4$ есть $\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times$

$\varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}$. Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma_i; \varkappa_i)$ есть $\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}$.

В статье [1] конструктивно задается вероятностное пространство, на котором могут быть реализованы сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов. Ниже в этой работе сформулированы три теоремы, формализующих модель колебаний длины низкоприоритетной очереди O_3 в терминах марковских цепей.

Теорема 1. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $\varkappa_{3,0} = x_{3,0} \in \mathbb{Z}_+$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Теорема 2. Пусть $x_3, \tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$. Тогда переходные вероятности $\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3\} | \{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3\})$ однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$(1 - \delta_{\tilde{x}_3, 0})\varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) + \delta_{\tilde{x}_3, 0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3))$$

Обозначим для $1 \leq r \leq n_0$ множество $S_{0,r}^3 = \{(\Gamma^{(0,r)}, x_3) : x_3 \in \mathbb{Z}_+, L \geq x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\}\}$ и для $1 \leq k \leq d, 1 \leq r \leq n_k$ множество $S_{k,r}^3 = \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3) : x_3 \in \mathbb{Z}_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}$, тогда верна также и следующая теорема.

Теорема 3. Множествами существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ являются множества $\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^3, \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^3$ и только они.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кочеганов В. М., Зорин А. В. Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: сб. науч. ст. (материалы Междунар. конф. Минск, — 23-26 февр. 2015 г. — Т. 2, № 5. — С. 80–91.