

## ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ОЧЕРЕДЕЙ ПЕРВИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ В ТАНДЕМЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Кочеганов В.М.\*, Зорин А.В.\*

\*НИУ ННГУ им. Н.И.Лобачевского, г. Н.Новгород

Рассматривается тандем из двух систем массового обслуживания с мгновенным перемещением требований между системами. В каждую из этих систем поступают первичные требования, формируемые внешней средой. Кроме первичных требований во вторую систему также поступают требования, обслуженные первой системой. Построена математическая модель в виде многомерной марковской цепи, определенной на явно заданном вероятностном пространстве. Проведен анализ марковской цепи, описывающей изменение состояния обслуживающего устройства и флуктуации длин очередей первичных требований. Найдено достаточное условие существования стационарного распределения для этой цепи.

**Ключевые слова:** стационарное распределение, управляющая система массового обслуживания, циклический алгоритм с продлением, конфликтные потоки, многомерная счетная марковская цепь.

### Введение

В связи со стремительным ростом числа машин в современных городах все больший интерес стала представлять теория потоков транспортных средств. Результаты ранних исследований по этой тематике собраны, например, в книгах [1–3]. В этих монографиях потоки машин моделируются с помощью традиционных стохастических потоков событий, весьма полно изученных в классической теории массового обслуживания. Однако классические модели не удается использовать для адекватного описания реальных потоков машин (см. [4–6]). В работах [7–9] предлагается учитывать не только вероятностные свойства последовательности моментов пересечения машинами так называемой виртуальной стоп-линии, но и определять свойства случайных конфигураций автомобилей на дороге. В указанных работах изучается возникновение так называемых пачек машин. Каждая пачка состоит из медленной головной машины и ожидающих возможности обгона машин за ней. Динамика длины пачки определяется возможностью обгона машинами из хвоста всей пачки. Другая динамика, обусловленная возможностью съезда машин с трассы, рассматривается в работах [10–12]. Основным объектом изучения в этих работах является плотность потока машин как функция от расстояния, а знание плотности, в свою очередь, позволяет делать выводы о пропускной способности перекрестков.

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания на одном устройстве поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. Одной из первых работ, посвященная тандемам систем массового обслуживания, является работа [13]. В ней изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлением заявок в систему и времени обслуживания независимы и имеют экспоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора.

Основные результаты теории тандемов в случае простейших стационарных входных потоков и экспоненциального времени обслуживания широко представлены, например, в работах [14–16]. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены в статьях [17–19]. Более общие модели включают в себя так называемые входные ВМАР (Batch Markovian Arrival Process) потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Системы обслуживания с входными потоками типа ВМАР рассмотрены, например, в работах [20–22], где проведены аналитические расчеты условий стационарности и изучено поведение характеристик обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями. Модель последовательных перекрестков с мгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах [23, 24]. В этих работах динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернулиевской случайной величиной: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью  $0 < p < 1$  успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью  $1 - p$  остается «между» перекрестками.

Статья [25] отличается от работ [23, 24] введением продления в алгоритм обслуживания во второй системе. В данной работе рассматривается тандем из двух систем массового обслуживания. В первой системе управление осуществляется по циклическому алгоритму. После обслуживания в первой системе, требования мгновенно поступают на вторую, где обслуживаются по циклическому алгоритму с продлением. Целью этой статьи является исследование условий существования стационарного режима очередей первичных требований, то есть требований, генерируемых внешней средой.

## Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (рис. 1). Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  и  $\Pi_4$ . Требования по потоку  $\Pi_j$  становятся в соответствующую очередь  $O_j$  с неограниченной вместимостью,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  дисциплина очереди  $O_j$ , поддерживаемая устройством  $\delta_j$ , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование,

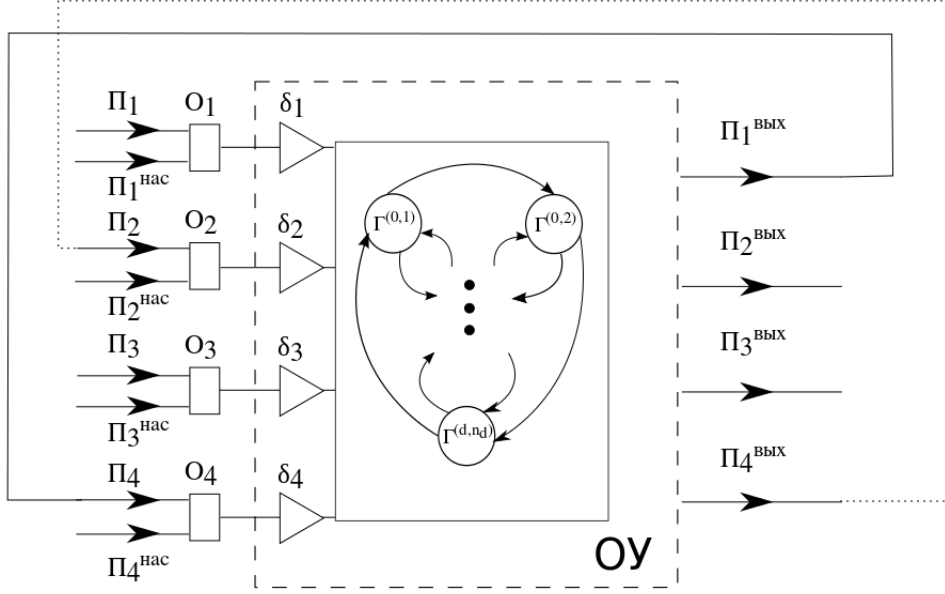


Рис. 1: Структурная схема системы обслуживания

которое пришло раньше. Дисциплина очереди  $O_4$  будет описана ниже. Входные потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последовательности и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  будем обозначать  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ , а распределение числа заявок в группе по потоку  $\Pi_j$  будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}, \quad j \in \{1, 3\}, \quad (1)$$

которая предполагается аналитической при любом  $z \in \mathbb{C}$  таком, что  $|z| < (1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Величина  $p_{\nu}^{(j)}$  определяет вероятность того, что по потоку  $\Pi_j$  число требований в группе равно  $\nu$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_1$  поступают на повторное обслуживание, формируя на выходе поток  $\Pi_4$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_4$  в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток  $\Pi_2$ . Потоки  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний  $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$  с заданными натуральными числами  $d, n_0, n_1, \dots, n_d$ . В каждом состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающее устройство находится в течение неслучайного времени  $T^{(k,r)}$ . Введем непересе-

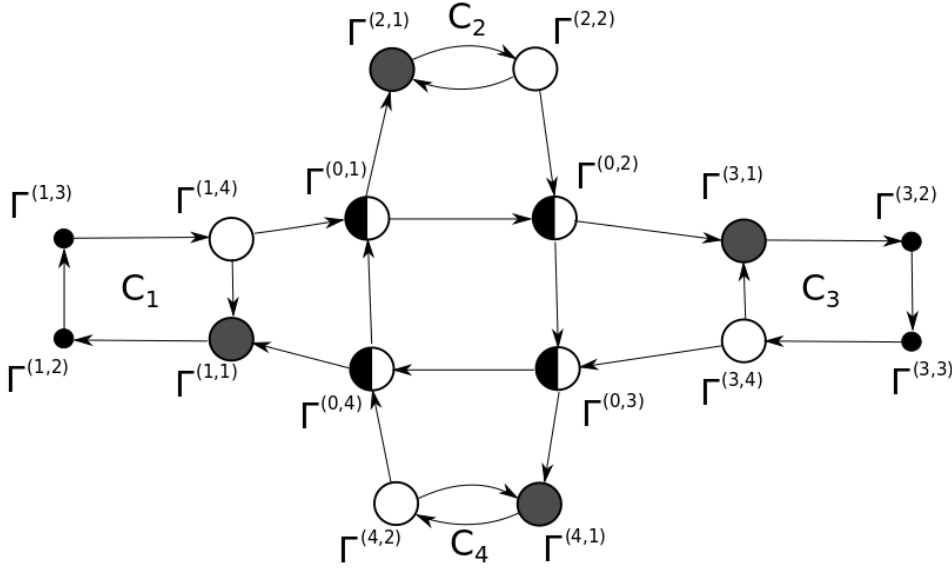


Рис. 2: Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, большие черные вершины — входные, небольшие черные — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

кающиеся подмножества  $\Gamma^I$ ,  $\Gamma^{II}$ ,  $\Gamma^{III}$  и  $\Gamma^{IV}$  множества  $\Gamma$  следующим образом. В состоянии  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma^I$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{II}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{III}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1$ ,  $O_3$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{IV}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_3$  и  $O_4$ . Тогда множество  $\Gamma$  есть объединение  $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$  непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества  ${}^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}$ ,  ${}^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}$ ,  ${}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ .

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний  $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = \overline{1, n_k}\}$  будем называть  $k$ -м циклом,  $k = \overline{1, d}$  (Рис. 2). Состояние вида  $\Gamma^{(0,r)}$  будем называть состоянием продления,  $r = \overline{1, n_0}$ . Положим  $r \oplus_k 1 = r + 1$  для  $r = \overline{1, n_k - 1}$  и  $r \oplus_k 1 = 1$  при  $r = n_k$ ,  $k = \overline{0, d}$ . В цикле  $C_k$  выделим подмножества  $C_k^O$  выходных,  $C_k^I$  входных и  $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$  нейтральных состояний. Тогда после состояния  $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$  обслуживающее устройство переходит в состояние  $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$  того же цикла  $C_k$ . При  $\Gamma^{(k,r)}$  принадлежащем множеству  $C_k^O$  прибор переходит в состояние  $\Gamma^{(k, r \oplus_k 1)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  в момент переключения больше заданного порога  $L$ . В противном случае, то есть если число требований в очереди  $O_3$  меньше либо равно  $L$ , новое состояние прибора будет состоянием продления  $\Gamma^{(0, r_1)}$ , где  $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$  и  $h_1(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$  во множество  $\{1, 2, \dots, n_0\}$ . После состояния  $\Gamma^{(0,r)}$  выбирается состояние того же вида  $\Gamma^{(0, r_2)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  меньше или равно  $L$ , где  $r_2 = h_2(r)$  и

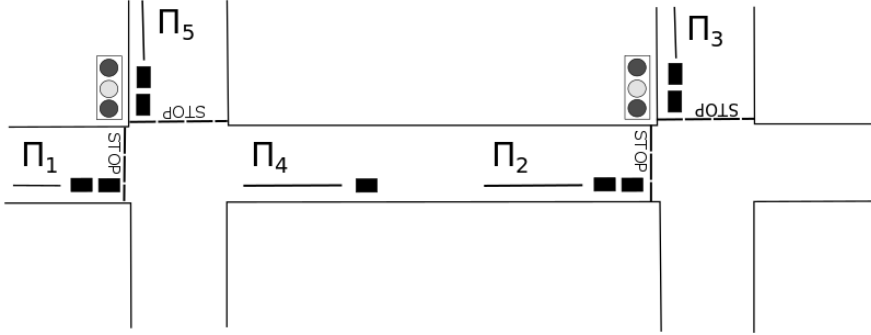


Рис. 3: Пример: тандем перекрестков

$h_2(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на себя; в противном случае включается входное состояние  $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$ , где  $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$  и  $h_3(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на множество  $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$ . Считается, что все состояния продления  $\Gamma^{(0,r)}$  принадлежат множеству  ${}^2\Gamma$ , а также верны соотношения  $C_k^O \subset {}^2\Gamma$  и  $C_k^I \subset {}^3\Gamma$ . Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, то есть можем положить  $h_2(r) = r \oplus_0 1$ .

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \ \& \ y > L); \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y \leq L; \\ \Gamma^{(0, r \oplus_0 1)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \quad (2)$$

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В роли потоков требований, формируемых внешней средой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки  $\Pi_1, \Pi_5$  на первом перекрестке, а также поток  $\Pi_3$  на втором. Каждая машина из потока  $\Pi_1$ , проезжая первый перекресток, становится в очередь  $O_4$  потока  $\Pi_4$  и затем с некой вероятностью ( $p_{k,r}$  для состояния  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди  $O_4$  до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди  $O_4$  успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь  $O_2$  и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния  $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ : в состоянии  $g_{1,1}$  машины потока  $\Pi_1$  пропускаются фиксированное количество времени  $\tilde{T}^{(1,1)}$  («зеленый» свет для  $\Pi_1$ ); в состоянии  $g_{1,2}$  — простаивают в течение времени  $\tilde{T}^{(1,2)}$  («красный» свет для  $\Pi_1$ ). Светофор на втором пе-

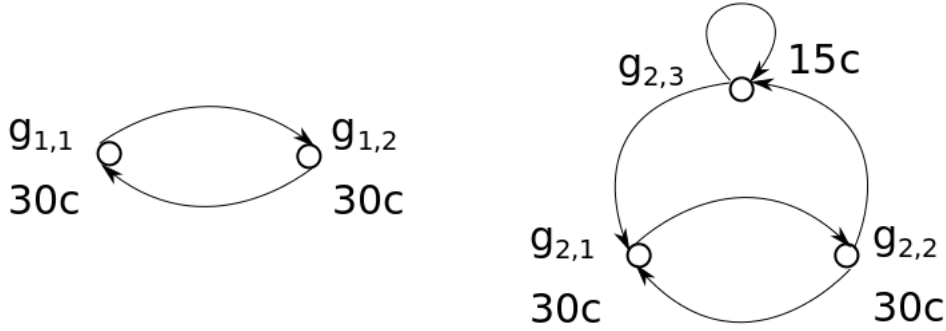


Рис. 4: Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока  $\Pi_3$  (состояние  $g_{2,1}$ ), также имеется два состояния обслуживания потока  $\Pi_2$  (состояния  $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$ ). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока  $\Pi_3$ , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока  $\Pi_2$  длина очереди  $O_3$  не превосходит уровня  $L$ . Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть  $\tilde{T}^{(2,1)}$ ,  $\tilde{T}^{(2,2)}$  и  $\tilde{T}^{(2,3)}$ .

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, можно показать, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор  $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$ , где  $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$  — состояние 1-го перекрестка,  $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$  — состояние 2-го перекрестка,  $s \in \{0, 1, 2\}$  — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и  $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$  — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина  $s$ ). Здесь  $T$  — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины  $2 \times 3 \times 3 \times T$ .

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток  $\Pi_5$  не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определенности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4.

За начальное состояние объединенной системы примем  $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , то есть первый перекресток находится в состоянии  $g_{1,1}$ , второй — в состоянии  $g_{2,1}$ , и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами  $s = 0$  и  $t = 0$ ). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию  $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$ . Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние  $g_{2,1}$ , так и в состояние продления  $g_{2,3}$ . Таким образом следующим состоянием тандема будет либо опять  $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , либо  $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$ . Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следующий список всех возможных состояний системы:

$$\begin{aligned} (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,1)}, \\ (g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,4)}, \\ (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,3)}, \\ (g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,1)}, \\ (g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,2)}, \\ (g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,4)}. \end{aligned}$$

В соответствии с приведенными выше обозначениями, множества  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут  $C_1^I = \{\Gamma^{(1,1)}\}$ ,  $C_2^I = \{\Gamma^{(2,1)}\}$ ,  $C_3^I = \{\Gamma^{(3,1)}\}$  и  $C_4^I = \{\Gamma^{(4,1)}\}$ . Множествами выходных состояний будут  $C_1^O = \{\Gamma^{(1,2)}\}$ ,  $C_2^O = \{\Gamma^{(2,4)}\}$ ,  $C_3^O = \{\Gamma^{(3,2)}\}$  и  $C_4^O = \{\Gamma^{(4,4)}\}$ . Функции  $h_1(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$  и  $h_3(\cdot)$  задаются поточечно:

$$\begin{aligned} h_1(\Gamma^{(1,2)}) &= 1, & h_1(\Gamma^{(2,4)}) &= 2, & h_1(\Gamma^{(3,2)}) &= 3, & h_1(\Gamma^{(4,4)}) &= 5, \\ h_2(1) &= 2, & h_2(2) &= 3, & h_2(3) &= 4, & h_2(4) &= 1, & h_2(5) &= 1, \\ h_3(1) &= \Gamma^{(2,1)}, & h_3(2) &= \Gamma^{(3,1)}, & h_3(3) &= \Gamma^{(4,1)}, & h_3(4) &= \Gamma^{(1,1)}, & h_3(5) &= \Gamma^{(1,1)}. \end{aligned}$$

Этим завершается построение числового примера.

## Математическая модель

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [26]). Схема управляющей системы приведена на Рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ ; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$ ; 4) внешняя память — очереди  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса  $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$ . Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$  моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим  $\Gamma_i, i \geq 1$ , из множества  $\Gamma$  состояние обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$  и  $\Gamma_0 \in \Gamma$  — в момент времени  $\tau_0$ , количество  $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i$ , количество  $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , требований, поступивших в очередь  $O_j$  по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , требований по потоку насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$ , реально обслуженных требований по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ ;  $j = 1, 4$ .

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad (3)$$

где отображение  $h(\cdot, \cdot)$  определено в (2). Для определения длительности  $T_{i+1}$  состояния обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$  удобно ввести функцию  $h_T(\cdot, \cdot)$ :

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } k \text{ и } r \text{ таковы, что } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4)$$

между величиной  $\bar{\xi}_{j,i}$  и величинами  $\varkappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}$  реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из выражения (4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (5)$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на Рис. 1) следуют соотношения для потока  $\Pi_4$ :

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \quad (6)$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения заключается в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент  $\eta_i$  и  $\xi_i$  маркированных точечных процессов  $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$  и  $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geq 0\}$  при фиксированных значениях метки  $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_i)$ , где  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ ,  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$  и  $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$ . Введем функции  $\varphi_1(\cdot, \cdot)$  и  $\varphi_3(\cdot, \cdot)$  из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где  $f_j(z)$  определены выражением (1),  $j \in \{1, 3\}$ . Функция  $\varphi_j(\nu, t)$  по своему смыслу есть вероятность поступления  $\nu = 0, 1, \dots$  требований по потоку  $\Pi_j$  за время



$t \geq 0$ . Положим  $\varphi_j(\nu, t)$  равной нулю при  $\nu < 0$ . Функцию  $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$  зададим формулой

$$\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1 - u)^{y-k}.$$

По своему смыслу  $\psi(k; y, u)$  есть вероятность поступления  $k$  требований по потоку  $\Pi_2$  при условии, что очередь  $O_4$  содержит  $y$  требований и обслуживающее устройство находится в состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$ , так что  $u = p_{k,r}$ . При нарушении условия  $0 \leq k \leq y$  положим  $\psi(k; y, u)$  равной нулю.

Пусть  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$  и  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ . Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки  $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$  вероятность  $\varphi(a, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4$  есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}, \quad (7)$$

где  $\tilde{k}$  и  $\tilde{r}$  таковы, что  $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$  и  $\delta_{i,j}$  есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ . Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность  $\zeta(b, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4$  при фиксированном значении  $(\Gamma^{(k,r)}; x)$  метки  $\nu_i$  есть

$$\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует для  $j \in \{1, 2, 3\}$ , что вероятность события  $\xi_{j,i} = 0$  равна 1 в случае  $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$  и что вероятность события  $\xi_{j,i} = \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, j)$  равна 1, если  $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$ .

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором вероятностном пространстве.

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma$  и  $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$  фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  и заданные на нем случайные величины  $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$ ,  $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$ ,  $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$  и случайные элементы  $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$ ,  $i \geq 0$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , такие, что 1) имеют место равенства  $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$  и  $\varkappa_0(\omega) = x^0$ ; 2) выполняются соотношения (3), (5), (6); 3) для любых  $a \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $b \in \mathbb{Z}_+^4$  и любых  $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$ ,  $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , таких, что  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) > 0$ , условное распределение векторов  $\eta_i$  и  $\xi_i$ ,  $i \geq 0$ , имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \quad (9)$$

где функции  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  определяются формулами (7) и (8).

*Доказательство.* Для построения вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  воспользуемся теоремой И. Тулчи (см. [27], с. 348).

Введем последовательность измеримых пространств  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0), (\Omega_1, \mathcal{F}_1), \dots$ , где  $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$ ,  $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i}) \in \Omega_i$ , а  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$  есть множество всех подмножеств множества  $\Omega_i$ . Пусть  $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x_{3,0})$ . Зададим на измеримом пространстве  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$  вероятностную меру  $P_0(\cdot)$  ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})). \quad (10)$$

Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  определим величины

$$\tilde{\Gamma}_0(\omega_0) = \gamma_0, \quad \tilde{\chi}_{j,0}(\omega_0) = x_{j,0}, \quad \tilde{\xi}_{j,0}(\omega_0) = l(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \tilde{\eta}_{j,0}(\omega_0) = \omega_{j,0}, \quad (11)$$

и

$$\tilde{\chi}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\xi}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\eta}_{4,0}(\omega_0) = \min\{\tilde{\xi}_{1,0}(\omega_0), \tilde{\chi}_{1,0}(\omega_0) + \tilde{\eta}_{1,0}(\omega_0)\}. \quad (12)$$

Теперь предположим, что заданы вероятностные меры  $P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$  на измеримом пространстве  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , и фиксирован набор  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ . Положим для  $j \in \{1, 2, 3\}$  и  $i = \overline{0, n}$

$$\tilde{\Gamma}_{i+1} = \Gamma^{(k^*, r^*)} = h(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\chi}_{3,i}), \quad \tilde{\chi}_{j,i+1} = \max\{0, \tilde{\chi}_{j,i} + \tilde{\eta}_{j,i} - \tilde{\xi}_{j,i}\}, \quad (13)$$

$$\tilde{\chi}_{4,i+1} = \tilde{\chi}_{4,i} + \tilde{\eta}_{4,i} - \tilde{\eta}_{2,i}, \quad \tilde{\xi}_{j,i+1} = l(k^*, r^*, j), \quad \tilde{\eta}_{j,i+1} = \omega_{j,i+1} \quad (14)$$

$$\tilde{\eta}_{4,i+1} = \min\{\tilde{\xi}_{1,i+1}, \tilde{\chi}_{1,i+1} + \tilde{\eta}_{1,i+1}\}, \quad \tilde{\xi}_{4,i+1} = \tilde{\chi}_{4,i+1}. \quad (15)$$

Заметим, что значения  $\tilde{\Gamma}_{j,i}$ ,  $\tilde{\xi}_{j,i}$ ,  $\tilde{\eta}_{j,i}$ ,  $\tilde{\chi}_{j,i}$ , найденные по формулам (13)–(15) по наборам  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$  и  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_i)$ ,  $n \geq i$ , совпадают. Определим на измеримом пространстве  $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$  вероятностную меру  $P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$  ее значениями на одноточечных множествах  $\{(a_1, a_2, a_3)\}$ ,  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) &= \\ &= \varphi_1(a_1, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\chi}_{3,n})) \times \psi(a_2, \tilde{\chi}_{4,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\chi}_{3,n})). \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда (в соответствии с теоремой Ионеску Тулчи) для декартова произведения  $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i$  пространств элементарных исходов и произведения  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  будет существовать единственная вероятностная мера  $\mathbf{P}(\cdot)$  такая, что для любого  $i \geq 0$  верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega: \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_i \in A_i\}) = P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i), \quad (17)$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i) = \int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P_1(\omega_0; d\omega_1) \dots \int_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \quad (18)$$

для любого  $A_i$  из  $\mathcal{F}_i$ . Итак, вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  построено.

Теперь введем на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  следующие случайные величины и элементы,  $i \geq 0$ ,  $j = \overline{1, 4}$ :

$$\Gamma_i(\omega) = \tilde{\Gamma}_i, \quad \varkappa_{j,i}(\omega) = \tilde{\varkappa}_{j,i}, \quad \xi_{j,i}(\omega) = \tilde{\xi}_{j,i}, \quad \eta_{j,i}(\omega) = \tilde{\eta}_{j,i}.$$

и докажем, что они удовлетворяют условиям теоремы. Для сокращения записи зависимость от  $\omega$  в обозначении случайных элементов и случайных величин далее будем опускать. Из формулы (13) следует, что случайные элементы  $\Gamma_i$  удовлетворяют соотношению (3), а случайные величины  $\varkappa_{j,i}$  для  $j \in \{1, 2, 3\}$  удовлетворяют соотношению (5). Из формулы (14) заключаем, что  $\varkappa_{4,i}$  удовлетворяет соотношению (6). Далее, из условий (12) и (15) следует справедливость соотношений (6) для величин  $\eta_{4,i}$  и  $\xi_{4,i}$ .

Перейдем к доказательству равенства (9). Для сокращения записи введем множества  $B_i = \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}$ ,  $i \geq 0$ . Найдем явное выражение для условной вероятности  $\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i)$ . Пусть  $\Gamma^{(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$ . Запишем по определению условной вероятности, предполагая, что  $\mathbf{P}(B_i) > 0$ :

$$\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i) = \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap B_i) \times (\mathbf{P}(B_i))^{-1}. \quad (19)$$

Далее из соотношений (17), (18) и того факта, что значения  $\Gamma_i$  и  $\varkappa_i$  зависят только от  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}$ , но не от  $\omega_i$ , (этот факт следует из формул (11) – (14)), получим выражение для второго сомножителя последнего выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_i) &= \\ &= \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t = \overline{0, i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \end{aligned} \quad (20)$$

Преобразуем множество  $\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$ , учитывая соотношения (11) – (15):

$$\begin{aligned} \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} &= \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap \\ \cap \{\omega: \eta_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: \xi_{j,i} = b_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: \xi_{4,i} = b_4\} \cap \{\omega: \eta_{4,i} = a_4\} &= \\ = \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap \{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}\} \cap \\ \cap \{\omega: b_j = \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j = \overline{1, 3}\} \cap \{\omega: b_4 = x_{4,i}\} \cap \\ \cap \{\omega: a_4 = \min \{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}\}. \end{aligned}$$

Тогда для второго множителя из правой части выражения (19) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap B_i) &= \\ = \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \\
&\times \mathbf{P}(\{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}\} \cap \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}). \quad (21)
\end{aligned}$$

И по аналогии со вторым множителем в выражении (20) преобразуем последний множитель правой части равенства (21):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}) = \\
&= \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t = \overline{0, i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\
&\quad \times P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\})
\end{aligned}$$

и, учитывая выражение (16), получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega: \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1,3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\} \cap B_{i-1}) = \\
&= \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
&\times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t = \overline{0, i-1}}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \quad (22)
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (22) в правую часть равенств (21), а затем выражения (21) и (20) в равенство (19), получим:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | B_i) = \\
&= \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
&\quad \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\
&\times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\
&\quad \times \left( \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times \right. \\
&\quad \left. \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \right)^{-1}
\end{aligned}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем требуемое равенство (9).  $\square$

### Очереди первичных требований

Рассмотрим случайную последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\},$$

включающую в себя состояния  $\varkappa_{1,i}$  и  $\varkappa_{3,i}$  очередей  $O_1$  и  $O_3$  первичных требований в момент  $\tau_i$ . Приведем ниже несколько результатов, касающихся этой последовательности.

**Утверждение 1.** Пусть  $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$  и  $(\varkappa_{1,0}, \varkappa_{3,0}) = (x_{1,0}, x_{3,0}) \in \mathbb{Z}_+^2$  фиксированы. Тогда последовательность  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  является однородной счетной цепью Маркова.

Обозначим для  $\gamma \in \Gamma$  и  $(x_1, x_3) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3), \quad (23)$$

а также введем множество

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \{\gamma \in \Gamma: h(\gamma, x_3) = \Gamma^{(k,r)}\}.$$

Положим  $r \ominus_k 1 = r - 1$  для  $r = \overline{2, n_k}$  и  $r \ominus_k 1 = n_k$  при  $r = 1$ ,  $k = \overline{0, d}$ . Из определения (2) находим явный вид множества для различных  $\Gamma^{(k,r)}$  и  $x_3$ :

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \begin{cases} \{\Gamma^{(k_1, r_1)}, \Gamma^{(0, r \ominus_0 1)}\}, & \text{если } (k = 0 \ \& \ x_3 \leq L); \\ \{\Gamma^{(k, r \ominus_k 1)}, \Gamma^{(0, r_2)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I \ \& \ x_3 > L); \\ \{\Gamma^{(k, r \ominus_k 1)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O) \text{ или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^N); \\ \emptyset, & \text{если } (k = 0 \ \& \ x_3 > L) \\ & \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I \ \& \ x_3 \leq L), \end{cases} \quad (24)$$

где  $k_1, r_1$  таковы, что  $h_1(\Gamma^{(k_1, r_1)}) = r$ , и  $r_2$  таково, что  $h_3(r_2) = \Gamma^{(k,r)}$ .

Важным шагом при исследовании стационарного режима цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  является нахождение множества ее существенных состояний. Введем множества

$$S_{0,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(0,r)}, x_1, x_3): (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3) \right\} \right\},$$

для  $1 \leq r \leq n_0$  и множества

$$S_{k,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3): (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k, t, 3) \right\},$$

для  $1 \leq k \leq d$ ,  $1 \leq r \leq n_k$ . Тогда верно следующее

**Утверждение 2.** Множество существенных состояний марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  имеет вид  $\left( \bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^1 \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^1 \right)$ .

Пусть  $k$  и  $r$  таковы, что  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ . Введем частичные производящие функции

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3) = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) v_1^{w_1} v_3^{w_3},$$

и вспомогательные функции

$$q^{(1)}(k, r, v_1) = v_1^{-\ell(k,r,1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k,r)}) v_1^w;$$

$$q^{(3)}(k, r, v_3) = v_3^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v_3^w.$$

В введенных обозначениях верна следующая

**Лемма 1.** Пусть  $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$ . Тогда верно следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) &= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, w_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\ &\times \left[ v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^I) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (1 - v_1^{w_1 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)}) \right] \times \\ &\times \left[ v_3^{w_3} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^{III}) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - w_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (1 - v_3^{w_3 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}) \right]. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ . Учитывая соотношения (5) и вид условных распределений (9) для  $\eta_i$  и  $\xi_i$ ,  $i \geq 0$ , запишем по формуле повторного математического ожидания:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) &= \\ &= E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{3,i+1}} I(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma})] = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\ &\times E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{3,i+1}} I(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}) | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] = \\ &= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, w_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\ &\times E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] = \\ &= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, w_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\ &\times E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] \times \\ &\times E[v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}]. \quad (25) \end{aligned}$$

В случае  $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^I$  очередь  $O_1$  не обслуживается и, следовательно,  $\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) = 0$ . Поэтому  $\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\} = w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)$ . Аналогично при  $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^{III}$  очередь  $O_3$  не обслуживается и  $\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) = 0$ . Откуда получаем, что  $\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\} = w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)$ .

Рассмотрим подробнее случай  $\tilde{\gamma} \in \Gamma^I$ :

$$\begin{aligned} E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} | \mathcal{K}_{1,i} = w_1, \mathcal{K}_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] &= \\ &= E[v_1^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} | \mathcal{K}_{1,i} = w_1, \mathcal{K}_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] + \\ &+ E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} - v_1^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} | \mathcal{K}_{1,i} = w_1, \mathcal{K}_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] = \\ &= v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(1 - v_1^{w_1 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)}), \quad (26) \end{aligned}$$

поскольку при  $\tilde{\gamma} \in \Gamma^I$  величина  $\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}$  отличается от величины  $w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)$  только при  $0 \leq \eta_{1,i} < \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1$ .

С помощью аналогичных рассуждений получим для  $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{III}$ :

$$\begin{aligned} E[v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \mathcal{K}_{1,i} = w_1, \mathcal{K}_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}] &= \\ &= v_3^{w_3} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - w_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(1 - v_3^{w_3 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}) \quad (27) \end{aligned}$$

и подставляя полученные выражения (26), (27) в выражение (25), получаем утверждение леммы.  $\square$

Из этой леммы следует существование величин  $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3)$  хотя бы в некоторой окрестности точки  $(v_1, v_3) = (1, 1)$ , для  $i > 0$ ,  $k = \overline{0; d}$ ,  $r = \overline{1; n_k}$ .

В работе [25] доказана ограниченность частичных производящих функций  $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v_3) = E[v_3^{\mathcal{K}_{3,i}} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)})]$  по  $i \geq 0$  для всех  $v_3 \in [1, 1 + \varepsilon_3]$ , при некотором  $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  определено в (1). Причем заметим, что в наших обозначениях  $\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v_3) = \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3)$ . Цель следующей леммы — доказать аналогичный результат для величин  $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1)$ ,  $i \geq 0$ .

**Лемма 2.** Если

$$\min_{k=\overline{0;d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1,$$

то числовая последовательность  $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1); i \geq 0\}$  ограничена при  $v \in [1, 1 + \varepsilon_1]$ , для некоторого  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  определено в (1).

*Доказательство.* Введем случайные последовательности  $\{\mathcal{K}_1^{(1)}(i); i \geq 0\}$  и  $\{\mathcal{K}_1^{(2)}(i); i \geq 0\}$  следующим образом. Положим для  $i = 0$ :  $\mathcal{K}_1^{(1)}(0) = 0$  и  $\mathcal{K}_1^{(2)}(0) = \mathcal{K}_{1,0}$ . Далее введем рекуррентные соотношения:

$$\mathcal{K}_1^{(1)}(i+1) = \begin{cases} \max\{0, \mathcal{K}_1^{(1)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1, n_k}; \\ \mathcal{K}_1^{(1)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}; \end{cases}$$

$$\varkappa_1^{(2)}(i+1) = \begin{cases} \varkappa_1^{(2)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1, n_k}; \\ \max\{0, \varkappa_1^{(2)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}. \end{cases}$$

Тогда последовательность  $\varkappa_{1,i}^+ = \varkappa_1^{(1)}(i) + \varkappa_1^{(2)}(i)$  является мажорирующей для последовательности  $\varkappa_{1,i}$ , т.е.  $\varkappa_{1,i}(\omega) \leq \varkappa_{1,i}^+(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ . Доказательство этого факта проводится по индукции и в данной статье его приводить не будем. Заметим только, что из него следует для  $v \geq 1$  неравенство

$$E[v^{\varkappa_{1,i}}] \leq E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} v^{\varkappa_1^{(2)}(i)}]. \quad (28)$$

Наблюдение за вновь введенными величинами  $\varkappa_1^{(1)}(i)$  и  $\varkappa_1^{(2)}(i)$  будем осуществлять в случайные моменты времени  $\theta_i^{(1)}$  и  $\theta_i^{(2)}$ , соответственно, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta_0^{(1)} &= 0; \quad \theta_{i+1}^{(1)} = \theta_i^{(1)} + \min\{s > 0: \Gamma_{\theta_i^{(1)}+s} = \Gamma^{(k,n_k)}, k > 0\}; \\ \theta_0^{(2)} &= 0; \quad \theta_{i+1}^{(2)} = \theta_i^{(2)} + \min\{s > 0: \Gamma_{\theta_i^{(2)}+s} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Также нам понадобятся следующие обозначения:

$$\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)} = \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}), \quad \hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)} = \varkappa_1^{(2)}(\theta_i^{(2)}). \quad (30)$$

Пусть  $k > 0$ ,  $r \in \{2, 3, \dots, n_k\}$ . В введенных обозначениях рассмотрим выражение для  $E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)})]$ :

$$\begin{aligned} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)})] &= \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_3 \geq 0} \sum_{\gamma \in \Gamma} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma)] = \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_3 \geq 0} E[v^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(k,r,1)} I(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)})] + \tilde{C}_1 = \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)}) q^{(1)}(k, r, v) + \tilde{C}_1 = \\ &= q^{(1)}(k, r, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r-1)})] + \tilde{C}_1. \end{aligned}$$

И далее по индукции:

$$E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+n_k-1)} I(\Gamma_{i+n_k-1} = \Gamma^{(k,n_k)})] = \prod_{r=2}^{n_k} q^{(1)}(k, r, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,1)})].$$

Для  $w_1, w_3 \in Z_+$ ,  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ,  $C \subset [0, +\infty)$  введем множества

$$\begin{aligned} A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma) &= \{\omega: \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}) = w_1; \varkappa_{3,\theta_i^{(1)}} = w_3, \Gamma_{\theta_i^{(1)}} = \gamma\}; \\ A_i^{(1)}(w_1, C, \gamma) &= \bigcup_{w_3 \in C} A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma); \quad B_i^{(1)}(\gamma) = \{\omega: \Gamma_{\theta_i^{(1)}} = \gamma\}; \\ C_i^{(1)}(\gamma_1, w_1, w_3, \gamma_2) &= B_{i+1}^{(1)}(\gamma_1) \cap A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma_2). \end{aligned}$$



Пусть  $\tilde{k} > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}
E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))] &= \\
&= E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})))] = E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\theta_{i+1}^{(1)})} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})))] = \\
&= \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})))] + \tilde{C}_1 = \\
&= \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 \leq L}}^d \sum_{k=1} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k))})] + \\
&+ \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 > L}} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k))})] + \tilde{C}_1,
\end{aligned}$$

где мы обозначили для краткости  $\tau = \theta_{i+1}^{(1)} - n_{\tilde{k}} + 1$ . Далее поскольку

$$\varkappa_1^{(1)}(\tau) = \max\{0; \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}) + \eta_{1,\tau} - \ell(1, \tilde{k}, 1)\},$$

то продолжим цепочку рассуждений:

$$\begin{aligned}
E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))] &= \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 \leq L}}^d \sum_{k=1} v^{w_1} v^{-\ell(1, \tilde{k}, 1)} \times \\
&\times E[v^{\eta_{1,\tau}} I(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k))})] + \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \times \\
&\times \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 > L}} v^{w_1} v^{-\ell(1, \tilde{k}, 1)} E[v^{\eta_{1,\tau}} I(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k))})] + \tilde{C}_2 = \\
&= Q_1(v, \tilde{k}) \left( \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{k=1}^d v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, (L; \infty), \Gamma^{(k, n_k)})) \right) + \tilde{C}_2, \quad (31)
\end{aligned}$$

где  $Q_1(v, \tilde{k}) = \prod_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v)$ . Просуммируем по  $\tilde{k}$  получившийся в (31) результат:

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{k}=1}^d E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))] &= E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}] = \\
&= \sum_{\tilde{k}=1}^d Q_1(v, \tilde{k}) \left( \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{k=1}^d v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, (L; \infty), \Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))) \Big) + \tilde{C}_3 \leq \\
& \leq \max_{\tilde{k}=\overline{1; \tilde{d}}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \left( \sum_{\tilde{k}=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, [0; L], \Gamma(k, n_k))) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\tilde{k}=1}^d \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}), w_1, (L; \infty), \Gamma(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))) \right) + \tilde{C}_3 = \\
& = \max_{\tilde{k}=\overline{1; \tilde{d}}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)} = w_1) + \tilde{C}_3 = \max_{\tilde{k}=\overline{1; \tilde{d}}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)}}] + \tilde{C}_3.
\end{aligned}$$

Для  $\hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)}$  можно провести похожие рассуждения и в итоге получить оценки:

$$E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}] \leq \max_{\tilde{k}=\overline{1; \tilde{d}}} \{Q_1(v, \tilde{k})\} E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)}}] + \tilde{C}_3; \quad (32)$$

$$E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+n_0}^{(2)}}] \leq Q_1(v, 0) E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)}}] + \tilde{C}_4, \quad (33)$$

где  $r = \overline{1, n_0}$ . Для  $k = \overline{0; \tilde{d}}$  верны равенства  $Q_1(1, k) = 1$ . Предположив выполненным условие  $\min_{k=\overline{0; \tilde{d}}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T(k, r)} > 1$ , получим, что величины

$$\begin{aligned}
(Q_1(v, k))' \Big|_{v=1} &= \left( \prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k, r, 1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k, r)}) v^w \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \left( \prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k, r, 1)} \exp(\lambda_1 T^{(k, r)} (f_1(v) - 1)) \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \left( v^{-\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)} \exp(\lambda_1 (f_1(v) - 1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)}) \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1), \quad (34)
\end{aligned}$$

определяющие знак производной, отрицательны. Поэтому  $|Q_1(v, k)| < 1$  для всех  $k = \overline{1; \tilde{d}}$  хотя бы в некоторой правой окрестности  $1 \leq v \leq (1 + \varepsilon_1)^{1/2}$  точки  $v = 1$ . Этот факт, в свою очередь, обеспечивает ограниченность в этой же окрестности величин  $E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)}}]$  и  $E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)}}]$  равномерно по  $i$ .

Далее из определений (29) и (30) следует, что для любого  $i \geq 0$  существуют такие  $j_1$  и  $j_2$ , что

$$\varkappa_1^{(1)}(i) \leq \hat{\varkappa}_{1,j_1}^{(1)}, \quad \varkappa_1^{(2)}(i) \leq \hat{\varkappa}_{1,j_2}^{(2)}.$$

Следовательно, из (28) и неравенства Коши-Буняковского заключаем, что

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1) \leq (E[v^{2\varkappa_1^{(1)}(i)}] E[v^{2\varkappa_1^{(2)}(i)}])^{1/2} \leq (E[v^{2\hat{\varkappa}_{1,j_1}^{(1)}}] E[v^{2\hat{\varkappa}_{1,j_2}^{(2)}}])^{1/2}$$

и, значит, для любого  $v$  хотя бы из окрестности  $[1, 1 + \varepsilon_1]$  исходная последовательность  $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1); i \geq 0\}$  ограничена равномерно по  $i$ .  $\square$

Основным результатом работы является достаточное условие существования стационарного режима последовательности  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ .

**Теорема 2.** Для того, чтобы марковская цепь  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  имела стационарное распределение  $Q_1(\gamma, x_1, x_3)$ ,  $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$ , достаточно выполнения неравенств

$$\min_{k=0,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \quad \min_{k=1,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \quad (35)$$

*Доказательство.* Предположим обратное, а именно, что при выполнении условия (35) марковская цепь  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  не имеет стационарного распределения. Тогда для любого состояния  $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$  и независимо от начального распределения  $\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,0} = x_1, \varkappa_{3,0} = x_3)$ ,  $(\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$ , имеют место предельные равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2. \quad (36)$$

Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть все возможные случаи, предполагая апериодичность рассматриваемой цепи (см. рассуждения [27, гл. 3, § 3-4]):

1. все состояния цепи  $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$  невозвратные, тогда предельные соотношения выполняются в силу [27, с. 541, лемма 2];
2. существует хотя бы одно возвратное состояние, тогда все состояния возвратные (поскольку все состояния сообщающиеся); и пусть все состояния нулевые, тогда предельное соотношение также выполняется [27, с. 541, лемма 3];
3. все состояния возвратные и существует хотя бы одно положительное, тогда все состояния положительные и пределы  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) > 0$  являются стационарными вероятностями ([27, с. 549, теорема 1]), что противоречит предположению.

Для периодической цепи приведенные рассуждения достаточно провести для циклических подклассов.

Выберем начальное распределение так, что при некоторых  $v_1 > 1$ ,  $v_3 > 1$  будут выполнены неравенства  $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k, r, v_1, 1) < \infty$ ,  $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k, r, 1, v_3) < \infty$  для всех  $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ . Это ограничение, в силу леммы (2) и результатов работы [25], обеспечивает при любом конечном  $i \geq 0$  существование функций

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1), \quad \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3) \quad (37)$$

$$\frac{d}{dv_1} \left[ \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1) \right], \quad \frac{d}{dv_3} \left[ \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3) \right] \quad (38)$$

по крайней мере в некоторой окрестности точек  $v_1 = 1$ ,  $v_3 = 1$ .

В силу равенств (36) для любого натурального  $N$  найдется некоторое число  $\mathfrak{J}$ , что для всех  $i > \mathfrak{J}$  будет выполнено условие

$$1 > (1 + N) \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_3=0}^N \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$$

и, значит,  $1 > (1 + N) \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_3=0}^N \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 E[\kappa_{3,i} + \kappa_{1,i}] &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (x_1 + x_3) \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) \geq \\
 &\geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} x_3 \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} x_1 \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) \geq \\
 &\geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} (N+1) \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (N+1) \times \\
 &\times \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) \geq (N+1) \left[ \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \mathbf{P}(\kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{3,i} = x_3) \right] \geq (N+1)(1 - \mathbf{P}(\kappa_{1,i} \leq N, \kappa_{3,i} \leq N)) \geq \\
 &\geq (N+1) \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) = N.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $E[\kappa_{3,i} + \kappa_{1,i}]$  неограниченно возрастает при  $i \rightarrow \infty$ .

Другое рассуждение, однако, приводит к противоположному результату. Действительно, поскольку последовательность  $\{E[\kappa_{3,i}]; i \geq 0\}$  ограничена, и нетрудно проверить, что

$$E[\kappa_{1,i}] = \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \frac{d}{dv} \left( \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1) \right) \Big|_{v_1=1},$$

где величина справа в силу интегральной формулы Коши и леммы 2 равномерно по  $i$  ограничена некоторой постоянной величиной. Поэтому принятое предположение не будет справедливым. Доказательство этим завершается.  $\square$

## Заключение

В работе рассмотрен тандем систем массового обслуживания. При помощи кибернетического подхода было построено вероятное пространство и заданы случайные величины и элементы, описывающие тандем. Была исследована стохастическая последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}); i \geq 0\}$ , состоящая из состояния обслуживающего устройства и длин очередей первичных требований. Проведена классификация ее состояний и выделено множество существенных состояний. При помощи рекуррентных соотношений для вероятностей состояний и частичных производящих функций было найдено достаточное условие существования стационарного распределения цепи  $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}); i \geq 0\}$ .

### Список литературы

- [1] Haight F.A. Mathematical Theories of Traffic Flow. New York: Academic Press, 1963. 242 p.
- [2] Drew D.R. Traffic Flow Theory and Control. New York: McGraw-Hill, 1968. 467 p.
- [3] Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. Москва: Транспорт. 1983. 248 с.
- [4] Bartlett M.S., The Spectral Analysis of Point Processes // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). Vol. 25. № 2. 1963. Pp. 264–296.
- [5] Кокс Д.Р., П. Льюис. Статистический анализ последовательности событий. М.: Мир, 1969. 312 с.
- [6] D.L. Jagerman, B. Melamed, W. Willinger Stochastic modeling of traffic process // In: Frontiers in queuing: models and applications in science and engineering / edited by J.H. Dshalalov. Boca Raton: CRC Press. 1997. Pp. 271–320.
- [7] Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., Rachinskaya M.A. About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway // Proceedings of 36 International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2010). Moscow. 2010. Pp. 86–93.
- [8] Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density // Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks». Minsk: BSU-RIVH. 2011. № 21. Pp. 82–87.
- [9] Fedotkin M., Rachinskaya M. Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // Distributed Computer and Communication Networks. Springer International Publishing, «Communications in Computer and Information Science» series. 2014. V. 279. Pp. 154–168.
- [10] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Estimation of transport systems capacity // Traffic and Granular Flow '11. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 2013. Pp. 63–77.
- [11] Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды Московского физико-технического института (государственного университета). 2010. Т. 2. № 4. С. 6–21.
- [12] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // Methodology and Computing in Applied Probability, Springer. 2013. V. 15. № 4. Pp. 935–950.
- [13] Reich E. Waiting times when queues are in tandem // The Annals of Mathematical Statistics. 1957. V.28. №3. Pp. 768–773.

- [14] Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // Performance Evaluation 51. 2003. Pp. 269–288.
- [15] Gnedenko B.W., Konig D. Handbuch der Bedienungstheorie. Berlin: Akademie Verlag. 1983.
- [16] Perros H.G. Queueing networks with blocking, in: Exact and Approximate Solutions. New York: Oxford University Press, 1994. 358 p.
- [17] Gomez-Corral A. A tandem queue with blocking and Markovian arrival process // Queueing Systems 41. 2002. Pp. 343–370.
- [18] Gomez-Corral A. On a tandem G-network with blocking // Advances in Applied Probability 34 (3). 2002. Pp. 626–661.
- [19] Gomez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // Operations Research Letters 30. 2002. Pp. 360–374.
- [20] Klimenok V.I., Breuer L., Tsarenkov G.V., Dudin A.N. The  $BMAP/G/1/N \rightarrow PH/1/M$  system with losses // Performance Evaluation 61. 2005. Pp. 17–40.
- [21] Клименок В.И., Тарамин О.С. Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами // Автоматика и телемеханика. 2010. № 1. С. 3–17 .
- [22] Клименок В.И., Савко Р.Ч. Двухфазная система с повторными попытками и нетерпеливостью запросов // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 78–93.
- [23] Zorine A.V. Stability of a tandem of queueing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 84. Pp. 173–188.
- [24] Zorine A.V. Study of Queues' Sizes in Tandem Intersections under Cyclic Control in Random Environment // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. 2013. V. 356. Pp. 206–215.
- [25] Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017. Выпуск 50. С. 47–55.
- [26] Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Выпуск 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 7–38.
- [27] Ширяев А.Н. Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1. М.: Наука, 2007. 552 с.

---

**Сведения об авторах****1. Кочеганов Виктор Михайлович**

аспирант кафедры программной инженерии института ИТММ Национального исследовательского Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.

*Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.*

*E-mail: kochegapov@gmail.com.*

**2. Зорин Андрей Владимирович**

д.ф.-м.н., доцент кафедры программной инженерии института ИТММ Национального исследовательского Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.

*Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.*

*E-mail: zoav1602@gmail.com.*

# SUFFICIENT CONDITION FOR PRIMARY QUEUES STATIONARY DISTRIBUTION EXISTENCE IN A TANDEM OF QUEUING SYSTEMS

**Kocheganov Victor Mikhailovich**

PhD student at software engineering department of ITMM institute,  
N.I. Lobachevsky National Research State University of Nizhny Novgorod.  
*Gagarina av. 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.*  
*E-mail: kocheganov@gmail.com*

**Zorine Andrei Vladimirovich**

Assistant professor at software engineering department of ITMM institute,  
N.I. Lobachevsky National Research State University of Nizhny Novgorod.  
*Gagarina av. 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*  
*E-mail: zoav1602@gmail.com.*

---

*Received , revised .*

---

A tandem of two queuing systems is under consideration. Customers having been serviced in the first system are non-instantaneously transferred to the second system. Each system has primary input flow generated by an environment. Besides the second system besides has input flow of customers that were serviced by the first system. A mathematical model is constructed in the form of a multidimensional denumerable discrete-time Markov chain defined on an explicitly built probability space. The Markov chain describing service dynamics and primary input flows queues fluctuations is investigated. A sufficient condition for the chain stationary distribution existence is found.

**Keywords:** stationary distribution, controlling queueing system, cyclic algorithm with prolongations, conflicting flows, multidimensional denumerable discrete-time Markov chain

## References

- [1] Haight F.A. *Mathematical Theories of Traffic Flow*. New York: Academic Press, 1963. 242 p.
- [2] Drew D.R. *Traffic Flow Theory and Control*. New York: McGraw-Hill, 1968. 467 p.
- [3] Inose H., Hamada T. *Upravlenie dorozhnym dvizheniem* [Road Traffic Control]. Transport, Moscow, 1983, 248 p. (In Russian)



- [4] Bartlett M.S., The Spectral Analysis of Point Processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1963, vol. 25, no. 2, pp. 264–296.
- [5] Cox D.R., P.A.W. Lewis. *Statisticheskii analiz posledovatel'nosti sobytii* [The Statistical Analysis of Series of Events]. «Mir» Publ., Moscow, 1969. 312 p. (In Russian)
- [6] D.L. Jagerman, B. Melamed, W. Willinger. Stochastic modeling of traffic process. *In: Frontiers in queuing: models and applications in science and engineering*, edited by J.H. Dshalalov. Boca Raton: CRC Press, 1997, pp. 271–320.
- [7] Fedotkin M.A., Kudryavtsev E.V., Rachinskaya M.A. About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway. *Proceedings of 36 International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2010)*, Moscow, 2010, pp. 86–93.
- [8] Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Investigation of Traffic Flows Characteristics in Case of the Small Density. *Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks»*, Minsk: BSU-RIVH, 2011, no. 21, pp. 82–87.
- [9] Fedotkin M., Rachinskaya M. Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow. *Distributed Computer and Communication Networks. Springer International Publishing, «Communications in Computer and Information Science» series*, 2014, vol. 279, pp. 154–168.
- [10] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Estimation of transport systems capacity. *Traffic and Granular Flow '11. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg*, 2013, pp. 63–77.
- [11] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Matematicheskie modeli transportnykh sistem, osnovannye na teorii ocheredei. [Mathematical models of road traffic based on queueing theory]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta (gosudarstvennogo universiteta)* [Proceedings of Moscow physico-technical institute (of State University)], 2010, vol. 2, no. 4, pp. 6–21. (In Russian)
- [12] Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption. *Methodology and Computing in Applied Probability, Springer*, 2013, vol. 15, no. 4, pp. 935–950.
- [13] Reich E. Waiting times when queues are in tandem. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1957, vol. 28. no. 3, pp. 768–773.
- [14] Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction. *Performance Evaluation*, 2003, vol. 51, pp. 269–288.
- [15] Gnedenko B.W., Konig D. Handbuch der Bedienungstheorie. *Berlin: Akademie Verlag*, 1983.

- [16] Perros H.G. Queuing networks with blocking in: Exact and Approximate Solutions. *New York: Oxford University Press*, 1994, 358 p.
- [17] Gomez-Corral A. A tandem queue with blocking and Markovian arrival process. *Queuing Systems*, 2002, vol. 41, pp. 343–370.
- [18] Gomez-Corral A. On a tandem G-network with blocking. *Advances in Applied Probability*, 2002, vol. 34(3), pp. 626–661.
- [19] Gomez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts. *Operations Research Letters*, 2002, vol. 30, pp. 360–374.
- [20] Klimenok V.I., Breuer L., Tsarenkov G.V., Dudin A.N. The  $BMAP/G/1/N \rightarrow PH/1/M$  system with losses. *Performance Evaluation*, 2005, vol. 61, pp. 17–40.
- [21] Klimenok V.I., Taramin O.S. Dvukhfaznaya sistema obsluzhivaniya s gruppovym markovskim potokom i povtornymi vyzovami. [Two-phase queuing system with Batch Markov Arrival Process and repeated requests] *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and telemechanics], 2010, no. 1, pp. 3–17. (In Russian)
- [22] Klimenok V.I., Savko R.Ch. Dvukhfaznaya sistema s povtornymi popytkami i neterpelivost'yu zaprosov [Two-phase system with repeated requests] *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and telemechanics], 2015, no. 8, pp. 78–93. (In Russian)
- [23] Zorine A.V. Stability of a tandem of queuing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2012, vol. 84, pp. 173–188.
- [24] Zorine A.V. Study of Queues' Sizes in Tandem Intersections under Cyclic Control in Random Environment. *Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science*, 2013, vol. 356, pp. 206–215.
- [25] Kochegarov V.M., Zorine A.V. Dostatochnoe uslovie sushchestvovaniya statsionarnogo rezhima nizkoprioritetnoi ocheredi v tandeme sistem massovogo obsluzhivaniya [Sufficient condition of low-priority queue stationary distribution existence in a tandem of queuing systems]. *Vestnik Volzhskoi gosudarstvennoi akademii vodnogo transporta* [Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport], 2017, vol. 50, pp. 47–55. (In Russian)
- [26] Yablonskii S.V. *Osnovnye ponyatiya kibernetiki* [Basic concepts of cybernetics]. Problemy kibernetiki [Cybernetics problems], «Fizmatgiz» Publ., Moscow, 1959, vol. 2, pp. 7–38. (In Russian)
- [27] Shiryaev A.N. *Veroyatnost': v 2-h kn. Kn. 1.* [Probability: in 2 books. Book 1]. «Nauka» Publ., Moscow, 2007, 552 p. (In Russian)