

# 1. Постановка задачи и построение математической модели

## 1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

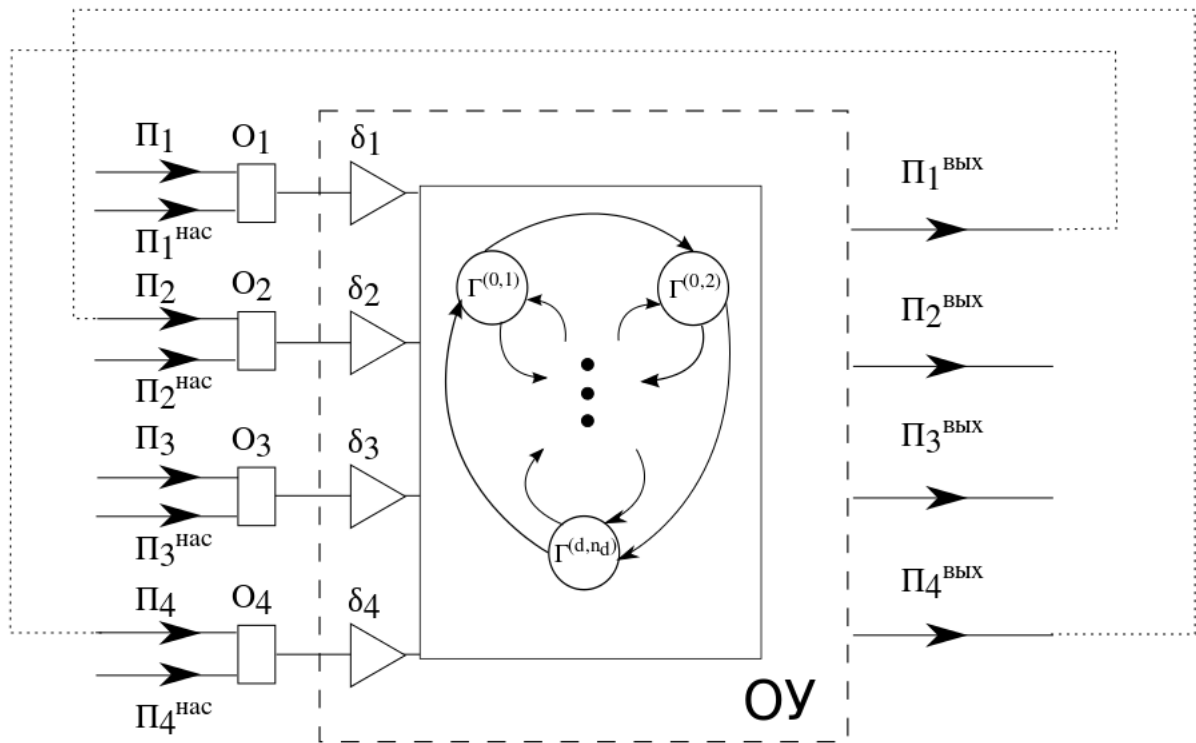


Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ . Требования по потоку  $\Pi_j$  становятся в соответствующую очередь  $O_j$  с неограниченной вместимостью,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  дисциплина очереди  $O_j$ , поддерживаемая устройством  $\delta_j$ , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди  $O_4$  будет описана ниже. Входные потоки  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  будем обозначать  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ , а распределение числа заявок в груп-

пе по потоку  $\Pi_j$  будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu} \quad (1)$$

которая предполагается аналитической при любом  $z$  таком, что  $|z| < (1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Величина  $p_{\nu}^{(j)}$  определяет вероятность того, что по потоку  $\Pi_j$  число требований в группе равно  $\nu$ ,  $j \in \{1, 3\}$ . Обслуженные требования потока  $\Pi_1$  поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток  $\Pi_4$ . Потоки  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний  $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = 0, 1, \dots, d; r = 1, 2, \dots, n_k\}$  с заданными натуральными числами  $d, n_0, n_1, \dots, n_d$ . В каждом состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающее устройство находится в течение времени  $T^{(k,r)}$ . Введем множества  $\Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$  и  $\Gamma^{IV}$  следующим образом. В состоянии  $\gamma \in \Gamma^I$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{II}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_2$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{III}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_1, O_3$  и  $O_4$ . В состоянии  $\gamma \in \Gamma^{IV}$  обслуживаются только требования из очередей  $O_3$  и  $O_4$ . Тогда множество  $\Gamma$  есть объединение  $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$  непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества  ${}^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}$ ,  ${}^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}$ ,  ${}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ .

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний  $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = 1, 2, \dots, n_k\}$  будем называть  $k$ -м циклом,  $k = 1, 2, \dots, d$  (Рис. 2). При  $k = 0$  состояние вида  $\Gamma^{(0,r)}$  будем называть состоянием продления,  $r = 0, 1, \dots, n_0$ . Положим  $r \oplus_k 1 = r + 1$  для  $r < n_k$  и  $r \oplus_k 1 = 1$  при  $r = n_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ . В цикле  $C_k$  выделим подмножества  $C_k^O$  выходных,  $C_k^I$  входных и  $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$  нейтральных состояний. Тогда после состояния  $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$  обслуживающее устройство переходит в состояние  $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$  того же цикла  $C_k$ . При  $\Gamma^{(k,r)}$  принадлежащем множеству  $C_k^O$  прибор переходит в состояние  $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  в момент переключения больше заданного порога  $L$ . В противном случае, то есть если число требований в очереди  $O_3$  меньше либо равно  $L$ , то новое состояние прибора будет состоянием продления  $\Gamma^{(0,r_1)}$ , где  $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$  и  $h_1(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$  во множество  $\{1, 2, \dots, n_0\}$ . После состояния  $\Gamma^{(0,r)}$  выбирается состояние того же вида  $\Gamma^{(0,r_2)}$ , если число требований в очереди  $O_3$  меньше или равно  $L$ , где  $r_2 = h_2(r)$  и  $h_2(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на себя; в противном случае включается

входное состояние  $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$ , где  $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$  и  $h_3(\cdot)$  — заданное отображение множества  $\{1, 2, \dots, n_0\}$  на множество  $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$ . Считается, что все состояния продления  $\Gamma^{(0,r)}$  принадлежат множеству  ${}^2\Gamma$ , а также верны соотношения  $C_k^O \subset {}^2\Gamma$  и  $C_k^I \subset {}^3\Gamma$ .

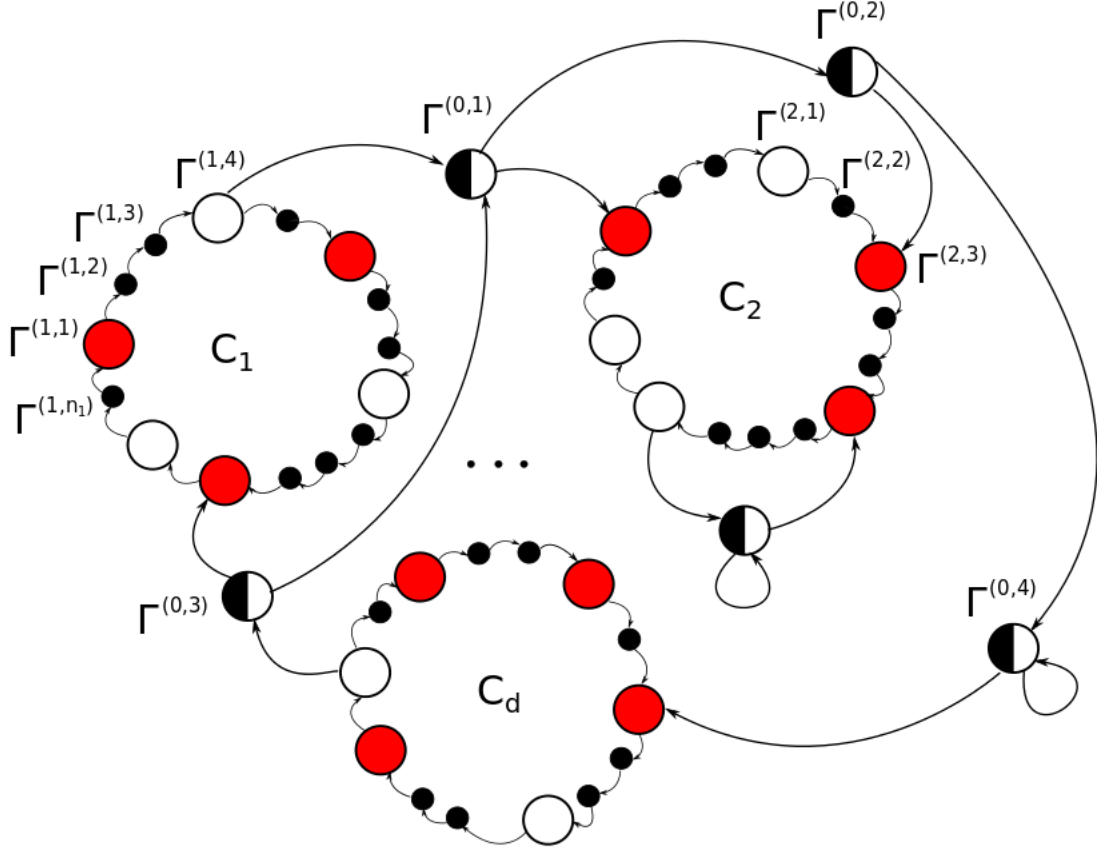


Рис. 2. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, красным отмечены входные вершины, черным — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, x) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O; \\ \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } x > L; \\ \Gamma^{(k, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } x \leq L; \\ \Gamma^{(0, h_2(r))}, & \text{если } k = 0 \text{ и } x \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } x > L. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим введенные обозначения на примере Рис. 2. Примерами входных состояний являются  $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^I$  и  $\Gamma^{(2,3)} \in C_2^I$ , выходных состояний —  $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^O$  и  $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^O$ ,

нейтральных состояний —  $\Gamma^{(1,2)}, \Gamma^{(1,3)}, \Gamma^{(1,n_1)} \in C_1^N$  и  $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^N$ . Состояния продления представлены на графе вершинами  $\Gamma^{(0,1)}, \Gamma^{(0,2)}, \Gamma^{(0,3)}$  и  $\Gamma^{(0,4)}$ . Далее, отображение  $h_1(\cdot)$  на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние  $\Gamma^{(1,4)}$  в число 1 — номер состояния продления  $\Gamma^{(0,1)}$ , то есть  $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$ . Аналогично  $h_2(1) = 2$ ,  $h_2(2) = 4$  и  $h_2(3) = 1$ . Примером отображения  $h_3(\cdot)$  является  $h_3(2) = \Gamma^{(2,3)}$ .

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоки насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , определяются как виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для  $j \in \{1, 2, 3\}$  еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , будет содержать неслучайное число  $\ell_{k,r,j}$  требований, обслуженных в течение времени  $T^{(k,r)}$ , если  $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$ , и будет содержать 0 требований в противном случае:  $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$ . Пусть  $Z_+$  — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди  $O_4$  находится  $x \in Z_+$  требований, поток насыщения  $\Pi_4^{\text{нас}}$  определим как поток, содержащий все  $x$  требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства  $\Gamma^{(k,r)}$  каждое требование из очереди  $O_4$  с вероятностью  $p_{k,r}$  и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь  $O_2$  потока  $\Pi_2$ . С вероятностью  $1 - p_{k,r}$  требование очереди  $O_4$  остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 3). В качестве потоков требований, формируемых внешней средой,

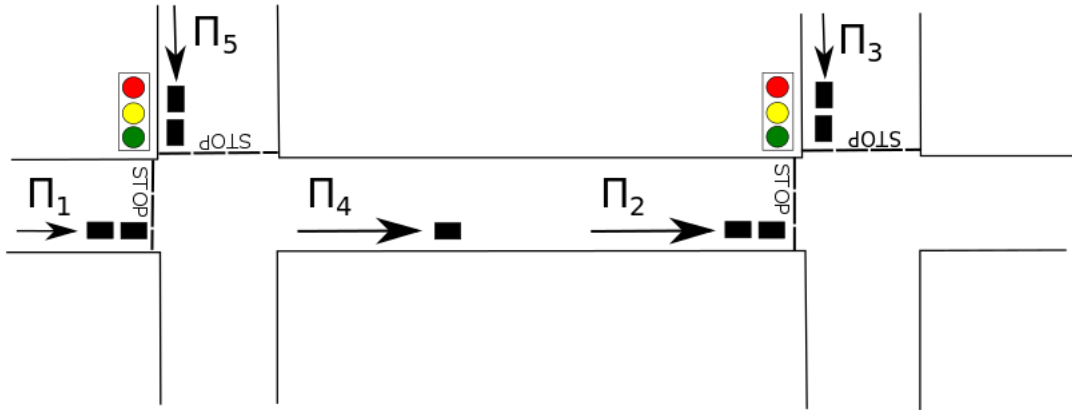


Рис. 3. Пример: тандем перекрестков

выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки  $\Pi_1$ ,  $\Pi_5$  на первом перекрестке, а также поток  $\Pi_3$  на втором. Каждая машина из потока  $\Pi_1$ , проезжая первый перекресток, становится в очередь  $O_4$  потока  $\Pi_4$  и затем с некой

вероятностью ( $p_{k,r}$  для состояния  $\Gamma^{(k,r)}$  обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди  $O_4$  до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди  $O_4$  успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь  $O_2$  и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния  $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ : в состоянии  $g_{1,1}$  машины потока  $\Pi_1$  пропускаются фиксированное количество времени  $\tilde{T}^{(1,1)}$  («зеленый» свет для  $\Pi_1$ ); в состоянии  $g_{1,2}$  — простаивают в течение времени  $\tilde{T}^{(1,2)}$  («красный» свет для  $\Pi_1$ ). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока  $\Pi_3$  (состояние  $g_{2,1}$ ), также имеется два состояния обслуживания потока  $\Pi_2$  (состояния  $\{g_{2,2}, g_{2,3}\}$ ). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока  $\Pi_3$ , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока  $\Pi_2$  длина очереди  $O_3$  не превосходит уровня  $L$ . Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть  $\tilde{T}^{(2,1)}$ ,  $\tilde{T}^{(2,2)}$  и  $\tilde{T}^{(2,3)}$ .

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор  $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$ , где  $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$  — состояние 1-го перекрестка,  $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$  — состояние 2-го перекрестка,  $s \in \{0, 1, 2\}$  — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и  $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$  — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина  $s$ ). Здесь  $T$  — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины  $2 \times 3 \times 3 \times T$ .

В завершение построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток  $\Pi_5$  не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах для определенности) в каждом из состояний задается графами на рис. 4. За начальное состояние объединенной системы примем  $\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , то

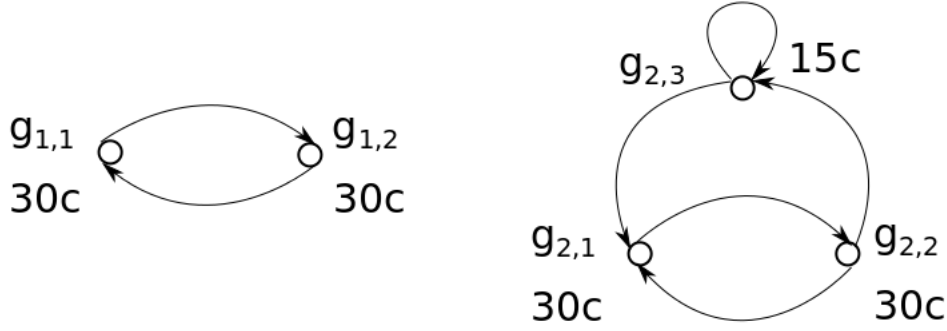


Рис. 4. Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

есть первый перекресток находится в состоянии  $g_{1,1}$ , второй — в состоянии  $g_{2,1}$ , и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами  $s = 0$  и  $t = 0$ ). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию  $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$ . Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние  $g_{2,1}$ , так и в состояние продления  $g_{2,3}$ . Таким образом следующим состоянием тандема будет либо опять  $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$ , либо  $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$ . Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следующий список всех возможных состояний системы:

$$\begin{aligned}
(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,4)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,3)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,1)}, \\
(g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,2)}, \\
(g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,4)}.
\end{aligned}$$

В соответствии с приведенными выше обозначениями, множества  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут  $C_1^I = \{\Gamma^{(1,1)}\}$ ,  $C_2^I = \{\Gamma^{(2,1)}\}$ ,  $C_3^I = \{\Gamma^{(3,1)}\}$  и  $C_4^I = \{\Gamma^{(4,1)}\}$ . Множествами выходных состояний будут  $C_1^O = \{\Gamma^{(1,2)}\}$ ,  $C_2^O = \{\Gamma^{(2,4)}\}$ ,  $C_3^O = \{\Gamma^{(3,2)}\}$  и  $C_4^O = \{\Gamma^{(4,4)}\}$ . Функции  $h_1(\cdot)$ ,  $h_2(\cdot)$  и  $h_3(\cdot)$  задаются поточечно:

$$h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4, \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)} \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

## 1.2. Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде кибернетической управляющей системы

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [3]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ ; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$ ; 4) внешняя память — очереди  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ ; 6) внутренняя память обслуживающего устройства — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса  $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$ . Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$  моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим  $\Gamma_i$  из множества  $\Gamma$  состояние обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ , количество  $\varkappa_{j,i} \in Z_+$  требований в очереди  $O_j$  в момент времени  $\tau_i$ , количество  $\eta_{j,i} \in Z_+$  требований, поступивших в очередь  $O_j$  по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\xi_{j,i} \in Z_+$  требований по потоку насыщения  $\Pi_j^{\text{нас}}$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ , количество  $\bar{\xi}_{j,i} \in Z_+$  реально обслуженных требований по потоку  $\Pi_j$  в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad (3)$$

где отображение  $h(\cdot, \cdot)$  определено в (2). Для определения длительности  $T_{i+1}$  состояния обслуживающего устройства в течение времени  $(\tau_i; \tau_{i+1}]$  удобно ввести функцию  $h_T(\cdot, \cdot)$ :

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4)$$

между величиной  $\bar{\xi}_{j,i}$  и величинами  $\varkappa_{j,i}$ ,  $\eta_{j,i}$ ,  $\xi_{j,i}$  реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из (4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (5)$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1) следуют соотношения для потока  $\Pi_4$ :

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \quad (6)$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$  и  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$  маркированных точечных процессов  $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$  и  $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geq 0\}$  при фиксированных значениях метки  $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$ . Введем функции  $\varphi_1(\cdot, \cdot)$ ,  $\varphi_3(\cdot, \cdot)$  из разложений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где  $f_j(z)$  определены в (1),  $j \in \{1, 3\}$ . Функция  $\varphi_j(x, t)$  есть вероятность поступления  $x = 0, 1, \dots$  требований по потоку  $\Pi_j$  за время  $t \geq 0$ . Функцию  $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$  зададим формулой

$$\psi(k; x, u) = C_x^k u^k (1 - u)^{x-k}.$$

По своему смыслу  $\psi(k; x, u)$  есть вероятность поступления  $k$  требований по потоку  $\Pi_2$  при условии, что очередь  $O_4$  содержит  $x$  требований и обслуживающее устройство находится в состоянии  $\Gamma^{(k,r)}$ , так что  $u = p_{k,r}$ .

Пусть  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in Z_+^4$  и  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z_+^4$ . Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки метки  $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x_1, x_2, x_3, x_4)$  вероятность  $\varphi(a, k, r, x)$  одновременного выполнения равенств  $\eta_{1,i} = a_1$ ,  $\eta_{2,i} = a_2$ ,  $\eta_{3,i} = a_3$ ,  $\eta_{4,i} = a_4$  есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_1(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}, \quad (7)$$



где  $0 \leq a_2 \leq x_2$ ,  $\Gamma^{(\bar{k}, \bar{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ ,  $\delta_{i,j}$  есть символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases},$$

и для  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\tilde{\ell}(k, r, j) = \begin{cases} \ell_{k,r,j}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma, \\ 0, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma. \end{cases}$$

Пусть  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ . Из содержательной постановки задачи следует, что вероятность  $\zeta(b, k, r, x)$  выполнения равенств  $\xi_{1,i} = b_1$ ,  $\xi_{2,i} = b_2$ ,  $\xi_{3,i} = b_3$ ,  $\xi_{4,i} = b_4$  при фиксированном значении метки  $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x_1, x_2, x_3, x_4)$  есть

$$\delta_{b_1, \tilde{\ell}(\bar{k}, \bar{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \tilde{\ell}(\bar{k}, \bar{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \tilde{\ell}(\bar{k}, \bar{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует для  $j \in \{1, 2, 3\}$ , что вероятность события  $\xi_{j,i} = 0$  равна 1 в случае  $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$  и что вероятность события  $\xi_{j,i} = \ell_{\bar{k}, \bar{r}}$  равна 1, если  $\Gamma^{(\bar{k}, \bar{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$ .

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором общем вероятностном пространстве.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$  и  $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in Z_+^4$  фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  и заданные на нем случайные величины  $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$ ,  $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$ ,  $\bar{\xi}_{j,i} = \bar{\xi}_{j,i}(\omega)$ ,  $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$  и случайные элементы  $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$ ,  $i \geq 0$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , такие, что  $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$  и  $\varkappa_0(\omega) = x_0$ , выполняются соотношения (3), (5), (6) и для любых  $a, b$ ,  $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in Z_+^4$  и векторов  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ ,  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ ,  $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$  верно равенство

$$\mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \quad (9)$$

где функции  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  определяются формулами (7) и (8) соответственно.

*Доказательство.* В соответствии с теоремой Ионеску Тулчи (см. [13]) для доказательства достаточно задать на  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$  вероятностную меру  $P_0(\cdot)$  и далее, считая для  $0 < i \leq n$  и каждого набора элементарных исходов  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})$  задан-

ной на  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  вероятностную меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$ , задать на  $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$  меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$ , причем для любого множества  $B \in \mathcal{F}_i$  функции  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; B)$  должны быть измеримыми функциями от  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})$ . Тогда для  $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i$  и  $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  будет существовать единственная вероятностная мера  $\mathbf{P}(\cdot)$  такая, что для любого  $i \geq 0$  верно равенство

$$\mathbf{P}\{\omega: \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_i \in A_i\} = P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i), \quad (10)$$

где

$$P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i) = \int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P(\omega_0; d\omega_1) \dots \int_{A_i} P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \quad (11)$$

для любого  $A_i$  из  $\mathcal{F}_i$ .

Итак, за описание элементарного исхода  $\omega_i \in \Omega_i$  для произвольного  $i \geq 0$  примем набор  $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$ ,  $\omega_{j,i} \in Z_+$ . Таким образом,  $\Omega_i = Z_+^3$  и в качестве  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_i$  возьмем множество всех подмножеств множества  $\Omega_i$ :  $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ . Пусть  $\Gamma(\tilde{k}, \tilde{r}) = h(\Gamma^{(k,r)}, x_{3,0})$ . Тогда поскольку множество  $\Omega_0$  счетно, определим вероятностную меру  $P_0(\cdot)$  на измеримом пространстве  $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$  ее значениями на одноточечных множествах:

$$P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_2(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)})). \quad (12)$$

Для  $j \in \{1, 2, 3\}$  определим величины

$$\Gamma_0 = \gamma_0, \quad \varkappa_{j,0} = x_{j,0}, \quad \xi_{j,0}(\omega_0) = \tilde{l}(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \eta_{j,0} = \omega_{j,0}, \quad (13)$$

и

$$\varkappa_{4,0} = x_{4,0}, \quad \xi_{4,0} = x_{4,0}, \quad \eta_{4,0} = \min\{\xi_{1,0}, x_{1,0} + \eta_{1,0}\}. \quad (14)$$

Теперь, предполагая заданными на  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$  вероятностные меры  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$ , заданными величины  $\Gamma_i$ ,  $\varkappa_{j,i}$ ,  $\xi_{j,i}$ ,  $\eta_{j,i}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  и фиксируя набор  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ , определим на  $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$  меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$ . Положим для  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(k^*, r^*)} = h(\Gamma_n, \varkappa_{3,n}), \quad \varkappa_{j,n+1} = \max\{0, \varkappa_{j,n} + \eta_{j,n} - \xi_{j,n}\}, \quad (15)$$

$$\varkappa_{4,n+1} = \varkappa_{4,n} + \eta_{4,n} - \eta_{2,n}, \quad \xi_{j,n+1} = \tilde{l}(k^*, r^*, j), \quad (16)$$

$$\eta_{j,n+1} = \omega_{j,n+1}, \quad \eta_{4,n+1} = \min\{\xi_{1,n+1}, \varkappa_{1,n+1} + \eta_{1,n+1}\}, \quad \xi_{4,n+1} = \varkappa_{4,n+1}. \quad (17)$$

Тогда, по аналогии с построением вероятностной меры  $P_0(\cdot)$ , зададим меру  $P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$  на одноточечных множествах  $\{(a_1, a_2, a_3)\}$ :

$$P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{2,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_2(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})). \quad (18)$$

Вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$  построено.

Теперь докажем, что введенные с помощью (13) – (17) случайные элементы  $\Gamma_i(\omega)$  и случайные величины  $\varkappa_{j,i}(\omega)$ ,  $\eta_{j,i}(\omega)$ ,  $\xi_{j,i}(\omega)$ ,  $i \geq 0$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  удовлетворяют условиям теоремы. Из формулы (15) следует, что случайные элементы  $\Gamma_i$  удовлетворяют соотношению (3), а случайные величины  $\varkappa_{j,i}$  для  $j \in \{1, 2, 3\}$  удовлетворяют соотношению (5). Из формулы (16) заключаем, что  $\varkappa_{4,i}$  удовлетворяет (6). Далее, из (14) и (17) следует справедливость соотношений (6) для величин  $\eta_{4,i}$  и  $\xi_{4,i}$ .

Перейдем к доказательству равенства (9). Для этого найдем явное выражение для условной вероятности  $\mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$ . Пусть  $\Gamma^{(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$ . Распишем по определению условной вероятности:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) = \\ & = \mathbf{P} \left( \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) / \mathbf{P} \left( \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее из (10), (11) и того факта, что  $\Gamma_i$  и  $\varkappa_i$  не зависят от  $\omega_i$  (этот факт следует из (13) – (16)), получим выражение для знаменателя последней дроби

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\} \right) = \\ & = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \end{aligned} \quad (20)$$

Преобразуем множество  $\{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$ , учитывая соотноше-

ния (13) – (17):

$$\begin{aligned}
& \{\eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} = \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \\
& \cap \left\{ \eta_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \xi_{j,i} = b_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \xi_{4,i} = b_4 \right\} \cap \left\{ \eta_{4,i} = a_4 \right\} = \\
& = \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \left\{ \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ b_j = \tilde{\ell}(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \\
& \cap \left\{ b_4 = x_{4,i} \right\} \cap \left\{ a_4 = \min \left\{ \tilde{\ell}(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1 \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда для числителя (19) имеем:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega: \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \mathbf{P} \left( \left\{ \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \tilde{\ell}(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \\
& \times \mathbf{P} \left( \left\{ \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) \quad (21)
\end{aligned}$$

И по аналогии со знаменателем (см. (20)), распишем последнюю вероятность:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega_{j,i} = a_j, j \in \{1, 2, 3\} \right\} \cap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\
& \quad \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\}) = \\
& = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \psi(a_2, x_{2,n}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_2(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \\
& \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \quad (22)
\end{aligned}$$

Подставляя (20), (21) и (22) в (19), получим:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \tilde{\ell}(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \\
& \quad \times \psi(a_2, x_{2,n}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_2(a_3, h_T(\Gamma_n, x_{3,n})) \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1} : \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) / \\
& \quad / \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1} : \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\})
\end{aligned}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем в точности (9).  $\square$

**Следствие 1.1.** В условиях предыдущей теоремы верно равенство

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\
& = \mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \middle| \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \right) \quad (23)
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Действительно, из (9) видно, что вероятность, стоящая в левой части равенства (23), равна величине  $\varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i)$ , зависящей только от значений  $(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$  пары  $(\Gamma_i, \varkappa_i)$  и не зависящей от значений остальных пар  $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0 \leq t \leq i-1}$ . Таким образом, знание о значениях пар  $(\Gamma_t, \varkappa_t)_{0 \leq t \leq i-1}$  не влияет на значение вероятности  $\mathbf{P}(\{\omega : \eta_i = a, \xi_i = b\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$ , следовательно, (23) верно.  $\square$

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для дальнейшего исследования состояния обслуживаемого устройства и длины всех очередей.

### 1.3. Марковское свойство последовательности

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$$

Теперь перейдем к вопросу о марковости последовательности  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ . Введем следующие события:

$$A_i(k_i; r_i; x^i) = \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)} \varkappa_i = x^i\}, \quad (24)$$

$$B_i(a; b) = \{\eta_i = a\} \cap \{\xi_i = b\} \quad (25)$$

Из теоремы (1.1) следует, что

$$P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) = \\ P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | A_i(k_i; r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})) \quad (26)$$

Далее, в силу того, что потоки насыщения  $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}$ , входные потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  условно независимы между собой, верно следующее соотношение:

$$P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) = \\ = P(\eta_{1,i} = b_1 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times P(\eta_{3,i} = b_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times \\ P(\eta_{2,i} = b_2 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times P(\xi_{1,i} = y_1 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times \\ \times P(\xi_{2,i} = y_2 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times P(\xi_{3,i} = y_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \quad (27)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ .

**Теорема 1.2.** При заданном распределении начального вектора  $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \varkappa_{3,0}, \varkappa_{4,0})$  последовательность  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$  является цепью Маркова.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно показать, что

$$P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) = \\ P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | A_i(k_i; r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})) \quad (28)$$

Распишем сначала левую часть равенства (28). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий  $B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3)$  есть достоверное событие,  $\cup_{b,y} B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) =$

$\Omega$ , получим

$$\begin{aligned}
& P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) = \\
& = \sum_{b,y} P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) \bigcap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) = \\
& = \sum_{b,y} P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) \times \\
& \times P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3))
\end{aligned} \tag{29}$$

Беря во внимание (3), (5) и (6) найдем второй множитель:

$$\begin{aligned}
& P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3)) = \\
& = P\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \middle| \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap \right. \\
& \quad \bigcap \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\} \bigcap \\
& \quad \bigcap \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\} \Big) = \\
& = P\left(h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4 \mid \\
& \quad \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t\{k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}\} \bigcap \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\} \bigcap \\
& \quad \bigcap \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\} \Big) = \\
& = P\left(h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4 \Big),
\end{aligned} \tag{30}$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (27), (29) и (30) получаем выражение для левой

части равенства (28):

$$\begin{aligned}
& P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})) = \\
& = \sum_{b,y} P(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times \\
& \quad \times P\left(h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \left. \max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4\right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях  $\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(k_t; r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})$ , поэтому рассуждения для правой части (28) будут аналогичными:

$$\begin{aligned}
& P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})) = \\
& = \sum_{b,y} P(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) | A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})) \times \\
& \quad \times P(A_{i+1}(k; r; x_1; x_2; x_3; x_4) | A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \bigcap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3)) = \\
& = \sum_{b,y} P(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times \\
& \quad \times P\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \middle| \right. \\
& \quad \left. \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i}\} \bigcap \right. \\
& \quad \left. \bigcap \{\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3\}\right) =
\end{aligned}$$

откуда опять в силу (3), (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned}
& = \sum_{b,y} P(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}) \times \\
& \quad \times P\left(h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}) = \Gamma^{(k,r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \quad \left. \max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \max\{0, x_{3,i} + b_3 - y_3\} = x_3, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - \eta_{2,i} = x_4\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (28) совпадают, следовательно равенство верно и последовательность  $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$  является цепью Маркова.  $\square$



## Литература

1. Zorine, A. V. Study of queues' sizes in tandem intersections under cyclic control in random environment / A. V. Zorine // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. Communications in Computer and Information Science. — 2013. V. 356. — P. 206–215.
2. Zorine, A. V. On the conditions for the existence of a stationary mode in a tandem of queuing systems with cyclic control in a random environment / A. V. Zorine // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. V. 47. — P. 183–191.
3. Зорин, А. В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований / А. В. Зорин // Теория вероятностей и математическая статистика. — 2011. — Вып. 84. — С. 163–176.
4. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 1 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1988. — Т. 28. — № 4. — С. 783–784.
5. Федоткин, М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. 2 / М. А. Федоткин // Литовский математический сборник. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 148–159.
6. Федоткин, М. А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1998. — Вып. 7. — С. 333–344.
7. Федоткин, М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука. — 1996. — Вып. 6. — С. 51–70.
8. Федоткин, М. А. Управление процессами обслуживания / М. А. Федоткин // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского “Математическое моделирование и оптимальное управление”. — 2001. — Вып. 2(24). — С. 169–188.
9. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин // М.: Государственное издательство физико-математической литературы. — 1963. — 236 с.
10. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // М.: Наука. — 1974. — 120 с.
11. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин // М.: Физматлит. — 2006. — 572 с.
12. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко // М.: Издательство ЛКИ. — 2007. — 448 с.

13. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев // М.: Наука. — 1980. — 576 с.
14. Кемени, Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп // М.: Наука. — 1987. — 416 с.