

1. Постановка задачи и построение математической модели

1.1. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1).

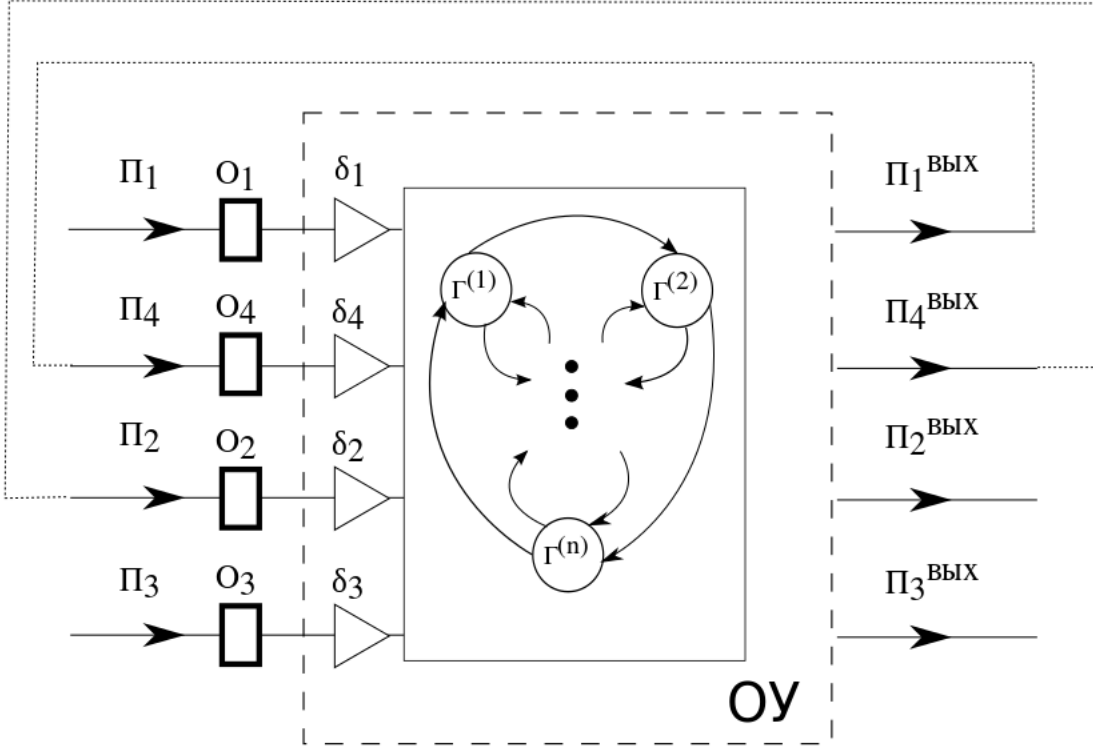


Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 . Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j , поддерживаемая устройством δ_j , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_2 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3 , а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu} \quad (1)$$

для $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ и $p_{\nu}^{(j)} > 0$. Величина $p_{\nu}^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν , $j \in \{1, 3\}$. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4 (т.е. $\Pi_1^{\text{ВЫХ}} = \Pi_4$). Далее, каждое требование из очереди O_4 с вероятностью p_r и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2 , где r — номер состояния обслуживающего устройства на соответствующем такте обслуживания ($\Pi_4^{\text{ВЫХ}} = \Pi_2$). С вероятностью $1 - p_r$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(n)}\}$. В каждом состоянии $\Gamma^{(r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(r)}$. Множество Γ представим в виде суммы четырех непересекающихся подмножеств: $\Gamma = \Gamma^I + \Gamma^{II} + \Gamma^{III} + \Gamma^{IV}$, — которые определим ниже.

В состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^I$ обслуживаются только требования из очередей O_1 , O_2 и O_4 .

В состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{II}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4 .

В состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{III}$ обслуживаются только требования из очередей O_1 , O_3 и O_4 .

В состоянии $\Gamma^{(r)} \in \Gamma^{IV}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4 .

Поскольку законы распределения выходных потоков, как правило, имеют сложный вид и часто не поддаются аналитическому выражению, вместо них будем использовать потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Потоки насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, представляют собой виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j \in \{1, 2, 3\}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Пусть

$$^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}, \quad ^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}, \quad ^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}. \quad (2)$$

Тогда поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, будет содержать неслучайное число $\ell_{r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(r)}$, если $\Gamma^{(r)} \in ^j\Gamma$, и будет содержать 0 требований в противном случае: $\Gamma^{(r)} \notin ^j\Gamma$, $j \in \{1, 2, 3\}$. При условии, что в очереди O_4 находится $x \in Z_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований.

Для исследования системы обслуживания в данной работе будет использоваться так называемый кибернетический подход. В соответствии с этим подходом наблюдение за системой осуществляется в дискретные моменты времени $\tau_0 = 0$, τ_1 , \dots , совпадающие с моментами переключения состояния обслуживающего устройства. Будем считать, что функция перехода из состояния Γ_i в момент τ_i в состояние Γ_{i+1} в момент τ_{i+1} известна и задается функцией $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, x_i)$ от предыдущего состояния Γ_i и величины x_i очереди O_3 в момент τ_i . Таким образом, обслуживающее устройство, в зависимости от объема очереди O_3 , может переходить в разные состояния. Общая структура рассматриваемых графов переходов между состояниями будет описана ниже.

1.2. Свойства условных распределений

Все рассматриваемые в этой работе случайные элементы определяются на общем вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) элементарных исходов $\omega \in \Omega$ с вероятностной мерой $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$ на σ -алгебре \mathcal{F} . Положим моменты наблюдения за системой

Введем следующие случайные величины и элементы, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

- количество $\varkappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i ;
- состояние обслуживающего устройства $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(n)}\}$ в течение $(\tau_{i-1}; \tau_i]$;
- количество $\eta_{j,i}$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение $(\tau_i; \tau_{i+1}]$;
- количество $\xi_{j,i}$ требований по потоку насыщения Π_j^{sat} в течение $(\tau_i; \tau_{i+1}]$;
- количество $\bar{\xi}_{j,i}$ реально обслуженных требований по потоку Π_j .

Тогда для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ имеем

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad \varkappa_{j,i+1} = \max \{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad \bar{\xi}_{j,i} = \min \{\xi_{j,i}, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}\} \quad (3)$$

и

$$\eta_{2,i} = \bar{\xi}_{4,i}, \quad \eta_{4,i} = \bar{\xi}_{1,i}. \quad (4)$$

Также для определения длительности T_i состояния обслуживающего устройства в течение $(\tau_{i-1}; \tau_i]$, удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(r')}, \quad \text{где } \Gamma^{(r')} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}). \quad (5)$$

Обозначим через $\varphi_j(x, t)$, $j \in \{1, 3\}$, условную вероятность того, что за время $t > 0$ по потоку Π_j поступит ровно $b \in Z_+$ требований:

$$P \left(\left\{ \omega : \eta_{j,i} = b \right\} \middle| \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{3,i} = x \right\} \right) = \varphi_j(b, h_T(\Gamma^{(r)}, x)). \quad (6)$$

Учитывая закон распределения процесса Пуассона и количества требований в пачках, величины $\varphi_j(x, t)$ могут быть найдены из соотношений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, t) = \exp \left\{ \lambda_j t \left(\sum_{b=1}^{\infty} z^b \pi(b, j) - 1 \right) \right\}. \quad (7)$$

Для потоков насыщения имеем следующие соотношения:

$$P\left(\xi_{j,i} = 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{3,i} = x\right) = 1, \quad \Gamma_{i+1} \notin {}^j\Gamma, \quad (8)$$

$$P\left(\xi_{j,i} = l_{r',j} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{3,i} = x\right) = 1, \quad \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r')} \in {}^j\Gamma, \quad (9)$$

где $j \in \{1, 2, 3\}$, $x \in Z_+$.

Введем для $0 < u \leq 1$ и $0 \leq k \leq x$ величину

$$\psi(k, x, u) = C_x^k u^k (1-u)^{x-k}. \quad (10)$$

Поскольку требования из очереди O_4 независимо друг от друга с вероятностью p_r на выходе системы (т.е. в результате обслуживания) поступают в очередь O_2 , то количество требований в выходном потоке Π_4^{out} определяется по биномиальному закону распределения:

$$P\left(\bar{\xi}_{4,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{4,i} = x, \kappa_{3,i} = \tilde{x}\right) = \psi(b, x, p_{r'}), \quad \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r')}, \quad 0 \leq b \leq x. \quad (11)$$

Введем следующие события:

$$A_i(r; x_1; x_2; x_3; x_4) = \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{3,i} = x_3 \right\} \cap \left\{ \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{2,i} = x_2, \kappa_{4,i} = x_4 \right\} \quad (12)$$

$$B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) = \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \right\} \quad (13)$$

В соответствии с описанной структурой системы, количество требований пришедших по потокам Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$ и $\Pi_3^{\text{нас}}$ за $(i+1)$ -ый такт зависит лишь от состояния обслуживающего устройства и размера очереди O_3 в момент τ_i . Поэтому условные распределения рассматриваемых в системе потоков, учитывая все «прошлое» системы можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} P\left(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) \mid \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})\right) = \\ = P\left(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) = \\ = P\left(\eta_{1,i} = b_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times P\left(\eta_{2,i} = b_2 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times \\ P\left(\eta_{3,i} = b_3 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times P\left(\xi_{1,i} = y_1 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times \\ P\left(\xi_{2,i} = y_2 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times P\left(\xi_{3,i} = y_3 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности $\left\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}), i \geq 0\right\}$:

Теорема 1.1. При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \kappa_{2,0}, \kappa_{3,0}, \kappa_{4,0})$ последовательность $\left\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}), i \geq 0\right\}$ является цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$\begin{aligned} P\left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \mid \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})\right) = \\ P\left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \mid A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})\right) \end{aligned} \quad (15)$$

Распишем сначала левую часть равенства (15). Учитывая то, что сумма непересекающихся событий $B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3)$ есть достоверное событие, $\bigcup_{b,y} B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) = \Omega$ получим

$$\begin{aligned}
P \left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\
= \sum_{b,y} P \left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \bigcap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\
= \sum_{b,y} P \left(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) \times \\
\times P \left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap B_i(b_1; b_3; b_3; y_1; y_2; y_3) \right) \quad (16)
\end{aligned}$$

Беря во внимание (3) и (4), найдем второй множитель:

$$\begin{aligned}
P \left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) \right) = \\
= P \left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \middle| \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap \right. \\
\bigcap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right\} \bigcap \\
\bigcap \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \right\} \bigg) = \\
= P \left(h \left(\Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
\max \{0, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - y_3\} = x_4, \max \{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \\
\left. \max \{0, x_{3,i} + b_3 - y_2\} = x_3, \middle| \bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \bigcap \right. \\
\bigcap \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right\} \bigcap \\
\bigcap \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \right\} \bigg) = \\
= P \left(h \left(\Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
\max \{0, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - y_3\} = x_4, \max \{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \\
\left. \max \{0, x_{3,i} + b_2 - y_2\} = x_3 \right), \quad (17)
\end{aligned}$$

где последнее равенство верно, поскольку оставшаяся под знаком вероятности величина уже не является случайной. Из (14), (16) и (17) получаем выражение для левой части равенства (15):

$$\begin{aligned}
P \left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \middle| \bigcap_{t=0}^i A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t}) \right) = \\
= \sum_{b,y} P \left(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \middle| \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i} \right) \times \\
\times P \left(h \left(\Gamma^{(r_i)}, x_{3,i} \right) = \Gamma^{(r)}, \max \{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
\max \{0, x_{4,i} + \min \{y_1, x_{1,i} + b_1\} - y_3\} = x_4, \max \{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \\
\left. \max \{0, x_{3,i} + b_2 - y_2\} = x_3 \right) \quad (18)
\end{aligned}$$

Заметим, что в наших рассуждениях мы нигде не использовали информацию о событиях

$\bigcap_{t=0}^{i-1} A_t(r_t; x_{1,t}; x_{2,t}; x_{3,t}; x_{4,t})$, поэтому рассуждения для правой части (15) будут аналогичными:

$$\begin{aligned}
& P\left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \mid A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})\right) = \\
& = \sum_{b,y} P\left(B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3) \mid A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i})\right) \times \\
& \times P\left(A_{i+1}(r; x_1; x_2; x_3; x_4) \mid A_i(r_i; x_{1,i}; x_{2,i}; x_{3,i}; x_{4,i}) \cap B_i(b_1; b_2; b_3; y_1; y_2; y_3)\right) = \\
& = \sum_{b,y} P\left(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times \\
& \times P\left(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{2,i+1} = x_2, \varkappa_{3,i+1} = x_3, \varkappa_{4,i+1} = x_4 \mid \right. \\
& \left. \left\{ \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{2,i} = x_{2,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}, \varkappa_{4,i} = x_{4,i} \right\} \cap \right. \\
& \left. \cap \left\{ \eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \right\}\right) =
\end{aligned}$$

откуда опять в силу (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned}
& = \sum_{b,y} P\left(\eta_{1,i} = b_1, \eta_{2,i} = b_2, \eta_{3,i} = b_3, \xi_{1,i} = y_1, \xi_{2,i} = y_2, \xi_{3,i} = y_3 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\right) \times \\
& \times P\left(h\left(\Gamma^{(r_i)}, x_{3,i}\right) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_{1,i} + b_1 - y_1\} = x_1, \right. \\
& \max\{0, x_{4,i} + \min\{y_1, x_{1,i} + b_1\} - y_3\} = x_4, \max\{0, x_{2,i} + b_2 - y_2\} = x_2, \\
& \left. \max\{0, x_{3,i} + b_2 - y_2\} = x_3\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, выражения для левой и правой частей (15) совпадают, следовательно равенство верно и последовательность $\left\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}), i \geq 0\right\}$ является цепью Маркова. \square