Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем обслуживания при циклическом алгоритме с продлением

Кочеганов Виктор Михайлович[1], **Зорин Андрей Владимирович**[2]

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: kocheganov@gmail.com
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: zoav1602@gmail.com

В настоящее время при построении математических моделей сетей массового обслуживания, и тандемов в частности, применяется описательный подход. При таком подходе задание входных потоков и алгоритмов обслуживания производится на содержательном уровне, законы распределения длительностей обслуживания требований считаются известными и задаются с помощью интегральной функции распределения времени обслуживания произвольного требования. При этом не удается решить проблему изучения выходящих потоков из узлов, а также рассмотреть сети с не мгновенным перемещением требований между узлами и с зависимыми, разнораспределенными длительностями обслуживания требований.

В настоящей работе применяется новый подход к построению вероятностных моделей тандемов конфликтных систем массового обслуживания с различными алгоритмами управления в узлах. В рамках этого подхода удается решить проблему выбора описаний ω элементарных исходов случайного эксперимента и математически корректно определить случайный процесс, описывающий эволюцию системы, а также решить перечисленные выше частные задачи.

Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида. Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, то есть стационарные, без последействия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu$, $j \in \{1, 3\}$, которая предполагается аналитической при любом z из внутренности круга $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν. Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_4. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков. В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots n_k\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, …, n_d. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$.

Для задания информации о системе введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, … моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$, количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением $\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$, где вид отображения $h(\cdot, \cdot)$ определен в работе [...]. Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{3}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку $\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}$, для $j \in \{1,2,3\}$, то из (3) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{4}$$

Из формулировки поставленной задачи также следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \tag{5}$$

Введем функцию $\varphi_j(\cdot,\cdot)$ из разложения

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\varphi_j(\nu,t) = \exp\{\lambda_j t(f_j(z)-1)\}, \quad j \in \{1,3\}.$$

Функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ зададим формулой $\psi(k;y,u) = C_y^k u^k(1-u)^{y-k}$, $k,y \in Z_+$, $u \in [0;1]$.

Пусть $a = (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении $(\Gamma_i;\varkappa_i)$ вероятность $\varphi(a,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3)) \times \psi(a_2,x_4,p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3)) \times \delta_{a_4,\min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1),x_1+a_1\}},$$

Пусть $b = (b_1,b_2,b_3,b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b,k,r,x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma_i;\varkappa_i)$ есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}.$$

В статье [...] построено вероятностное пространство, на котором могут быть реализованы сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов. Также в веденных обозначениях верна следующая теорема о марковости последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ *и* $\varkappa_{3,0} = x_{3,0} \in \mathbb{Z}_+$ *фиксированы. Тогда последовательность* $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *является однородной счетной цепью Маркова.*

Теорема 2. *Пусть* x_3, $\tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\Gamma^{(k,r)}$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)},x_3) \in \Gamma$. *Тогда переходные вероятности* $\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3)$

однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *вычисляются по следующей формуле:*

$$(1-\delta_{\tilde{x}_3,0})\varphi_3(\tilde{x}_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))+\delta_{\tilde{x}_3,0}\sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x}\varphi_3(a,h_T(\Gamma^{(k,r)},x_3))$$

Пусть

$$S^3_{0,r}=\{(\Gamma^{(0,r)},x_3)\colon x_3\in Z_+, L\geqslant x_3>L-\max_{k=1,2,\ldots,d}\{\sum_{t=0}^{n_k}\ell_{k,t,3}\}\},\quad 1\leqslant r\leqslant n_0$$

и

$$S^3_{k,r}=\{(\Gamma^{(k,r)},x_3)\colon x_3\in Z_+, x_3>L-\sum_{t=0}^{r-1}\ell_{k,t,3}\}\},\quad 1\leqslant k\leqslant d,\quad 1\leqslant r\leqslant n_k,$$

тогда верна также и следующая теорема.

Теорема 3. *Множествами существенных состояний марковской цепи* $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *являются множества* $\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant n_0} S^3_{0,r}$, $\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant d\\ 1\leqslant r\leqslant n_k}} S^3_{k,r}$ *и только они.*

Список литературы

[1]