СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НИЗКО ПРИОРИТЕТНОЙ ОЧЕРЕДИ И ОБСЛУЖИВАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА В ТАНДЕМЕ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПРОДЛЕНИЕМ

В.М. Кочеганов, А.В. Зорин

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети:
управление, вычисление и связь — 2016
(Москва, РУДН)

Похожие исследования

- **Yamada K., Lam T.N.** Simulation analysis of two adjacent traffic signals // Proceedings of the 17th winter simulation conference. — New York: ACM, 1985. — P. 454–464.
- **Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.** Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды Московского физико-технического института (государственного университета), 2010. — Т. 2 – No 4. — С. 6–21.
- **Зорин А.В.** Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований // Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 84, 2011. — С. 163-176.

Тандем перекрестков

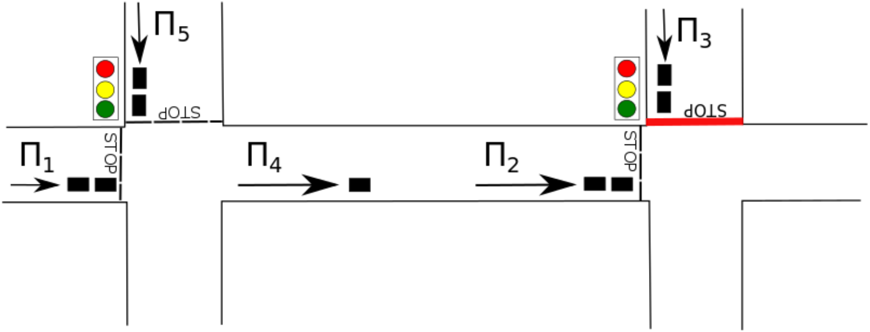

Рис.: Тандем перекрёстков

Выбор моментов наблюдения

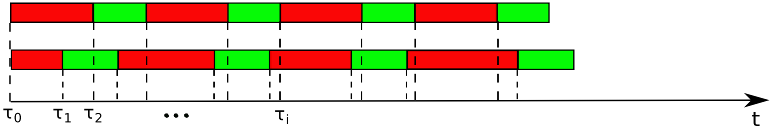

Рис.: Шкала моментов наблюдения

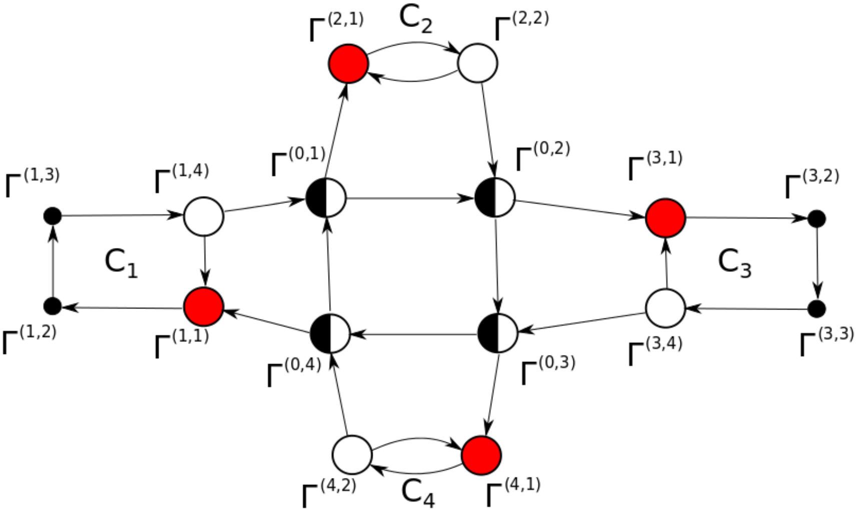

Рис.: Пример. Граф переходов.

Постановка задачи. Управляющая СМО

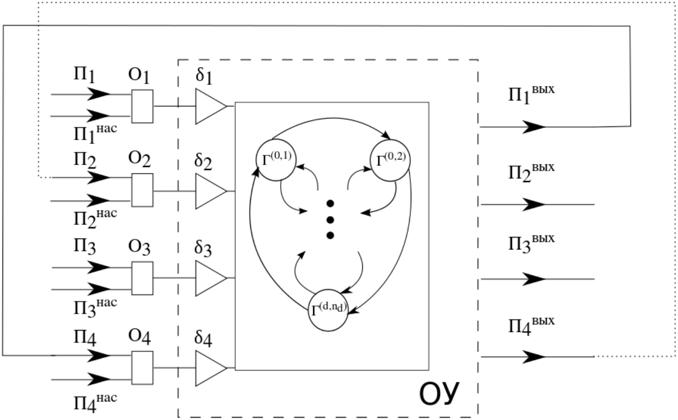

Рис.: Структурная схема рассматриваемой СМО

Параметры системы

- $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 > 0$ — интенсивности поступления групп требований по потокам Π_1, Π_3 соответственно.
- Распределение числа заявок в группе по потоку Π_j, $j \in \{1, 3\}$, имеет производящую функцию:

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu, \quad |z| < (1+\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

- $T^{(k,r)} > 0$ — неслучайное время нахождения обслуживающего устройства в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$.
- $\ell(k, r, j) \geqslant 0$ — количество требований содержащихся в потоке насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$.
- $L > 0$ — порог числа требований в очереди O_3, при превышении которого начинается обслуживание очереди O_3.

Кодирование информации

Пусть Z_+ — множество целых неотрицательных чисел

- $\{e^{(1)}\}$ — множество состояний **внешней среды** (одно состояние);
- Z_+^4 — множество состояний **входных полюсов**;
- Z_+^4 — множество состояний **выходных полюсов**;
- $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots n_k\}$ — множество состояний **внутренней памяти**;
- Z_+^4 — множество состояний **внешней памяти**;
- $\{r^{(1)}\}$ — множество состояний **устройства по переработке информации во внешней памяти** (одно состояние)
- граф переходов (будет описан ниже) описывает устройство по переработке информации во внутренней памяти

Необходимые случайные величины

- $\tau_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1, \ldots$ — момент смены состояния обслуживающего устройства;
- $\eta_{j,i} \in Z_+$ — число требований потока Π_j, поступивших за промежуток $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\xi_{j,i} \in Z_+$ — число требований потока насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$;
- $\varkappa_{j,i}$ — число требований в очереди O_j в момент τ_i;
- $\Gamma_i \in \Gamma$ — состояние обслуживающего устройства в момент τ_i;
- $\bar{\xi}_{j,i} \in Z_+$ — число требований выходного потока $\Pi_j^{\text{вых}}$ на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$.

$j = 1, 2, 3, 4.$

Функциональные соотношения соотношения

Функционирование системы подчиняется следующим функциональным соотношениям:

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \qquad j \in \{1,2,3\}, \tag{1}$$

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \qquad j \in \{1,2,3\}, \tag{2}$$

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \qquad j \in \{1,2,3\}, \tag{3}$$

$$\varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \tag{4}$$

$$\xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}, \tag{5}$$

$$\eta_{4,i} = \min\{\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}. \tag{6}$$

Граф переходов

$$\Gamma = \Big(\bigcup_{k=1}^{d} C_k\Big) \bigcup \{\Gamma^{(0,1)}, \Gamma^{(0,2)}, \ldots, \Gamma^{(0,n_0)}\}, \quad C_k = C_k^{\mathrm{I}} \cup C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{N}}. \tag{7}$$

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k, r\oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}}; \\ \Gamma^{(k, r\oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y > L; \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y \leqslant L; \\ \Gamma^{(0, h_2(r))}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leqslant L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \tag{8}$$

где

$$h_1(\cdot)\colon \bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}} \to N_0, \quad h_2(\cdot)\colon N_0 \to N_0, \quad h_3(\cdot)\colon N_0 \to \bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}},$$

и $N_0 = \{1, 2, \ldots, n_0\}$.
Тогда

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}). \tag{9}$$

Низкоприоритетная очередь

Рассмотрим последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}.$$

Теорема 1.

Пусть

$$\Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma, \varkappa_{3,0} = x_3 \in \mathbb{Z}_+$$

фиксированы.
Тогда последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$$

является счетной цепью Маркова.

Существенные состояния

Теорема 2.

Пусть для $r = \overline{1, n_0}$ *определено множество*

$$S^3_{0,r} = \{(\Gamma^{(0,r)}, x_3)\colon x_3 \in Z_+, L \geqslant x_3 > L - \max\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3}\colon k = \overline{1, d}\}\} \quad (10)$$

и для $k = \overline{1, d}$, $r = \overline{1, n_k}$ *обозначено*

$$S^3_{k,r} = \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3)\colon x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}. \quad (11)$$

Тогда множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *есть*

$$S = \bigcup_{k=0}^{d} (\bigcup_{r=1}^{n_k} S^3_{k,r}). \quad (12)$$

Низкоприоритетная очередь. Обозначения I

Пусть $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $x_3 \in Z_+$. Обозначим

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \{\gamma \in \Gamma\colon h(\gamma, x_3) = \Gamma^{(k,r)}\}.$$

Вид отображения $h(\cdot,\cdot)$ позволяет записать явный вид множества $\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$:

$$H_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \begin{cases} \left\{\Gamma^{(k_1,r_1)}, \Gamma^{(0,r\ominus_0 1)}\right\}, & \text{если } (k=0)\wedge(x_3 \leqslant L),\\ \left\{\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}, \Gamma^{(0,r_2)}\right\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{I}})\wedge(x_3 > L),\\ \left\{\Gamma^{(k,r\ominus_k 1)}\right\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}})\vee(\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{N}});\\ \varnothing, & \text{если } (k=0)\wedge(x_3 > L)\\ & \qquad \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{I}})\wedge(x_3 \leqslant L) \end{cases}$$

где $h_1(\Gamma^{(k_1,r_1)}) = r$ и $h_3(r_2) = \Gamma^{(k,r)}$.

Низкоприоритетная очередь. Обозначения II

Определим для $\gamma \in \Gamma$ и $x_3 \in Z_+$ величины

$$Q_{3,i}(\gamma, x_3) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_i(\omega) = \gamma, \varkappa_{3,i}(\omega) = x_3\}). \tag{13}$$

Определим функцию $\varphi_3(\cdot,\cdot)$ из разложения:

$$ww \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_3(\nu, t) = \exp\{\lambda_3 t(f_3(z) - 1)\}. \tag{14}$$

Пусть $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Тогда частичные производящие функции распределения (13) определим следующим образом

$$\mathfrak{M}^{(i)}(k, r, v) = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r)}, w) v^{w}, \tag{15}$$

$$q_{k,r}(v) = v^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^{w}. \tag{16}$$

Полученные результаты I

Теорема 3.

Имеют место следующие рекуррентные соотношения для частичных производящих функций:

1. $\Gamma^{(0,\tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(i+1)}(0, \tilde{r}, v) = \alpha_i(0, \tilde{r}, v);$$

2. $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{k} = \overline{1, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$

$$\mathfrak{M}^{(i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v) \times \mathfrak{M}^{(i)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, v) + \alpha_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v);$$

Полученные результаты II

Теорема 4.

Для того, чтобы марковская цепь

$$\{(\Gamma_i(\omega), \varkappa_{3,i}(\omega)); i = 0, 1, \ldots\}$$

имела стационарное распределение $Q_3(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, необходимо выполнение следующего неравенства

$$\min_{k=\overline{1,d}} \frac{\lambda_3 f_3'(1) \sum\limits_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}}{\sum\limits_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)} < 1.$$

Спасибо за внимание!

Свойства условных распределений I

Определим функции $\varphi_j(\cdot,\cdot)$, $j \in \{1,3\}$, и $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ из разложений:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t(f_j(z) - 1)\}, \quad \psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1-u)^{y-k}.$$

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$.
Тогда вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ при условии $\nu_i = (\Gamma(k,r); x)$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1+a_1\}}, \tag{17}$$

где

$$\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3), \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}.$$

и

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Свойства условных распределений II

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$.
Тогда вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma(k, r); x)$ есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}. \tag{18}$$

где $\tilde{k}$ и $\tilde{r}$ такие, что $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$.

Полученные ранее результаты I

Теорема 1.
Пусть

$$\Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma, \varkappa_{3,0} = x_3 \in \mathbb{Z}_+$$

фиксированы.
Тогда последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$$

является счетной цепью Маркова.

Полученные ранее результаты II

Теорема 2.

Пусть

$$x_3, \tilde{x}_3 \ \in \mathbb{Z}_+, \quad \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma, \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3).$$

Тогда условная вероятность

$$\mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3\}|\{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x_3\})$$

равна

$$\delta_{\tilde{x}_3,0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) + (1-\delta_{\tilde{x}_3,0})\varphi_3(\tilde{x}_3+\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)).$$

Полученные ранее результаты III

Теорема 3.

Пусть для $r = \overline{1, n_0}$ *определено множество*

$$S^3_{0,r} = \{(\Gamma^{(0,r)}, x_3) \colon x_3 \in Z_+, L \geqslant x_3 > L - \max\{\sum_{t=0}^{n_k} \ell_{k,t,3} \colon k = \overline{1, d}\}\}$$

и для $k = \overline{1, d}$, $r = \overline{1, n_k}$ *обозначено*

$$S^3_{k,r} = \{(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \colon x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=0}^{r-1} \ell_{k,t,3}\}.$$

Тогда множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ *есть*

$$S = \bigcup_{k=0}^{d} (\bigcup_{r=1}^{n_k} S^3_{k,r}).$$