**1 слайд (заголовок работы)**

Здравствуйте, меня зовут Виктор Кочеганов, мой научный руководитель

Зорин Андрей Владимирович. Тема доклада— вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением

**2 слайд (Содержательная постановка задачи)**

Математическая модель, про которую я сегодня буду рассказывать, проистекает из всем известной жизненной задачи.

Имеется два перекрестка с двумя конфликтными направлениями на каждом. Машины, прошедшие первый перекресток, попадают на второй. Обслуживание на первом перекрестке является обычным, циклическим, то есть какое-то фиксированное время горит зеленый, затем какое-то другое фиксированное время горит красный. Потом опять зеленый. Потом опять красный. Обслуживание на втором перекрестке отличается тем, что при отсутствии достаточного количества машин по направлению Pi\_3, продолжают пропускаться машины по направлению Pi\_2, то есть время горения зеленого света по направлению Pi\_2 “продлевается”. Это и есть циклический алгоритм с продлением.

**3 слайд (Тандем перекрестков как управляющая СМО)**

В общем система массового обслуживания, соответствующая описанной физической задаче, будет выглядить следующим образом. Потоки Pi\_1, Pi\_3 формируются внешней средой и являются неординарными Пуассоновскими потоками групп требований. Требования потока Pi\_1 обрабатываются обслуживающим устройством трижды. Сначала --- как требования самого потока Pi\_1, затем все выходные требования потока Pi\_1, поступают на повторное обслуживание как требования потока Pi\_4, и затем как требования потока Pi\_2.

Сначала требование поступает в соответсвующую очередь неограниченной вместимости, откуда выбирается на обслуживание в соответствии с правилом “первый пришел --- первый вышел”.

Потоки Pi\_2 и Pi\_3 являются конфликтными, то есть одновременное обслуживание соотвествующих требований запрещено. Содержательно алгоритм обслуживания требований был описан выше, а формулы приведем ниже.

**4 слайд (Параметры системы)**

Как я уже сказал, входные потоки Pi\_1 и Pi\_3 являются неординарными Пуассоновскими потоками групп, с параметрами ламбда 1 и 2. Количество требований в группе для каждого из потоков имеет производящую функцию следующего вида.

**5 слайд (Кибернетический подход 1)**

Для построения математической модели был использован кибернетический подход. Примерами работ по этой теме являются следующие.

**6 слайд (Кибернетический подход 2)**

В соответствии с этим подходом, для построения математической модели требуется, во-первых, задать дискретные моменты наблюдения за системой. А во-вторых, задать соответствующие этим моментам случайные величины и случайные элементы. Таким образом, время работы системы дискретизуется моментами наблюдения за ней. И в каждый такой момент мы интересуемся значениями некотрых выжных для нас случайных величин и случайных элементов.

**7 слайд (Кибернетический подход 3)**

Таким образом основополагающими принципами кибернетического подхода являются: 1) принцип дискретности (еще раз, все время функционирования системы разбивается на счетное число актов функционирования)

2) принцип нелокальности (то есть имеется информация о системе не в каждый, локальный, момент времени, а за некоторый агрегирущий промежуток времени)

3) принцип совместного рассмотрения. Все блоки, входные полюса, выходные полюса и т.п. рассматриваются и анализируются одновременно, совместно. Для них записываются рекуррентные соотношения, совместные распределения и т.п.

**8 слайд (Кибернетический подход 4)**

Основными составляющими кибернетической системы являются: 1) схема (в которую входят внешняя среда, входные и выходные полюса, внутренняя и внешняя память, устройства по переработке внутренней и внешней памяти)

2) Информация – набор состояний внешней среды, очередей, обслуживающего устройства, потоков насыщения и потоков обслуженных требований

3) Координаты блоков: просто номер блока на схеме.

4) Последней составляющей системы является ее функция. В данном случае это просто обслуживание потоков по заданному алгоритму.

**9 слайд (Кодирование информации)**

Теперь, для того, чтобы описать каждый из блоков, то есть предоставить информацию о них, приведем множества возможных состояний состояний блоков.

Итак, внешняя среда в данной задаче имеет всего одно состояние, то есть вероятностная структура входных потоков не изменяется. Входные полюса, выходные полюса, внешняя память имеет своим множеством состояний Z\_+^4. Устройства по переработке информации во внешней памяти также имеют всего одно состояние, в котором требования из очередей достаются в соответствии с принципом FIFO.

Внутренняя память имеет конечно число состояний, которое мы обозначим гаммой.

Информации об устройстве по переработке внутренней памяти кодируется с помощью графа переходов, который мы опишем ниже.

**10 слайд (Необходимые случайные величины)**

Для построения математической модели нам понадобятся следующие случайные величины и элементы.

**11 слайд (Граф переходов 1)**

Итак, переходы из состояния в состояние мы ограничим графами переходов определенного вида. Проще всего это осознать на примере.

**12 слайд (Граф переходов)**

Итак, если бы у нас на обоих перекрестках было обычное циклическое обслуживание, то мы имели бы картинку слева. Но как только появляется продление, необходимо появление новых состояний, состояний продления. после посещения которых система падает в новые циклы.

**13 слайд (Граф переходов 2)**

Более формально граф переходов задается следующим образом. Множество состояний делится на несколько циклов, а также один класс состояний продления. Состояния циклов разделяются на три вида: входные, выходные и нейтральные состояния.

**14 слайд (Рекуррентные соотношения)**

Далее приведены функциональные соотношения, которым должны удовлетворять введеные случайные величины исходя из содержательной постановки задачи.

Первое соотношение свидетельствует о том, что количество выходных требований равно либо количеству требований потока насыщения (то есть какому-то заданному для данного состояния прибора количеству требований), либо, если количества накопившихся требований в очереди недостаточно, равно количеству оставшихся в очереди требований.

Второе соотношение формализует формирование очереди.

Третье соотношение следует из первых двух.

Последние три соотношения относятся к потоку Pi\_4.

**15 слайд (Свойства условных распределений 1)**

Теперь формализуем вероятностные предположения, вытекающие из содержательной постановки задачи.

Функции Фи и Пси определяются из разложений ...

Пусть а и х – четырехмерные целочисленные неотрицательные вектора. Тогда вероятность совместного выполнения равеств ... равна

По своему смыслу это вероятность того, что в очереди O\_j будет находиться a\_j требований к моменту времени tau\_i.

Здесь h( . , . ) заданная графом переходов функция, задающая по предыдущему состоянию обслуживающего устройства и по состоянию очереди O\_3 следующее состояние. h\_t () – функция аналогичная h(), но вместо состояния она задает соотвествующее время, которое ОУ будет находиться в этом состоянии.

**16 слайд (Свойства условных распределений 2)**

Пусть теперь b – четырехмерный целочисленный неотрицательный вектор, тогда вероятность совместного выполнения следующих равенств будет равна...

**17 слайд (Полученные результаты 1)**

Перейдем теперь к полученным результатам, оформленным в виде двух теорем.

Содержательный смысл первой теоремы состоит в том, что сформулированные выше соотношения и вероятностные предпосылки непротиворечивы и реализуются на некотором вероятностном пространстве.

Итак, предположим что начальное состояние прибора и начальное состояние очередей заданы. Тогда существует некоторое вероятностное пространство и заданные на нем случайные величины и случайные элементы такие что:...

**18 слайд (Полученные результаты 2)**

Более того, при известном начальном состоянии, случайная последовательность ... является однородной счетно марковской цепью.

Тандем перекрестков как СМО представлена на следующей схеме.

Слайд 4. Включить потоки насыщения. Включить длительности обслуживания. Убрать дисциплины очередей.

14 совместное рассмотрение ... см пред слайд.

2,3 слайды (Цели работы)

Передо мной стояли следующие задачи:

1. Построить математическую модель системы обслуживания

неординарных потоков с относительными приоритетами

2. Провести анализ построенной математической модели.

3. Найти стационарное распределение числа требований в очередях

для частного случая m=2 входных потоков, используя метод

цензурирования марковских цепей.

4. Реализовать иммитационную модель и с ее помощью изучить такие

характеристики системы как стационарные вероятности некоторых

состояний, загрузку системы и т.д.

4 слайд (Общий вид системы)

Итак, система обслуживания имеет следующий вид.

Есть m входных потоков требований. Требования по каждому потоку

поступают группами, причем поток групп является пуассоновским.

Сначала требование попадает в соответствующую очередь бесконечного

объема, откуда поступает на обслуживание в соответствии с

правилом «первый пришел — первый вышел».

Обслуживающее устройство одно и одновременно может обслуживать

только одно требование. Обслуживание осуществляется в классе

приоритетных аёлгоритмов (алгоритмов относительного приоритета):

требование потока считается тем приоритетнее, чем ниже его номер.

После обслуживания требование покидает систему.

5 слайд (Параметры системы)

Следующие параметры системы предполагаются известными.

6 слайд (Построение математической модели. 1 Введение необходимых

случайных величин. Формализация работы обслуживающего устройства

и формирования очередей)

Под рабочим актом будем понимать промежуток времени обслуживания

одного требования. Наблюдение за системой будет осуществляться в

моменты окончания рабочих актов.

Для построения математической модели были введены несколько случайных

величин и случайных элементов, основные из которых

Ti — момент окончания i-го рабочего акта.

Гi — состояние прибора на протяжении i-1 Рабочего акта.

Kappa ji — величина очереди Oj в момент Ti,

eta(1)ji — количество требований поступивших в очередь Оj от момента Tj до начала i+1 рабочего акта.

eta(2)ji — число требований, пришедших в очередь Oj за i+1 рабочий акт.

overline{Xi} ji — число обслуженных требований j-го типа на i+1 рабочем акте.

Xi ji — максимально возможное число обслуженных требований j-го типа на i+1 рабочем акте (при бесконечной очереди).

Закон изменения состояния обслуживающего устройства формализует

соотношение (1), а закон изменения очереди – соотношение (2)

7,8 слайды (Свойства условных распределений)

В завершении построения математической модели были сформулированы

выражения для следующих условных вероятностей.

9 слайд (Результаты анализа. Марковость)

В результате анализа СМО были доказаны следующие теоремы.

Марковость последовательностей kappa и (Г, kappa).

10 слайд (Результаты анализа. Рекуррентные соотношения для

переходных вероятностей)

Были найдены в явном виде переходные перовтности цепей kappa и (gamma,

kappa).

11 слайд (Результаты анализа. Классификация состояний)

Было установлено, что состояния обеих марковских цепей являются

существенными, сообщающимися и апериодическими.

12 слайд (Результаты анализа. Производящие функции)

Найдены соотношения для многомерных производящих функций.

13 слайд (Результаты анализа. Условия существования стационарного

распределения)

И в конечном итоге найдено необходимое и достаточное условие

существования стационарного распределения марковской цепи kappa.

14 слайд (Стационарное распределение. Исходная цепь)

Теперь несколько слов о поиске стационарного распределения.

Существующие на данный момент методы нахождения стационарных

вероятностей состояний марковской цепи kappa основываются на z-

преобразованиях, преобразованиях Лапласа и подразумевают вычисления

обратных преобразований, что пораждает численную неустойчивость

полученных результатов. Поэтому был исследован новый подход к решению

этой задаче, основанный на методе цензурирования марковской цепи kappa.

Итак, обозначим через П x1 x2 стационарную вероятность исходной

марковской цепи kappa. Пространтсво состояний цепи можно представить

графически следующим образом.

15 слайд (Стационарное распределение. Цензурирование1. )

Зафиксируем неотрицательное целое число a. Введем новое множество

состояний, которое назовем цензурирующим, и моменты времени попадания

в это множество. Тогда новая последовательность случайных величин также

будет марковской. Назовем ее цензурированная марковская цепь.

16 слайд (Стационарное распределение. Цензурирование2. )

Цензурирование позволяет найти рекуррентные выражения для

стационарных веротяностей состояний исходной цепи kappa. Однако

вероятность нулевого состояния по-прежнему неизвестна. Для ее нахождения

применяется вложенное цензурирование.

17 слайд (Стационарное распределение. Вложенное цензурирование1.)

Возьмем цензурированную марковскую цепь kappa0 и проведем с ней

вложенную процедуру цензурирования: зафиксируем целое число а>=1 и

будем наблюдать за ней в моменты попадания в множество E...

18 слайд (Стационарное распределение. Вложенное цензурирование2.)

В итоге получаем следующее выражение для стационарной вероятности П.

19 слайд (Имитационная модель. Построение модели).

Для моделирования системы обслуживания была выбрана имитационная

модель, основанная на понятии регенерирующего процесса.

20 слайд (Имитационная модель. Построение модели).

Не вдаваясь в технические детали определения, процесс является

регенерирующим, если существует последовательность случайных

величин \beta (называемых точками регенерации), таких, что исходный

случайный процесс на интервалах [\beta i, \beta i+1] можно рассматривать как

независимые копии одного и того же процесса.

21 слайд (Имитационная модель. Построение модели)

Тогда, если процесс сходится по распределению к некоторой (стационарной)

случайной величине X, то оценку ожидания произвольной измеримой

функции f от Х можно получить усреднением значений этого функционала

на траекториях копий процесса \overline{X}.

22 слайд (Имитационная модель. Построение модели)

Одним из важнейших свойств введенной оценки является ассимптотическая

нормальность.

Для введеной оценки имеет место следующая пределная теорема.

В рассматриваемой СМО в качестве процесса выступает марковская цепь \kappa, а в качестве функционала, например, можно взять

индикатор того, что система находится в состоянии (x\_1,x\_2). Тогда, очевидно, r(f) будет не чем иным, как стационарной вероятностью

этого состояния.

23 слайд (Имитационная модель. Построение модели).

Описанный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с более общими

методами:

1. существенное сокращение общего времени моделирования;

2. есть возможность построения доверительных интервалов;

3. есть возможность вычислить необходимое число итераций для

достижения заданной точности.

24 слайд (Имитационная модель. Реализация).

Имитационная модель была реализована в виде приложения:

1. используемый язык программирования: C++;

2. используемая библиотека для параллельных вычислений:

OpenSHMEM;

3. используемая библиотека для генерации случайных чисел: GSL (GNU

Scientific Library).

25 слайд (Заключение).

1. Построена математическая модель СМО;

2. проведен анализ построенной математической модели и доказан ряд

теорем, в том числе найдено необходимое и достаточное условие

существования стационарного распределения;

3. найдено стационарное распределение длин очередей в частном случае

$m=2$ входных потоков;

4. Реализована регенеративная имитационная модель с использованием

методов параллельных вычислений.

Спасибо за внимание.