

Вариант задания: М3.6(Ф). Модель Рикитаке

Имитация 2-х больших вихрей в ядре Земли, которые поворачиваются благодаря силам плавучести (система двухдискового динамо); описываются системой:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -My_1 + y_2y_3 \\ \dot{y}_2 = -My_2 + y_1(y_3 - A) \\ \dot{y}_3 = 1 - y_1y_2 \end{cases}$$

$$y_i(0) = y_i^* + \varepsilon_i, 0 < \varepsilon_i < 1, i = 1, 2, 3$$

1. Найти через A и M стационарные точки системы y^* , положить $y^* > 0$
2. Изучить поведение решений системы $y_i(t)$ при вариации A и M в диапазонах: $0 \leq A < 30, 0 < M < 10$ и определить, когда наблюдается по M при $\frac{A}{M} = 3$:
 - а) периодические решения
 - б) квазипериодические решения
 - в) хаотические решения

Найдем стационарные точки системы. Для этого приравняем производные к 0:

$$\begin{cases} -My_1 + y_2y_3 = 0 \\ -My_2 + y_1(y_3 - A) = 0 \\ 1 - y_1y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1^* = \frac{1}{y_2}.$$

Подставим y_1^* в систему вместо y_1 . Получим:

$$\begin{cases} -My_1 + y_2y_3 = 0 \\ -My_2 + y_1(y_3 - A) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_3^* = A - My_2.$$

Подставим y_3^* в систему вместо y_3 . Получим:

$$-\frac{M}{y_2} + Ay_2 - My_2^3 = 0$$

Домножим уравнение на $y_2 \neq 0$. Получим биквадратное уравнение:

$$-M + Ay_2^2 - My_2^4 = 0, D = 4(A^2 + M^2), y_2^* = \pm \sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{4(A^2 + M^2)}}{-2M}}$$

Возьмем $y_2^* = \sqrt{\frac{A + \sqrt{4(A^2 + M^2)}}{2M}}$, тогда стационарная точка примет вид:

$$(y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\frac{A + \sqrt{4(A^2 + M^2)}}{2M}}}, y_2^* = \sqrt{\frac{A + \sqrt{4(A^2 + M^2)}}{2M}}, y_3^* = A - M\sqrt{\frac{A + \sqrt{4(A^2 + M^2)}}{2M}}).$$

Задачу Коши:

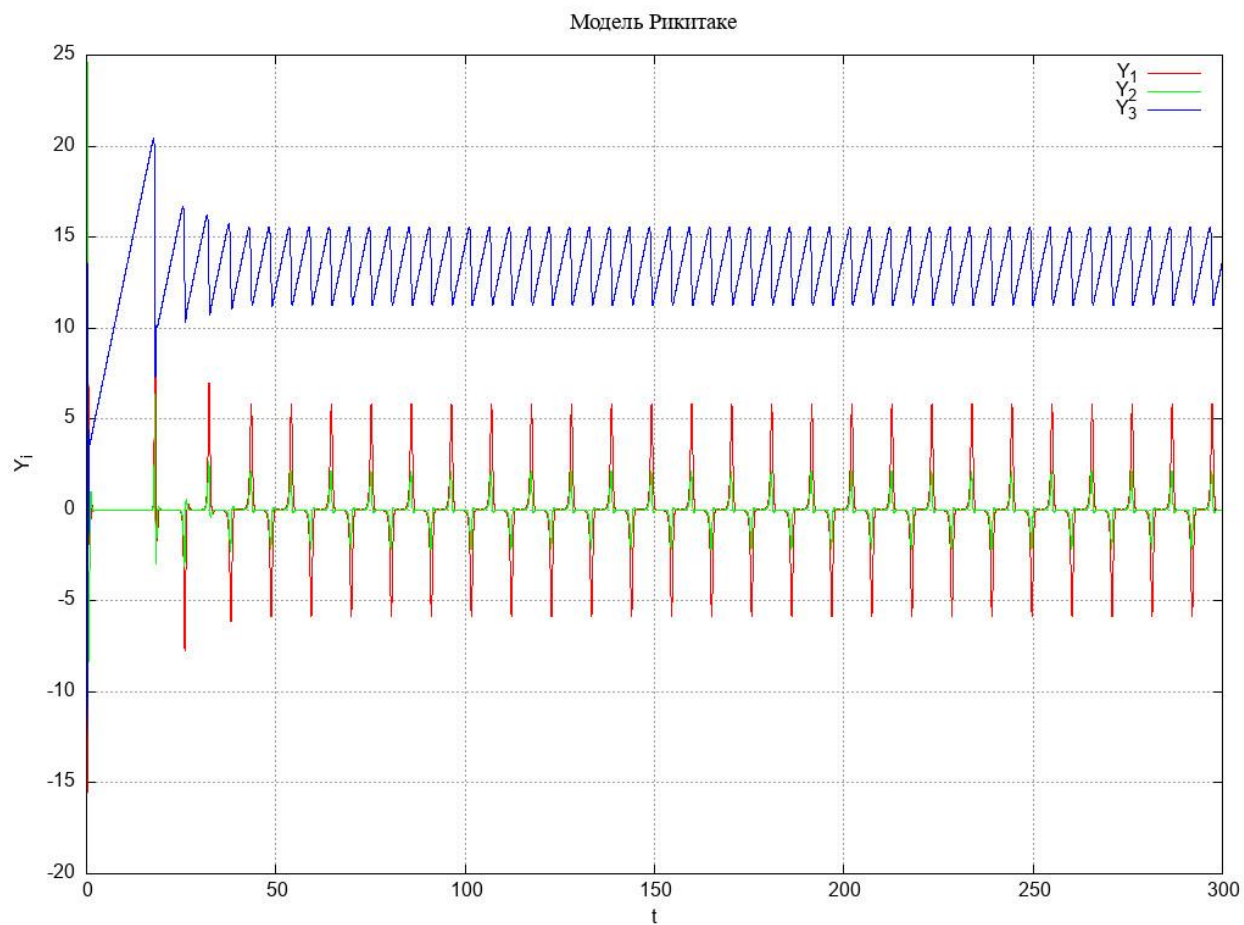
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -My_1 + y_2y_3 \\ \dot{y}_2 = -My_2 + y_1(y_3 - A) \\ \dot{y}_3 = 1 - y_1y_2 \end{cases}$$

$y_i(0) = y_i^* + \varepsilon_i, 0 < \varepsilon_i < 1, i = 1, 2, 3$ будем решать классическим методом Рунге-Кутты (4 порядка точности).

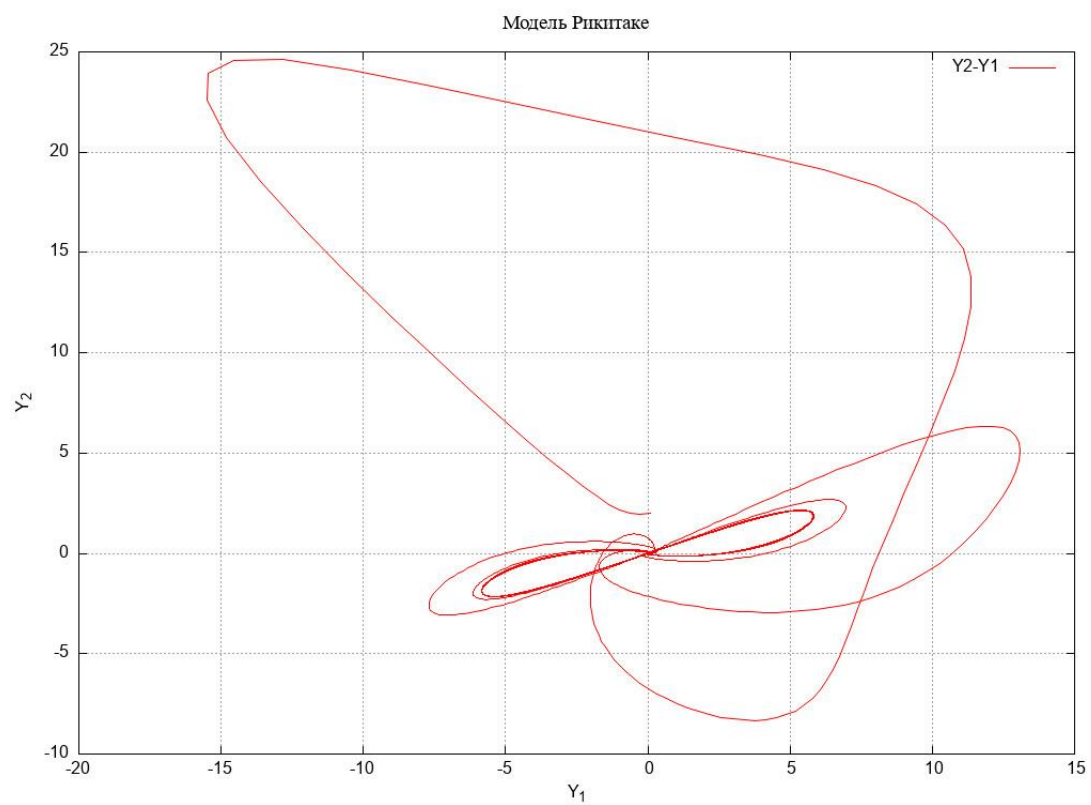
Варьируя параметры A и M , получим 3 разных режима: периодический, квазипериодический, хаотический.

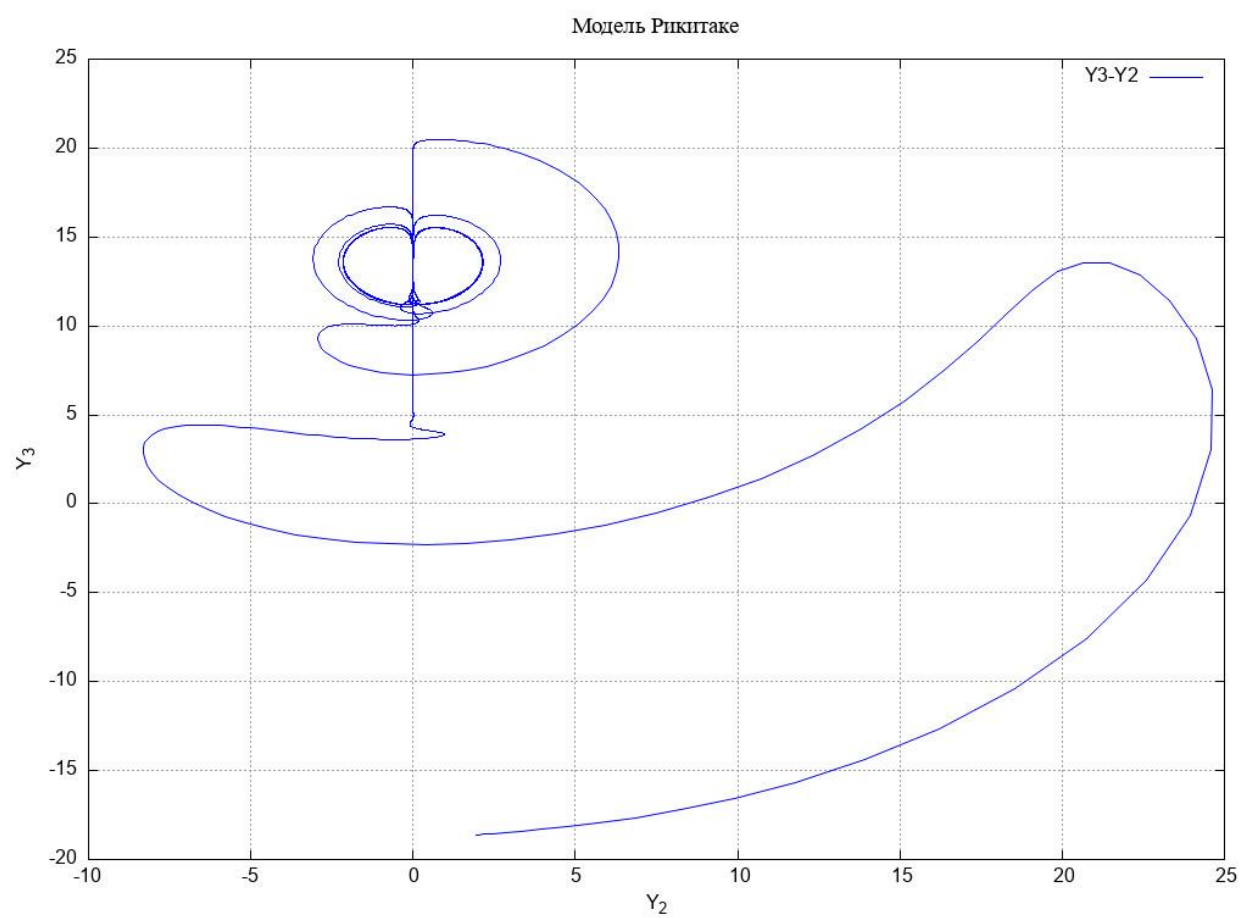
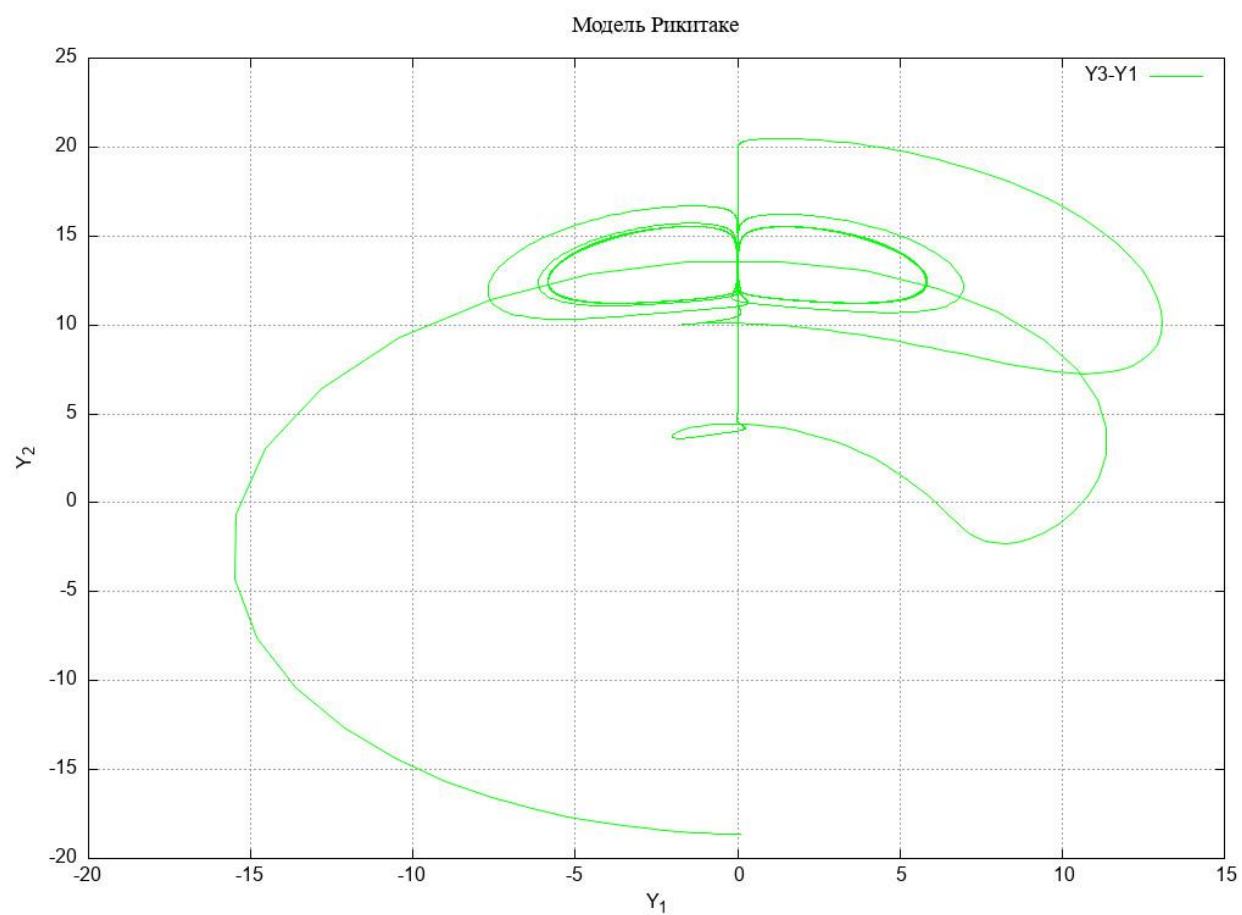
Периодический режим

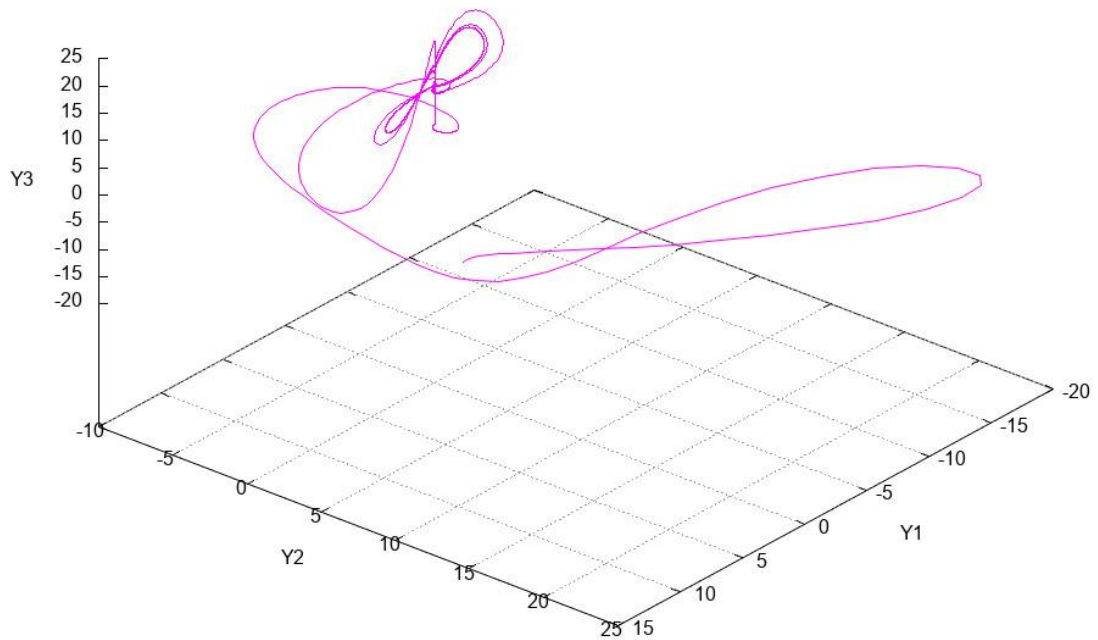
Параметры: $A = 12$, $M = 4$



Фазовые диаграммы

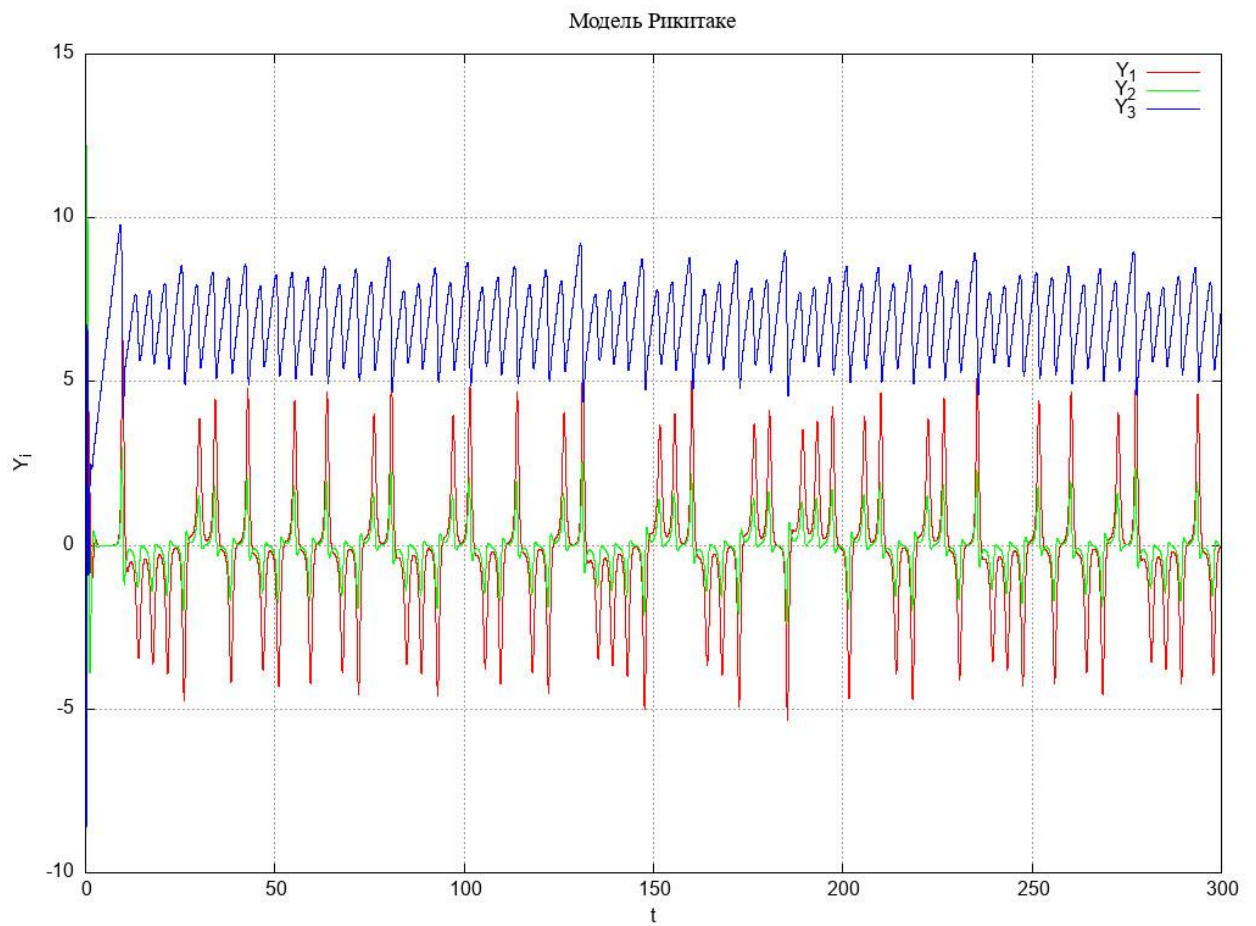




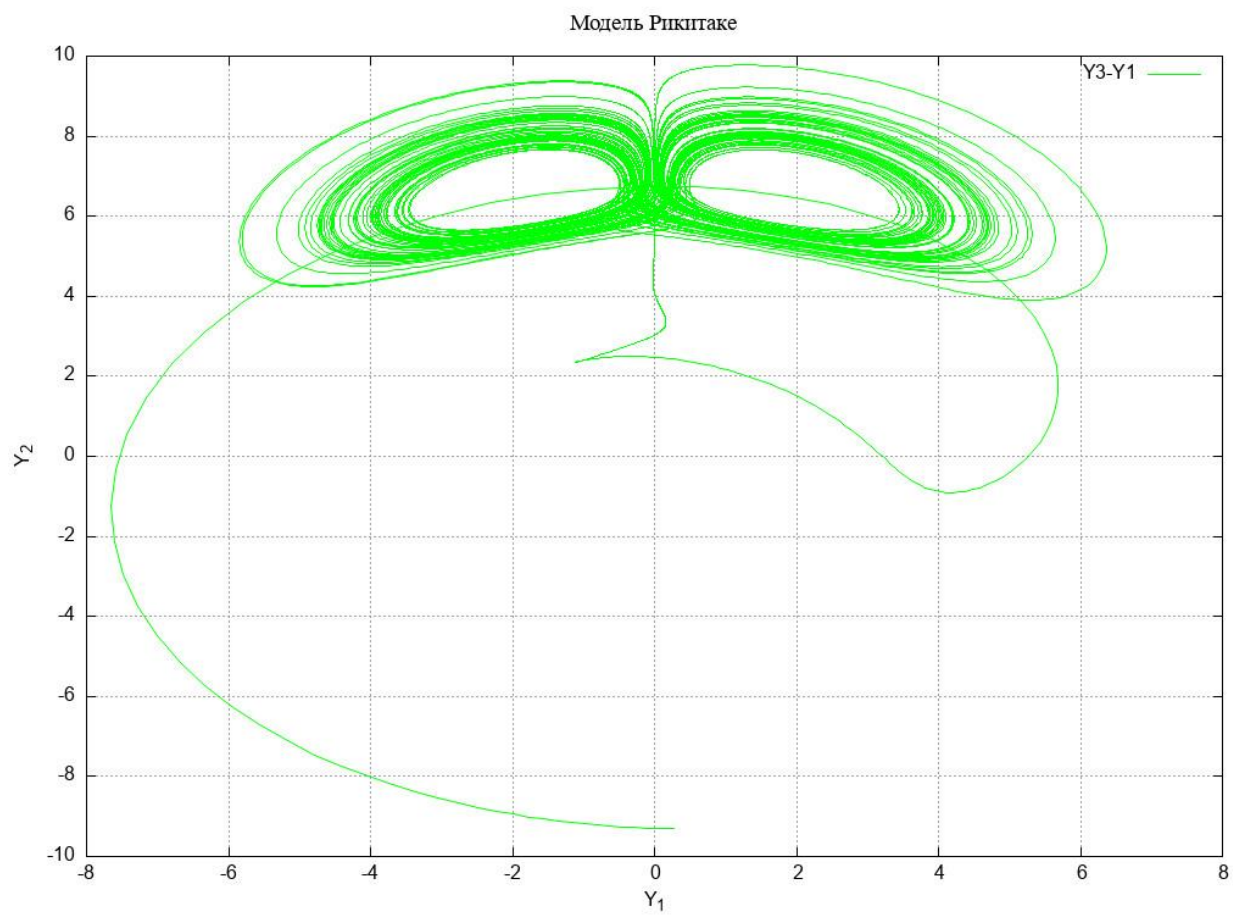
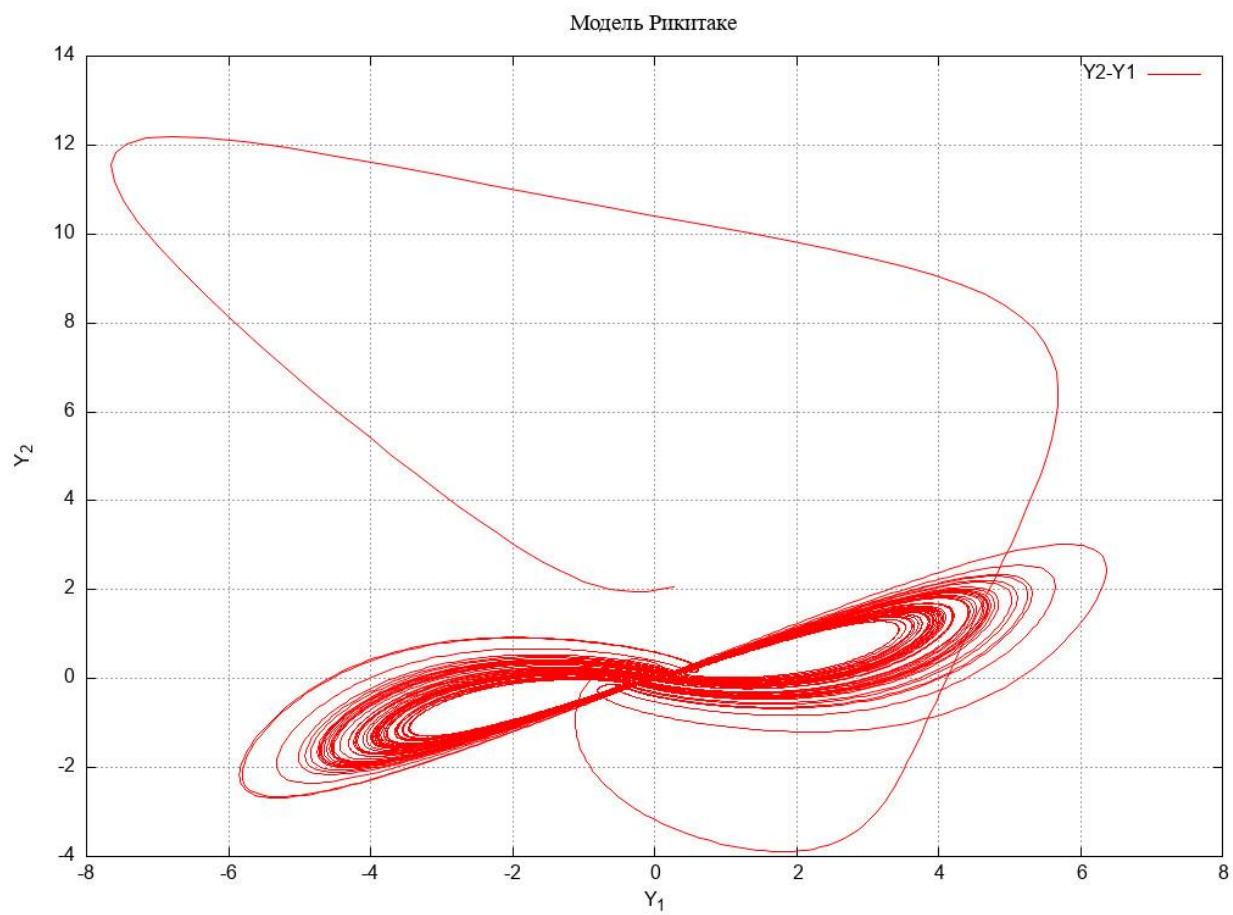


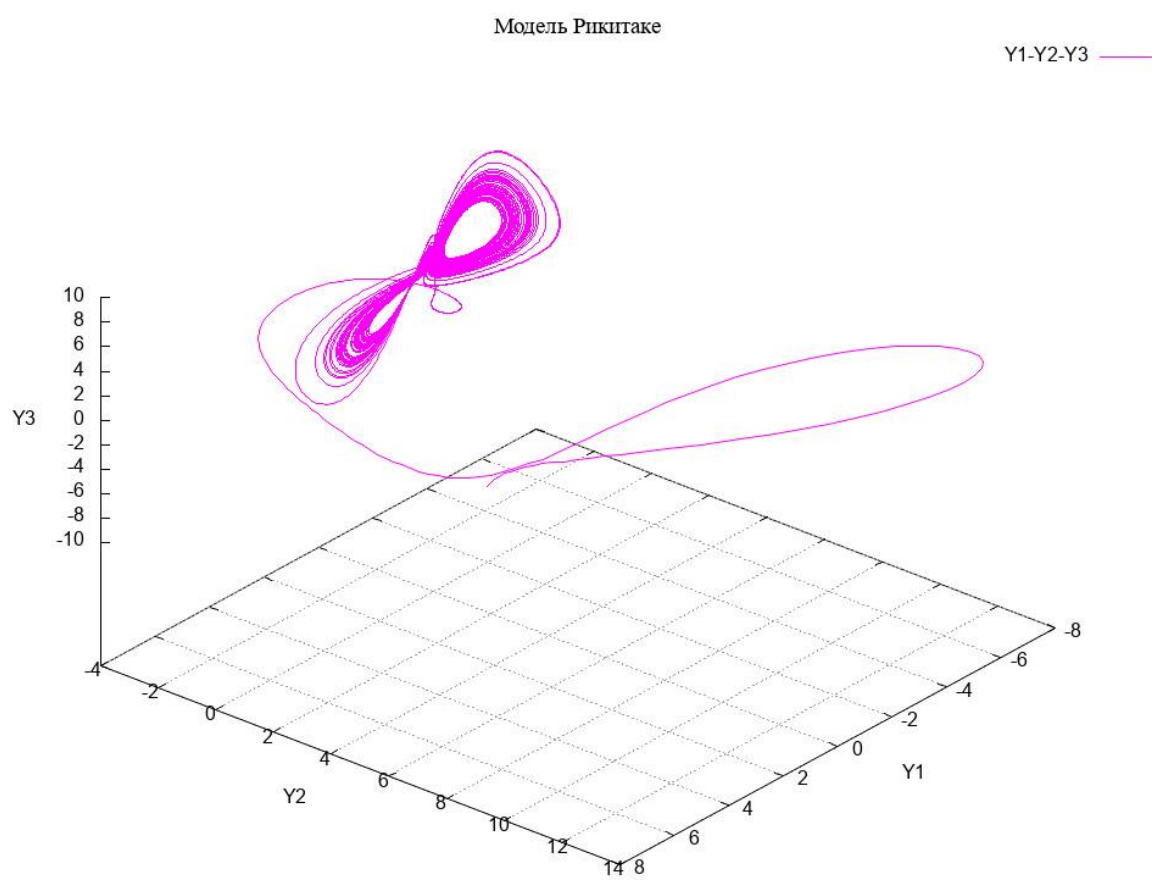
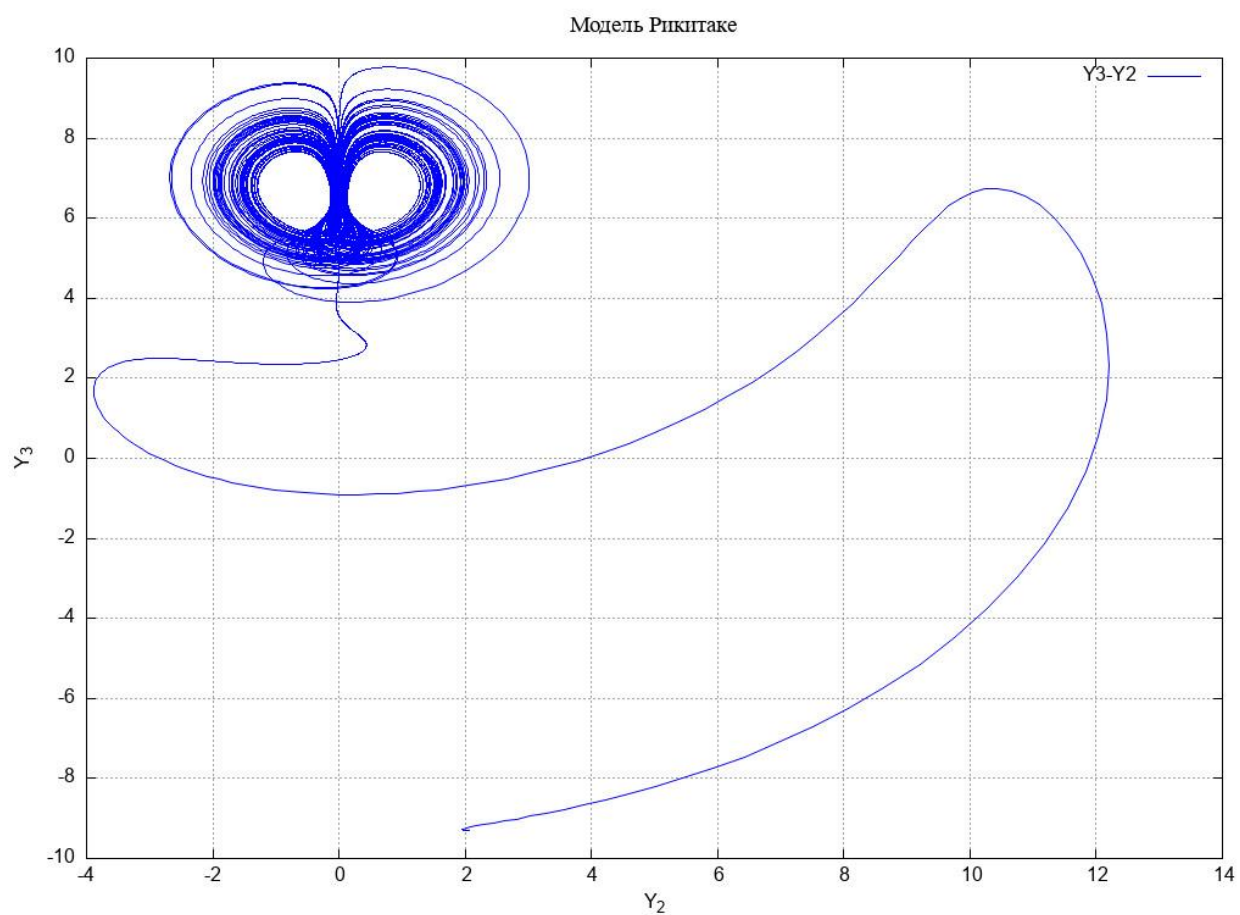
Квазипериодический режим

Параметры: $A = 6$, $M = 2$



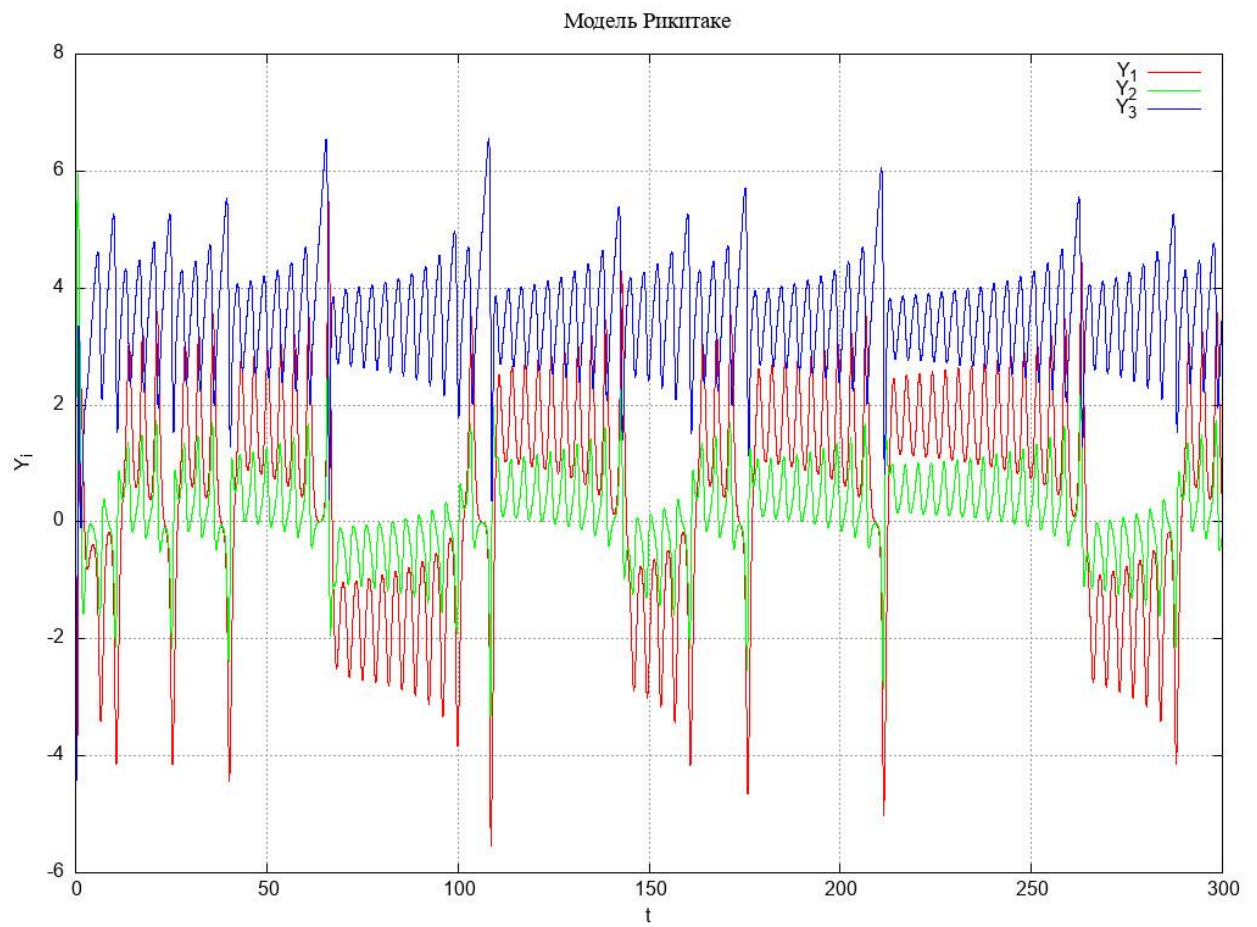
Фазовые диаграммы





Хаотический режим

Параметры: $A = 3$, $M = 1$



Фазовые диаграммы

