

Тестовое задание для стажировки

Мария Митранкова

14 апреля 2023 г.

1. Обозначим события $'+' = \{\text{Прибор показал положительный результат}\}$,
 $'-' = \{\text{Прибор показал отрицательный результат}\}$, $B = \{\text{Брак}\}$.

Из условия $P(B) = 0.05$, $P(-|B) = P(+|\bar{B}) = 0.05$ Тогда, по формуле Байеса:

$$P(B|+) = \frac{P(+|B)P(B)}{P(+)} = \frac{P(+|B)P(B)}{P(+|B)P(B) + P(+|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.95 \cdot 0.05}{0.95 \cdot 0.05 + 0.05 \cdot 0.95} = \frac{1}{2}$$

2. В реальности такие приборы могут использоваться в случаях, когда производителю не так страшно "забраковать" исправный товар, как выпустить бракованный в продажу. Да, мы будем браковать много товаров, и только половина из них будет по-настоящему браком, однако вероятность появления брака в продаже будет равна:

$$P(B|-) = \frac{P(-|B)P(B)}{P(-|B)P(B) + P(-|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.05 \cdot 0.05}{0.05 \cdot 0.05 + 0.95 \cdot 0.95} \approx 0.0028$$

Для того, чтобы повысить вероятность $P(B|+)$ можно запускать проверку для каждого товара два раза и отмечать товар как брак только если прибор оба раза показал положительный результат. Тогда вероятность станет равна:

$$P(B|++) = \frac{P(++|B)P(B)}{P(++|B)P(B) + P(++|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.95^2 \cdot 0.05}{0.95^2 \cdot 0.05 + 0.05^2 \cdot 0.95} = \frac{0.95}{0.95 + 0.05} = 0.95$$

Таким образом, теперь мы будем браковать только тот товар, в котором почти точно уверены, что он неисправен.

3. Пусть a – вероятность ошибки прибора (и I и II рода), b – вероятность появления брака. Для того, чтобы прибор работал лучше "честной" монетки, должно выполняться неравенство:

$$P(B|+) > \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(+|B)P(B)}{P(+|B)P(B) + P(+|\bar{B})P(\bar{B})} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-a) \cdot b}{(1-a) \cdot b + a \cdot (1-b)} > \frac{1}{2}$$

$$2b(1-a) > b(1-a) + a(1-b)$$

$$b(1-a) > a(1-b)$$

$$\frac{b}{1-b} > \frac{a}{1-a}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{b} - 1} > \frac{1}{\frac{1}{b} - 1}$$

$$\frac{1}{b} - 1 < \frac{1}{a} - 1$$

$$b > a$$

То есть, для того, чтобы прибор работал лучше правильной монетки, вероятность ошибки прибора должна быть меньше, чем вероятность возникновения брака. Соответственно, чтобы прибор работал хуже, вероятность ошибки должна быть больше, чем вероятность брака и чтобы прибор работал также, как монетка, вероятности должны быть равны.