Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$

$$\forall\, x \in E\ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

więc z Tw. 3 $\varphi_n \overset{E}{\rightrightarrows} \varphi$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$
$\forall\, x \in E\ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \dfrac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,
więc z Tw. 3 $\varphi_n \overset{E}{\rightrightarrows} \varphi$.
Korzystając z Tw. 6 otrzymujemy, że $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0) = g(x_0)$. ■

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 8 Jeżeli

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

a szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na E,

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na E,

to suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą na E.

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,
szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,
szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$
oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,
szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$
oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją różniczkowalną na $[a, b]$ oraz $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\ \forall\, x \in [a, b]$.