ANALIZA MATEMATYCZNA 2 MAT1697
WYDZIAŁ MATEMATYKI, MATEMATYKA STOSOWANA,
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

WYKŁADOWCA: DR HAB. INŻ. AGNIESZKA JURLEWICZ,
PROF. UCZELNI

Wykład 1:
Ciągi i szeregi funkcyjne - zbieżność jednostajna.

Tw. 5 Kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego

Jeżeli $\forall\, n\, \forall\, x \in E \quad |f_n(x)| \leq A_n$

i szereg liczbowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny,

to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny na E.

Tw. 5 - Dowód:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{ jest zbieżny i } A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)|$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Stąd i z założenia Tw.5

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$$

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$$

$$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę.■

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę.$\blacksquare$

Przykład P5

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

oraz $\forall\, n$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$.

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

oraz $\forall\, n$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$.

Wówczas istnieje granica właściwa

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0\; \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0 \quad |A_n - A_m| \leq \varepsilon$

(gdy przejdziemy do granic przy $x \to x_0$)

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, n, m \geq N_0 \;\forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, n, m \geq N_0 \quad |A_n - A_m| \leq \varepsilon$

(gdy przejdziemy do granic przy $x \to x_0$)

Ciąg $\{A_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny do pewnej granicy właściwej. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$,
$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$,
$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Zatem
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - A| \leq \varepsilon$

tzn. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A. \blacksquare$

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

Tw. 7 (Przemienność granicy i różniczkowania)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$.

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$.

Wówczas $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f takiej, że
$f' = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n' = g$ na $[a, b]$.

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\ |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\ |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

a wtedy także $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \overset{(*)}{=}$
$|(f_n - f_m)'(\xi)||x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$
dla dowolnego $y \in [a, b]$, w tym $y = c$, [$(*)$ ξ to punkt pośredni pomiędzy x a y; korzystamy tu z tw. Lagrange'a dla funkcji $f_n - f_m$]

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\ |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

a wtedy także $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \overset{(*)}{=}$
$|(f_n - f_m)'(\xi)||x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$
dla dowolnego $y \in [a, b]$, w tym $y = c$, [$(*)$ ξ to punkt pośredni pomiędzy x a y; korzystamy tu z tw. Lagrange'a dla funkcji $f_n - f_m$]
i $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| +$
$+ |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, czyli spełniony jest warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności dla ciągu $\{f_n\}$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.
Skorzystamy z Tw. 6.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy
$\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)(= A_n)$,

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)(= A_n)$,

dla $x \in E$ $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0) (= A_n)$,

dla $x \in E$ $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$

oraz $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0)$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$ $\forall\, x \in E$ $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \dfrac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, n, m \geq N_0$
$\forall\, x \in E \; |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \dfrac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,
więc z Tw. 3 $\varphi_n \overset{E}{\rightrightarrows} \varphi$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, N_0 \; \forall\, n, m \geq N_0$

$$\forall\, x \in E \; |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$$

$$\leq \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \tfrac{1}{|x - x_0|} = \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

więc z Tw. 3 $\varphi_n \overset{E}{\rightrightarrows} \varphi$.

Korzystając z Tw. 6 otrzymujemy, że $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) =$

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) = g(x_0). \; \blacksquare$$

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 8 Jeżeli

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na E,

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na E,

to suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą na E.

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,

Tw. 9 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,

szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,
szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$
oraz szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a,b]$,

szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a,b]$

oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$,

to suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją różniczkowalną na $[a,b]$ oraz $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\ \forall\, x \in [a,b]$.

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli
$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,
szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$
oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją różniczkowalną na $[a, b]$ oraz $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\ \forall\, x \in [a, b]$.

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można różniczkować szereg wyraz po wyrazie.

Tw. 10

Jeżeli

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można całkować szereg wyraz po wyrazie.

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, wyrazy szeregu ciągłe $\Rightarrow$ suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$ jest dobrze określona;

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, wyrazy szeregu ciągłe $\Rightarrow$ suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$ jest dobrze określona;
- $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, k \geq N_0\ \forall\, x \in [a, b]\ \left| \sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$ i stąd
$$\left| \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx - \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_a^b \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)\,dx \right| \leq$$
$$\leq \varepsilon(b-a). \ \blacksquare$$