Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

Tw. 7 (Przemienność granicy i różniczkowania)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$.

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$.

Wówczas $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f takiej, że
$f' = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n' = g$ na $[a, b]$.

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, N_0 \, \forall \, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall \, x \in [a, b] \; |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\ |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

a wtedy także $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \overset{(*)}{=}$
$|(f_n - f_m)'(\xi)||x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$
dla dowolnego $y \in [a, b]$, w tym $y = c$, [$(*)$ ξ to punkt pośredni pomiędzy x a y; korzystamy tu z tw. Lagrange'a dla funkcji $f_n - f_m$]

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.

$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

i $\forall\, x \in [a, b]\; |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

a wtedy także $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \overset{(*)}{=}$
$|(f_n - f_m)'(\xi)||x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$
dla dowolnego $y \in [a, b]$, w tym $y = c$, [$(*)$ ξ to punkt pośredni pomiędzy x a y; korzystamy tu z tw. Lagrange'a dla funkcji $f_n - f_m$]

i $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| +$
$+ |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, czyli spełniony jest warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności dla ciągu $\{f_n\}$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.
Skorzystamy z Tw. 6.