Analiza matematyczna 2 MAT1697
Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana, Politechnika Wrocławska

Wykładowca: dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. uczelni

Wykład 1:
Ciągi i szeregi funkcyjne - zbieżność jednostajna.

Tw. 5 Kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego

Jeżeli $\forall\, n\, \forall\, x \in E \quad |f_n(x)| \leq A_n$

i szereg liczbowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny,

to $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny na E.

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)|$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0\ \forall\, n \Rightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n \geq N_0\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \ 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n \geq N_0\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę.■

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę.■

Przykład P5

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)