

ANALIZA MATEMATYCZNA 2 MAT1697

WYDZIAŁ MATEMATYKI, MATEMATYKA STOSOWANA,  
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

WYKŁADOWCA: DR HAB. INŻ. AGNIESZKA JURLEWICZ,  
PROF. UCZELNI

Wykład 1:

Ciągi i szeregi funkcyjne - zbieżność jednostajna.

## **Tw. 5** KRYTERIUM WEIERSTRASSA JEDNOSTAJNEJ ZBIEŻNOŚCI SZEREGU FUNKCYJNEGO

Jeżeli  $\forall n \forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq A_n$

i szereg liczbowy  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny,

to  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny na  $E$ .

## Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny i  $A_n \geq 0 \forall n \Rightarrow$

## Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny i  $A_n \geq 0 \ \forall n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall n \geq N_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ 0 \leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

## Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny i  $A_n \geq 0 \forall n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Stąd i z założenia Tw.5

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E$$

$$|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)|$$

## Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny i  $A_n \geq 0 \forall n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Stąd i z założenia Tw.5

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E$$

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \leq \\ &\leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

## Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny i  $A_n \geq 0 \forall n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Stąd i z założenia Tw.5

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E$$

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \leq \\ &\leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę. ■

## Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  jest zbieżny i  $A_n \geq 0 \forall n \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Stąd i z założenia Tw.5

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n \geq N_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E$$

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \leq \\ &\leq A_{n+1} + \dots + A_{n+p} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę. ■

Przykład P5





## Tw. 6 (ZAMIANA KOLEJNOŚCI GRANIC)

Założmy, że  $f_n \xRightarrow{E} g$ ,

## Tw. 6 (ZAMIANA KOLEJNOŚCI GRANIC)

Założmy, że  $f_n \xrightarrow{E} g$ ,

$x_0$  jest punktem skupienia zbioru  $E$  (tzn. każde otoczenie punktu  $x_0$  zawiera punkt z  $E$ )

## Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego  $n$  i  $x \in E$  mamy

$$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|.$$

## Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego  $n$  i  $x \in E$  mamy

$$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|.$$

$$f_n \xrightarrow{E} g \text{ i } A_n \rightarrow A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ i } |A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

## Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego  $n$  i  $x \in E$  mamy

$$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|.$$

$$f_n \xrightarrow{E} g \text{ i } A_n \rightarrow A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ i } |A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$ ,

$$\exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

## Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego  $n$  i  $x \in E$  mamy

$$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|.$$

$$f_n \stackrel{E}{\rightrightarrows} g \text{ i } A_n \rightarrow A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ i } |A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ponieważ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$ ,

$$\exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Zatem

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - A| \leq \varepsilon$$

tzn.  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ . ■

## **Tw. 7** (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Założmy, że

## **Tw. 7** (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Założmy, że

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest określona i różniczkowalna na  $[a, b]$ ,



## **Tw. 7** (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Założmy, że

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest określona i różniczkowalna na  $[a, b]$ ,

ciąg  $f_n$  jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie  $c \in [a, b]$

## **Tw. 7** (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Założmy, że

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest określona i różniczkowalna na  $[a, b]$ ,

ciąg  $f_n$  jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie  $c \in [a, b]$

oraz  $f'_n \xrightarrow{[a,b]} g$ .

## **Tw. 7** (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Założmy, że

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest określona i różniczkowalna na  $[a, b]$ ,

ciąg  $f_n$  jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie  $c \in [a, b]$

oraz  $f'_n \xrightarrow{[a,b]} g$ .

Wówczas  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$  dla pewnej funkcji  $f$  takiej, że  
$$f' = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g \text{ na } [a, b].$$

## Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy  $\{f_n(c)\}$  jest zbieżny oraz  $f'_n \xRightarrow{[a,b]} g$

## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$  dla pewnej funkcji  $f$ . Trzeba jeszcze pokazać, że  $f' = g$  na  $[a, b]$ .

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone  $x_0 \in [a, b]$  i dla  $n \in \mathbb{N}$  oznaczmy

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ dla } x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

$x_0$  to punkt skupienia zbioru  $E$ .

## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$  dla pewnej funkcji  $f$ . Trzeba jeszcze pokazać, że  $f' = g$  na  $[a, b]$ .

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone  $x_0 \in [a, b]$  i dla  $n \in \mathbb{N}$  oznaczmy

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ dla } x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

$x_0$  to punkt skupienia zbioru  $E$ .

Mamy  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) = f'_n(x_0) (= A_n)$ ,

## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$  dla pewnej funkcji  $f$ . Trzeba jeszcze pokazać, że  $f' = g$  na  $[a, b]$ .

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone  $x_0 \in [a, b]$  i dla  $n \in \mathbb{N}$  oznaczmy

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ dla } x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

$x_0$  to punkt skupienia zbioru  $E$ .

$$\text{Mamy } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) = f'_n(x_0) (= A_n),$$

$$\text{dla } x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$$

## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$  dla pewnej funkcji  $f$ . Trzeba jeszcze pokazać, że  $f' = g$  na  $[a, b]$ .

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone  $x_0 \in [a, b]$  i dla  $n \in \mathbb{N}$  oznaczmy

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ dla } x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

$x_0$  to punkt skupienia zbioru  $E$ .

$$\text{Mamy } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) = f'_n(x_0) (= A_n),$$

$$\text{dla } x \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$$

$$\text{oraz } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = f'(x_0).$$



## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

$$\begin{aligned} & \text{Z wcześniejszych rozważań } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n, m \geq N_0 \\ & \forall x \in E \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{aligned}$$

## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

$$\begin{aligned} & \text{Z wcześniejszych rozważań } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n, m \geq N_0 \\ & \forall x \in E \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{aligned}$$

więc z Tw. 3  $\varphi_n \xrightarrow{E} \varphi$ .

## Tw. 7 - Dowód, c.d.:

$$\begin{aligned} & \text{Z wcześniejszych rozważań } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall n, m \geq N_0 \\ & \forall x \in E \quad |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{aligned}$$

więc z Tw. 3  $\varphi_n \xrightarrow{E} \varphi$ .

Korzystając z Tw. 6 otrzymujemy, że  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = g(x_0). \blacksquare$$

## Tw. 8 Jezeli

**Tw. 8** Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest ciągła na  $E$ ,

**Tw. 8** Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest ciągła na  $E$ ,

a szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $E$ ,

**Tw. 9** Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest różniczkowalna na  $[a, b]$ ,

szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie  $c \in [a, b]$

oraz szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ ,

to suma szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest funkcją różniczkowalną na

$[a, b]$  oraz  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można różniczkować szereg wyraz po wyrazie.

Ježeli



## Tw. 10

Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest ciągła na  $[a, b]$ ,

## Tw. 10

Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest ciągła na  $[a, b]$ ,

a szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ ,

## Tw. 10

Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest ciągła na  $[a, b]$ ,

a szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ ,

$$\text{to } \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

## Tw. 10

Jeżeli

$\forall n$  funkcja  $f_n(x)$  jest ciągła na  $[a, b]$ ,

a szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ ,

$$\text{to } \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można całkować szereg wyraz po wyrazie.

## Tw. 10 - Dowód:

- ▶  $\forall n \int_a^b f_n(x) dx$  dobrze określona, bo  $f_n(x)$  ciągła na  $[a, b]$ .

## Tw. 10 - Dowód:

- ▶  $\forall n \int_a^b f_n(x) dx$  dobrze określona, bo  $f_n(x)$  ciągła na  $[a, b]$ .
- ▶  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ , wyrazy szeregu ciągłe  $\Rightarrow$  suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$  i  $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$  jest dobrze określona;

## Tw. 10 - Dowód:

- ▶  $\forall n \int_a^b f_n(x) dx$  dobrze określona, bo  $f_n(x)$  ciągła na  $[a, b]$ .
- ▶  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na  $[a, b]$ , wyrazy szeregu ciągłe  $\Rightarrow$  suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$  i  $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$  jest dobrze określona;
- ▶  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall k \geq N_0 \forall x \in [a, b] \left| \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$  i stąd
$$\left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^{k-1} \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x) dx \right| \leq \varepsilon(b-a). \blacksquare$$