Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N_0 \,\forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\ |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\; |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

a wtedy także $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \overset{(*)}{=}$
$|(f_n - f_m)'(\xi)||x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$
dla dowolnego $y \in [a, b]$, w tym $y = c$, [$(*)$ ξ to punkt pośredni pomiędzy x a y; korzystamy tu z tw. Lagrange'a dla funkcji $f_n - f_m$]

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$ spełnione są odpowiednie warunki Cauchy'ego, tzn.
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0 \quad |f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
i $\forall\, x \in [a, b]\; |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,
a wtedy także $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \overset{(*)}{=}$
$|(f_n - f_m)'(\xi)||x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b - a) = \frac{\varepsilon}{2}$
dla dowolnego $y \in [a, b]$, w tym $y = c$, [$(*)$ ξ to punkt pośredni pomiędzy x a y; korzystamy tu z tw. Lagrange'a dla funkcji $f_n - f_m$]
i $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(c)| +$
$+|f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, czyli spełniony jest warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności dla ciągu $\{f_n\}$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f^{'} = g$ na $[a, b]$.
Skorzystamy z Tw. 6.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f^{'} = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy
$\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)(= A_n)$,

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0) (= A_n)$,

dla $x \in E$ $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0) (= A_n)$,

dla $x \in E$ $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$

oraz $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0)$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$

$$\forall\, x \in E\ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$$

$$\leq \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \tfrac{1}{|x-x_0|} = \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)},$$