Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$,
$\exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in E\; |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$,
$\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \in E \; |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Zatem
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \in E \; |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - A| \leq \varepsilon$

tzn. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$. ■

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$.

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest określona i różniczkowalna na $[a, b]$,

ciąg f_n jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$.

Wówczas $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f takiej, że
$f' = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n' = g$ na $[a, b]$.

Tw. 7 - Dowód:

Ciąg liczbowy $\{f_n(c)\}$ jest zbieżny oraz $f_n' \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$