Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Stąd i z założenia Tw.5

$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$

$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$

$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę.$\blacksquare$

Tw. 5 - Dowód:

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ jest zbieżny i $A_n \geq 0 \; \forall \, n \Rightarrow$

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Stąd i z założenia Tw.5

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, N_0 \; \forall \, n \geq N_0 \; \forall \, p \in \mathbb{N} \; \forall \, x \in E$$

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq$$

$$\leq A_{n+1} + \ldots + A_{n+p} \leq \varepsilon$$

Z Tw. 4 (warunku Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) otrzymujemy tezę.■

Przykład P5

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

oraz $\forall\, n$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$.

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

oraz $\forall\, n$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$.

Wówczas istnieje granica właściwa
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, n, m \geq N_0 \;\forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0 \quad |A_n - A_m| \leq \varepsilon$

(gdy przejdziemy do granic przy $x \to x_0$)

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, n, m \geq N_0 \;\forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0 \;\forall\, n, m \geq N_0 \quad |A_n - A_m| \leq \varepsilon$

(gdy przejdziemy do granic przy $x \to x_0$)

Ciąg $\{A_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny do pewnej granicy właściwej. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.