Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

oraz $\forall\, n$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$.

Tw. 6 (Zamiana kolejności granic)

Załóżmy, że $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$,

x_0 jest punktem skupienia zbioru E (tzn. każde otoczenie punktu x_0 zawiera punkt z E)

oraz $\forall\, n$ istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$.

Wówczas istnieje granica właściwa

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0 \, \exists\, N_0 \, \forall\, n, m \geq N_0 \, \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0\; \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0\; \forall\, n, m \geq N_0 \quad |A_n - A_m| \leq \varepsilon$

(gdy przejdziemy do granic przy $x \to x_0$)

Tw. 6 - Dowód:

Z Tw. 3 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g \Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_0\, \forall\, n, m \geq N_0\, \forall\, x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_0\, \forall\, n, m \geq N_0 \quad |A_n - A_m| \leq \varepsilon$

(gdy przejdziemy do granic przy $x \to x_0$)

Ciąg $\{A_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny do pewnej granicy właściwej. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|.$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_0 \, \forall x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$,
$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Tw. 6 - Dowód, c.d.:

Dla dowolnego ustalonego n i $x \in E$ mamy
$|g(x) - A| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$.

$f_n \overset{E}{\rightrightarrows} g$ i $A_n \to A \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, x \in E \quad |f_{N_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ i $|A_{N_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to x_0} f_{N_0}(x) = A_{N_0}$,
$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_{N_0}(x) - A_{N_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Zatem
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - A| \leq \varepsilon$

tzn. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A.\blacksquare$

Tw. 7 (PRZEMIENNOŚĆ GRANICY I RÓŻNICZKOWANIA)

Załóżmy, że