Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.
Skorzystamy z Tw. 6.
Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy
$\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.
x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f^{'} = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n^{'}(x_0)(= A_n)$,

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.
Skorzystamy z Tw. 6.
Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$\varphi_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ dla } x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

x_0 to punkt skupienia zbioru E.
Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)(= A_n)$,

$$\text{dla } x \in E \ \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$$

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z Tw. 3 $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ dla pewnej funkcji f. Trzeba jeszcze pokazać, że $f' = g$ na $[a, b]$.

Skorzystamy z Tw. 6.

Weźmy dowolne ustalone $x_0 \in [a, b]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy $\varphi_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ dla $x \in E = [a, b] \setminus \{x_0\}$.

x_0 to punkt skupienia zbioru E.

Mamy $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0) (= A_n)$,

dla $x \in E$ $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \varphi(x)$

oraz $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0)$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$
$\forall\, x \in E\ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \dfrac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$

$$\forall\, x \in E\ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

więc z Tw. 3 $\varphi_n \overset{E}{\rightrightarrows} \varphi$.

Tw. 7 - Dowód, c.d.:

Z wcześniejszych rozważań $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, n, m \geq N_0$
$\forall\, x \in E\ |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \dfrac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{|x - x_0|} \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| \cdot \frac{1}{|x-x_0|} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,
więc z Tw. 3 $\varphi_n \overset{E}{\rightrightarrows} \varphi$.
Korzystając z Tw. 6 otrzymujemy, że $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) =$
$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x_0) = g(x_0)$. ■

Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 8 Jeżeli

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

Tw. 8 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na E,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na E,