Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można całkować szereg wyraz po wyrazie.

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, wyrazy szeregu ciągłe $\Rightarrow$ suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$ jest dobrze określona;

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, wyrazy szeregu ciągłe $\Rightarrow$ suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$ jest dobrze określona;
- $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, k \geq N_0\ \forall\, x \in [a, b]\ \left|\sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \varepsilon$ i stąd

$$\left|\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx - \sum\limits_{n=0}^{k-1} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b \sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon(b-a).\ \blacksquare$$