Wnioski z Tw. 2, 6, 7

Tw. 9 Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest różniczkowalna na $[a, b]$,

szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w przynajmniej jednym punkcie $c \in [a, b]$

oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to suma szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją różniczkowalną na $[a, b]$ oraz $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\ \forall\, x \in [a, b]$.

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można różniczkować szereg wyraz po wyrazie.

Tw. 10

Jeżeli

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$

Tw. 10

Jeżeli

$\forall\, n$ funkcja $f_n(x)$ jest ciągła na $[a, b]$,

a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$,

to $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$

Innymi słowy, przy powyższych założeniach można całkować szereg wyraz po wyrazie.

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, wyrazy szeregu ciągłe $\Rightarrow$ suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$ jest dobrze określona;

Tw. 10 - Dowód:

- $\forall\, n \int\limits_a^b f_n(x)\, dx$ dobrze określona, bo $f_n(x)$ ciągła na $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$, wyrazy szeregu ciągłe $\Rightarrow$ suma tego szeregu jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx$ jest dobrze określona;
- $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, k \geq N_0\ \forall\, x \in [a, b]\ \left| \sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$ i stąd
$$\left| \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx - \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_a^b \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)\, dx \right| \leq$$
$$\leq \varepsilon(b - a). \blacksquare$$