Komputerowa analiza szeregów czasowych
2024/2025

Lista 4

1. Rozpatrzmy model MA(2) dany następującym wzorem:

$$X_t = Z_t + aZ_{t-1} + bZ_{t-2},$$

gdzie $\{Z_t\}_{t\in Z}$ jest ciągiem iid o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Sprawdź, czy ten szereg czasowy jest stacjonarny w słabym sensie.

2. Rozpatrzmy szereg czasowy dany następującym wzorem

$$X_t = sin(t * 0.2) + Z_t,$$

gdzie $\{Z_t\}_{t\in Z}$ jest ciągiem iid o rozkładzie $N(0, 1)$. Wyznacz funkcję autokowariancji oraz autokorelacji szeregu $\{X_t\}_{t\in Z}$. Czy jest to szereg stacjonarny w słabym sensie?

3. Rozpatrzmy szereg czasowy $\{X_t\}_{t\in Z}$ będący ciagiem iid $N(0, 2)$. Korzystając z wykładu, porównaj teoretyczną funckcję autokowariancji z jej empirycznym odpowiednikiem, czyli empiryczną funkcją autokowariancji, którą dla wektora $x_1, ..., x_n$ bądącego realizacją szeregu stacjonarnego w słabym sensie, wyznaczamy ze wzoru:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-h}(x_i - \overline{x})(x_{i+h} - \overline{x}), \tag{1}$$

gdzie $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Wyniki wykonaj dla różnych długości prób n. Zaproponuj własną metodę oceny jakości estymatora na podstawie danych symulowanych.

4. Dla modelu MA(1) zdefiniowanego na wykładzie porównaj teoretyczną i empiryczną funkcję autokorelacji.

5. Wykorzystując jeden wybrany estymator odporny z publikacji podanej poniżej porównaj wyniki dla estymatora danego równaniem (1) i wybranego estymatora odpornego. W tym celu do analizy wykorzystaj model MA(1) z dodatkowym szumem dany wzorem:

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} + \xi_t, \tag{2}$$

gdzie $\{Z_t\}_{t\in Z}$ to ciąg iid $N(0,1)$, a $\{\xi_t\}_{t\in Z}$ to ciąg iid taki, że $P(\xi_t = a) = P(\xi_t = -a) = p/2$ oraz $P(\xi_t = 0) = 1 - p$, który jest niezależny od $\{Z_t\}$. Sprawdź poprawność estymatorów w zależnosci od a oraz p dla wybranych długości prób z modelu (2). Zaproponuj metodę oceny jakości uzyskanych wyników.

[1] Alexander Durre, Roland Fried and Tobias Liboschik, Robust estimation of (partial) autocorrelation, WIREs Comput Stat 2015, 7:205-222. $doi : 10.1002/wics.1351$