zadanie 2 $\quad Y_i = B_1 x_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2 \ldots$

$$S(B_1, X_i, \ldots X_n, y_i, \ldots y_n) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - B_1 x_i)^2$$

$$\frac{dS}{d\beta} = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - B_1 x_i)(-x_i)$$

$$\frac{dS}{d\beta} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - B_1 x_i)$$

$$0 = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - B_1 x_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - B_1 x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 B_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$$

$$\boxed{\hat{B}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

b) $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \underline{y_i} = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (\beta_1 x_i + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$E(\quad) = 0$

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \underline{\underline{\beta_1}}$$

jest nieobciążony

c) $$\operatorname{Var}\hat{\beta}_1 = \operatorname{Var}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2\beta_1 + x_i\varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \cdot \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\beta_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \cdot \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \operatorname{Var}\varepsilon_i =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma^2 = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

d) $Y_i \sim N(\beta_1 x_i, \sigma)$

$$L(\beta_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_1 x_i)^2\right\}$$

$$\ln(L(\beta_1)) = n\ln 1 - n\ln(\sqrt{2\pi\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 x_i)^2$$

$$\frac{d\ln(L(\beta_1))}{d\beta_1} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i(Y_i - \beta_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(Y_1 - \beta_1 x_i) = 0$$

takie samo równanie, jak w a), więc $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1$

zadanie 5

- założmy 2 scenariusze:
  1) punkt zmiany w połowie danych
  2) punkt zmiany w $\lfloor 30\% \cdot N \rfloor$, gdzie N to długość próbki
- weźmy $N = 100$, $N = 1000$
- rozważmy następujące przypadki:

$$X_i \overset{d}{=} \begin{cases} X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), & i \leq n^* \\ Y \sim \mathcal{N}(0, 1), & i > n^* \end{cases}$$

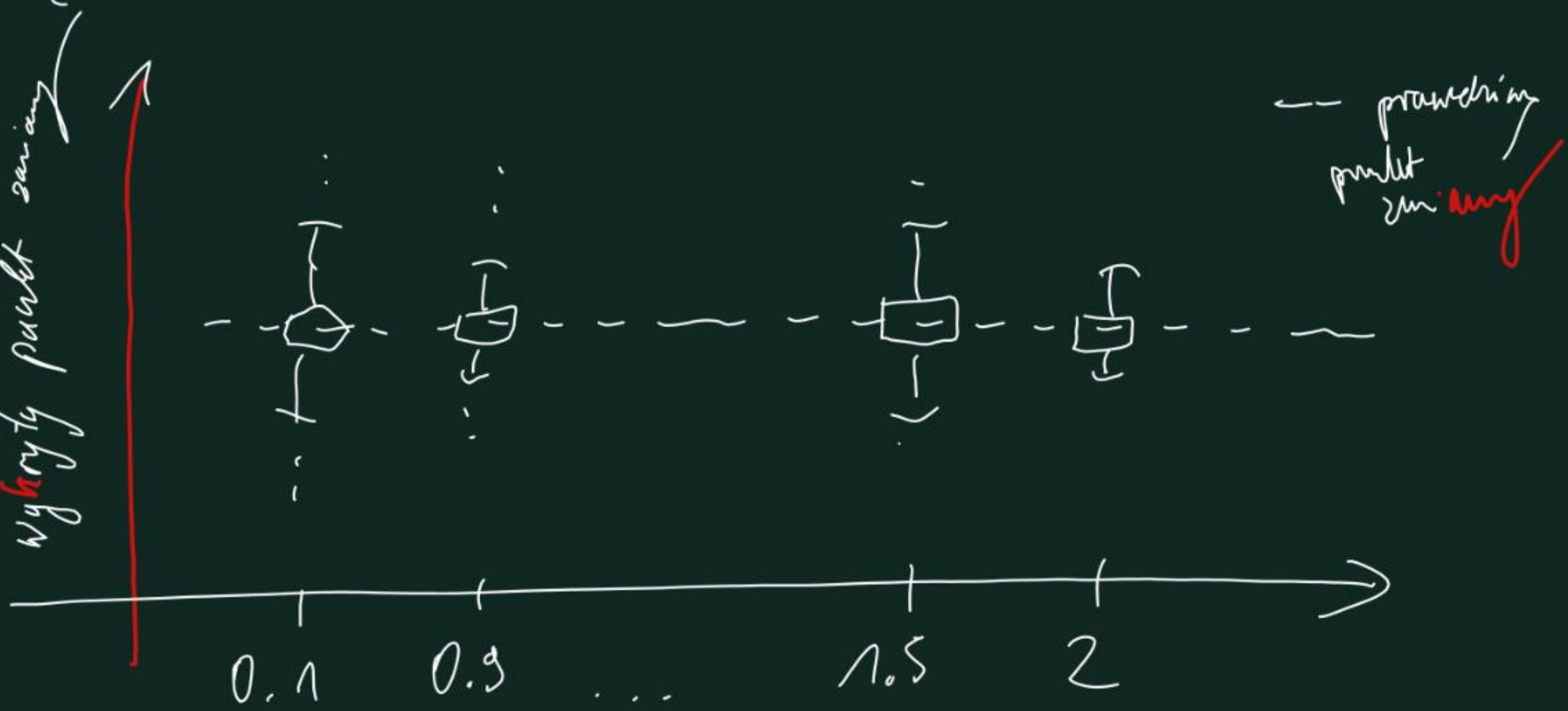
$n^* \leftarrow$ punkt zmiany; $\sigma \in \{0.1, 0.5, 0.9, 1.1, 1.5, 2, 3\}$

Oczekiwany wynik dla wybranego N i wybranego n^*

($n^* = \lfloor 0.3 \cdot N \rfloor$ lub $n^* = \lfloor 0.5 \cdot N \rfloor$)

Liczba MC

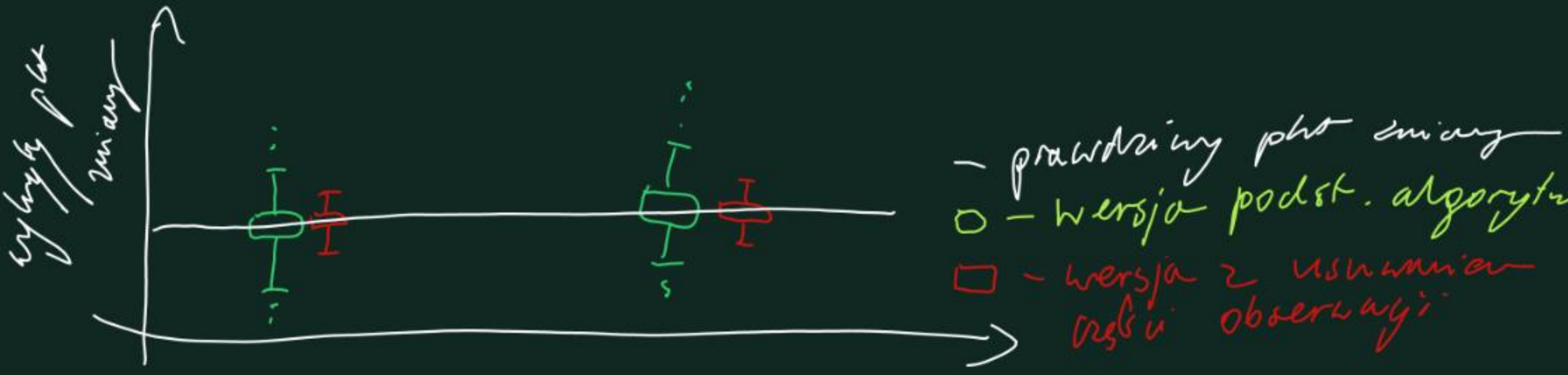
→ najlepiej ≥500, ale może być 100



II część zadania (dla chętnych)

→ implementacja testu dot. istotności zmiany
(cz. II w instrukcji)

przykładowy wynik ($N = 1000$, $n^* = \lfloor 0.5 \cdot N \rfloor$)



iloraz odchyleń std.

\+ print ile obs. usunięto

$N = 1000$

$n^* = \lfloor 0.5N \rfloor$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$ (u nas $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 1$

bierzemy takie same wart. jak w 1 części zadania)

— zaakceptowane prop. zmiany

— odrzucone prop. zmiany