

# Komputerowa analiza szeregów czasowych

## 2024/2025

### Lista 2

1. Rozpatrzmy klasyczny model regresji dany następującym wzorem:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $\epsilon_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie t Studenta z  $\nu > 2$  stopniami swobody. Za pomocą symulacji Monte Carlo (przy różnych wielkościach  $\nu$  i różnych wielkościach  $n$ ) wyznacz empiryczne odpowiedniki dla wartości oczekiwanej i wariancji estymatorów  $\hat{\beta}_0$  oraz  $\hat{\beta}_1$  i porównaj je z wartościami teoretycznymi wyznaczonymi na wykładzie. Jak  $\nu$  i  $n$  wpływają na poprawność estymatorów? Te same analizy wykonaj przy założeniu rozkładu normalnego  $N(0, \sigma^2)$  zmiennych  $\epsilon_i$ . Tym razem sprawdź jak  $\sigma$  oraz  $n$  wpływają na poprawność estymatorów.

2. Rozpatrzmy model regresji dany następującym wzorem:

$$Y_i = \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $\epsilon_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  są niezależnymi błędami o rozkładzie  $N(0, \sigma)$ .

- Wyznacz postać estymatora  $\hat{\beta}_1$  współczynnika kierunkowego metodą najmniejszych kwadratów.
- Sprawdź czy wyznaczony estymator jest estymatorem nieobciążonym parametru  $\beta_1$ .
- Wyznacz wariancję estymatora.
- Sprawdź, czy estymator MNK ma taką samą postać jak estymator wyznaczony metodą największej wiarygodności.
- Za pomocą symulacji Monte Carlo (przy różnych wielkościach  $\sigma$  i różnych wielkościach  $n$ ) wyznacz empiryczne odpowiedniki dla wartości oczekiwanej i wariancji estymatora  $\hat{\beta}_1$ . Jak  $\sigma$  i  $n$  wpływają na poprawność estymatora?

3. W modelu regresji

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

gdzie  $\epsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi  $N(0, \sigma)$ , za pomocą metody Monte Carlo sprawdź rozkład estymatorów  $\hat{\beta}_0$  oraz  $\hat{\beta}_1$  i porównaj go z rozkładem teoretycznym przy ustalonej wielkości  $\sigma$ .

4. Wykorzystując tą samą metodę co w poprzednim zadaniu, sprawdź rozkłady studentyzowanych estymatorów  $\hat{\beta}_0$  oraz  $\hat{\beta}_1$  i porównaj je z rozkładami teoretycznymi.
5. Dla danych wysymulowanych zastosuj metodę znajdowania punktu zmiany reżimu opisaną w pracy: Gajda Janusz, Sikora Grzegorz, Wyłomańska Agnieszka: Regime variance testing - a quantile approach, Acta Phys. Polon B 44(5), 1015-1035, 2013.  
Sprawdź poprawność metody wykorzystując symulacje Monte Carlo.