Ομάδα Ασκήσεων 1

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 1

(α) $A' \cap B \cap C'$

(β) $A \cap B \cap C'$

(γ) $A \cup B \cup C$

(δ) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(ε) $A \cap B \cap C$

(ς') $A' \cap B' \cap C'$

(ζ') $(A' \cap B' \cap C') \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C')$

(η') $A' \cup B' \cup C'$

Άσκηση 2

(α') Αφού οι μαρκαδόροι είναι διαφορετικοί ας ονομάσουμε M_1, M_2 τους μπλε και K_1, K_2 τους κόκκινους. Άρα τα πιθανά ενδεχόμενα είναι:

$$\Omega = \{K_1K_2M_1, K_2K_1M_1, K_1K_2M_2, K_2K_1M_2, K_1M_1, K_2M_1, K_1M_2, K_2M_2, M_1, M_2\}$$

(β') Έστω M οι μαρκαδόροι που γράφουν μπλε και K αυτοί που γράφουν κόκκινο. Τότε:

$$\Omega = \{KKM, KM, M\}$$

(γ') Όπως στο (α') ερώτημα έχουμε M_1, M_2 τους μπλε και K_1, K_2 τους κόκκινους. Θα είναι:

$$\Omega = \{K_1K_2M_1M_2, K_1K_2M_2M_1, K_2K_1M_1M_2, K_2K_1M_2M_1, K_1M_1M_2, K_1M_2M_1, K_2M_1M_2, K_2M_2M_1, M_1M_2, M_2M_1, K_1M_1K_2M_2, K_1M_2K_2M_1, K_2M_1K_1M_2, K_2M_2K_1M_1, M_1K_1K_2M_2, M_1K_2K_1M_2, M_2K_1K_2M_1, M_2K_2K_1M_1, M_1K_1M_2, M_1K_2M_2, M_2K_1M_1, M_2K_2M_1\}$$

(δ') Όπως στο (β') ερώτημα έστω Μ οι μπλε φαρκαδόροι και Κ οι κόκκινοι. Είναι:

$\Omega = \{KKMM, KMKM, KMM, MM, MKKM, MKM\}$

Άσκηση 3

(α') $\Omega = \{11, 21, 22, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 55,$
$61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

όπου ο πρώτος αριθμός δείχνει την ζαριά (N1) και ο δεύτερος την επιλογή (N2). π.χ 43 = 4 ζαριά κ' 3 επιλογή

(β') $A = \{41, 42, 43, 44\}$

(γ') $B = \{33, 43, 53, 63\}$

(δ') $C = \{66\}$

Άσκηση 4

(α') $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33,$
$34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56,$
$61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

όπου ο πρώτος αριθμός είναι η πρώτη ζαριά και ο δεύτερος, η δεύτερη.

(β') $A = \{11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53,$
$55, 62, 64, 66\}$

δηλαδή όλα τα αποτελέσματα που δεν είναι μονός-ζυγός ή ζυγός-μονός.

(γ') $B = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}$

(δ΄) Το B είναι υποσύνολο του A ($B \subseteq A$) επειδή το A περιέχει όλα τα ζεύγη μονών και όλα τα ζεύγη ζυγών (αφού μονός + μονός ή ζυγός + ζυγός δίνει ζυγό άθροισμα), ενώ το B περιέχει απλά όλα τα ζυγά ζεύγη.

(ε΄) Το A αποτελείται από όλα τα μονά και ζυγά ζεύγη. Το B αποτελείται από όλα τα ζυγά ζεύγη. Άρα το συμπλήρωμα του B (B') αποτελείται από όλα τα ζεύγη του δειγματικού χώρου Ω, που δεν είναι ζυγά. Άρα τα ζεύγη μονών και τα ζεύγη μονός-ζυγός, ζυγός-μονός. Η τομή $A \cap B'$ περιλαμβάνει τα κοινά στοιχεία του A και του B', που είναι φυσικά τα μονά ζεύγη.
$A \cap B' = \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$

(ς΄) $C = \{12, 21, 23, 32, 34, 43, 45, 54, 56, 65\}$
Το A αποτελείται από όλα τα μονά και ζυγά ζεύγη, ενώ το C περιέχει ζεύγη μονός-ζυγός και ζυγός-μονός. Άρα δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο που είναι και επόμενο αφού δύο ακέραιοι θετικοί αριθμοί διαφέρουν κατά 1 αν και μόνο αν είναι ο ένας ζυγός και ο άλλος μονός. Έστω ότι έχουμε έναν ζυγό (μονό), ο επόμενος ζυγός (μονός) θα διαφέρει 2 με του πρώτο. Άρα
$A \cap C = \emptyset$ δηλαδή είναι ξένα μεταξύ τους.

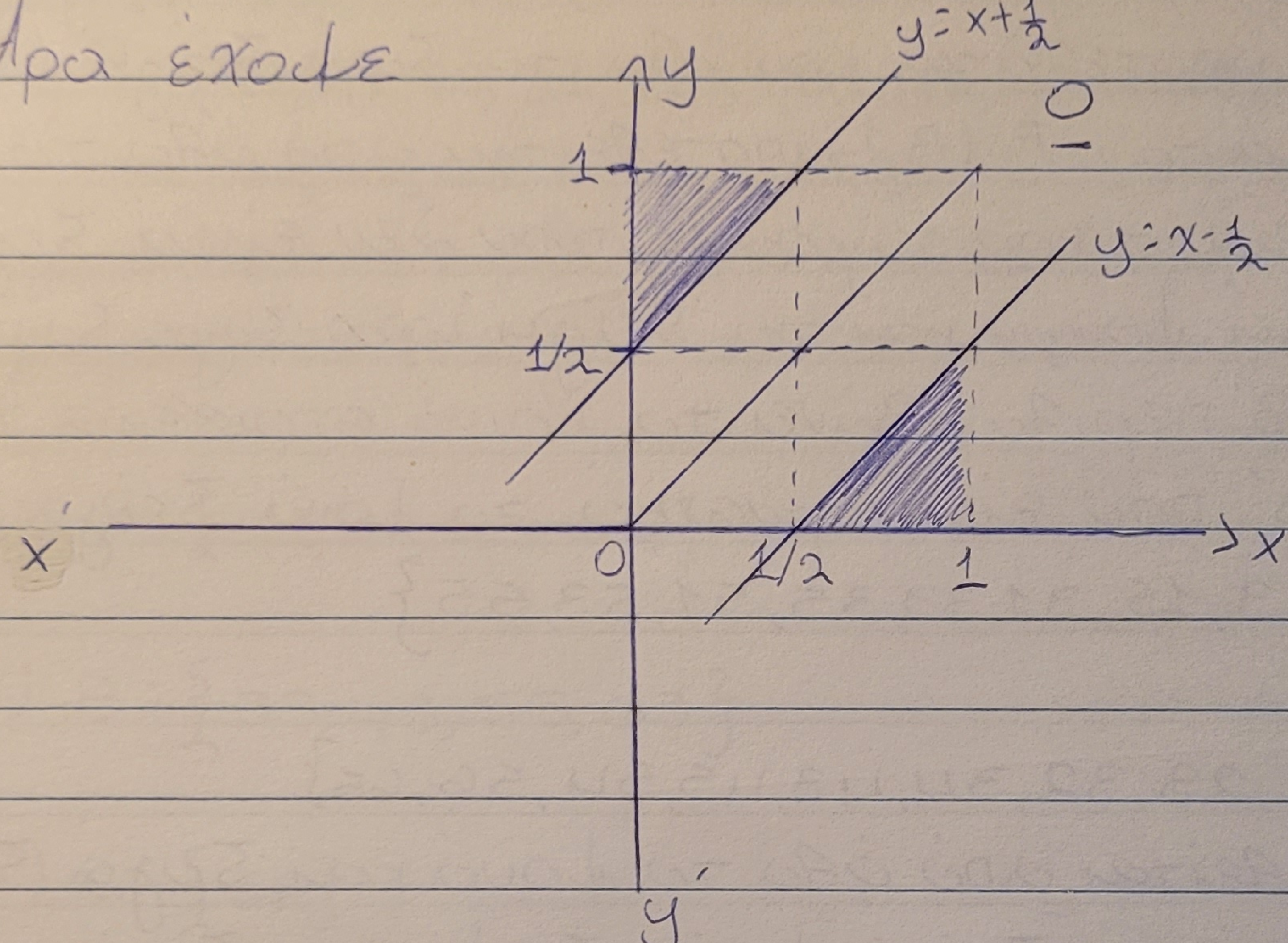
Άσκηση 5
Έστω $A = [0,1]$. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{[0,1] \times [0,1]\}$ δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο του $[0,1] \times [0,1]$, επειδή πρακτικά το πείραμα έχει ως αποτέλεσμα δύο αριθμούς, έστω x, y που ανήκουν στο $[0,1]$. Ψάχνουμε την πιθανότητα οι αριθμοί να διαφέρουν κατά απόλυτη τιμή περισσότερο από $\frac{1}{2}$. Άρα θέλουμε

$|x-y|>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-y>\frac{1}{2}$ ή $x-y<-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>y+\frac{1}{2}$ ή $x<y-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y<x-\frac{1}{2}$ ή $y>x+\frac{1}{2}$

Άρα έχουμε



Το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων τριγώνων είναι:

$\frac{B\cdot υ}{2}+\frac{B\cdot υ}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{4}}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

Άρα έστω E το ενδεχόμενο τ.ω $|x-y|>\frac{1}{2}$ τότε

$P(E)=\frac{1}{4}=25\%$

Άσκηση 6

$2P(A)=3P(B)=4P(AB)$, $P(A'B)=0.05$

α) $P(A'B)=P(B)-P(AB) \Leftrightarrow P(AB)=P(B)-P(A'B)$ (1)

• $3P(B)=4P(AB) \Leftrightarrow 3P(B)\overset{(1)}{=}4(P(B)-P(A'B))$

$\Leftrightarrow 3P(B)=4P(B)-4P(A'B) \Leftrightarrow -P(B)=-4\cdot 0.05$

$\Leftrightarrow -P(B)=-0,2 \Leftrightarrow \boxed{P(B)=0,2}$

• $3P(B)=2P(A) \Leftrightarrow 2P(A)=3\cdot 0,2 \Leftrightarrow 2P(A)=0,6 \Leftrightarrow \boxed{P(A)=0,3}$

• (1) $P(AB)=P(B)-P(A'B)=0,2-0,05=0,15$, $\boxed{P(AB)=0,15}$

(B') • $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,2 - 0,15 = 0,35$

• $P(A'B') = P(\Omega) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0,3 - 0,2 + 0,15 = 0,65$

• $P(AB') = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,15 = 0,15$

• $P(AB' \cup A'B) = P(AB') + P(A'B) - P(AB' \cap A'B)$

$= P(AB') + P(A'B) - P((A - A \cap B) \cap (B - A \cap B))$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) - P(\emptyset)$

$= 0,3 - 0,15 + 0,2 - 0,15 - 0$

$= 0,2$

• $P(A \cup B') = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,15 = 0,05$

• $P(A' \cup B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,15 = 0,15$

Άσκηση 7

$\Omega = \{a, b, c\}$, $P(\{a, c\}) = \frac{5}{8}$ (1) $P(\{b, c\}) = \frac{7}{8}$ (2)

Τα αποτελέσματα είναι ξένα μεταξύ τους. Άρα:

$P(\{a, c\}) = P(\{a\} \cup \{c\}) = P(a) + P(c) \overset{(1)}{=} \frac{5}{8}$

$P(\{b, c\}) = P(\{b\} \cup \{c\}) = P(b) + P(c) \overset{(2)}{=} \frac{7}{8}$

$P(a) + P(c) = \frac{5}{8}$ (1) κ' $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(a) + P(b) + P(c) = 1$ (3)

$P(b) + P(c) = \frac{7}{8}$ (2)

(1) $P(c) = \frac{5}{8} - P(a)$ (5)

Από (1), (2) $\left.\begin{array}{l} P(a) + P(c) = \frac{5}{8} \; (-) \\ P(b) + P(c) = \frac{7}{8} \end{array}\right\} P(a) - P(b) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(b) = P(a) + \frac{1}{4}$ (4)

(4), (5)

(3) $P(a) + P(a) + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} - P(a) = 1 \Leftrightarrow P(a) = \frac{1}{8}$

(4) $P(b) = P(a) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(b) = \frac{3}{8}$

(5) $P(c) = \frac{5}{8} - P(a) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} \Rightarrow P(c) = \frac{1}{2}$

Άσκηση 8

(α') Έστω x, y, z οι ζαριές. Το ενδεχόμενο A αποτελείται από τα x, y, z τ.ω $x+y+z=9$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας το 9 μπορεί να αναπαρασταθεί:

$$\left.\begin{array}{ll} 9=3+3+3 & 1 \text{ τρόπος} \\ 9=4+3+2 & 6 \text{ τρόποι} \\ 9=4+4+1 & 3 \text{ τρόποι} \\ 9=5+2+2 & 3 \text{ τρόποι} \\ 9=5+3+1 & 6 \text{ τρόποι} \\ 9=6+2+1 & 6 \text{ τρόποι} \end{array}\right\} 25 \text{ τρόποι}$$

Το $3+3+3$ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν τρόπο, αφού αν αλλάξουν θέσεις οι αριθμοί θα παραμείνει $3+3+3$. Το $4+3+2$ μπορεί να αναπαρασταθεί με 6 διαφορετικούς τρόπους καθώς κάθε αριθμός είναι στην ίδια θέση 2 φορές όσο αλλάξουν θέση οι άλλοι δύο π.χ.

$4+3+2 \mid 4+2+3 \mid 2+4+3 \mid 3+4+2 \mid 3+2+4 \mid 2+3+4$

Το ίδιο ισχύει και για τους $5+3+1$ και $6+2+1$.
Τώρα, το $4+4+1$ που έχει δύο ίδιους αριθμούς θα αναπαρασταθεί με 3 διαφορετικούς τρόπους, αφού όταν τα ζάρια αλλάξουν θέση θα είναι πρακτικά το ίδιο αποτέλεσμα χωρίς να φαίνεται η αλλαγή. Το ίδιο ισχύει και για το $5+2+2$.

Άρα $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{25}{216}$

(β) Το ενδεχόμενο B αποτελείται από τα x, y, z τ.ω $x+y+z=10$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας το 10 μπορεί να αναπαρασταθεί:

$$\left.\begin{array}{ll} 10 = 1+3+6 & 6 \text{ τρόποι} \\ 10 = 6+2+2 & 3 \text{ τρόποι} \\ 10 = 1+4+5 & 6 \text{ τρόποι} \\ 10 = 2+3+5 & 6 \text{ τρόποι} \\ 10 = 4+3+3 & 3 \text{ τρόποι} \\ 10 = 4+4+2 & 3 \text{ τρόποι} \end{array}\right\} 27 \text{ τρόποι}$$

Ομοίως με το (α') ερώτημα όπου εμφανίζονται 3 διαφορετικοί αριθμοί (π.χ 1+3+6) η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με 6 διαφορετικούς τρόπους, όπου εμφανίζονται δύο ίδιοι (π.χ 6+2+2) η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με 3 διαφορετικούς τρόπους, ενώ δεν υπάρχει άθροισμα 3 ίδιων (με τα δεδομένα της άσκησης) που να δίνει 10.

Άρα $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}$

Άσκηση 9

$P(A\cap B) \geq P(A)+P(B)-1$

Ξέρουμε ότι $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (1) Άρα,

$P(A\cap B) \geq P(A)+P(B)-1$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-1 \leq P(A\cap B)$

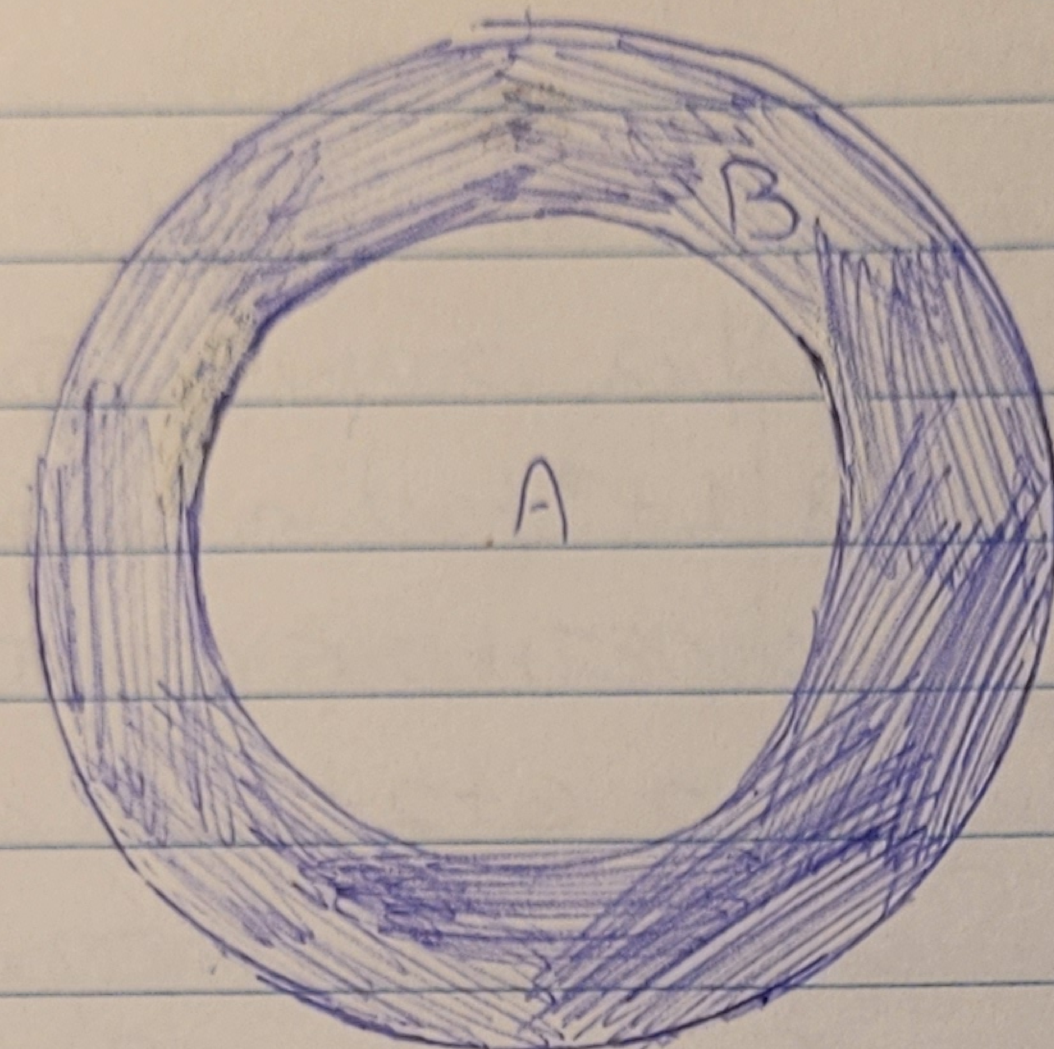
$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B) \leq 1$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} P(A\cup B) \leq 1$ το οποίο ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν τα ενδεχόμενα A, B είναι τα μοναδικά και καλύπτουν όλο τον δειγματικό χώρο, ενώ η ανισότητα ισχύει όταν τα A, B δεν καλύπτουν όλο τον δειγματικό χώρο αφού το 1 αναπαριστά το $P(\Omega)$ και το $P(\Omega)$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχομένων που το απαρτίζουν. (αν αυτά είναι ξένα, διαφορετικά αφαιρείται η τομή τους)

Άσκηση 10

$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$

Το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B, δηλαδή το A περιέχεται όλο μέσα στο B, με $A \neq B$. Μια γενική αναπαράσταση είναι:



Άρα προφανώς $A' \cap B \neq \emptyset$. Στην πραγματικότητα, το $A' \cap B$ είναι το κομμάτι του B που δεν συμπεριλαμβάνει το A, το γραμμοσκιασμένο μέρος. Άρα

$B = A \cup (A' \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cup (A' \cap B))$

$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$

Σε αυτό το σημείο θα ήταν αναγκαίο να πούμε ότι τα A, $A' \cap B$ είναι ξένα μεταξύ τους. Οπότε,

$P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$

$\Rightarrow P(B) - P(A) = P(A' \cap B)$.

Το $P(A' \cap B) \geq 0$ ως πιθανότητα, άρα η διαφορά $P(B) - P(A)$ είναι μη αρνητική. Ωστόσο, όπως έχουμε προαναφέρει $A' \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A' \cap B) \neq P(\emptyset)$

$\Rightarrow P(A' \cap B) \neq 0$

Άρα $P(A' \cap B) > 0$ και $P(B) - P(A)$ είναι θετικό και μάλιστα μικρότερο του 1.

$P(B) - P(A) > 0$

$\Rightarrow P(B) > P(A)$

Άρα

$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$