Ομάδα Ασκήσεων 2

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 8

$F \to$ γν. μονότονη , $F: A \to \mathbb{R}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

$F(x_1) < F(x_2)$ ή $F(x_1) > F(x_2)$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $F(x_1) \neq F(x_2)$

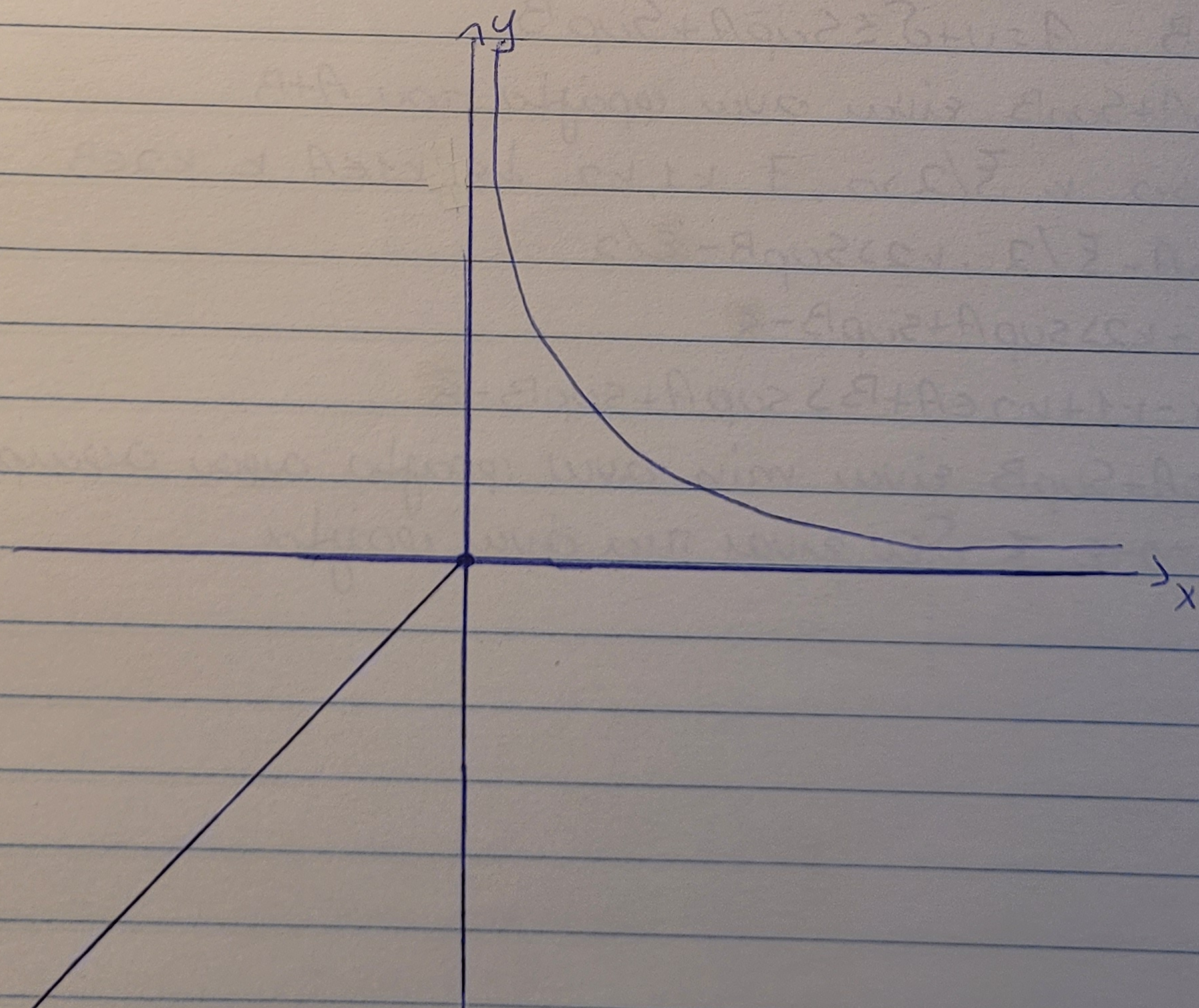
Άρα η F είναι 1-1

Αν η F είναι 1-1 τότε η F δεν είναι αναγκαστικά γν. μονότονη

Η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$ είναι 1-1

αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη



Άσκηση 9

i) Η f είναι αύξουσα άρα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ $(f: A \to \mathbb{R})$ με $x_1 < x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) τότε $f(x_1) \le f(x_2)$
Η g είναι φθίνουσα άρα για οποιαδήποτε $k_1, k_2 \in B$ $(g: B \to \mathbb{R})$ με $k_1 < k_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) τότε $g(k_1) \ge g(k_2)$

Έστω ότι ορίζονται οι fog, gof

· $fog(x) = f(g(x))$

· $gof(x) = g(f(x))$

Αν $\lambda_1 < \lambda_2$, η g είναι φθίνουσα άρα $g(\lambda_1) \ge g(\lambda_2)$ κ' η f είναι αύξουσα άρα $f(\lambda_1) \le f(\lambda_2)$

Άρα $fog(x) = f(g(x))$,

$\lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow g(\lambda_1) \ge g(\lambda_2) \Leftrightarrow f(g(\lambda_1)) \ge f(g(\lambda_2)) \Leftrightarrow fog(\lambda_1) \ge fog(\lambda_2)$

Άρα η fog είναι φθίνουσα

Αν $\lambda_1 < \lambda_2$, η f είναι αύξουσα άρα $f(\lambda_1) \le f(\lambda_2)$ κ' η g είναι φθίνουσα άρα $g(\lambda_1) \ge g(\lambda_2)$

Άρα $gof(x) = g(f(x))$,

$\lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow f(\lambda_1) \le f(\lambda_2) \Leftrightarrow g(f(\lambda_1)) \ge g(f(\lambda_2)) \Leftrightarrow gof(\lambda_1) \ge gof(\lambda_2)$

Άρα η gof είναι φθίνουσα

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
Η g είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα Διάστημα κ όταν για οποιαδήποτε v_1, v_2 με $v_1 < v_2$ ισχύει $g(v_1) > g(v_2)$

Έστω ότι ορίζονται οι fog, gof

· $fog(x) = f(g(x))$

· $gof(x) = g(f(x))$

Αν $\lambda_1 < \lambda_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) η g είναι γν. φθίνουσα άρα $g(\lambda_1) > g(\lambda_2)$ κ' η f γν. αύξουσα άρα $f(\lambda_1) < f(\lambda_2)$

$\lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow g(\lambda_1) > g(\lambda_2) \Leftrightarrow f(g(\lambda_1)) > f(g(\lambda_2)) \Leftrightarrow fog(\lambda_1) > fog(\lambda_2)$

Άρα η fog είναι γν. φθίνουσα

Αν $\lambda_1<\lambda_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) η f είναι γν. αύξουσα άρα $f(\lambda_1)<f(\lambda_2)$ κ' η g είναι γν. φθίνουσα άρα $g(\lambda_1)>g(\lambda_2)$

$\lambda_1<\lambda_2 \Leftrightarrow f(\lambda_1)<f(\lambda_2) \Leftrightarrow g(f(\lambda_1))>g(f(\lambda_2)) \Leftrightarrow g\circ f(\lambda_1)>g\circ f(\lambda_2)$

Άρα η $g\circ f$ είναι γν. φθίνουσα

Άσκηση 10

$f: A\to\mathbb{R}$ & $B\subseteq A$, $x_1,x_2\in B$

Μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ ονομάζεται γν. φθίνουσα συνάρτηση όταν $\forall x$ ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού του, όσο αυτό αυξάνεται τότε η τιμή της συνάρτησης μειώνεται.

Άρα $\forall\, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Αν η f ξεκινάει με μεγάλη τιμή και στην πορεία όσο το x μεγαλώνει η τιμή αυτή μειώνεται τότε:

$f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$

Άρα $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Άσκηση 11

$\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$f: A\to\mathbb{R}$

a) Μια συνάρτηση ονομάζεται περιττή όταν $\forall x\in A, -x\in A$ κ' $f(-x)=-f(x)$ κ' άρτια όταν $\forall x\in A, -x\in A$ κ' $f(-x)=f(x)$

Η $\sinh x$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$

Η $\cosh x$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$

Η $\tanh x$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$

Η $\coth x$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^*$ αφού $e^{2x}-1=0$ για $x=0$

Άρα για όλες $\forall x\in A, -x\in A$

$\cdot \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{(e^{x} - e^{-x})}{2} = -\sinh(x)$

$\cdot \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$

$\cdot \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$

$\cdot \coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -\coth(x)$

Άρα οι $\sinh(x), \coth(x), \tanh(x)$ είναι περιττές και η $\cosh(x)$ είναι άρτια

B) i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{(e^{x} + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} + 2e^{x} \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{(e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x})}{4} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{4} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ που ισχύει

ii) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$

$\Leftrightarrow e^{x}e^{y} - \frac{1}{e^{x}e^{y}} = \frac{(e^{x} - e^{-x})(e^{y} + e^{-y})}{2} + \frac{(e^{x} + e^{-x})(e^{y} - e^{-y})}{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{x}e^{y} - \frac{1}{e^{x}e^{y}}\right) = e^{x}e^{y} - \frac{e^{y}}{e^{x}} + \frac{e^{x}}{e^{y}} - \frac{1}{e^{x}e^{y}} + e^{x}e^{y} - \frac{e^{x}}{e^{y}} + \frac{e^{y}}{e^{x}} - \frac{1}{e^{x}e^{y}}$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{x}e^{y} - \frac{1}{e^{x}e^{y}}\right) = 2e^{x}e^{y} - 2 \cdot \frac{1}{e^{x}e^{y}}$

$\Leftrightarrow e^{x}e^{y} - \frac{1}{e^{x}e^{y}} = e^{x} \cdot e^{y} - \frac{1}{e^{x}e^{y}}$ που ισχύει

iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(e^{x}e^{y} + \frac{1}{e^{x}e^{y}}\right) = (e^{x} + e^{-x})(e^{y} + e^{-y}) + (e^{x} - e^{-x})(e^{y} - e^{-y})$

$\Leftrightarrow 2\left(e^x e^y + \frac{1}{e^x e^y}\right) = (e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})$

$\Leftrightarrow 2\left(e^x e^y + \frac{1}{e^x e^y}\right) = e^x e^y + \frac{e^x}{e^y} + \frac{e^y}{e^x} + \frac{1}{e^x e^y} + e^x e^y - \frac{e^x}{e^y} - \frac{e^y}{e^x} + \frac{1}{e^x e^y}$

$\Leftrightarrow 2\left(e^x e^y + \frac{1}{e^x e^y}\right) = 2e^x e^y + \frac{2}{e^x e^y}$ που ισχύει

iv) • $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}} = (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$

$\Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}} = e^{2x} + \frac{e^x}{e^x} - \frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}} = e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}$ που ισχύει

• $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$

$\Leftrightarrow 2(e^{2x} + e^{-2x}) = e^{2x} + 2\frac{e^x}{e^x} + e^{-2x} + e^{2x} - 2\frac{e^x}{e^x} + e^{-2x}$

$\Leftrightarrow 2(e^{2x} + e^{-2x}) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$ που ισχύει

vi) • $\sinh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 - \tanh^2(x)}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\frac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}$ $\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\frac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{\frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\frac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{\frac{1}{\cosh^2(x)}}$ $\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\sinh(x)\cosh(x)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{-2x} = (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow e^{2x} - e^{-2x} = e^{2x} - \frac{e^x}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} - e^{-2x}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{-2x} = e^{2x} - e^{-2x}$ που ισχύει

• $\cosh(2x) = \frac{1+\tanh^2(x)}{1-\tanh^2(x)}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \frac{1+\frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}{1-\frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \frac{\frac{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}{\frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \cosh^2(x)+\sinh^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} \Leftrightarrow 2(e^{2x}+e^{-2x}) = e^{2x}+\frac{2e^x}{e^x}+e^{-2x}+e^{2x}-\frac{2e^x}{e^x}+e^{-2x}$$

$\Leftrightarrow 2(e^{2x}+e^{-2x}) = 2e^{2x}+2e^{-2x}$ που ισχύει

• $\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)} \Leftrightarrow \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)} = \frac{2\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{1+\frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)} = \frac{2\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{\frac{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}}{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}} = \frac{2\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \frac{4(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{2(e^{2x}+\frac{2e^x}{e^x}+e^{-2x}+e^{2x}-\frac{2e^x}{e^x}+e^{-2x})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \frac{2(e^{2x}+e^xe^{-x}-e^{-x}e^x-e^{-2x})}{2e^{2x}+2e^{-2x}}$$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ που ισχύει

Άσκηση 12

Η συνάρτηση Dirichlet είναι μια μη σταθερή συνάρτηση που έχει άπειρες, αυθαίρετα μικρές περιόδους. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει περίοδος $p\in(0,\varepsilon)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$