Ομάδα ασκήσεων 6 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 36

i) $\sqrt[4]{17}$

Έστω $x_0=16$ (κοντά στο 17), $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $f(x_0)=2$

$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ κ' $f'(x_0)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(2^4)^3}}=\frac{1}{4\cdot 2^3}=\frac{1}{32}$

Για $x=17$, $\sqrt[4]{17}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=2+\frac{1}{32}(17-16)$

$=2+\frac{1}{32}=\frac{64}{32}+\frac{1}{32}=\frac{65}{32}\cong 2{,}03125$

Άρα $\sqrt[4]{17}\simeq 2{,}03125$

Με υπολογιστή: $\sqrt[4]{17}\simeq 2{,}03054$

Το σφάλμα $E(x)=0{,}00071$

ii) $\tan(-0{,}02)$

Έστω $x_0=0$ (κοντά στο $-0{,}02$), $f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $f(x_0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ κ' $f'(x_0)=1$

Για $x=-0{,}02$, $\tan(-0{,}02)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0+1\cdot(-0{,}02-0)$

$=-0{,}02$

Άρα $\tan(-0{,}02)\simeq -0{,}02$

Με υπολογιστή: $\tan(-0{,}02)\simeq -0{,}0200027$

Το σφάλμα $E(x)=-0{,}0000027$

iii) $\cos(0{,}03)$

Έστω $x_0=0$ (κοντά στο $0{,}03$), $f(x)=\cos(x)$, $f(x_0)=1$

$f'(x)=-\sin(x)$ κ' $f'(x_0)=0$

Για $x=0{,}03$, $\cos(0{,}03)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=1+0=1$

Άρα $\cos(0{,}03)\simeq 1$

Με υπολογιστή: $\cos(0{,}03)\simeq 0{,}99955$

Το σφάλμα $E(x)=-0{,}00045$

Άσκηση 37

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{|\sin(x)|}$$

• $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0^+}\overbrace{\frac{\cancel{x}}{\cancel{\sin x}}}^{1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\cos(x)}=\sqrt{2}$$

• $$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot\sqrt{1+\cos(x)}}{-\sin(x)}=\lim_{x\to 0^-}\overbrace{-\frac{\cancel{x}}{\cancel{\sin(x)}}}^{-1}\cdot\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1+\cos(x)}=-\sqrt{2}$$

Αφού $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

το $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ δεν υπάρχει

Άσκηση 38

Άρα $\forall\, x_0, x_1\in\mathbb{R},\ \forall\, \vartheta\in[0,1]$

$$f((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)\leq(1-\vartheta)f(x_0)+\vartheta f(x_1)\quad(1)$$

αφού $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(ax+b)\quad, a,b\in\mathbb{R}$

$(1)\ f((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)\leq(1-\vartheta)f(x_0)+\vartheta f(x_1)$

$\Rightarrow g((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)=f(a((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)+b)$

$\Rightarrow g((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)=f((1-\vartheta)(ax_0+b)+\vartheta(ax_1+b))$

$\Rightarrow g((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)\overset{(1)}{\leq}(1-\vartheta)f(ax_0+b)+\vartheta f(ax_1+b)$

$\Rightarrow g((1-\vartheta)x_0+\vartheta x_1)\leq(1-\vartheta)g(x_0)+\vartheta g(x_1)$

Άρα η g είναι κυρτή

Άσκηση 39

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές

g: αύξουσα άρα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας

• $g \circ f(x) = g(f(x))$ (1)

Έστω $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ κ' $\vartheta \in [0,1]$

(1) $g \circ f((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1) = g((1-\vartheta)f(x_0) + \vartheta f(x_1))$ (2)

· Η f είναι κυρτή άρα

$f((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1) \leq (1-\vartheta)f(x_0) + \vartheta f(x_1)$

κ' η g είναι αύξουσα άρα:

$g(f((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1)) \leq g((1-\vartheta)f(x_0) + \vartheta f(x_1))$

· Η g είναι κυρτή άρα:

$g((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1) \leq (1-\vartheta)g(x_0) + \vartheta g(x_1)$

Άρα:

$g(f((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1)) \leq (1-\vartheta)g(f(x_0)) + \vartheta g(f(x_1))$

$\Rightarrow g \circ f((1-\vartheta)x_0 + \vartheta x_1) \leq (1-\vartheta) g \circ f(x_0) + \vartheta g \circ f(x_1)$

Άρα η $g \circ f$ είναι κυρτή