ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2021-2022

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:

   (α΄) Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα κεφάλαιο του βιβλίου, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 5-10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.

   (β΄) Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.

   (γ΄) Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.

   (δ΄) Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.

   (ε΄) Αρκετές από τις ασκήσεις είναι αρκετά δύσκολες. Η τελική εξέταση θα είναι πιο βατή από αυτές.

   (ς΄) Διαβάζετε προσεκτικά τις λύσεις, όταν αυτές αναρτώνται.

2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:

   (α΄) Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.

   (β΄) Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.

   (γ΄) **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**

3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):

   (α΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας μόνο ηλεκτρονικά, μέσω του εργαλείου των Εργασιών του eclass.

   (β΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες ακόμα και αν η εγγραφή σας στο ΟΠΑ δεν έχει γίνει ακόμα, στέλνοντάς τες με μήνυμα email στον διδάσκοντα (αφορά φοιτητές εκ μεταγραφής και συναφείς περιπτώσεις.)

   (γ΄) Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα).

   (δ΄) Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα. (Οι φοιτητές των κατατακτηρίων και ορισμένοι προερχόμενοι από μεταγραφές δεν έχουν αριθμούς μητρώου. Για αυτούς αρκεί να υπάρχει το όνομά τους.)

   (ε΄) Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.

   (ς΄) Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

4. Ηλεκτρονική παράδοση:

   (α΄) Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και ΟΧΙ με αποστολή email στο διδάσκοντα, με εξαίρεση άτομα που δεν έχουν ολοκληρώσει την εγγραφή τους.

   (β΄) Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα (έστω και με κινητό τηλέφωνο) ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες κακής ποιότητας.

   (γ΄) Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.

   (δ΄) Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf). Ιδιαιτέρως, ΜΗΝ παραδίδετε αρχεία zip που περιέχουν πολλές φωτογραφίες.

   (ε΄) Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.

(ς΄) Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.

(ζ΄) Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:55μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**

(η΄) **ΔΕΝ ΘΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΘΟΥΝ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.**

5. Καθυστέρηση στην παράδοση:

   (α΄) Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΤΡΕΙΣ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδατε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i+1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1}, τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1}, εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.

   (β΄) Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

6. Βαθμολόγηση:

   (α΄) Η βαθμολόγηση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.

   (β΄) Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

7. Ανακοίνωση βαθμολογίας: Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης. Η βαθμολογία θα αναρτάται περιοδικά στα έγγραφα του eClass. Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, στείλτε ένα αναλυτικό mail στον διδάσκοντα.

8. Συνεργασία:

   (α΄) Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.

   (β΄) Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.

   (γ΄) Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν.** Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.

   (δ΄) Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιοτέρων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

9. Σημαντικά σχόλια:

   (α΄) Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.

   (β΄) Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.

   (γ΄) Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (*Ενδεχομένως* να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)

   (δ΄) Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.

   (ε΄) **Βλέπετε το mail που σας έχει δώσει το ΟΠΑ (xx@aueb.gr).** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Άθροισμα Minkowski)** Εκτός από την ένωση και την τομή, μπορούμε να ορίσουμε και το *άθροισμα* δύο συνόλων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το άθροισμα Minkowski $A + B$ δύο συνόλων A, B, ως το νέο σύνολο που αποτελείται από όλους τους αριθμούς z που μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα $a + b$ ενός αριθμού a που ανήκει στο A και ενός αριθμού b που ανήκει στο B. Πιο συνοπτικά:

$$A + B \triangleq \{z \in \mathbb{R} : z = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Με δεδομένο τον άνω ορισμό, προσδιορίστε τα ακόλουθα αθροίσματα Minkowski:

$$[0, 1] + [2, 3], \quad \mathbb{Z} + (0, 1), \quad \mathbb{Z} + [0, 1], \quad \mathbb{Q} + \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} + (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

2. **(Επιμεριστική Ιδιότητα)** Να αποδείξετε ότι η ένωση επιμερίζει την τομή και η τομή επιμερίζει την ένωση: για κάθε $A,\ B,\ C \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

3. **(Ιδιότητες πεδίων)** Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες για κάθε $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Εννοείται ότι αν για κάποιο αριθμό εμφανίζεται ο αντίστροφός του, ο αριθμός αυτός είναι διάφορος του 0. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τα Αξιώματα Πεδίου και ιδιότητες που έχουν αποδειχθεί στις σημειώσεις. Σε κάθε ισότητα ή ισοδυναμία που γράφετε, αναφέρετε το αξίωμα ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

   (α΄) Αν $xy = 0$, τότε είτε το $x = 0$, είτε το $y = 0$, είτε $x = y = 0$.

   (β΄) $x(y - z) = xy - xz$.

   (γ΄) $(x + y)/z = x/z + y/z$.

4. **(Εσωτερικό συνόλων)** Προσδιορίστε το εσωτερικό των παρακάτω συνόλων. Ποια από αυτά είναι ανοικτά;

$$(0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

5. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

$$[0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3},\ 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

6. **(Αυθαίρετα κοντινά σύνολα)** Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ έχουμε $x \leq y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$, τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

7. **(Supremum αθροίσματος Minkowski)** Έστω δύο μη κενά και φραγμένα άνω σύνολα A και B με suprema $\sup A$ και $\sup B$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα Minkowski $A + B$ έχει επίσης supremum, τον αριθμό $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2η Ομάδα Ασκήσεων

8. **(Γνήσια μονοτονία ⇒ 1-1)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη (δηλαδή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα), τότε είναι 1-1. Το αντίστροφο ισχύει; Δηλαδή, αν η f είναι $1 - 1$, τότε είναι και γνησίως μονότονη;

9. **(Φθίνουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η f είναι αύξουσα και η g είναι φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι φθίνουσες στα σύνολα όπου αυτές ορίζονται. Επαναλάβετε για την περίπτωση που οι δοσμένες συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες.

10. **(Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $B \subseteq A$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

11. **(Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις – ορισμός και βασικές ιδιότητες)** Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x$ και η υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, όλα με $x \in \mathbb{R}$, ορίζονται, αντιστοίχως, ως

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι οι $\sinh x,\ \tanh x,\ \coth x$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cosh x$ είναι άρτια.

(β΄) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\sinh 2x = \frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}, \quad \cosh 2x = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}, \quad \tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.$$

Παρατηρήστε ότι όλες οι άνω ιδιότητες είναι ανάλογες αντίστοιχων ιδιοτήτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέονται στενά, αλλά για να μελετήσουμε τη σχέση τους χρειαζόμαστε γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης.

(Δεν έχουμε ακόμα ορίσει αυστηρά την εκθετική συνάρτηση e^x. Αυτό θα γίνει σε κατοπινό κεφάλαιο. Επειδή όμως η συνάρτηση αυτή, καθώς και η αντίστροφή της, $\log x$, του φυσικού λογαρίθμου, σας είναι γνωστές από το Λύκειο, θα τις δούμε πριν τον αυστηρό ορισμό τους σε αυτήν και σε ορισμένες ακόμα ασκήσεις. Θα συμβολίζουμε, επίσης, την εκθετική συνάρτηση και ως $\exp x$.)

12. **(Αυθαίρετα μικρές περίοδοι)** Βρείτε μια μη σταθερή συνάρτηση $f(x)$ η οποία να έχει άπειρες, αυθαίρετα μικρές περιόδους. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$, να υπάρχει περίοδος $p \in (0, \epsilon)$.

3η Ομάδα Ασκήσεων

13. **(Πλευρικό όριο άρτιας συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, τότε και $\lim_{x\to 0} f(x) = L$.

14. **(Όριο ⇒ φράγμα)** Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = k > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανοικτή γειτονιά (a,b) περί το x_0, δηλαδή $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < x_0 < b$, και *θετικός* $P \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε

$$x \in (a,b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P,$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι πιο ισχυρό από το

$$x \in (a,b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0,$$

διότι στην πρώτη περίπτωση οι τιμές του x δεν μπορούν να πλησιάσουν αυθαίρετα κοντά στο 0. Διαισθητικά, η ιδιότητα μας λέει ότι αν σε κάποιο x_0 το όριο είναι θετικό, τότε υπάρχει μια γειτονιά γύρω από το x_0 στην οποία οι τιμές της συνάρτησης κρατιούνται μακρυά από το 0.

15. **(Όριο ενός supremum)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{h\to 0^+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}.$$

Παρατηρήστε οτι η συνάρτηση $g(h) = \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ της οποίας το όριο θέλουμε να υπολογίσουμε λαμβάνει, στη θέση h, το supremum όλων των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0,h)$.

16. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας ενδεχομένως άλλα γνωστά όρια, αλλά χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγωγίσεις:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x}}\right), \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\tan x}{\sin x \cos x}\right).$$

17. **(Χρήση Ορισμού Ορίου)** Έστω συνάρτηση $f(x)$ με όριο $\lim_{x\to\infty} f(x) = 10$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, ότι υπάρχει κάποιος $X_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε το $f(x) > \pi$ για κάθε $x > X_0$.

18. **(Όρια)**

    (α΄) Να υπολογίσετε το όριο
    $$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}},$$
    όπου το *ακέραιο μέρος* $\lfloor x \rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x.

    (β΄) Να βρείτε τιμές που μπορούν να πάρουν οι πραγματικές παράμετροι a, b ώστε να ισχύει
    $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10.$$
    (Υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις και αρκεί να βρείτε μια.)

    (γ΄) Βρείτε *όλα* τα ζεύγη τιμών για τις παραμέτρους a, b ώστε να ισχύει
    $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10.$$

19. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

    (α΄) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$.

    (β΄) $\lim_{x\to\infty} |\cos x|^x$.

    (γ΄) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$.

20. **(Αύξουσα όχι φραγμένη άνω συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και όχι φραγμένη άνω, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

21. **(Όρια ακολουθιών)** Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών
$$\frac{n\sin n^{10} + 20}{(n+1)^2}, \quad n \sin\frac{1}{n^2}.$$

4η Ομάδα Ασκήσεων

22. **(Η $|x|$ είναι παντού συνεχής)** Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας της Πρότασης 4.1, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παντού συνεχής.

23. **(Υπολογισμός ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

    (α΄) $\lim_{x\to 0} \sin\sin x$.

    (β΄) $\lim_{x\to 0} \cos\sin x$.

    (γ΄) $\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$.

24. **(Εύρεση ρίζας)** Να δείξετε ότι αν το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $(2,2)$ και $(4,1)$, τότε υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{x_0}{2}$.

25. **(Αντίστροφη υπερβολικού συνημιτόνου)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του υπερβολικού συνημίτονου
$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
είναι $1-1$ στο υποσύνολο $[0,\infty)$ του πεδίου ορισμού της $\mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $[1,\infty)$. Επίσης, να δείξετε ότι η αντίστροφή της στο υποσύνολο $[0,\infty)$ του πεδίου ορισμού της $\mathbb{R}$ είναι η
$$\operatorname{arccosh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right), \qquad y \in [1,\infty), \tag{1}$$
όπου $\log x$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του x. Κατόπιν, σχεδιάστε και τις δύο συναρτήσεις.

26. **(Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης)** Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Το πρόγραμμα που θα υλοποιήσετε θα πρέπει να δέχεται ως εισόδους:

    (α΄) Ένα αρχικό διάστημα στο οποίο είναι γνωστό ότι υπάρχει μια ρίζα.

    (β΄) Το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα στη θέση της ρίζας.

    (γ΄) Την μέγιστη επιτρεπτή απόλυτη τιμή της συνάρτησης στο σημείο που επιστρέφεται ως εκτίμηση της ρίζας.

    Η συνάρτηση $f(x)$ της οποίας αναζητείται η ρίζα μπορεί να δίνεται είτε σαν όρισμα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός του προγράμματος (αν δεν ξέρετε πως να την περάσετε στην συνάρτηση ως όρισμα).

    Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την εκτίμηση για τη ρίζα, καθώς και να εκτυπώνει ενδιάμεσα αποτελέσματα, σε επτά στήλες, με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών στοιχείων, όπως και στο Παράδειγμα 4.9, ως εξής:

    (α΄) Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη n.

    (β΄) Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο a του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (γ΄) Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο b του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (δ΄) Η τέταρτη στήλη να δείχνει το μέσο m του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (ε΄) Η πέμπτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(a)$.

    (ϛ΄) Η έκτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(b)$.

    (ζ΄) Η έβδομη στήλη να δείχνει την τιμή $f(m)$.

27. **(Αριθμητικός υπολογισμός ρίζας της συνάρτησης $f(x) = 2\cos x - x$)** Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα που αναπτύξατε στην προηγούμενη άσκηση, με τέτοιες παραμέτρους εισόδου ώστε να εκτελούνται τουλάχιστον 10 επαναλήψεις και με αρχικό διάστημα το $[1, 3]$, προκειμένου να προσδιορίσετε την θετική ρίζα της εξίσωσης $2\cos x = x$. (Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση;)

28. **(Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου)** Γενικεύστε το Παράδειγμα 4.12. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax + b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5η Ομάδα Ασκήσεων

29. **(Συνάρτηση Dirichlet)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $x^2 f_D(x)$, όπου η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ έχει οριστεί στο Παράδειγμα 3.11, είναι παραγωγίσιμη στο 0 αλλά πουθενά αλλού.

30. **(Εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη)** Να δείξετε ότι

    $$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

    με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων.

31. **(Όρια)** Έστω συνάρτηση $k(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $|k(x)| \leq K$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $K \in \mathbb{R}$ σταθερά. Έστω επίσης η συνάρτηση $f(x) = (x+3)^2 k(x)$. Να δείξετε ότι

    (α΄) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο (-3).

    (β΄) Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (-3).

    (γ΄) Η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει στο (-3) για κάποιες $k(x)$. (Δώστε παράδειγμα $k(x)$ για την οποία δεν υπάρχει η $f''(x)$).

32. **(Παράγωγος της $\operatorname{arccot}(y)$)** Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης της αντίστροφης συνεφαπτομένης, που ορίζεται στο Παράδειγμα 4.7 είναι η

    $$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

33. **(Μη μηδενική παράγωγος)** Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος f' υπάρχει παντού στο (a, b) και μάλιστα $f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$. Επιπλέον, η f' είναι συνεχής στο (a, b). Να δειχθεί ότι η $f(x)$ είτε είναι γνησίως αύξουσα, είτε είναι γνησίως φθίνουσα.

34. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

(α΄) $\displaystyle\int \arctan x \, dx.$

(β΄) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx.$

(γ΄) $\displaystyle\int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

(δ΄) $\displaystyle\int (\sin 2t)(\cos t)\, dt.$

(ε΄) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^7 x \, dx..$

35. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M, M]$, όπου $M > 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6η Ομάδα Ασκήσεων

36. **(Προσεγγιστικοί υπολογισμοί)** Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες προσεγγιστικά εκτελώντας μόνο τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και υπολογίζοντας, όπου χρειάζεται, ρίζες που είναι ακέραιοι, και κατόπιν εκτιμήστε το αριθμητικό σφάλμα $E(x)$, όπως αυτό ορίζεται στο βιβλίο, χρησιμοποιώντας υπολογιστή:

$$\sqrt[4]{17}, \quad \tan(-0.02), \quad \cos(0.03).$$

37. **(Όριο)** Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

38. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(ax+b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

39. **(Κυρτή σύνθεση)** Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Δείξτε ότι αν η g είναι αύξουσα, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι κυρτή.

7η Ομάδα Ασκήσεων

40. **(Εμβαδόν τριγώνου)** Να επαναλάβετε τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 7.4 προκειμένου να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$ με ολοκλήρωμα $a^2/2$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 1.11.

41. **(Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η $f \geq 0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, και επιπλέον $\int_a^b f = 0$, τότε υποχρεωτικά $f = 0$ παντού στο $[a, b]$.

42. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ θα έχουμε $\int_a^b fg = 0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την φυσική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

43. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Να δείξετε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz (Παράδειγμα 7.7) ισχύει με ισότητα αν για τις δύο συναρτήσεις f, g έχουμε ότι η μια είναι πολλαπλάσιο της άλλης στο διάστημα $[a, b]$. Είναι αναγκαία αυτή η συνθήκη ώστε να ισχύει η ισότητα;

8η Ομάδα Ασκήσεων

44. **(Όριο)** Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\sin x)\,dx}{h}.$$

45. **(Γενίκευση του Θεωρήματος 8.2)** Έστω συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ με $f_1([c,d]), f_2([c,d]) \subseteq (a,b)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (c,d)$ έχουμε
$$\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} G(t)\,dt\right)' = G(f_2(x))f_2'(x) - G(f_1(x))f_1'(x).$$
(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον Κανόνα της Αλυσίδας.) Επίσης, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος, εξετάζοντας τι θα συμβεί αν το x μεταβληθεί κατά μια πολύ μικρή ποσότητα Δx.

46. **(Ορισμένα ολοκληρώματα)**

   (α΄) Να αποδείξετε ότι
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}}\,dx,$$
   κάνοντας μια απλή αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης. Δεν χρειάζεται να υπολογίστε τα άνω ολοκληρώματα.

   (β΄) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλος (ακόμα και αν δεν το έχετε αποδείξει), να δείξετε ότι
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

47. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

   (α΄) $\int t^2 \cos t\,dt$.

   (β΄) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos t\,dt$.

48. **(Trolling)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(a\sin x)\,dx.$$

49. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) $\displaystyle\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\log x\,dx}{h^2}$.

   (β΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

   (γ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

50. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{10 + 5e^{\frac{1}{x^3}}}$.

   (β΄) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}}$. Μην χρησιμοποιήσετε, στον υπολογισμό, άλλα γνωστά σας όρια που αφορούν την λογαριθμική συνάρτηση.

   (γ΄) $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$. Παρατηρήστε οτι η συνάρτηση $g(h) = \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ της οποίας το όριο θέλουμε να υπολογίσουμε λαμβάνει, στη θέση h, το supremum όλων των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0,h)$.

51. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)}$.

(β΄) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

52. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

(β΄) $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

(γ΄) $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{(\tan x)}$.

9η Ομάδα Ασκήσεων

53. **(Ολοκληρώματα)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \log x\, dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

(β΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \log^2 x\, dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

(γ΄) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x \log x\, dx$

54. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:

$$\int_0^\infty \frac{3x^2\, dx}{\sqrt{x^3+2}}, \quad \int_2^\infty \frac{1}{\log x}\, dx.$$

55. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}\, dx$.

(β΄) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}\, dx$.

56. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\, dx.$$

57. **(Καρπούζια)** Το Διεθνές Ινστιτούτο Βαρέων Φρούτων Αμαλιάδος έχει ορίσει ως πρότυπο σχήμα ενός πλήρως γινομένου αυγουστιάτικου καρπουζιού το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{300\left(1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}, \quad 0 \le x \le 40,$$

περί τον άξονα των x.

(α΄) Δώστε ένα τύπο για τον όγκο του άνω καρπουζιού ως ολοκλήρωμα.

(β΄) Υπολογίστε το άνω ολοκλήρωμα.

(γ΄) Ποιες είναι οι μικρότερες δυνατές διαστάσεις ενός ορθογωνίου κιβωτίου στο οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε το άνω καρπούζι; Αγνοήστε το πάχος των τοιχωμάτων του κιβωτίου.

58. **(Λουλουδάκι μείον λουλουδάκι)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \left\{[r,\theta] : a \le \theta \le b,\ \cos^2 2\theta \le r \le 2\cos^2 2\theta\right\}.$$

59. **(Όγκος απόλυτου συνημιτόνου)** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = |\cos(kx/2)|$ μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = 2\pi$ περί τον άξονα των x. Τι παρατηρείτε;

60. **Όγκος εκ περιστροφής** Να προσδιορίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που δημιουργείται αν περιστρέψουμε γύρω από τον κάθετο άξονα $x = -1$ το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = \pi$.

61. **(Μελέτη τροχιάς)** Ένα αντικείμενο κινείται πάνω στο επίπεδο xy έτσι ώστε τη χρονική στιγμή t να βρίσκεται στη θέση $(x(t), y(t))$ που δίνεται από τις εξισώσεις

$$x(t) = \cos t + t\sin t, \quad y(t) = \sin t - t\cos t. \tag{2}$$

Η κίνηση συμβαίνει μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_0 = 0$ και $t_1 = 2\pi$. Να απαντήσετε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποιο είναι το συνολικό μήκος της τροχιάς του αντικειμένου;

(β΄) Ποια χρονική στιγμή, μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$, το αντικείμενο θα έχει καλύψει το μισό από το μήκος του προηγούμενου σκέλους;

(γ΄) Ποια χρονική στιγμή, μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$, θα έχει τη μέγιστη στιγμιαία ταχύτητα (κατά μέτρο);

(δ΄) Ποια χρονική στιγμή, μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$, θα βρίσκεται στην ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(1, 1)$;

(ε΄) Σχεδιάστε την καμπύλη.

10η Ομάδα Ασκήσεων

62. **(Κορωνοϊός)** Έστω πως η διάδοση του κορωνοϊού σε μια χώρα περιγράφεται με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = y^2(x)(1 - y(x)),$$

όπου x ο χρόνος και $y(x) \in [0, 1]$ είναι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει μολυνθεί.

(α΄) Βρείτε συντελεστές A, B, C, για τους οποίους, για κάθε x, ισχύει

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}.$$

(β΄) Βρείτε μια εξίσωση για τη γενική λύση της άνω ΔΕ. Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση που θα βρείτε ως προς τη γενική λύση. Αναφέρετε τις παραδοχές που κάνατε.

(γ΄) Υπάρχουν λύσεις της άνω ΔΕ που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση, λόγω των παραδοχών που έχετε κάνει;

63. **(Διαφορική εξίσωση)** Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι έχετε υπολογίσει σωστά την γενική λύση παραγωγίζοντας.

64. **(Διαφορική Εξίσωση)** Να υπολογίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\tan x)y'(x) + y(x) = \sin^2 x$$

στο διάστημα $(0, \pi/2)$. Ακολούθώς, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να λάβει το όριο των ειδικών λύσεων καθώς $x \to 0^+$.

65. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x,$$

στο διάστημα $x > 0$.

(β΄) Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$;

66. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\tan y(x))y'(x) = x \sin x.$$

(β΄) Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(γ΄) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει καμία ειδική λύση που να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

67. **(Διαφορική εξίσωση)** Δίνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση (ΔΕ):

$$z'(x) + (\sin x)z(x) = (\sin x)z^2(x),$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) *(2 μονάδες)* Υπολογίστε τις ειδικές λύσεις που προκύπτουν αν γίνει η αντικατάσταση $y(x) = \frac{1}{z(x)}$. Αν εισάγετε μια παράμετρο C, προσδιορίστε το σύνολο των τιμών που μπορεί αυτή να λάβει.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Προσδιορίστε μια ειδική λύση της άνω ΔΕ που δεν μπορεί να προκύψει από την αντικατάσταση του προηγούμενου σκέλους.

68. **(Μέθοδος Euler)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Euler σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Η ρουτίνα που θα δημιουργήσετε θα λύνει αριθμητικά διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

υλοποιώντας τον ψευδοκώδικα της Παραγράφου 10.5 ή ισοδύναμο, πάντως με τα ίδια ορίσματα εισόδου. Κατ' εξαίρεση η συνάρτηση f μπορεί να δίνεται είτε ως όρισμα στη ρουτίνα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός της ρουτίνας (αν δεν ξέρετε πως να περνάτε συναρτήσεις ως ορίσματα άλλων συναρτήσεων). Η έξοδος πρέπει να δίνεται με ακρίβεια τουλάχιστον 4 δεκαδικών ψηφίων, και πρέπει να περιλαμβάνει ένα πίνακα με τρεις στήλες, μια στήλη για την επανάληψη i, μια στήλη για την τιμή του $x(i)$ στο οποίο υπολόγισε η ρουτίνα προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης για εκείνη την επανάληψη, και τέλος μια στήλη για την προσεγγιστική τιμή $y(i)$.

69. **(Εφαρμογή Μεθόδου Euler)** Χρησιμοποιήστε την ρουτίνα της προηγούμενης για να υπολογίσετε αριθμητικά τη λύση της ΔΕ

$$y' = y(1 - y),$$

με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $y_0 = 0.5$. Εκτελέστε 10 επαναλήψεις με βήμα $\Delta x = 0.5$, και άλλες 10 επαναλήψεις με βήμα $\Delta x = -0.5$.

11η Ομάδα Ασκήσεων

70. **(Πολυώνυμο Taylor)**

(α΄) Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

(β΄) Να γράψετε ένα τύπο για το πολυώνυμο Taylor n-οστου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

71. **(Ισες παράγωγοι)** Να δείξετε ότι αν δύο πολυώνυμα βαθμού μέχρι n έχουν ίσες όλες τις παραγώγους τους από μηδενικής μέχρι n τάξης σε ένα δοσμένο σημείο x_0, τότε είναι ίσα. Θεωρήστε $n \in \mathbb{N}$, με την παράγωγο μηδενικής τάξης μιας συνάρτησης να είναι η ίδια η συνάρτηση.

72. **(Πολυώνυμα Taylor των $\sinh x$, $\cosh x$)** Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα Taylor των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sinh x$, $\cosh x$:

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}.$$

73. **(Προσδιορισμός του e)** Να αποδείξετε ότι η σταθερά e μπορεί να προσεγγιστεί από το κλάσμα $\frac{685}{252}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4} χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor των σημειώσεων. Δίνεται ότι $e \leq 4$, και καμία άλλη πληροφορία για την τιμή του e. Στην επίλυση αυτής της άσκησης επιτρέπονται μόνο προσθέσεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, εφόσον το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι ακέραιος αριθμός. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Taylor και το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 0$.

12η Ομάδα Ασκήσεων

74. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

    (α΄) $\sum_n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

    (β΄) $\sum \frac{(\log n)^2}{n^3}$.

    (γ΄) $\sum \frac{e^{n^2}}{(3n)!}$.

75. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

Υπόδειξη: πρέπει δηλαδή να προσδιορίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια ακολουθιών, χωρίς να προσδιορίσετε την τιμή τους.

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{K} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

76. **(Σειρές)** *(1.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι σειρές

    (α΄) $\sum \frac{(\log n)^7}{n^2}$.

    (β΄) $\sum \frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

    (γ΄) $\sum \frac{n^3+n^2+1}{n!}$.

77. **(Μικρό όμικρον)** Στην Πληροφορική συχνά χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι δύο θετικές ακολουθίες, τότε γράφουμε $f(n) = o(g(n))$ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, δηλαδή αν για μεγάλες τιμές του n, η ακολουθία $f(n)$ είναι πολύ μικρότερη της ακολουθίας $g(n)$. Παρατηρήστε ότι το $o(\cdot)$ ΔΕΝ εκφράζει κάποια άγνωστη συνάρτηση, αλλά είναι ένας απλός συμβολισμός, με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά μια σχέση μεταξύ δύο ακολουθιών.

    Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, είτε αποδείξτε ότι είναι σωστή, είτε δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι είναι λάθος:

    (α΄) Αν $f(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και $g(n) = e^n$, τότε $f(n) = o(g(n))$.

    (β΄) Αν $f_1(n) = o(g(n))$ και $f_2(n) = o(g(n))$, τότε και $f_1(n)f_2(n) = o(g(n))$.

    (γ΄) Αν $f(n) = o(g(n))$ και $g(n) = o(h(n))$, τότε και $f(n) = o(h(n))$.

    (δ΄) Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n = o(1)$.

78. **(Ιδιότητες σειρών)**

    (α΄) Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, θα συγκλίνει και η $\sum \cos(a_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

    (β΄) Έστω $a_n \geq 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, θα συγκλίνει και η $\sum \sin(a_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

    (γ΄) Έστω $a_n \geq 0$ με $a_n \to 0$. Αν συγκλίνει η $\sum \sin(a_n)$, θα συγκλίνει και η $\sum a_n$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

    (δ΄) Έστω $a_n \geq 0$. Αν συγκλίνει η $\sum \sin(a_n)$, θα συγκλίνει και η $\sum a_n$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

79. **(Ιδιότητες σειρών)**

    (α΄) Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε δεν μπορεί να συγκλίνει και η σειρά $\sum e^{-a_n}$.

    (β΄) Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, και $a_n > 0$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum (a_n)^2$.