

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2021-2022

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:

- (α') Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα κεφάλαιο των σημειώσεων, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.
- (β') Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.
- (γ') Μετά την διόρθωσή τους, οι ομάδες θα επιστρέφονται.
- (δ') Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.
- (ε') Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.

2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:

- (α') Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.
- (β') Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.
- (γ') **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**

3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):

- (α') Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας μόνο ηλεκτρονικά, μέσω eclass.
- (β') Δεν επιτρέπεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα, ή η μισή ηλεκτρονικά και η μισή ιδιοχείρως).
- (γ') Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα.
- (δ') Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.
- (ε') Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.
- (ς') Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και όχι με αποστολή email στο διδάσκοντα.
- (ζ') Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες.
- (η') Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.
- (θ') Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf).
- (ι') Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.
- (ια') Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.
- (ιβ') Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:59μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**
- (ιγ') **ΔΕΝ ΘΑ ΓΙΝΟΥΝ ΔΕΚΤΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.**

4. Αλλαγές στην ημέρα παράδοσης:

- (α') Σε περίπτωση που η καταληκτική ημέρα παράδοσης μιας ομάδας ασκήσεων είναι ημέρα διάλειξης και η διάλεξη ακυρωθεί ή αναβληθεί, η υποβολή της ομάδας μετατίθεται αυτόματα για την ημέρα της επόμενης διάλειξης, χωρίς να προηγηθεί ανακοίνωση από τον διδάσκοντα.
- (β') Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΔΥΟ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδετε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i + 1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1} , τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1} , εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.
- (γ') Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

5. Διόρθωση:

- (α') Η διόρθωση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.
- (β') Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.
- (γ') Όλες οι ομάδες ασκήσεων έχουν την ίδια βαρύτητα. Όχι όμως και όλες οι ασκήσεις σε μια ομάδα.
- (δ') Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.
- (ε') Οι διορθωμένες εργασίες θα διατίθενται για παραλαβή στο τραπεζάκι έξω από το γραφείο του διδάσκοντα, και η
- (ς') Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, ελάτε σε ώρες γραφείου του διδάσκοντα.
- (ζ') Αν δεν μπορείτε να βρείτε την βαθμολογία της εργασίας σας στο σχετικό έγγραφο, βεβαιωθείτε ότι την υποβάλλατε και (μόνο τότε) ενημερώστε τον διδάσκοντα.

6. Συνεργασία:

- (α') Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.
- (β') Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.
- (γ') Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν**. Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.
- (δ') Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιότερων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

7. Σημαντικά σχόλια:

- (α') Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.
- (β') Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.
- (γ') Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (Ενδεχομένως να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)
- (δ') Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.
- (ε') **Βλέπετε το mail που σας έχει χορηγήσει το ΟΠΑ**. Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

- (Τρία ενδεχόμενα)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:
 - (α') Πραγματοποίηση μόνο του B .
 - (β') Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C .
 - (γ') Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.
 - (δ') Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.
 - (ε') Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.
 - (ς') Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.
 - (ζ') Το πολύ ένα πραγματοποιείται.
 - (η') Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.
- (Συρτάρι)** Σε ένα συρτάρι έχουμε 4 μαρκαδόρους, δύο που γράφουν μπλε και δυο που γράφουν κόκκινα.
 - (α') Αφαιρούμε στην τύχη από το συρτάρι έναν έναν τους μαρκαδόρους (εννοείται χωρίς επανάθεση), μέχρι να βρούμε έναν μπλε. Υποθέτουμε ότι όλοι οι μαρκαδόροι διαφέρουν στην όψη, και μας ενδιαφέρει ποιος επιλέχθηκε κάθε φορά. Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.
 - (β') Έστω πως επαναλαμβάνουμε το πείραμα του προηγούμενου σκέλους, αλλά οι μαρκαδόροι είναι εξωτερικά πανομοιότυποι (πέραν του ότι 2 γράφουν μπλε και 2 γράφουν κόκκινα). Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.
 - (γ') Αφαιρούμε στην τύχη από το συρτάρι έναν έναν τους μαρκαδόρους (εννοείται χωρίς επανάθεση), μέχρι να βρούμε και τους δύο που γράφουν μπλε. Υποθέτουμε ότι οι μαρκαδόροι διαφέρουν στην όψη (αλλά δεν ξέρουμε ποιος γράφει μπλε και ποιος κόκκινα), και μας ενδιαφέρει ποιος επιλέχθηκε κάθε φορά. Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.
 - (δ') Επαναλαμβάνουμε το πείραμα του προηγούμενου σκέλους, αλλά οι μαρκαδόροι είναι πανομοιότυποι (πέραν του ότι 2 γράφουν μπλε και 2 γράφουν κόκκινα). Κατασκευάστε ένα δειγματικό χώρο που να περιγράφει το πείραμα.
- (Μικτός δειγματικός χώρος)** Ένα συνηθισμένο εξάπλευρο ζάρι ρίχνεται και το αποτέλεσμα N_1 καταγράφεται. Κατόπιν επιλέγεται ακέραιος N_2 από το 1 έως και το N_1 .
 - (α') Περιγράψτε το δειγματικό χώρο Ω .
 - (β') Περιγράψτε το ενδεχόμενο $A = \text{«το αποτέλεσμα του ζαριού ήταν 4»}$.
 - (γ') Περιγράψτε το ενδεχόμενο B στο οποίο $N_2 = 3$.
 - (δ') Περιγράψτε το ενδεχόμενο C στο οποίο $N_2 = 6$.
- (Δύο ζαριές)** Ένα ζάρι ρίχνεται 2 φορές και οι αριθμοί των κουκίδων καταγράφονται με τη σειρά που ήρθαν.
 - (α') Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω ;
 - (β') Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $A = \text{«το άθροισμα των κουκίδων είναι ζυγό»}$;
 - (γ') Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $B = \text{«και τα δύο ζάρια είναι ζυγά»}$;
 - (δ') Το B είναι υποσύνολο του A ή το αντίστροφο;
 - (ε') Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $A \cap B'$; Περιγράψτε το με λόγια.
 - (ς') Έστω C το ενδεχόμενο «οι ρίψεις διαφέρουν κατά 1». Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap C$;
- (Διαφορά μεταξύ αριθμών)** Δύο αριθμοί επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[0, 1]$, και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η επιλογή είναι ομοιόμορφη, δηλαδή χωρίς να δείχνουμε προτίμηση στα σημεία κάποιου υποσυνόλου του $[0, 1]$. Βρείτε την πιθανότητα οι αριθμοί να διαφέρουν (κάτ' απόλυτη τιμή) περισσότερο από $\frac{1}{2}$. (Υπόδειξη: μελετήστε το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$ του R^2 .)
- (Χρήση ιδιοτήτων πιθανοτήτων)** Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB), \quad P(A'B) = 0.05.$$

(α') Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$.

(β') Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων $A \cup B$, $A'B'$, AB' , $AB' \cup A'B$, $A \cup B'$, $A' \cup B$.

7. **(Ένας χώρος πιθανότητας με 3 ενδεχόμενα)** Ένα πείραμα έχει χώρο πιθανότητας $\Omega = \{a, b, c\}$. Έστω $P(\{a, c\}) = 5/8$, $P(\{b, c\}) = 7/8$. Χρησιμοποιήστε γνωστούς κανόνες των πιθανοτήτων για να υπολογίσετε τις πιθανότητες όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων.

8. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε διαδοχικά 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

(α') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

(β') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

9. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A , B , ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Ακολουθώ να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n - 1).$$

10. **(Αυστηρή ανισότητα)** Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, ισχύει η ιδιότητα $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, όπου A , B ενδεχόμενα. Να αποδείξετε ότι ισχύει και η ακόλουθη, ή να δώσετε αντιπαράδειγμα:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B).$$

2η Ομάδα Ασκήσεων

11. **(Τυχαίες λέξεις)** Έστω ότι οποιαδήποτε επαναληπτική διάταξη 5 γραμμάτων από τα 24 της ελληνικής αλφαβήτου θεωρείται από μια βάση δεδομένων κειμένου ως λέξη. Π.χ. το «ΚΑΠΩΣ» και το «ΑΕΝΦΟ» είναι λέξεις ενώ το «ΜΑΘΗΜΑ» και το «ΝΑΙ» δεν είναι. Από όλο αυτό το πλήθος λέξεων επιλέγουμε μια στην τύχη. Ποια η πιθανότητα να:

(α') Περιέχει το γράμμα Α.

(β') Περιέχει το Α ή το Β ή και τα δύο.

(γ') Περιέχει το Α και το Β.

(δ') Περιέχει το Β αλλά όχι το Α.

12. **(Seven Card Stud)** Κατά τα γνωστά, μια τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα, που χωρίζονται, με δύο διαφορετικούς τρόπους, σε 4 φυλές (\diamond , \spadesuit , \heartsuit , \clubsuit) και 13 νούμερα ($A, 2, 3, \dots, 10, J, Q, K$). Σε ένα παιχνίδι Seven Card Stud κάθε παίκτης λαμβάνει 7 φύλλα από μια τράπουλα.

(α') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A ένας παίκτης να έχει 7 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα, 7 κούπες.)

(β') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας παίκτης να έχει τουλάχιστον 5 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα 5,6 ή 7 κούπες).

(γ') Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου C ένας παίκτης να έχει τρία ζεύγη αλλά καμία τριάδα ή τετράδα; (Ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο ενδεχόμενο είναι να έχει τα φύλλα ($3\spadesuit, 3\heartsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, \clubsuit, \diamond, 8\spadesuit$)).

13. **(300 μπάλες)** Μία κάλπη περιέχει 300 άσπρες μπάλες. Βγάζουμε τυχαία 100, τις βάφουμε μαύρες, και τις επιστρέφουμε στην κάλπη. Έπειτα βγάζουμε τυχαία 100 μπάλες. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ακριβώς 10 μαύρες;

14. **(Λαχνοί)** Από μια κληρωτίδα που περιέχει n λαχνούς αριθμημένους $1, 2, \dots, n$ εξάγεται ένα λαχνός, καταγράφουμε το νούμερο του, και τον επιστρέφουμε. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία $k \geq 3$ φορές. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α') Να επιλεγεί ο λαχνός 1 τουλάχιστον μια φορά.

(β') Να επιλεγούν οι λαχνοί 1, 2, 3 τουλάχιστον μια φορά ο καθένας.

15. (**n ζευγάρια διαγωνιζόμενων**) Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια ατόμων. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, έτσι ώστε κάθε ένα άτομο να πάρει το πολύ ένα βραβείο, και χωρίς κάποια προτίμηση στα άτομα που θα πάρουν τα βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια;
16. (**n ζευγάρια κατασκόπων**) Από n ζευγάρια κατασκόπων ($2n$ συνολικά άτομα) διαλέγουμε στην τύχη $k \leq n$ άτομα για να τα συμπεριλάβουμε σε μία μυστική αποστολή, χωρίς κάποια προτίμηση σε άτομα. Ποια είναι η πιθανότητα
- (α') να συμπεριληφθούν ακριβώς j άνδρες στην αποστολή; Προφανώς $0 \leq j \leq k$.
- (β') να μην συμπεριληφθούν άτομα του ίδιου ανδρόγυνου στη αποστολή;
17. (**Παπουτσοθήκη**) Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 10 ζευγάρια παπούτσια, και συνεπώς συνολικά 20 παπούτσια. Ανοίγουμε την παπουτσοθήκη και παίρνουμε 4 παπούτσια, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό τους. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα στα 4 παπούτσια που πήραμε:
- (α') Να μην υπάρχει ούτε ένα ζευγάρι;
- (β') Να υπάρχει ακριβώς 1 ζευγάρι;
- (γ') Να υπάρχουν 2 ζευγάρια;
18. (**Age of Empires Logic**) 20 πολεμικοί ελέφαντες και 30 πεζικάριοι επιχειρούν να επιβιβαστούν σε ένα αποβατικό σκάφος και από αυτούς επιλέγονται μόνο οι 10, χωρίς προτίμηση στο ποιοι θα επιβιβαστούν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιβαστούν τουλάχιστον 7 ελέφαντες;

3η Ομάδα Ασκήσεων

19. (**Εξάρες**) Ρίχνουμε δύο ζάρια, και υποθέτουμε ότι τα $6 \times 6 = 36$ αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έστω B το ενδεχόμενο να φέρουμε εξάρες. Υπολογίστε την $P(B|A)$, για τις εξής περιπτώσεις για το ενδεχόμενο A :
- (α') Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε εξάρες, δηλαδή $A = B$.
- (β') Το A είναι το ενδεχόμενο και τα δύο ζάρια να προκύψουν ζυγά.
- (γ') Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε διπλές, δηλαδή δύο ίδια ζάρια.
- (δ') Το A είναι το ενδεχόμενο να προκύψει οποιοδήποτε αποτέλεσμα, δηλαδή $A = \Omega$.
- (ε') Το A είναι το ενδεχόμενο και τα δύο ζάρια να προκύψουν περιττά.
20. (**Βιβλία**) Έχουμε 30 βιβλία, 15 λογοτεχνικά (ΛΒ) και 15 μαθηματικά (ΜΒ). Τα μοιράζουμε τυχαία σε τρεις βιβλιοθήκες, τοποθετώντας από 10 βιβλία στην κάθε μία.
- (α') Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη βιβλιοθήκη να έχει 10 ΛΒ και η δεύτερη 5 ΛΒ;
- (β') Δεδομένου ότι η δεύτερη βιβλιοθήκη έχει 5 ΛΒ, ποια η πιθανότητα η πρώτη να έχει τα υπόλοιπα 10;
- (γ') Δεδομένου ότι η πρώτη βιβλιοθήκη έχει 10 ΛΒ, ποια η πιθανότητα η δεύτερη να έχει τα υπόλοιπα 5;
21. (**Δημοφιλία**) Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E , και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B , ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C ;
22. (**Βιομηχανική Κατασκοπία**) Μία εταιρία λογισμικού απασχολεί 60 εργαζομένους, εκ των οποίων οι 57 είναι έντιμοι και οι τρεις είναι βιομηχανικοί πράκτορες κάποιας άλλης εταιρίας. Για κάποιο πρότζεκτ επιλέγουμε τέσσερις εργαζομένους στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση. Θεωρούμε ότι το πρότζεκτ θα διαρρεύσει αν η επιλεγμένη ομάδα εργαζομένων περιλαμβάνει τουλάχιστον έναν πράκτορα.
- (α') Ποια η πιθανότητα να επιλέξαμε και τους τρεις πράκτορες;
- (β') Ποια η πιθανότητα να μη διαρρεύσει το πρότζεκτ;
- (γ') Δεδομένου ότι τελικά το πρότζεκτ διέρρευσε, ποια η πιθανότητα να έχουν επιλεγθεί και οι τρεις πράκτορες;
23. (**Πινιάτα**) Μια πινιάτα σπάει αν δεχτεί ένα δυνατό χτύπημα ή δύο μέτρια χτυπήματα. Σε ένα πάρτι, αν ένα παιδί χτυπήσει την πινιάτα έχει πιθανότητες $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα δυνατό χτύπημα, $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα μέτριο χτύπημα, και $\frac{1}{2}$ να αστοχήσει. 4 παιδιά μπαίνουν σε σειρά για να χτυπήσουν μια πινιάτα, διαδοχικά, και μια φορά το καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα να τη σπάσουν; Όλα τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα.

24. **(Αύξουσα σειρά)** Έστω 52 φύλλα αριθμημένα από το 1 έως το 52. Σηκώνουμε διαδοχικά 5 από αυτά, χωρίς επανάθεση, και χωρίς προτίμηση στη διάταξη που προκύπτει. Ποια είναι η πιθανότητα η πιθανότητα να σηκώσουμε τα φύλλα σε αύξουσα σειρά; (Π.χ., να σηκώσουμε τα φύλλα 5, 12, 34, 40, 51, με αυτή τη σειρά.)
25. **(Εκλογές)** Έστω τετραμελής επιτροπή αποτελούμενη από τους A, B, C, D , η οποία συζητά για την έγκριση μιας δαπάνης. Κάθε ένα από τα τέσσερα μέλη της επιτροπής θα ψηφίσει υπέρ της δαπάνης, με πιθανότητα $3/4$, ή κατά, με πιθανότητα $1/4$. Οι επιλογές των μελών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για να εγκριθεί η δαπάνη απαιτείται ψήφος υπέρ της δαπάνης τουλάχιστον τριών ατόμων.
- (α') Ποια είναι η πιθανότητα να εγκριθεί η δαπάνη;
- (β') Με δεδομένο ότι η δαπάνη εγκρίθηκε, ποια η πιθανότητα να έχει ψηφίσει υπέρ ο A ;
26. **(Στίγμα)** Από το σύνολο κάποιου πληθυσμού, το 1% των ατόμων έχει το γενετικό στίγμα κάποιας εν μέρει κληρονομικής ασθένειας. Αν και οι δύο γονείς έχουν το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 50% να έχει το στίγμα. Αν μόνο ένας από τους δύο γονείς έχει το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 2% να έχει το στίγμα. Αν δεν έχει το στίγμα κανένας από τους δύο, τότε δεν το έχει και το παιδί. Υποθέτουμε ότι η κληρονομικότητα είναι ανεξάρτητη από παιδί σε παιδί είτε έχουν οι γονείς το στίγμα είτε όχι, και ότι οι γονείς έχουν το στίγμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. (Παρατηρήστε ότι το τελευταίο μπορεί αν μην ισχύει σε αντίστοιχες πραγματικές περιπτώσεις, καθώς ζεύγη ατόμων που έχουν και οι δύο το στίγμα μπορεί να αποθαρρύνονται από το να κάνουν παιδιά.)
- (α') Ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού στο οποίο μόνο ο ένας γονιός έχει το στίγμα, να έχουν και τα δύο το στίγμα;
- (β') Αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τους γονείς, ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός τυχαίου ζευγαριού να έχουν και τα δύο το στίγμα;
- (γ') Αντίστροφα, δεδομένου ότι διαπιστώνουμε πως και τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού έχουν το στίγμα, ποια η πιθανότητα ακριβώς ένας γονιός (οποιοσδήποτε από τους δύο) να έχει το στίγμα; Ποια η πιθανότητα να έχουν το στίγμα και οι δύο;

4η Ομάδα Ασκήσεων

27. **(Ζάρι και κέρμα)** Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα και ένα δίκαιο ζάρι (ανεξάρτητα μεταξύ τους) και ορίζουμε τις T.M. X και Y ώστε να περιγράφουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα: $X = 1$ ή 0 αν φέραμε Κ ή Γ, αντίστοιχα, και $Y =$ αποτέλεσμα της ζαριάς. Ορίζουμε επίσης την T.M. $Z = XY$.
- (α') Ορίστε το δειγματικό χώρο Ω και τις T.M. X και Y ως συναρτήσεις στο Ω .
- (β') Βρείτε το σύνολο τιμών της Z και υπολογίστε τη μάζα της.
- (γ') Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της Z .
28. **(Κέρμα και ζάρι)** Ένα δίκαιο κέρμα ρίπτεται μία φορά, και μετά ένα δίκαιο ζάρι ρίπτεται δύο ανεξάρτητες φορές. Η μεριά του κέρματος, C , (που μπορεί να είναι H ή T) και οι τιμές του ζαριού X και Z (που μπορούν να είναι $1, 2, \dots, 6$) καταγράφονται. Έστω η τυχαία μεταβλητή Y που ορίζεται ως εξής:

$$Y = \begin{cases} X + Z, & C = H, \\ X - Z, & C = T. \end{cases}$$

Περιγράψτε τον αρχικό δειγματικό χώρο Ω . Πόσα αποτελέσματα περιέχει; Υπολογίστε και σχεδιάστε την μάζα και την κατανομή της Y . Υπολογίστε, επίσης, τη μέση τιμή $E(Y)$ και τη διασπορά $\text{VAR}(Y)$ της Y .

29. **(20 μπάλες)** Από ένα δοχείο που περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20 εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 μπάλες, χωρίς να σημειώσουμε τη σειρά της επιλογής.
- (α') Να ορισθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. Πόσα αποτελέσματα περιλαμβάνει;
- (β') Να υπολογισθεί η κατανομή $F_X(x)$ της μέγιστης ένδειξης X στις 3 μπάλες του δείγματος, για $x = 1, 2, \dots, 20$.
- (γ') Να υπολογισθεί η μάζα πιθανότητας $p_X(x)$.
- (δ') Αν στοιχηματίσουμε ότι βγάζοντας 3 μπάλες θα έχουμε μια τουλάχιστον μπάλα με ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

30. **(D&D)** Ένας πολεμιστής είναι οπλισμένος με ένα σιλήτο με το οποίο μπορεί σε κάθε χτύπημα να καταφέρει στον αντίπαλο απώλεια X μονάδων ζωής, όπου η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές 1, 2, 3, 4 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ την κάθε τιμή. (Επομένως, όλα τα χτυπήματα οδηγούν σε απώλεια μονάδων ζωής.) Ένας αντίπαλος έχει 5 μονάδες ζωής. Ο πολεμιστής χτυπά διαδοχικά τον αντίπαλο έως ότου του καταφέρει, αθροιστικά, απώλεια 5 ή περισσότερων μονάδων ζωής, οπότε ο αντίπαλος πεθαίνει. Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα. Έστω Y η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των χτυπημάτων που απαιτούνται για να πεθάνει ο αντίπαλος. (Παρατηρήστε πως το Y μπορεί να λάβει τις τιμές 2 έως 5.) Να προσδιορίσετε τη μάζα $p_Y(y)$, την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, τη μέση τιμή $E(Y)$, και τη διασπορά $\text{VAR}(Y)$ της Y .
31. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; (Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνέτέ τα.)

32. **(Διαγωνισμός)** Σε ένα διαγωνισμό συμμετέχουν 5 άντρες και 5 γυναίκες. Κατατάσσονται σύμφωνα με την επίδοσή τους, και δεν προβλέπεται δύο ή περισσότερα άτομα να καταταγούν στην ίδια θέση. Υπάρχουν 10! δυνατές κατατάξεις, και δίνεται πως είναι όλες ισοπίθανες. Έστω X η υψηλότερη σειρά που κατέλαβε γυναίκα. (Για παράδειγμα, έχουμε $X = 1$ αν πρώτη αναδείχτηκε μια γυναίκα, οποιαδήποτε από τις 5, ενώ έχουμε $X = 6$ αν οι 5 γυναίκες κατέλαβαν τις τελευταίες 5 θέσεις.) Να βρείτε την μάζα $p_X(x)$ του X . Επίσης, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $E(X)$ και τη διασπορά $\text{VAR}(X)$.

5η Ομάδα Ασκήσεων

33. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1-p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;
34. **(Μπάσκετ)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι καλείται να εκτελέσει 10 βολές. Ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, με πιθανότητα 0.6, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα 0.7, και ντεφορμέ με πιθανότητα 0.4, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα μόλις 0.2.
- (α') Με δεδομένο ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, ποια είναι η πιθανότητα να εκτελέσει 10 βολές και να βάλει τις 6; Ποια είναι η πιθανότητα του ίδιου ενδεχόμενου αν ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ;
- (β') Ο διαγωνιζόμενος εκτελεί 10 βολές και βάζει τις 6. Ποια είναι η νέα πιθανότητα να είναι φορμαρισμένος;
35. **(Μπαλάκια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης ρίχνει μπαλάκια σε ένα στόχο μέχρι να καταφέρει να πετύχει το στόχο ακριβώς τρεις φορές. Οι βολές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και κάθε μια είναι επιτυχημένη με πιθανότητα 0.25.
- (α') Ποια είναι η πιθανότητα ο διαγωνιζόμενος να χρειαστεί ακριβώς 20 προσπάθειες για να πετύχει το στόχο ακριβώς τρεις φορές; (Υπόδειξη: σκεφτείτε τι πρέπει να έχει συμβεί στις πρώτες 19 προσπάθειες.)
- (β') Κατά μέσο όρο, πόσες προσπάθειες θα χρειαστεί ο διαγωνιζόμενος για να πετύχει το στόχο τρεις φορές;
36. **(Διατμηματική εξέταση)** Στην τελική εξέταση ενός μαθήματος συμμετέχουν 50 φοιτητές από το Τμήμα T_1 και 30 από το Τμήμα T_2 . Ο βαθμός του κάθε φοιτητή από το T_1 έχει διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 10$ και $p = 0.6$, ενώ ο βαθμός του κάθε φοιτητή του T_2 έχει διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 10$ και $p = 0.5$. Επιλέγουμε ένα γραπτό στην τύχη και βλέπουμε ότι έχει πάρει βαθμό 1. Ποια η πιθανότητα να είναι κάποιου φοιτητή του T_2 ;
37. **(Gormiti)** Έχουμε ένα σετ από 100 διαφορετικές κάρτες Gormiti, εκ των οποίων ένας είναι ο Magmion και ένας άλλος ο Electricron. Έστω το ακόλουθο πείραμα: επιλέγω στην τύχη 2 κάρτες, χωρίς επανάθεση, και χωρίς κάποια προτίμηση στον συνδυασμό των καρτών που θα επιλέξω.
- Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α') Ποια είναι η πιθανότητα στην επιλογή μου να υπάρχει ο Magmion;
- (β') Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να αποτελείται από τον Magmion **και** τον Electricron;
- (γ') Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να περιλαμβάνει τον Magmion **ή** τον Electricron (και ενδεχομένως και τους δύο);
- (δ') Δώστε ένα τύπο (χωρίς να κάνετε τις πράξεις) που να δίνει **επακριβώς** την πιθανότητα να βρω τον Magmion ακριβώς 7 φορές αν επαναλάβω το πείραμα 200 φορές, και τα επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.
38. **(Υπεράριθμοι επιβάτες)** Ο αριθμός X των επιβατών που περιμένουν ένα λεωφορείο ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Η χωρητικότητα του λεωφορείου είναι M επιβάτες. Βρείτε την μάζα πιθανότητας του αριθμού Y των υπεράριθμων επιβατών.
39. **(Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης)** Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο κέρμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού; Θα δίνετε 50 Ευρώ για να παίξετε το παιχνίδι;
40. **(Εκτίμηση πληθυσμού)** Σε ένα πάρκο βρίσκεται ένας μεγάλος αριθμός N από ζέβρες. Για να μελετήσουμε τον πληθυσμό τους, αιχμαλωτίζουμε m από αυτές, τους τοποθετούμε ραδιοπομπούς και εκ των υστέρων τις ελευθερώνουμε. Μετά από αρκετό διάστημα, αιχμαλωτίζουμε εκ νέου n από αυτές. Το ενδεχόμενο να πιαστεί μια ζέβρα την δεύτερη φορά είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο να έχει πιαστεί την πρώτη φορά. Εννοείται πως ο συνολικός πληθυσμός των ζεβρών και ο πληθυσμός των ζεβρών με τους ραδιοπομπούς παραμένουν σταθεροί μεταξύ των δύο αιχμαλωσιών.
- (α') Ποια κατανομή ακολουθεί ο αριθμός X των ζεβρών που αιχμαλωτίσαμε εκ νέου και φέρουν ραδιοπομπούς;
- (β') Έστω πως ο συνολικός πληθυσμός N είναι άγνωστος. Έστω επίσης πως $X = k$. Μια εκτιμήτρια για το N είναι ο αριθμός N' που μεγιστοποιεί την πιθανότητα $P_k(N)$ να έχουμε πιάσει k ζέβρες με ραδιοπομπούς αν ο πληθυσμός είναι N . (Αυτή η μέθοδος εκτίμησης καλείται μέθοδος της *μέγιστης πιθανοφάνειας*.) Ποια είναι η τιμή του N' ; Για να τη βρείτε, σχηματίστε το λόγο $P_k(N)/P_k(N-1)$ και δείτε πότε γίνεται μικρότερος του 1.

6η Ομάδα Ασκήσεων

41. **(Σάντουιτς και ψάρια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης προσφέρει στην ομάδα του κάθε μέρα ένα τυχαίο πλήθος X από σάντουιτς και ένα τυχαίο πλήθος Y από ψάρια, για τα οποία οι πιθανότητες $P(X = x, Y = y)$ δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

x	0	1	2	3
y				
0	1/8	1/8	1/8	1/16
1	1/8	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16

- (α') Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά των X και Y ;
- (β') Είναι τα X, Y ανεξάρτητα;
- (γ') Με δεδομένο ότι κάθε σάντουιτς έχει 1024 θερμίδες και κάθε ψάρι έχει 512 θερμίδες, με ποιο τρόπο συνεισφέρει κατά μέσο όρο περισσότερες θερμίδες ο παίκτης, με τα σάντουιτς ή με τα ψάρια;
- (δ') Ποια είναι η πιθανότητα να συνεισφέρει συνολικά στην ομάδα, σε μια μέρα, περισσότερες από 3000 θερμίδες;
42. **(Άγνωστη παράμετρος)** Οι διακριτές Τ.Μ. X και Y έχουν από κοινού κατανομή που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

y	-2	-1	0	1	2
x					
1	3/50	1/10	b	1/10	3/50
2	1/30	0	1/5	0	1/30
3	1/30	1/10	b	1/10	1/30

Να βρεθούν η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του X και του Y καθώς και η συνδιακύμανσή τους.

43. **(Απλά ζεύγη τυχαίων μεταβλητών)** Για κάθε μια από τις ακόλουθες από κοινού μάζες:

(α') Βρείτε τις περιθώριες μάζες.

(β') Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων $\{X \leq 0\}$, $\{X \leq Y\}$ και $\{X = -Y\}$.

(γ') Βρείτε την συνδιακύμανση $\text{COV}(X, Y)$ των T.M. X και Y , και αποφανθείτε αν οι T.M. είναι ανεξάρτητες ή/και ασυσχέτιστες.

x	-1	0	1
y			
-1	1/6	0	1/6
0	0	1/3	0
1	1/6	0	1/6

x	-1	0	1
y			
-1	1/9	1/9	1/9
0	1/9	1/9	1/9
1	1/9	1/9	1/9

x	-1	0	1
y			
-1	0	0	1/3
0	0	1/3	0
1	1/3	0	0

44. **(Σφαιρίδια)** Παίρνουμε 3 σφαιρίδια από ένα δοχείο που έχει 2 λευκά, 3 μαύρα, και 2 κόκκινα σφαιρίδια. Όλοι οι συνδυασμοί 3 σφαιριδίων είναι εξίσου πιθανό να προκύψουν. Έστω X το πλήθος των λευκών και Y το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων που παίρνουμε.

(α') Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα $p_{XY}(x, y)$.

(β') Σας συμφέρει να στοιχηματίσετε με απόδοση $1 - 1$ (δηλαδή αν κερδίσετε λαμβάνετε ένα ποσό A , και αν χάσετε δίνετε το ίδιο ποσό A) ότι θα εμφανιστεί ακριβώς 1 μαύρο σφαιρίδιο;

45. **(Λαχειοφόρος αγορά)** Σε μια λαχειοφόρο αγορά υπάρχουν 8 λαχνοί, εκ των οποίων κερδίζουν οι δύο, από ένα δώρο ο καθένας (τα δύο δώρα είναι πανομοιότυπα). Δύο άτομα αγοράζουν από δύο λαχνούς ο καθένας. Έστω $X, Y \in \{0, 1, 2\}$ το πλήθος των δώρων που κερδίζει ο καθένας.

(α') Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y)$, για κάθε $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$. Αποτυπώστε τη σε ένα πίνακα 3×3 .

(β') Βάσει του προηγούμενου σκέλους, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A να πάρουν και τα δύο δώρα οι δύο διαγωνιζόμενοι; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας (οποιοσδήποτε) από τους δύο να πάρει και τα δύο δώρα; Επίσης, υπολογίστε τις μάζες $p_X(x)$, $p_Y(y)$, τις μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$, και την συνδιακύμανση $\text{COV}(X, Y)$.

Δώστε όλα τα αποτελέσματα σε μορφή απλών κλασμάτων.

46. **(Αγώνας Ποδοσφαίρου)** Έστω αγώνας ποδοσφαίρου μεταξύ των ομάδων A και B . Το πλήθος των γκολ που βάζει η ομάδα A είναι μια T.M. X που λαμβάνει τις ακέραιες τιμές 0, 1, 2, όλες με πιθανότητα $1/3$, ενώ το πλήθος των γκολ που βάζει η ομάδα B είναι μια T.M. Y που λαμβάνει τις ακέραιες τιμές 0, 1, 2, 3, όλες με πιθανότητα $1/4$. Οι T.M. X, Y είναι ανεξάρτητες.

(α') Υπολογίστε την από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y)$. Πόση είναι η συνδιακύμανση των X, Y ;

(β') Υπολογίστε την κατανομή της T.M. $Z = |X - Y|$ και τη μέση τιμή $E(Z)$.

47. **(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών)** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε από τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι από κάθε είδος;

48. **(Παλτά)** 30 άτομα φοράνε όλα το ίδιο παλτό, με μόνη διαφορά ότι τα 10 παλτά έχουν μέγεθος small, τα 10 παλτά έχουν μέγεθος medium, και τα 10 παλτά έχουν μέγεθος large. Τα άτομα πηγαίνουν σε μια σύσκεψη, και φεύγοντας παίρνουν ένα παλτό στην τύχη. Όλες οι μεταθέσεις παλτών είναι εξίσου πιθανές. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του πλήθους των ατόμων που φεύγουν με παλτό στο νούμερό τους.

7η Ομάδα Ασκήσεων

49. **(Χρόνος ολοκλήρωσης αγώνα)** Ένας παίκτης χρειάζεται χρόνο T για να ολοκληρώσει έναν αγώνα, όπου το T είναι συνεχής T.M. που μετράται σε λεπτά και με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} b(x - a + 1), & a - 1 \leq x \leq a, \\ b(a + 1 - x), & a \leq x \leq a + 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οι a, b είναι άγνωστες σταθερές. Δίνεται, επίσης, ότι $E(T) = 10$ λεπτά.

(α') Να σχεδιάσετε την $f(x)$ (Υπόδειξη: κάντε αυτό το σκέλος πριν το επόμενο).

(β') Να προσδιορίσετε τις τιμές των a, b .

(γ') Αν ο παίκτης παίζει 5 τέτοιους αγώνες, ποια είναι η πιθανότητα να ολοκληρώσει τουλάχιστον 2 από αυτούς σε λιγότερο από 10 λεπτά, αν ο χρόνος που χρειάζεται σε κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητος από αγώνα σε αγώνα;

50. **(Καντάδες)** Κάθε βράδυ ο Ρωμαίος κάνει μια καντάδα στην Ιουλιέτα. Η διάρκεια της καντάδας του είναι μια συνεχής Τ.Μ. X (σε λεπτά) με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & x \in [0, 1], \\ ax, & x \in [1, 3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Αν ο χρόνος ξεπεράσει τα 2 λεπτά, η μητέρα της Ιουλιέτας του πετάει έναν κουβά με μπουγαδόνερο.

(α') Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a .

(β') Έστω πως ο Ρωμαίος σταματάει τις καντάδες μόλις φάει έναν κουβά νερό στο κεφάλι. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του συνολικού πλήθους καντάδων που θα κάνει (συμπεριλαμβανομένης της τελευταίας);

(γ') Έστω τώρα πως ο Ρωμαίος συνεχίζει τις καντάδες ακόμα κι αν κάποιες μέρες του ρίξουν τον κουβά. Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο βδομάδες (14 ημέρες) να καταφέρει να κάνει ακριβώς 10 καντάδες χωρίς να του ρίξει η μητέρα της Ιουλιέτας τον κουβά;

51. **(Λεωφορείο)** Βρίσκεστε σε μία στάση λεωφορείων και περιμένετε το επόμενο δρομολόγιο. Από την εμπειρία σας ξέρετε ότι πρόκειται να έρθει οποιαδήποτε χρονική στιγμή στα επόμενα 10 λεπτά, χωρίς κάποιο υποδιάστημα να είναι αναλογικά πιθανότερο από κάποιο άλλο.

(α') Εάν X είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του λεωφορείου, ποια η κατανομή του; Ποιος ο μέσος χρόνος αναμονής;

(β') Εάν έχουν περάσει ήδη 7 λεπτά χωρίς να έχει έρθει το λεωφορείο, ποια η πιθανότητα ότι θα περιμένετε για ακόμη ένα λεπτό τουλάχιστον, δηλαδή ποια η τιμή της $P(X > 7 + 1 | X > 7)$;

(γ') Έστω η συνάρτηση $\hat{F}(x) = P(X \leq 7 + x | X > 7)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και θεωρήστε την παράγωγο $\hat{f}(x) = \hat{F}'(x)$. Σχεδιάστε τη γραφική παράστασή της $\hat{f}(x)$ και συγκρίνετέ τη με την πυκνότητα $f(x)$ της X .

(δ') Τι συμπεραίνετε για το χρόνο άφιξης του λεωφορείου εάν ήδη έχουν περάσει 7 λεπτά χωρίς να έχει έρθει; Είναι λογικό;

52. **(Υπολογισμός μέσης τιμής)** Έστω μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \in [0, 1], \\ cx^{3/2}, & x \in [1, 4], \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

Βρείτε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $Y = \sqrt{X}$.

53. **(Δορυφόρος)** Ο χρόνος μετάδοσης ενός μηνύματος το οποίο στέλνει ένας δορυφόρος στη γη, είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή (σε λεπτά) με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0, 1], \\ a, & x \in [1, 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Αν ο χρόνος μετάδοσης ξεπεράσει τα 1.9 λεπτά, θεωρείται ότι υπήρξε σφάλμα στην αποστολή. Επίσης, οι χρόνοι μετάδοσης διαδοχικών μηνυμάτων είναι ανεξάρτητοι.

(α') Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a .

(β') Έστω πως ο δορυφόρος σταματάει την αποστολή μηνυμάτων μόλις υπάρξει ένα σφάλμα. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του συνολικού πλήθους μηνυμάτων που στέλνονται;

(γ') Αν τώρα υποθέσουμε ότι σε μια μέρα στέλνονται 18 τέτοια μηνύματα κι ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, ποια είναι η πιθανότητα να φθάσουν σωστά μόνο τα 16 από τα 18 σε μια μέρα;

54. **(Συνδυασμός πυκνοτήτων)** Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο πυκνότητες πιθανότητας, των Τ.Μ. X και Y αντίστοιχα. Έστω η συνάρτηση $h(x) = af(x) + (1-a)g(x)$, όπου $a \in (0, 1)$.

(α') Να δείξετε ότι η $h(x)$ είναι επίσης πυκνότητα πιθανότητας, έστω μιας Τ.Μ. Z .

(β') Πόση είναι η $E(Z)$;

(γ') Πόση είναι η $E(Z^2)$;

(δ') Πόση είναι η $\text{VAR}(Z)$;

Οι απαντήσεις σας στα σκέλη (β'), (γ'), (δ') να δοθούν συναρτήσει των $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ και a .

55. **(Ακέραιο μέρος)** Έστω η συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c + \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α') Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;

(β') Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$;

(γ') Ορίζουμε την Τ.Μ. $Y = \lfloor X \rfloor$, δηλαδή το ακέραιο μέρος του X . (Επομένως, το Y είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον X .) Ποια είναι η μάζα του Y ;

56. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v}e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X , δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X . Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α') Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v ;

(β') Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \dots, 10$.

8η Ομάδα Ασκήσεων

57. **(Πολύτεκνοι)** Μία πολύτεκνη νοσηλεύτρια έχει 6 παιδιά, καθένα εκ των οποίων, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα:

(α') θα αναπτύξει σε μεγάλη ηλικία το νόσημα K , με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, και

(β') θα έχει διάρκεια ζωής κανονικά κατανομημένη με μέση τιμή $\mu = 80$ έτη και τυπική απόκλιση $\sigma = 5$ έτη.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α') Ποια είναι η πιθανότητα p ακριβώς 2 παιδιά να εμφανίσουν το νόσημα K ;

(β') Δώστε μια ακριβή έκφραση (χωρίς να υπολογίσετε αριθμητική τιμή) για την πιθανότητα κανένα παιδί να μην ζήσει περισσότερο από 90 χρόνια.

58. **(Ομάδα Μπάσκετ)** Σε ένα λύκειο, υπάρχουν 300 αγόρια. Καθένα από αυτά έχει τυχαίο ύψος που δίνεται από την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1.70$ m και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.1$ m. Τα ύψη των αγοριών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ο γυμναστής του σχολείου καλεί στην ομάδα μπάσκετ για τη θέση του σέντερ όσα αγόρια έχουν ύψος άνω του 1.95 m. Δώστε ένα απλό προσεγγιστικό τύπο για την πιθανότητα q ο προπονητής του μπάσκετ να καλέσει ακριβώς 2 αγόρια για τη θέση του σέντερ.

59. **(Κέρμα)** Έστω Τ.Μ. X ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0, 1]$. Έστω Y Τ.Μ. εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\theta = 1$. Έστω Τ.Μ. Z που ορίζεται ως εξής: ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα και αν έρθει γράμματα, τότε $Z = X$. Αν έρθει κορώνα, τότε $Z = Y$.

(α') Ποια είναι η πιθανότητα $P(Z < \frac{1}{2})$;

(β') Υπολογίστε την κατανομή και την πυκνότητα του Z .

60. **(Delivery)** Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο Α και πίτσα από το εστιατόριο Β. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 30 για το εστιατόριο Α και την εκθετική κατανομή με παράμετρο 20 για το εστιατόριο Β. (Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι.)

(α') Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες. (Υπόδειξη: εάν X_A, X_B οι χρόνοι παράδοσης από τα εστιατόρια Α και Β αντίστοιχα, πρώτα βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της $\max(X_A, X_B)$, έπειτα την πυκνότητα και τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή.)

(β') Εάν δεν περιμένετε και τις δύο παραγγελίες για να αρχίσετε το γεύμα, πόσος κατά μέσο όρο χρόνος θα περάσει μέχρι να φάνε οι «τυχεροί» των οποίων η παραγγελία παραδίδεται πρώτη;

61. **(Τυχαία προγράμματα)** Η διάρκεια εκτέλεσης ενός τυχαίου προγράμματος σε έναν υπολογιστή είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\lambda = 1/60$ δευτερόλεπτα. Αν ο υπολογιστής επεξεργάζεται ταυτόχρονα 20 τέτοια προγράμματα, ποια είναι η πιθανότητα να εξακολουθούν να τρέχουν τουλάχιστον 3 προγράμματα 90 δευτερόλεπτα μετά την είσοδό τους;

62. **(Υπολογισμοί πιθανοτήτων Γκαουσιανής Τ.Μ.)** Έστω X Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή m και διασπορά σ^2 . Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες:

(α') $P(X < m)$.

(β') $P(|X - m| > k\sigma)$, $k = 1, 2, 3$.

(γ') $P(X > m + k\sigma)$, $k = 1.28, 3.09$.

63. **(Κανάλι)** Ένα επικοινωνιακό κανάλι λαμβάνει ως είσοδο ένα σήμα τάσης V και δίνει ως έξοδο μια τάση $Y = V + N$, όπου N είναι γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = 1$. Το κανάλι χρησιμοποιείται για να μεταδώσει δυαδική πληροφορία ως εξής:

(α') Για να μεταδοθεί 0 η είσοδος είναι $V = -1$.

(β') Για να μεταδοθεί 1 η είσοδος είναι $V = 1$.

Ο δέκτης αποφασίζει ότι στάλθηκε 0 αν $Y < 0$, και 1 αν $Y > 0$. Δίνεται ότι οι V, N είναι ανεξάρτητες, δηλαδή ένα ενδεχόμενο που αφορά την πρώτη και ένα ενδεχόμενο που αφορά την δεύτερη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Βρείτε την πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα στη μετάδοση αν έχει μεταδοθεί 0, και την πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα στη μετάδοση αν έχει μεταδοθεί 1.

9η Ομάδα Ασκήσεων

64. **(Γεωμετρικό ξυπνητήρι)** Ένα «γεωμετρικό ξυπνητήρι» χτυπάει X λεπτά μετά τη ρύθμισή του, όπου η Τ.Μ. X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0, 1)$.

Έχετε στη διάθεσή σας δύο γεωμετρικά ξυπνητήρια Α και Β. Το Α χτυπάει κατά μέσο όρο 10 λεπτά μετά τη ρύθμισή του ενώ το ίδιο ισχύει και για το Β. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι που χτυπούν τα ξυπνητήρια είναι ανεξάρτητοι.

(α') Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν μέχρι να χτυπήσει το πρώτο από τα ξυπνητήρια.

(β') Αφότου χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι πόσος επιπλέον χρόνος περνάει μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο;

(γ') Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν, από την αρχή του χρόνου, μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο ξυπνητήρι.

65. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Οι από κοινού συνεχείς Τ.Μ. X, Y έχουν την από κοινού πυκνότητα

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x + 2y), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α') Ποια είναι η μέση τιμή $E[XY]$;

(β') Ποιες είναι οι περιθώριες $f_X(x), f_Y(y)$;

66. **(Πελταστές)** Πρόσφατες αρχαιολογικές ανασκαφές επιβεβαίωσαν την αναφορά του Ηροδότου ότι ένας Σπαρτιάτης πελταστής της κλασσικής εποχής μπορούσε να ρίξει το δόρυ σε μια απόσταση X ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των 60 και 150 μέτρων, μπορούσε να εκτοξεύσει ένα λίθο με χρήση σφεντόνας σε μια απόσταση Y επίσης ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των 90 και 210 μέτρων, και, επιπλέον, τα X, Y ήταν ανεξάρτητα. Βάσει των άνω:
- (α') Γράψτε εκφράσεις για τις πυκνότητες $f_X(x), f_Y(y), f_{XY}(x, y)$. Επίσης, δώστε μια έκφραση για την πιθανότητα $P(X > Y)$ σε μορφή διπλού ολοκληρώματος.
- (β') Υπολογίστε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος του προηγούμενου σκέλους.
67. **(Age of Empires Duels)** Ένας ιππότης μάχεται με ένα καταπέλτη μέχρι θανάτου. Ο ιππότης θα επιτύχει την εξόντωση του καταπέλτη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής T.M. X κατανομημένη ομοιόμορφα μεταξύ των χρόνων 10 και 20. Ο καταπέλτης θα πετύχει την εξόντωση του ιππότη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής T.M. Y εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\theta = 15$. Οι T.M. X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- (α') Γράψτε αναλυτικά ως κλαδική συνάρτηση την από κοινού πυκνότητα $f_{XY}(x, y)$ των X, Y . Σχεδιάστε στο επίπεδο xy το χωρίο όπου η $f_{XY}(x, y)$ λαμβάνει θετικές τιμές.
- (β') Ποια είναι η πιθανότητα $P(X > Y)$ να εξοντώσει ο καταπέλτης πρώτος τον ιππότη;
68. **(Φορολογία)** Σε μια χώρα, το ετήσιο φορολογητέο εισόδημα X (σε χιλιάδες ευρώ) ενός πολίτη έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10. Τα εισοδήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι πολίτες πληρώνουν σε φόρο εισοδήματος το 10% του μέρους του εισοδήματός τους που υπερβαίνει τις 5 χιλιάδες ευρώ. (Αν το εισόδημα ενός πολίτη είναι κάτω από 5 χιλιάδες, τότε ο πολίτης δεν πληρώνει φόρο.) Έστω Y ο φόρος που πληρώνει κάποιος πολίτης.
- (α') Ποια η πιθανότητα ένας οποιοσδήποτε πολίτης να πληρώνει φόρους;
- (β') Εκφράστε το Y σαν συνάρτηση του X .
- (γ') Αν η χώρα έχει 10^6 πολίτες, πόσα έσοδα θα έχει κατά μέσο όρο το χρόνο;

10η Ομάδα Ασκήσεων

69. **(Πόσο καλό είναι το φράγμα Chebyshev;)** Έστω T.M. X με μέση τιμή μ . Έστω επίσης σταθερά $c > 0$. Συγκρίνετε το φράγμα που δίνει η ανισότητα Chebyshev για την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\{|X - \mu| \geq c\}$ με την ακριβή πιθανότητα, για τις ακόλουθες περιπτώσεις:
- (α') Η X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-b, b]$.
- (β') Η X έχει την κατανομή Laplace με παράμετρο $a > 0$, δηλαδή
- $$f_X(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$
- (γ') Η X έχει την κανονική κατανομή.
- Σε όλες τις περιπτώσεις, σχολιάστε πόσο καλό είναι το φράγμα (δηλαδή πόσο μεγαλύτερο είναι από την πραγματική τιμή της πιθανότητας).
70. **(Age of Empires Towers)** Κάθε χτύπημα ενός πελταστή προκαλεί στο στόχο του απώλεια X μονάδων ζωής, όπου X T.M. με την ακόλουθη μάζα πιθανότητας:

$$p_X(x) = \begin{cases} (x-4)/K, & x = 5, 6, 7, 8, 9, 10, \\ 0, & x \neq 5, 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

- (α') Ποια είναι η τιμή της σταθεράς K ;
- (β') Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της X ;
- (γ') Αν ο πελταστής χτυπάει επαναλαμβανόμενα ένα πύργο με 850 μονάδες ζωής, ποια η πιθανότητα (προσεγγιστικά) να χάσει ο πύργος όλες τις μονάδες ζωής του με 100 ή λιγότερα χτυπήματα; Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Μπορείτε να γράψετε την απάντησή σας συναρτήσει της μέσης τιμής και της διασποράς του προηγούμενου σκέλους, χωρίς να έχετε υπολογίσει τις τιμές τους. Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

71. **(Καρπούζια)** Ένα ανοιχτό φορτηγάκι μπορεί να αντέξει συνολικά 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος κάθε καρπουζιού από μια καλλιέργεια είναι Τ.Μ. με μέση τιμή 15 κιλά και τυπική απόκλιση 1 κιλό. Έστω N_0 το μέγιστο πλήθος των καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι ώστε η πιθανότητα να υπερβεί το βάρος τους τα 3000 κιλά να είναι μικρότερη από 10^{-4} . Βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το N_0 . Η συνθήκη μπορεί να εμφανίζει τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.
72. **(Καγκουρό)** Σύμφωνα με έγκριτες μελέτες Αυστραλών αλματολόγων, ένα ενήλικο καγκουρό εκτελεί άλματα τυχαίου μήκους X με μέση τιμή $\mu = 2$ μέτρα και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$ μέτρο αν είναι αρσενικό, και με μέση τιμή $\mu = 1.9$ μέτρα και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$ μέτρο αν είναι θηλυκό.
- (α') Υπολογίστε την πιθανότητα, αν ένα αρσενικό καγκουρό κάνει 100 διαδοχικά άλματα, η συνολική απόσταση που θα διανύσει να υπερβαίνει τα 205 μέτρα. Επαναλάβετε τον υπολογισμό για την περίπτωση που το καγκουρό είναι θηλυκό.
- (β') Ένα καγκουρό έχει πιθανότητα 0.5 να είναι αρσενικό (και προφανώς 0.5 να είναι θηλυκό). Αν παρατηρήσουμε ότι 100 διαδοχικά άλματα καγκουρό είχαν συνολικό μήκος μεγαλύτερο των 205 μέτρων, ποια είναι η πιθανότητα το καγκουρό να είναι αρσενικό;
73. **(Κολοκύθες)** Το βάρος μιας κολοκύθας είναι ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ των 5 και 11 κιλών. Μια κολοκύθα είναι ακατάλληλη προς πώληση αν το βάρος της ξεπερνάει τα 10 κιλά. Σε ένα χωράφι με 150 κολοκύθες, ποια η πιθανότητα, κατά προσέγγιση, να είναι περισσότερες από 30 οι ακατάλληλες; Υποθέτουμε ότι τα βάρη διαφορετικών κολοκυθών είναι ανεξάρτητα.
74. **(Απρόσεκτος οδηγός)** Ένας απρόσεκτος οδηγός δέχεται X κλήσεις για υπερβολική ταχύτητα και Y κλήσεις για παράνομη στάθμευση κάθε βδομάδα. Η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους είναι η ακόλουθη:

y	1	2	3	4
x				
0	1/8	1/16	1/16	1/16
1	1/16	1/8	1/8	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/8

Οι κλήσεις για υπερβολική ταχύτητα συνοδεύονται από πρόστιμο 500 ευρώ και οι κλήσεις για παράνομη στάθμευση συνοδεύονται από πρόστιμο 250 ευρώ. Ο οδηγός πάντα πληρώνει τα πρόστιμα και δεν δέχεται κλήσεις για άλλο λόγο.

- (α') Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των X και Y ;
- (β') Ποια είναι η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή, και η διασπορά του ποσού Z που πληρώνει κάθε εβδομάδα ο οδηγός για πρόστιμα;
- (γ') Ποια είναι η πιθανότητα σε 100 εβδομάδες, ο οδηγός να πληρώσει πάνω από 120000 ευρώ;
75. **(Θερμίδες)** Ένας διαγωνιζόμενος σε παιχνίδι επιβίωσης λαμβάνει, κάθε μέρα, φαγητό που αναλογεί είτε σε 1 μερίδα φαγητό με πιθανότητα $\frac{4}{5}$, είτε σε 5 μερίδες φαγητού, με πιθανότητα $\frac{1}{5}$ επειδή εκείνη τη μέρα κέρδισε κάποιο έπαθλο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τις πρώτες 100 μέρες του παιχνιδιού ο μέσος όρος μερίδων φαγητού τη μέρα με το οποίο τρέφεται ο διαγωνιζόμενος να υπερβαίνει τις δύο.
76. **(Ποδηλάτης)** Κάποιος ποδηλάτης κάθε μέρα προπονείται κάνοντας X μέτρα ποδήλατο (ανεξάρτητα από μέρα σε μέρα), όπου η τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ χιλίων μέτρων και δέκα χιλιομέτρων. Θεωρεί ότι η προπόνησή του είναι άριστη όταν κάνει περισσότερα από 9955 μέτρα.
- (α') Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα σε ένα χρόνο (300 ημέρες προπονήσεων) να έκανε ακριβώς τρεις άριστες προπονήσεις.
- (β') Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα σε ένα χρόνο (300 ημέρες) το συνολικό μήκος των προπονήσεών του να ξεπερνάει τα χίλια εφτακόσια χιλιόμετρα.
77. **(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)** Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 110 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Υποθέτουμε ότι ένας φοιτητής απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, ανεξάρτητα τη μια απ' την άλλη.
- (α') Αν η κάθε ερώτηση έχει 55 δυνατές απαντήσεις, βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα στο τέλος ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά ακριβώς 2 ερωτήσεις.
- (β') Έστω τώρα πως η κάθε ερώτηση έχει μόνο 4 δυνατές απαντήσεις, και πως για κάθε σωστή απάντηση ο εξεταζόμενος παίρνει 10 βαθμούς και για κάθε λάθος χάνει 3 βαθμούς. Βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα να πάρει τελικά θετικό βαθμό.