Ομάδα Ασκήσεων 6 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 41

$px(0) = 1/8 + 1/8 + 1/16 = 5/16$

$px(1) = 1/8 + 1/16 + 1/16 = 1/8 + 2/16 = 1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4$

$px(2) = 1/8 + 1/16 + 1/16 = 1/8 + 2/16 = 1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4$

$px(3) = 1/16 + 1/16 + 1/16 = 3/16$

$py(0) = 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/16 = 7/16$

$py(1) = 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 5/16$

$py(2) = 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = \frac{4}{16} = 1/4$

a) $E(X) = 0 \cdot 5/16 + 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 3/16 = 1/4 + 1/2 + 9/16 = 21/16$

$E(Y) = 0 \cdot 7/16 + 1 \cdot 5/16 + 2 \cdot 1/4 = 5/16 + 1/2 = 13/16$

$VAR(X) = E[(X - E(X))^2] = (0 - 21/16)^2 \cdot 5/16 + (1 - 21/16)^2 \cdot 1/4$
$+ (2 - 21/16)^2 \cdot 1/4 + (3 - 21/16)^2 \cdot 3/16 = \frac{311}{256}$

$VAR(Y) = E[(Y - E(Y))^2] = (0 - 13/16)^2 \cdot 7/16 + (1 - 13/16)^2 \cdot 5/16$
$+ (2 - 13/16)^2 \cdot 1/4 = \frac{167}{256}$

B) $pxy(0,1) = 1/8 \neq 5/16 \cdot 5/16 = px(0)py(1)$

Αφού υπάρχει έστω και ένα παράδειγμα για το οποίο $pxy(x,y) \neq P(X=x)P(Y=y)$, τα X, Y δεν είναι ανεξάρτητα

γ) Οι θερμίδες από τα σάντουιτς είναι $1024X$, ενώ από τα ψάρια $512Y$. Άρα κατά μέσο όρο οι θερμίδες από τα σάντουιτς είναι $E(1024X) = 1024E(X)$
$= 1024 \cdot 21/16 = 1344$
και από τα ψάρια $E(512Y) = 512E(Y) = 512 \cdot 13/16$
$= 416$
$1344 > 416$, άρα με τα σάντουιτς θα προσφέρει περισσότερες θερμίδες.

δ) Έστω $A = 1024X + 512Y - 3000$ οι καθαρές θερμίδες
Ψάχνουμε την πιθανότητα $A > 0$.
$P(A>0) = P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=0) + P(X=3, Y=1)$
$+ P(X=3, Y=2) = 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 4/16 = 1/4$

Άσκηση 42

$p_Y(-2) = 3/50 + 1/30 + 1/30 = 3/50 + 2/30 = 19/150$

$p_Y(-1) = 1/10 + 0 + 1/10 = 2/10 = 1/5$

$p_Y(0) = 6 + 1/5 + 6 = 2б + 1/5$

$p_Y(1) = 1/10 + 0 + 1/10 = 2/10 = 1/5$

$p_Y(2) = 3/50 + 1/30 + 1/30 = 3/50 + 2/30 = 19/150$

Ξέρουμε ότι πρέπει $p_Y(-2) + p_Y(-1) + p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = 1$
$\Leftrightarrow 19/150 + 1/5 + 2б + 1/5 + 1/5 + 19/150 = 1$
$\Leftrightarrow 2б + 64/75 = 1$
$\Leftrightarrow 2б = 1 - 64/75$
$\Leftrightarrow б = 11/150$
κ' $p_Y(0) = 26/75$

$px(1) = 3/50 + 1/10 + 11/150 + 1/10 + 3/50 = 59/150$

$px(2) = 1/30 + 0 + 1/5 + 0 + 1/30 = 4/15$

$px(3) = 1/30 + 1/10 + 11/150 + 1/10 + 1/30 = 17/50$

$E(Y) = (-2)\,19/150 + (-1)\,1/5 + 0 \cdot 26/75 + 1 \cdot 1/5 + 2 \cdot 19/150 = 0$

$E(X) = 1 \cdot 59/150 + 2 \cdot 4/15 + 3 \cdot 17/50 = 146/75$

$VAR(Y) = E[(Y - E(Y))^2] = (-2-0)^2\, 19/150 + (-1-0)^2\, 1/5$
$+ (0-0)^2\, 26/75 + (1-0)^2\, 1/5 + (2-0)^2\, 19/150 = 106/75$

$VAR(X) = E[(X - E(X))^2] = (1 - 146/75)^2\, 59/150 + (2 - 146/75)^2\, 4/15$
$+ (3 - 146/75)^2\, 17/50 = 4109/5625$

$COV(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$
$= (1 - 146/75)(-2-0) \cdot 3/50 + (1 - 146/75)(-1-0) \cdot 1/10 + (1 - 146/75) \cdot 0 \cdot 11/150$
$+ (1 - 146/75)(1-0) \cdot 1/10 + (1 - 146/75)(2-0) \cdot 3/50 +$
$(2 - 146/75)((-2-0)1/30 + (-1-0)0 + (0-0) \cdot 1/5 + (1-0) \cdot 0 + (2-0) \cdot 1/30)$
$+ (3 - 146/75)((-2-0)1/30 + (-1-0)1/10 + (0-0)11/150 + (1-0)1/10 + (2-0)1/30)$
$= 0 + 0 + 0 = 0$

Άσκηση 43

(α)

1ος

$px(-1) = 1/6 + 0 + 1/6 = 2/6 = 1/3$
$px(0) = 0 + 1/3 + 0 = 1/3$
$px(1) = 1/6 + 0 + 1/6 = 2/6 = 1/3$
$py(-1) = 1/6 + 0 + 1/6 = 1/3$
$py(0) = 0 + 1/3 + 0 = 1/3$
$py(1) = 1/6 + 0 + 1/6 = 1/3$

2^{os}

$p_X(-1) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 3/9 = 1/3$

$p_X(0) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$

$p_X(1) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$

$p_Y(-1) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$

$p_Y(0) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$

$p_Y(1) = 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3$

3^{os}

$p_X(-1) = p_X(0) = p_X(1) = 0 + 0 + 1/3 = 1/3$

$p_Y(-1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 0 + 0 + 1/3 = 1/3$

(B)

1^{os}

$P(X \leq 0) = p_X(-1) + p_X(0) = 1/3 + 1/3 = 2/3$

$P(X \leq Y) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=0)$

$+ P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$

$= 1/6 + 0 + 1/6 + 1/3 + 0 + 1/6 = 5/6$

$P(X = -Y) = P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=-1)$

$= 1/6 + 1/3 + 1/6 = 2/3$

2^{os}

$P(X \leq 0) = p_X(-1) + p_X(0) = 1/3 + 1/3 = 2/3$

$P(X \leq Y) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1)$

$+ P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)$

$= 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 = 6/9 = 2/3$

$P(X = -Y) = P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=-1)$

$= 1/9 + 1/9 + 1/9 = 3/9 = 1/3$

$3^{ος}$

$P(X\leq 0) = p_X(-1)+p_X(0) = 1/3+1/3 = 2/3$

$P(X\leq Y) = P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=0)+P(X=-1,Y=1)+P(X=0,Y=0)$
$+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)$
$= 0+0+1/3+1/3+0+0 = 2/3$

$P(X=-Y) = P(X=-1,Y=1)+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=-1)$
$= 1/3+1/3+1/3 = 1$

γ') $1^{ος}$

$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY)-E(X)E(Y)$
$= (-1-0)(-1-0)\cdot 1/6+(0-0)(-1-0)\cdot 0+(1-0)(-1-0)\cdot 1/6+$
$(-1-0)(0-0)\cdot 0+(0-0)(0-0)\cdot 1/3+(1-0)(0-0)\cdot 0+$
$(-1-0)(1-0)\cdot 1/6+(0-0)(1-0)\cdot 0+(1-0)(1-0)\cdot 1/6$
$= 1/6+(-1/6)+0+0+0+0+(-1/6)+0+1/6 = 0$, αφού
$E(X) = (-1)\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3 = 0$
$E(Y) = (-1)\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3 = 0$

Αφού $P(X=-1,Y=0) = 0 \neq P(X=-1)P(X=0) = 1/3\cdot 1/3 = 2/3$
και αφού $Cov(X,Y)=0$, οι X,Y δεν είναι ανεξάρτητες
αλλά είναι ασυσχέτιστες

$2^{ος}$

$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY)-E(X)E(Y)$
$= (-1-0)(-1-0)\cdot 1/9+(0-0)\cdot(-1-0)\cdot 1/9+(1-0)(-1-0)\cdot 1/9$
$+(0-0)\big((-1-0)+(0-0)+(1-0)\big)\cdot 1/9+(1-0)\big((-1-0)+(0-0)+(1-0)\big)\cdot 1/9$
$= 0+0+0 = 0$
$E(X) = (-1)\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3 = 0$
$E(Y) = (-1)\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3 = 0$

Αφού $\forall\ P(X=x,Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$ οι X,Y είναι ανεξάρτητες
και άρα είναι και ασυσχέτιστες

$3^{ος}$

$COV(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$=(-1-0)((-1-0).0+(0-0).0+(1-0)1/3)$

$+(0-0)((-1-0).0+(0-0).1/3+(1-0).0)$

$+(1-0)((-1-0).1/3+(0-0).0+(1-0).0)$

$=-1/3+0-1/3=-2/3$

$E(X)=(-1).1/3+0.1/3+1.1/3=0$

$E(Y)=(-1).1/3+0\,1/3+1.1/3=0$

Αφού $P(X=-1,Y=-1)=0\neq P(X=-1)P(Y=-1)=1/3.1/3=1/9$
οι X,Y δεν είναι ανεξάρτητες και αφού $COV(X,Y)\neq 0$
οι X,Y δεν είναι ασυσχέτιστες

Άσκηση 44

(α) X πλήθος λευκών, Y πλήθος μαύρων

$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)$

Γνωρίζοντας ότι υπάρχουν μόνο δύο λευκά πρέπει

$P(X=3,Y=0)=P(X=3,Y=1)=P(X=3,Y=2),P(X=3,Y=3)=0$

και αφού υπάρχουν και δύο μόνο κόκκινα, αναγκαστικά πρέπει
να επιλεχθεί 1 μαύρο ή άσπρο. Άρα

$P(X=0,Y=0)=0$

Επίσης, αφού επιλέγονται 3 σφαιρίδια, πρέπει το $X+Y\leq 3$. Άρα

$P(X=1,Y=3)=P(X=2,Y=3)=P(X=2,Y=2)=0$

Υπάρχουν $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{6.7.5.4!}{3!4!}=35$ διαφορετικοί συνδυασμοί
από τους οποίους μπορούμε να πάρουμε 3 σφαιρίδια από τα 7.

$P(X=1,Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{2.3.2}{35}=\frac{12}{35}$

$P(X=1,Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{2.3}{35}=\frac{6}{35}$

$P(X=1,Y=0)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{2.1}{35}=\frac{2}{35}$

$P(X=0, Y=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 1}{35} = \frac{3}{35}$

$P(X=0, Y=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 2}{35} = \frac{6}{35}$

$P(X=0, Y=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$

$P(X=2, Y=0) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 \cdot 2}{35} = \frac{2}{35}$

$P(X=2, Y=1) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 \cdot 3}{35} = \frac{3}{35}$

y \ x	0	1	2	3
0	0	2/35	2/35	0
1	3/35	12/35	3/35	0
2	6/35	6/35	0	0
3	1/35	0	0	0

(B') Η πιθανότητα να κερδίσουμε είναι:

$P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1)$

$= 3/35 + 12/35 + 3/35 + 0 = 18/35 \simeq 0,51 > 0,5$, (51%) άρα μας συμφέρει να στοιχηματίσουμε

Άσκηση 45

Αφού έχουμε 2 δώρα συνολικά πρέπει:

$P(X=2, Y=2) = P(X=2, Y=1) = P(X=1, Y=2) = 0$

$P(X=0, Y=0) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{\frac{6!}{4!2!}}{\frac{8!}{4!4!}} = \frac{3}{14}$

$P(X=1, Y=1) = \frac{2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = \frac{1}{7}$

$P(X=1, Y=0) = \frac{2 \cdot 6 \cdot \binom{5}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = \frac{2}{7}$ κ' λόγω συμμετρίας $P(X=0, Y=1) = \frac{2}{7}$

$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}$ κ' λόγω συμμετρίας $P(X=\ , Y=\ ) = \frac{1}{28}$

y \ x	0	1	2
0	3/14	2/7	1/28
1	2/7	1/7	0
2	1/28	0	0

(B') $P(A) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) + P(X=0, Y=2) = 1/7 + 1/28 + 1/28 = 3/14$

$P(B) = P(X=2, Y=0) + P(X=0, Y=2) = 1/28 + 1/28 = 1/14$

$p_X(0) = 3/14 + 2/7 + 1/28 = 15/28$

$p_X(1) = 2/7 + 1/7 + 0 = 3/7$

$p_X(2) = 1/28 + 0 + 0 = 1/28$

$p_Y(0) = 3/14 + 2/7 + 1/28 = 15/28$

$p_Y(1) = 2/7 + 1/7 + 0 = 3/7$

$p_Y(2) = 1/28 + 0 + 0 = 1/28$

Λόγω συμμετρίας,

$E(X) = E(Y) = 0 \cdot 15/28 + 1 \cdot 3/7 + 2 \cdot 1/28 = 3/7 + 2/28 = 1/2$

$COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 \cdot 0 \cdot 3/14 + 1 \cdot 1 \cdot 1/7 + 2^2 \cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 1/7 - 1/4 = -3/28$

Άσκηση 46

$p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = 1/3$

$p_Y(0) = p_Y(1) = p_Y(2) = p_Y(3) = 1/4$

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες άρα

$P(X=x, Y=y) = p_X(x) p_Y(y)$, $x = 0,1,2$ κ' $y = 0,1,2,3$

$P(X=0, Y=0) = p_X(0) p_Y(0) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$ και αφού κάθε X είναι ισοπίθανο και κάθε Y επίσης τότε θα είναι:

$P(X=x, Y=y) = 1/12$, $x = 0,1,2$ κ' $y = 0,1,2,3$

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες άρα $COV(X, Y) = 0$

(B') $p_Z(0) = P(X=Y) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,2) = 3 \cdot 1/12 = 1/4$

$p_Z(1) = P(X=Y+1) + P(Y=X+1) = p_{XY}(1,0) + p_{XY}(0,1) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,1)$
$+ p_{XY}(2,3) = 5 \cdot 1/12 = 5/12$

$p_Z(2) = P(X=Y+2) + P(Y=X+2) = p_{XY}(0,2) + p_{XY}(2,0) + p_{XY}(1,3)$
$= 3 \cdot 1/12 = 3/12 = 1/4$

$p_Z(3) = P(Y=X+3) = p_{XY}(0,3) = 1/12$

$E(Z) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 5/12 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/12 = 5/12 + 1/2 + 1/4 = 7/6$

Άσκηση 47

Έστω X τ.μ που εκφράζει το πλήθος δοκιμών για την συλλογή όλων των n κουπονιών. και X_i με $i \in \{1,2 \dots n\}$ το πλήθος δοκιμών για την συλλογή ενός νέου κουπονιού με το πλήθος να μετράει από την εύρεση του $i-1$ κουπονιού. Η X_i είναι γεωμετρική με $p_i = (n-(i-1))/n$ και με μέση τιμή $1/p_i$ δηλαδή $n/(n-(i-1))$. Άρα

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = n \log n$$

Άσκηση 48

Έστω
$$X_i = \begin{cases} 1, & i \text{ με σωστό νούμερο με πιθανότητα } 1/3 \\ 0, & \text{διαφορετικά με πιθανότητα } 2/3 \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{30} X_i. \text{ Άρα } E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} E(X_i) = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Έχουμε ότι

$$E(X^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right)^2\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{30} X_j\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{30}\sum_{j=1}^{30} X_i X_j\right]$$

$= \sum_{i=1}^{30}\sum_{j=1}^{30} E(X_i X_j)$, έχουμε επίσης ότι:

$$E(X_iX_j) = 1\,P(X_iX_j=1) + 0\,P(X_iX_j=0)$$

$$= P(X_iX_j=1) = \begin{cases} \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29} & \text{αν } i \text{ και } j \text{ έχουν ίδιο νούμερο} \\ \frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29} & \text{αν } i \text{ δεν έχει το ίδιο νούμερο με } j \end{cases}$$

Άρα $VAR(X) = \sum_{i=1}^{30}\sum_{j=1}^{30} E(X_iX_j) - 100$