Ομάδα ασκήσεων 4

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 23

(α') $\lim_{x\to 0} \sin(\sin(x)) = \sin(0) = 0$

(β') $\lim_{x\to 0} \cos(\sin(x)) = \cos(0) = 1$

(γ') $\lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{x^2+1}{x^3+2}\right) = \tan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,72$

Άσκηση 24

Έστω $h(x) = f(x) - \frac{x}{2}$

$\cdot h(2) = f(2) - 1 = 2 - 1 = 1$

$\cdot h(4) = f(4) - 2 = 1 - 2 = -1$

} Από Θεώρημα Bolzano $\exists x_0 \in (2,4) : h(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) - \frac{x_0}{2} = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{x_0}{2}$

Άρα $h(2) \cdot h(4) < 0$,

Άσκηση 25

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2y = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 2ye^x = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$

$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$

$\cdot e^x > 0$, $y \geq 1$ άρα η $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ απορ

κ' e^x, $x \in [0, +\infty) \geq 1$ άρα πρέπει $y \pm \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$ γ'αυτό $y - \sqrt{y^2 - 1}$ απορ

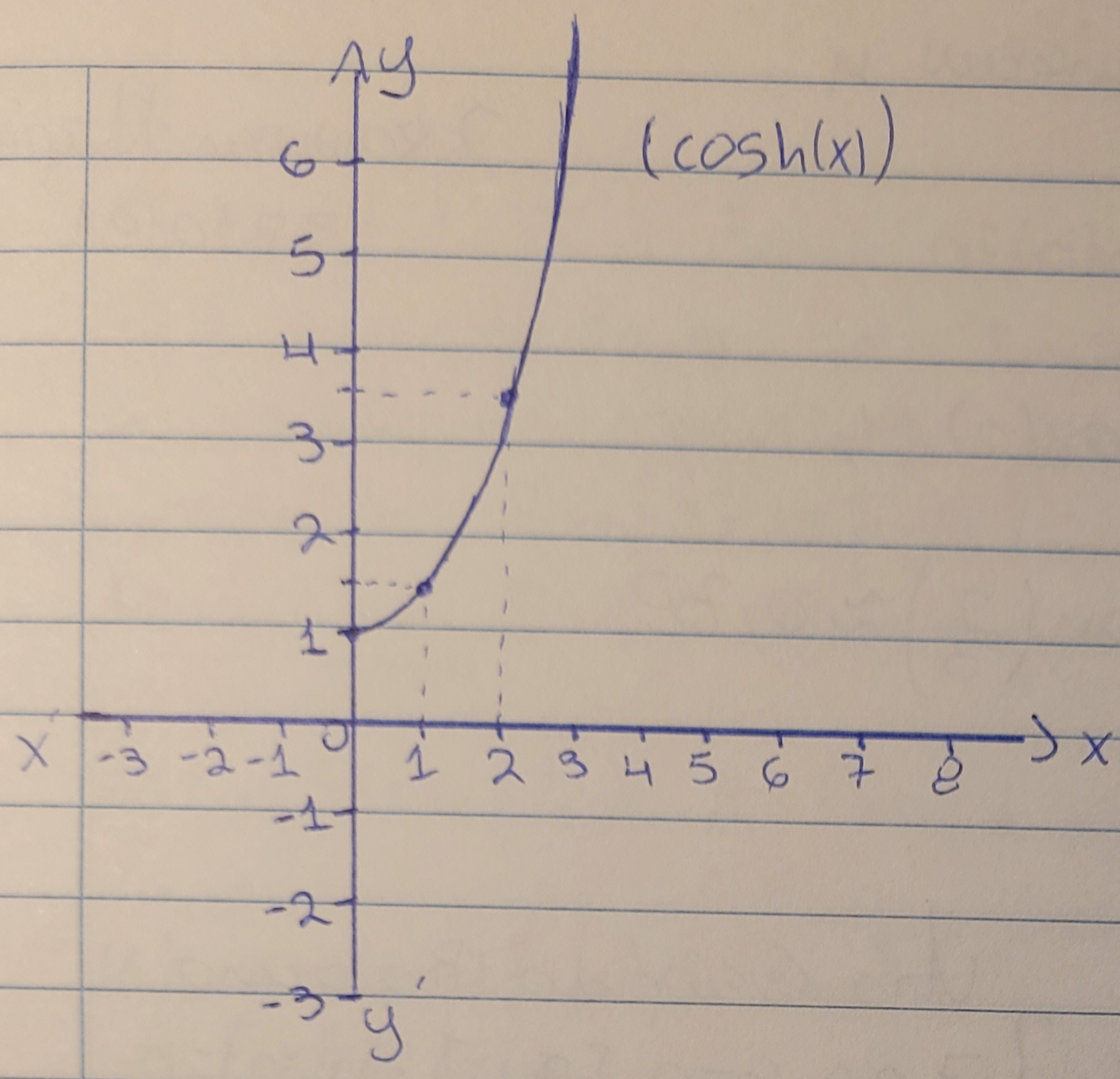
Άρα $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$

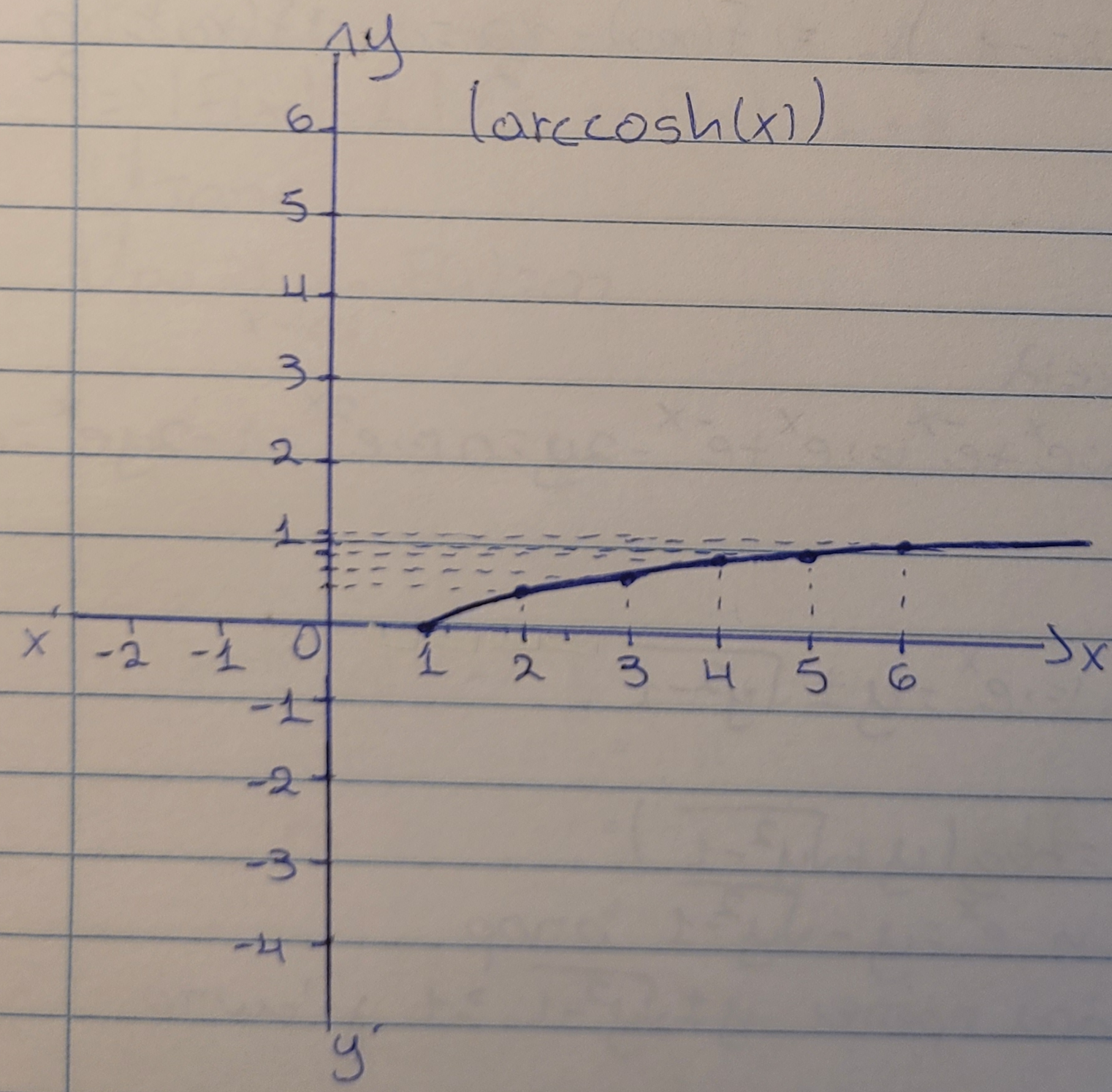
Άρα $\forall y \in [1, +\infty)$ ∃ μοναδικό x για το οποίο $\cosh(x) = y$

Άρα η $\cosh(x)$ έχει σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$ και είναι 1-1 στο $[0, +\infty)$

Η αντίστροφη της είναι η:

$\operatorname{arccosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$, $y \in [1, +\infty)$


y
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
x'
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
x
y'
(cosh(x))


y
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
x'
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6
x
y'
(arccosh(x))

Ackman 26

```
# Defining Function
def f(x):
    return x**3

# Implementing Bisection Method
def bisection(a,b,e):
    step=1
    print('\n\n*** BISECTION METHOD IMPLEMENTATION ***')
    condition = True
    print('n','a','b','m','f(a)','f(b)','f(m)')
    while condition:
        m=(a+b)/2
        print('%d %d %d %0.6f %d %d %0.6f'%(step,a,b,m,f(a),f(b),f(m)))
        if f(a) * f(m)<0:
            b = m
        else:
            a = m

        step=step+1
        condition = abs(f(m))>e
    print('\nRequired Root is: %0.8f' %m)
# Input Section
a = input('First End:')
b = input('Second End:')
e = input('Tolerable Error:')

# Converting input to Float
a = float(a)
b = float(b)
e = float(e)
```

```
# checking correctness of initial end values and
                                        bisecting
if f(a) * f(b) > 0.0:
    print('Given end values do not contain the root.')
    print('Try again with different end values.')
else:
    bisection(a,b,e)
```

Άσκηση 27

```
# Defining Function
def f(x):
    return 2*cos(x)-x
Bisection(1,3,0.0009)
```

} From Math import *

Required Root is: 1,02978516

Η συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα

Άσκηση 28

Έστω $x1, x2 \in \mathbb{R}$

$|F(x1)-F(x2)| = |A\cos(ax1+b) - A\cos(ax2+b)|$

$= A|\cos(ax1+b) - \cos(ax2+b)|$

$= 2A\left|\sin\left(\frac{a(x1+x2)+2b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a(x1-x2)}{2}\right)\right|$ $\left(\cos x-\cos y = 2\sin\frac{(x+y)}{2}\sin\frac{(y-x)}{2}\right)$

$\leq 2A\left|\sin\left(\frac{a(x1-x2)}{2}\right)\right|$ (αφού $|\sin x| \leq 1$)

$\leq Aa|x1-x2|$ (αφού $|\sin x| \leq |x|$)

Άρα η $F(x) = A\cos(ax+b)$ είναι Lipschitz συνεχής

με $C = Aa$