Ομάδα ασκήσεων 7 Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 40

Ορίζουμε διαμέριση P_n κ' $F(x)=x$

$P_n=\{p_0=0,\ p_1=\frac{a}{n},\ p_2=\frac{2a}{n},\ \dots\ p_n=\frac{na}{n}=a\}$

Γενικά: $p_i=\frac{ia}{n}$, $i=0,1,\dots,n$

η συνάρτηση F είναι αύξουσα κ' $m_i=F(p_{i-1})=p_{i-1}$

Το κάτω άθροισμα:

$$s(F;P_n)=\sum_{i=1}^{n} m_i(p_i-p_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(p_{i-1})(p_i-p_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)}{n}\cdot a\cdot\frac{a}{n}=a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)}{n^2}=\frac{n(n-1)}{2n^2}a^2=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Η ακολουθία $s(F;P_n)$ είναι αύξουσα κ' συγκλίνει στο $\frac{a^2}{2}$

$M_i=F(p_i)=p_i$

Το άνω άθροισμα:

$$S(F;P_n)=\sum_{i=1}^{n} M_i(p_i-p_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} p_i(p_i-p_{i-1})$$

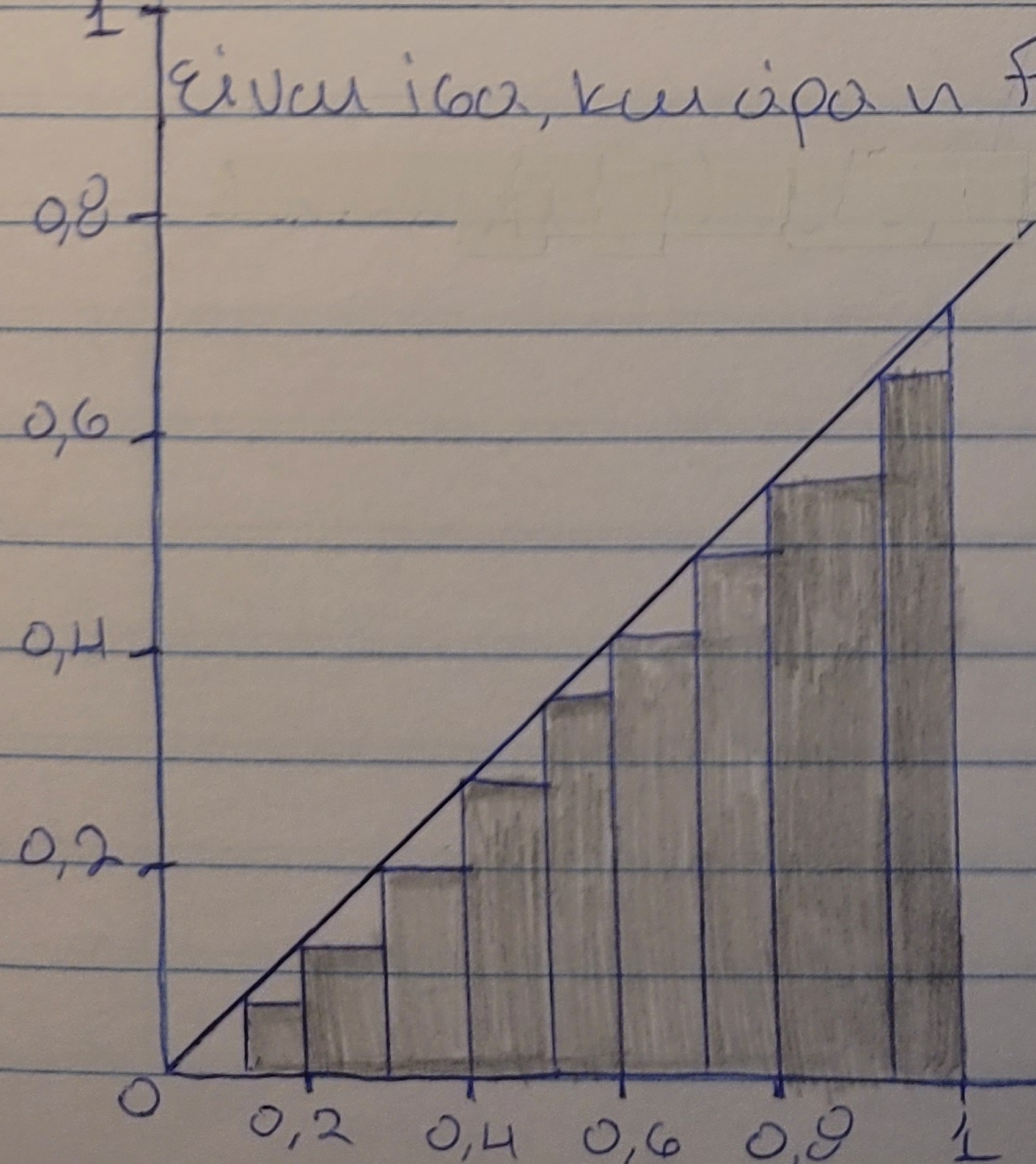
$$=\sum_{i=1}^{n} a^2\cdot\frac{i}{n^2}=a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}a^2=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

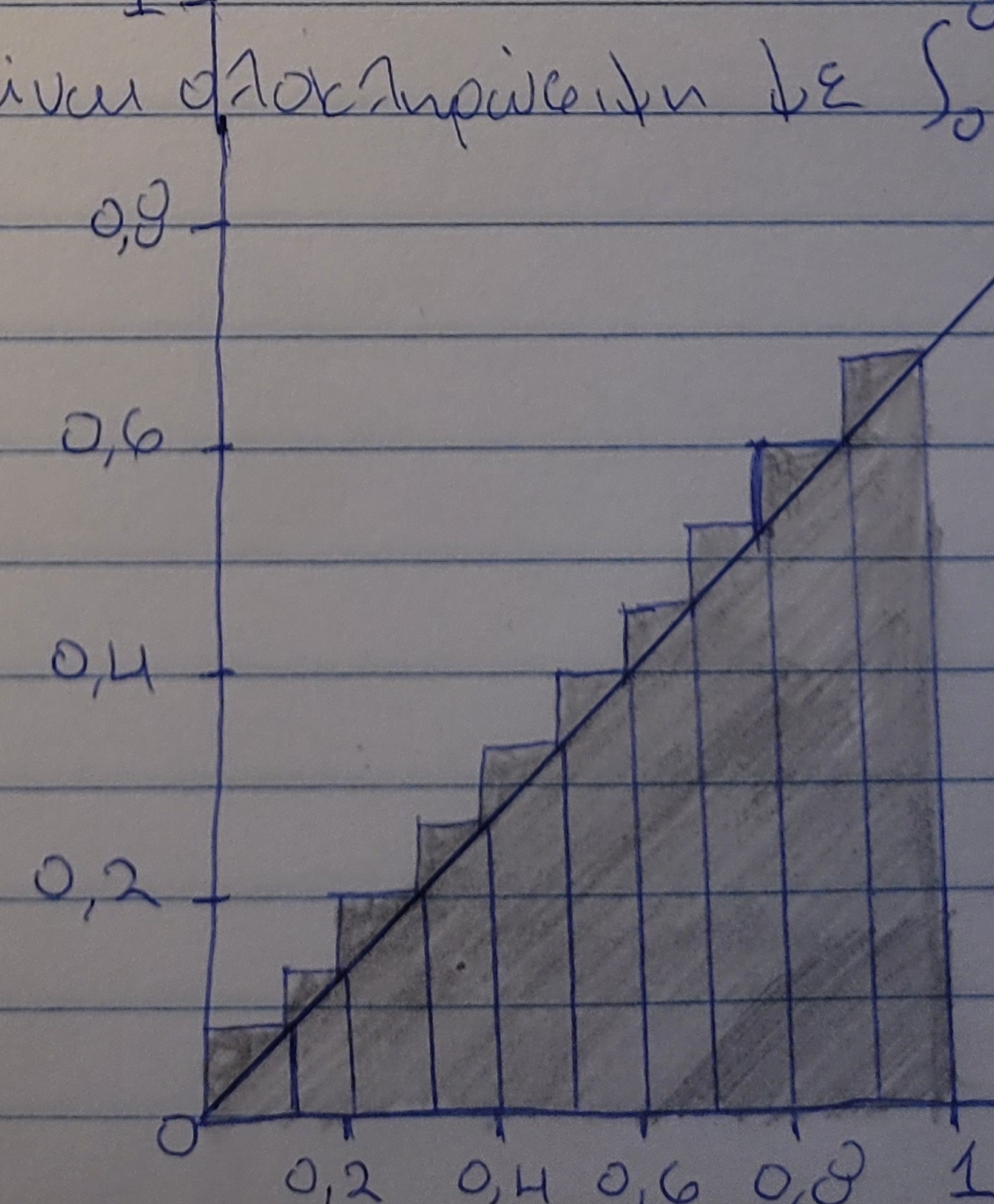
Η ακολουθία $S(F;P_n)$ είναι φθίνουσα κ' συγκλίνει στο $\frac{a^2}{2}$

Αφού $\underline{\int_0^a} F \geq \frac{a^2}{2}$ κ' $\overline{\int_0^a} F \leq \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow \underline{\int_0^a} F \leq \overline{\int_0^a} F$ άρα το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα

είναι ίσα, και άρα η F είναι ολοκληρώσιμη με $\int_0^a F=\frac{a^2}{2}$





Άσκηση 41

Έστω x_0: $f(x_0)>0$ κ' x_0 σημείο του $[a,b]$ δηλαδή $x_0\in[a,b]$

Έστω $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$ άρα από τον ορισμό της συνέχειας Cauchy $\exists\, \delta>0: (x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq[a,b]$ κ' $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ να είναι:

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow f(x)-f(x_0)>-\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

Έστω $h(x)=\begin{cases}\frac{f(x_0)}{2}, & x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\\ 0, & x\in[a,b]-(x_0-\delta, x_0+\delta)\end{cases}$

Άρα στο $[a,b]$ $h(x)\leq f(x)$. Άρα

$\int_a^b h(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx \Rightarrow 2\delta\frac{f(x_0)}{2}\leq\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx>0$

αφού $\delta>0$ και $f(x_0)>0$

Άτοπο αφού $\int_a^b f(x)dx=0$ άρα $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$ που ήταν κ' αναμενόμενο αφού η f είναι συνεχής οπότε πρέπει να είναι παντού 0, αλλιώς αν ήταν οποιαδήποτε άλλη θετική τιμή θα είχε ολοκλήρωμα το.

Άσκηση 42

$\int_a^b fg\leq\left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$ (1)

Έστω f,g κ' με την ανισότητα Cauchy για τις $-g,f$ ισχύει:

$\int_a^b f(-g)\leq\left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b (-g)^2\right]^{1/2}$

$\Rightarrow -\int_a^b fg\leq\left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$

$\Rightarrow \int_a^b fg\geq -\left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$

· Αφού $\int_a^b g^2=0$, $\left|\int_a^b fg\right|\leq 0 \Rightarrow \int_a^b fg=0$,

αφού $\int_a^b g^2=0$ τότε η g τείνει στο 0 παντού και άρα $f\cdot g$ θα τείνει επίσης παντού στο 0 άρα το ολοκλήρωμα του γινομένου δύο συναρτήσεων, έστω f,g για τις οποίες $\int_a^b g^2=0$ και η g τείνει στο 0 παντού, τείνει στο 0

$\int_a^b fg=0$

Άσκηση 43

Έστω f, g συναρτήσεις και $g(x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b fg = \int_a^b f \cdot (\lambda \cdot f) = \int_a^b \lambda f^2 = \lambda \int_a^b f^2 \quad (1)$$

Από ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$$

$$\cdot \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b g^2\right]^{1/2} = \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b \lambda^2 f^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2} \cdot |\lambda| \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2} = |\lambda| \left\{\left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\right\}^2$$

$$= |\lambda| \left[\int_a^b f^2\right]$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \overset{(1)}{=} \left|\lambda \int_a^b f^2\right|$$

$$\Rightarrow \left|\lambda \int_a^b f^2\right| \leq |\lambda| \left[\int_a^b f^2\right]$$

$$\Rightarrow |\lambda| \left|\int_a^b f^2\right| \leq |\lambda| \left[\int_a^b f^2\right]$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f^2\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f^2\right| = \left[\int_a^b f^2\right]$$

Άρα η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει με ισότητα για δύο συναρτήσεις f, g με $g = \lambda f$ χωρίς βλάβη της γενικότητας