Ομάδα Ασκήσεων 4

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 27

Κορώνα → $X=1$

Γράμματα → $X=0$

$Y=y$, $y=1,2,3,4,5,6$

$Z=XY$

(α') $\Omega=\{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$ όπου Κ κορώνα, Γ γράμματα και ο αριθμός η ζαριά.

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $S_X=\{0,1\}$

$Y: \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $S_Y=\{1,2,3,4,5,6\}$

(β') $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $Z=XY$ κ' $S_Z=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

αφού $\forall$ $X=x$ κ' $Y=y$, $xy=0$ ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6

δεδομένου ότι πολλ/με το $x=0$ ή 1 με το $y\in\{1,2,3,4,5,6\}$

Η μάζα της Z είναι:

$p_Z(0)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $p_Z(1)=\frac{1}{12}$, $p_Z(2)=\frac{1}{12}$, $p_Z(3)=\frac{1}{12}$, $p_Z(4)=\frac{1}{2}$, $p_Z(5)=\frac{1}{2}$, $p_Z(6)=\frac{1}{12}$

Η μέση τιμή είναι:

(γ') $E(Z)=\sum_{z=0}^{\infty} z p(z) = 0 + 1\cdot\frac{1}{12} + 2\cdot\frac{1}{12} + 3\cdot\frac{1}{12} + 4\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\frac{1}{12} + 6\cdot\frac{1}{12} = \frac{21}{12}$

Η διασπορά είναι:

$VAR(Z)=E[(Z-E(Z))^2]$

$= \left(0-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{6}{12} + \left(1-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12} + \left(2-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12} + \left(3-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12}$

$+ \left(4-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12} + \left(5-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12} + \left(6-\frac{21}{12}\right)^2\cdot\frac{1}{12}$

$= \frac{217}{48}$

Άσκηση 2β

$C = H$ ή $C = T$

$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$Z \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$$Y = \begin{cases} X+Z, & C=H \\ X-Z, & C=T \end{cases}$$

$\Omega = \{(i,j,k) : i \in \{H,T\}, j \in \{1,2,3,4,5,6\}, k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$|\Omega| = 72$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ με $Y = \begin{cases} X+Z, & C=H \\ X-Z, & C=T \end{cases}$ συνάρτηση

και $S_Y = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,1,0,-1,-2,-3,-4,-5\}$

Η μάζα της Y είναι:

$p_Y(2) = \frac{5}{72}$, $p_Y(3) = \frac{5}{72}$, $p_Y(4) = \frac{5}{72}$, $p_Y(5) = \frac{5}{72}$, $p_Y(6) = \frac{5}{72}$,

$p_Y(7) = \frac{6}{72}$, $p_Y(8) = \frac{5}{72}$, $p_Y(9) = \frac{4}{72}$, $p_Y(10) = \frac{3}{72}$, $p_Y(11) = \frac{2}{72}$,

$p_Y(12) = \frac{1}{72}$, $p_Y(1) = \frac{5}{72}$, $p_Y(0) = \frac{6}{72}$, $p_Y(-1) = \frac{5}{72}$, $p_Y(-2) = \frac{4}{72}$

$p_Y(-3) = \frac{3}{72}$, $p_Y(-4) = \frac{2}{72}$, $p_Y(-5) = \frac{1}{72}$

Η κατανομή της Y είναι:

Αν $y < -5$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$

Αν $y \in [-5,-4)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) = \frac{1}{72}$

Αν $y \in [-4,-3)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + P(Y=-4) = \frac{3}{72}$

Αν $y \in [-3,-2)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + P(Y=-4) + P(Y=-3) = \frac{6}{72}$

Αν $y \in [-2,-1)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + P(Y=-4) + P(Y=-3) + P(Y=-2)$
$= \frac{10}{72}$

Αν $y \in [-1,0)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=-1) = \frac{15}{72}$

Αν $y \in [0,1)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=0) = \frac{21}{72}$

Αν $y \in [1,2)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=1) = \frac{26}{72}$

Αν $y \in [2,3)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=2) = \frac{31}{72}$

Αν $y \in [3,4)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=3) = \frac{36}{72}$

Αν $y \in [4,5)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=4) = \frac{41}{72}$

Αν $y \in [5,6)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=5) = \frac{46}{72}$

Αν $y \in [6,7)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=6) = \frac{51}{72}$

Αν $y \in [7,8)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=7) = \frac{57}{72}$

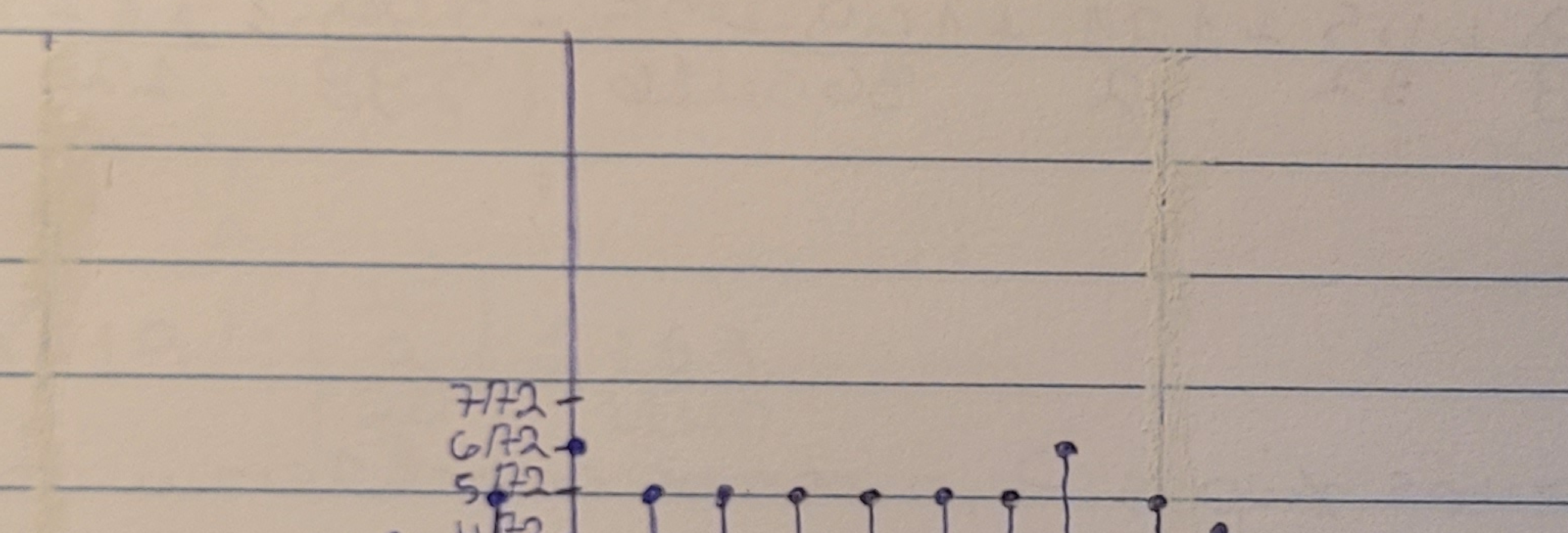
Αν $y \in [8,9)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=8) = \frac{62}{72}$

Αν $y \in [9,10)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=9) = \frac{66}{72}$

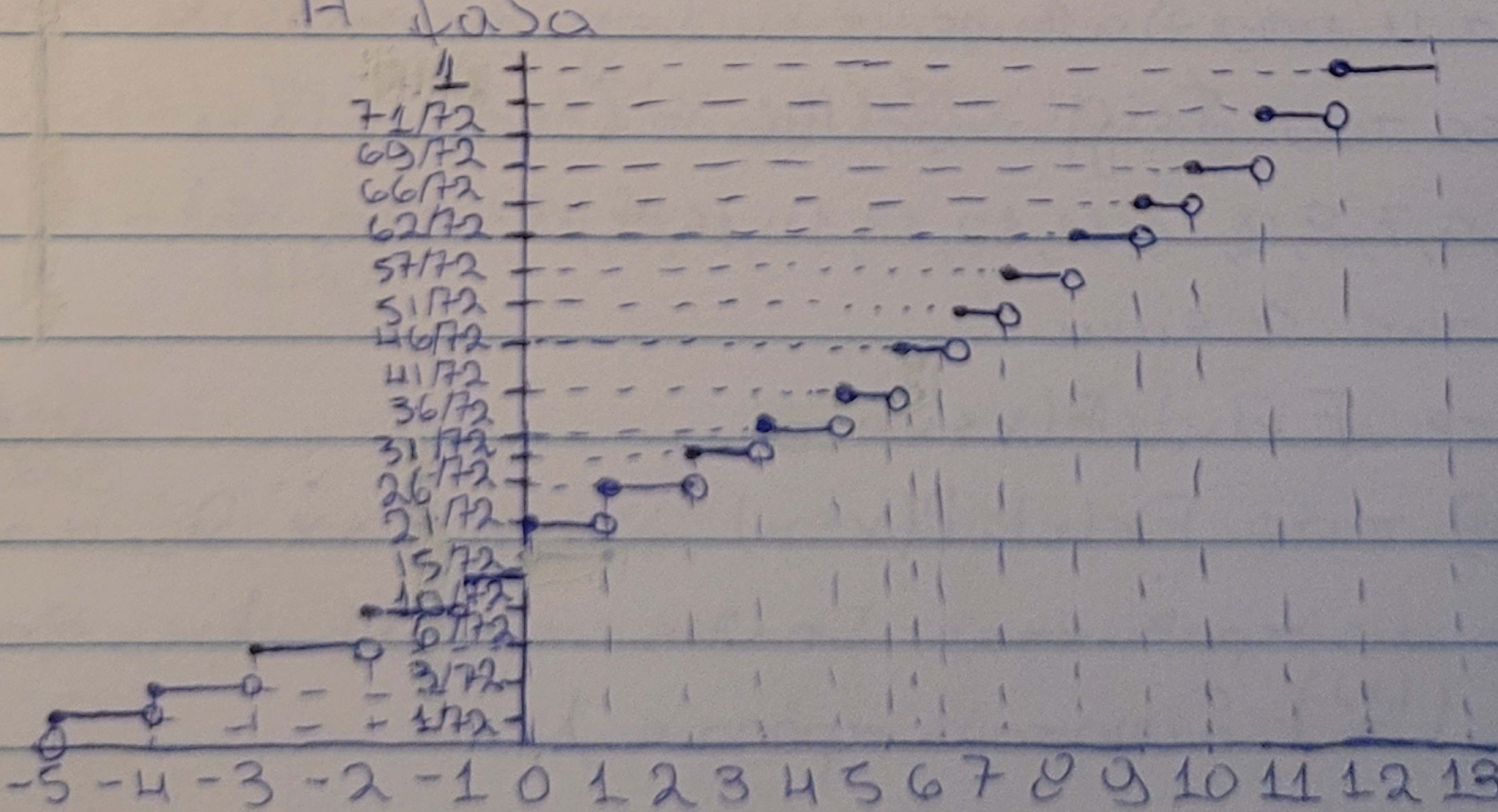
Αν $y \in [10,11)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=10) = \frac{69}{72}$

Αν $y \in [11,12)$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=11) = \frac{71}{72}$

Αν $y \ge 12$ τότε $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=-5) + \ldots + P(Y=12) = \frac{72}{72} = 1$



Η μάζα



Η κατανομή

Η μέση τιμή είναι:

$$E(Y) = (-5)\frac{1}{72} + (-4)\cdot\frac{2}{72} + (-3)\cdot\frac{3}{72} + (-2)\cdot\frac{4}{72} + (-1)\cdot\frac{5}{72} + 0\cdot\frac{6}{72}$$
$$+ 1\cdot\frac{5}{72} + 2\cdot\frac{5}{72} + 3\cdot\frac{5}{72} + 4\cdot\frac{5}{72} + 5\cdot\frac{5}{72} + 6\cdot\frac{5}{72} + 7\cdot\frac{6}{72} + 8\cdot\frac{5}{72} + 9\cdot\frac{4}{72}$$
$$+ 10\cdot\frac{3}{72} + 11\cdot\frac{2}{72} + 12\cdot\frac{1}{72} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Η διασπορά είναι:

$$VAR(Y) = E[(Y-E(Y))^2] = \left(-5-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{72} + \left(-4-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{72} + \left(-3-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{72}$$
$$+\left(-2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{72} + \left(-1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(0-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{6}{72} + \left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72}$$
$$+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(4-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(5-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(7-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{6}{12}$$
$$+\left(8-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{72} + \left(9-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{72} + \left(10-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{72} + \left(11-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{72} + \left(12-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{72}$$
$$= \frac{289}{288} + \frac{25}{16} + \frac{169}{96} + \frac{121}{72} + \frac{45}{32} + \frac{49}{48} + \frac{125}{288} + \frac{5}{32} + \frac{5}{288} + \frac{5}{288}$$
$$+ \frac{5}{32} + \frac{125}{288} + \frac{49}{48} + \frac{45}{32} + \frac{121}{72} + \frac{169}{96} + \frac{25}{16} + \frac{289}{288} = \frac{217}{12}$$

Άσκηση 29

α) Έστω δειγματικός χώρος Ω, ο οποίος αποτελείται από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς (χωρίς επανάθεση) των 20 μπαλών ανά 3. Θα είναι $|\Omega| = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\,17!} = 1140$

β) Έστω X τ.μ. που δηλώνει την μέγιστη ένδειξη από τις 3 μπάλες του δείγματος (Από τις 20). Είναι:

$S_X = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

Η κατανομή της X είναι:

Αν $x<3$ τότε $F_X(x) = P(X\le x) = 0$

Αν $x\in[3,20]$ τότε $F_X(x) = P(X\le x)$, όμως $X\le x$ θα ισχύει αν και μόνο αν τραβηχτούν μπάλες στις $\lfloor x\rfloor$. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{\lfloor x\rfloor}{3}$ δυνατούς τρόπους. Άρα

$$F_X(x) = P(X\le x) = \frac{\binom{\lfloor x\rfloor}{3}}{\binom{20}{3}}, \quad 3\le x\le 20$$

Αν $x>20$ τότε $F_X(x) = P(X\le x) = 1$

(γ') $X=x$ αν και μόνο αν τραβηχθεί η x μπάλα και οι άλλες δύο από τις $(x-1)$ πρώτες με $x=3,4,\dots,20$. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{x-1}{2}$ τρόπους. Άρα

$$p_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \quad x=3,4,5,\dots,20$$

(δ') Πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα τουλάχιστον μία μπάλα από τις 3 του δείγματος να έχει μεγαλύτερη ή ίση ένδειξη με το 17. Δηλαδή

$$P(X=17)=\frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{120}{1140}$$

$$P(X=18)=\frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{136}{1140}$$

$$P(X=19)=\frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{153}{1140}$$

$$P(X=20)=\frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{171}{1140}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)$$

$$=\frac{120+136+153+171}{1140}$$

$$=\frac{580}{1140}$$

$$\simeq 0,5$$

Άσκηση 30

X Τ.Μ μονάδων ζωής με $X=x$, $x=1,2,3,4$, $P(x)=\frac{1}{4}$

Y Τ.Μ το πλήθος χτυπημάτων για να πεθάνει ο αντίπαλος $Y=y$, $y=2,3,4,5$

Ορίζουμε δειγματικό χώρο Ω που αποτελείται από όλα τα ενδεχόμενα χτυπημάτων μέχρι να πεθάνει ο κακός. Έχουμε:

$\Omega=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(3,3),(3,2),(3,1,1),$
$(3,1,2),(3,1,3),(3,1,4),(2,4),(2,3),(2,2,1),(2,2,2),$
$(2,2,3),(2,2,4),(2,1,2),(2,1,3),(2,1,4),(2,1,1,1),$
$(2,1,1,2),(2,1,1,3),(2,1,1,4),(1,4),(1,3,1),(1,3,2),$
$(1,3,3),(1,3,4),(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,2,1,3),(1,2,1,4),$
$(1,2,2),(1,2,3),(1,2,4),(1,1,4),(1,1,3),(1,1,2,4),$
$(1,1,2,3),(1,1,2,2),(1,1,2,1),(1,1,1,4),(1,1,1,3),(1,1,1,2),$
$(1,1,1,1,4),(1,1,1,1,3),(1,1,1,1,2)(1,1,1,1,1)\}$

$|\Omega|=49$

Η μάζα της Y είναι:

$py(2)=10\cdot\frac{1}{16}=\frac{10}{16}$, $py(3)=20\cdot\frac{1}{64}=\frac{20}{64}$ $py(4)=15\cdot\frac{1}{256}=\frac{15}{256}$ $py(5)=4\cdot\frac{1}{1024}=\frac{4}{1024}$

Η κατανομή της Y είναι:

Αν $y<2$ τότε $FY(y)=P(Y\leq y)=0$

Αν $y\in[2,3)$ τότε $FY(y)=P(Y\leq y)=P(Y=2)=\frac{10}{16}$

Αν $y\in[3,4)$ τότε $FY(y)=P(Y\leq y)=P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{15}{16}$

Αν $y\in[4,5)$ τότε $FY(y)=P(Y\leq y)=P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)=\frac{255}{256}$

Αν $y\geq 5$ τότε $FY(y)=P(Y\leq y)=P(Y=2)+\ldots+P(Y=5)=\frac{256}{256}=1$

Η μέση τιμή είναι:

$E(Y)=2\cdot\frac{10}{16}+3\cdot\frac{20}{64}+4\cdot\frac{15}{256}+5\cdot\frac{4}{1024}$

$=\frac{20}{16}+\frac{60}{64}+\frac{60}{256}+\frac{20}{256}=\frac{625}{256}\simeq 2,44$

$$VAR(Y) = E[(Y-E(Y))^2] = \left(2-\frac{625}{256}\right)^2 \cdot \frac{10}{16} + \left(3-\frac{625}{256}\right)^2 \cdot \frac{20}{64}$$

$$+\left(4-\frac{625}{256}\right)^2 \cdot \frac{15}{256} + \left(5-\frac{625}{256}\right)^2 \cdot \frac{4}{1024}$$

$\approx 0,38$

Άσκηση 31

Η Τ.Μ Χ που αντιπροσωπεύει τους πελάτες έχει λύση

$p_X(x) = \frac{9-x}{10}$, $x = 5, 6, 7, 8$

Για κάθε κολοκύθα που πουλάει, ο Καλάβης έχει κέρδος (καθαρό) 2 ευρώ, ενώ για κάθε κολοκύθα που δεν πουλάει μπαίνει μέσα 2 ευρώ. Έστω Τ.Μ Υ που εκφράζει το φυσικό επόμενο κέρδος του Καλάβη ανάλογα το πλήθος των κολοκυθιών που αγοράζει.

- Για 5 κολοκύθες ο Καλάβης θα ξεπουλήσει άρα $Y = 10 = 2 \cdot 5$
- Για 6 κολοκύθες είναι:

$$Y = \begin{cases} 6 \cdot 2 = 12 & \text{με πιθανότητα } \frac{6}{10} \\ 5 \cdot 2 - (6-5) \cdot 2 = 8 & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10} \end{cases}$$ και μέση τιμή:

$$E(Y) = 8 \cdot \frac{4}{10} + 12 \cdot \frac{6}{10} = \frac{32}{10} + \frac{72}{10} = \frac{104}{10}$$

- Για 7 κολοκύθες είναι:

$$Y = \begin{cases} 7 \cdot 2 = 14 & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10} \\ 6 \cdot 2 - (7-6) \cdot 2 = 10 & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10} \\ 5 \cdot 2 - (7-5) \cdot 2 = 6 & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10} \end{cases}$$ και μέση τιμή:

$$E(Y) = 6 \cdot \frac{4}{10} + 10 \cdot \frac{3}{10} + 14 \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{10} + \frac{30}{10} + \frac{42}{10} = \frac{96}{10}$$

- Για 8 κολοκύθες είναι:

$$Y = \begin{cases} 8 \cdot 2 = 16 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{10} \\ 7 \cdot 2 - (8-7) \cdot 2 = 12 & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{10} \\ 6 \cdot 2 - (8-6) \cdot 2 = 8 & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10} \\ 5 \cdot 2 - (8-5) \cdot 2 = 4 & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10} \end{cases}$$ και μέση τιμή

$E(Y) = 4 \cdot \frac{4}{10} + 8 \cdot \frac{3}{10} + 12 \cdot \frac{2}{10} + 16 \cdot \frac{1}{10}$
$= \frac{16}{10} + \frac{24}{10} + \frac{24}{10} + \frac{16}{10} = \frac{80}{10}$

Το Y μεγιστοποιείται σε τις 6 κολοκύθες άρα τόσες συμφέρει τον καλάθι να αγοράσει

$\frac{104}{10} > 10 > \frac{96}{10} > \frac{80}{10}$

Άσκηση 32

10! δυνατές κατατάξεις

Έστω X Τ.Μ που εκφράζει την υψηλότερη σειρά που έλαβε κάποια γυναίκα

$X = x$ με $x = \{1,2,3,4,5,6\}$

Κάθε δυνατή κατάταξη είναι ισοπίθανη. Για $X=1$

$p_X(1) = \frac{1}{2}$ αφού την πρώτη θέση μπορεί να καταλάβει άντρας ή γυναίκα με πιθανότητα 50%.

Για $X=2$, την πρώτη θέση την πήρε άντρας και την δεύτερη γυναίκα. Άρα 5 επιλογές αντρών, 5 γυναικών και $(10-2) = 8!$ επιλογές για τις υπόλοιπες θέσεις. Άρα

$p_X(2) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 8!}{10!} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 8!}{10 \cdot 9 \cdot 8!} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

Για $X=3$, την πρώτη και την δεύτερη θέση την πήρε άντρας και την τρίτη γυναίκα. Άρα 5 επιλογές αντρών για την πρώτη θέση, 4 για την δεύτερη και 5 επιλογές γυναικών για την τρίτη θέση. $(10-3) = 7!$ επιλογές για τις υπόλοιπες θέσεις

Άρα $p_X(3) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7!}{10!} = \frac{100 \cdot 7!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{100}{720} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}$

Για $X=4$, τις πρώτες 3 θέσεις τις παίρνουν άντρες και την 4η γυναίκα. Άρα ομοίως θα είναι:

$p_X(4) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6!}{10!} = \frac{300 \cdot 6!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{300}{5040} = \frac{5}{84}$

Για $X=5$, τις πρώτες 4 θέσεις τις παίρνουν άντρες και την 5η γυναίκα. Άρα ομοίως θα είναι:

$p_X(5) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5!}{10!} = \frac{600 \cdot 5!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{600}{30.240} = \frac{5}{252}$

Για $X=6$, τις πρώτες 5 θέσεις τις παίρνουν άντρες και την 6η γυναίκα. Άρα ομοίως θα είναι:

$p_X(6) = \frac{5!5!}{10!} = \frac{120 \cdot 5!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{120}{30240} = \frac{1}{252}$

Η μέση τιμή είναι:

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{5}{84} + 5 \cdot \frac{5}{252} + 6 \cdot \frac{1}{252}$

$= \frac{1}{2} + \frac{10}{18} + \frac{15}{36} + \frac{20}{84} + \frac{25}{252} + \frac{6}{252}$

$= \frac{11}{6}$

Η διασπορά είναι:

$VAR(X) = E[(Y - E(Y))^2] = (1 - \frac{11}{6})^2 \cdot \frac{1}{2} + (2 - \frac{11}{6})^2 \cdot \frac{5}{18} + (3 - \frac{11}{6})^2 \cdot \frac{5}{36}$
$+ (4 - \frac{11}{6})^2 \cdot \frac{5}{84} + (5 - \frac{11}{6})^2 \cdot \frac{5}{252} + (6 - \frac{11}{6})^2 \cdot \frac{1}{252}$

$= \frac{275}{252}$