Ομάδα ασκήσεων 9 Σχοινάκη Μαρία

Άσκηση 53 3210191

(α') $\int x \log x \, dx$

$= \int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C, \ C\in\mathbb{R}$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \ C\in\mathbb{R}$

• $\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right)' = x\ln x + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\cdot 2x$

$= x\ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$

$= x\ln x$

(β') $\int x \log^2 x \, dx$

$= \int x \ln^2 x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x \, dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,dx \ (1)$

Από (α') ερώτημα $\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \ C\in\mathbb{R}$

(1)

$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C, \ C\in\mathbb{R}$

• $\left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C\right)'$

$= x\ln^2 x + \frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} - x\ln x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\cdot 2x$

$= x\ln^2 x + x^2\ln x\cdot\frac{1}{x} - x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

$= x\ln^2 x + x\ln x - x\ln x = x\ln^2 x$

$(\gamma') \int_0^{\infty} x \operatorname{Log} x \, dx$

$\int_0^{\infty} x \ln x \, dx = \lim\limits_{u \to 0^+} \int_u^{\infty} x \ln x \, dx$ (1)

Από (αι) ερώτημα $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \; C \in \mathbb{R}$

(1) $\lim\limits_{u \to 0^+} \int_u^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right)' dx$ (2)

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\frac{x^2}{2}}} - \frac{x^2}{4} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{2}{x^2}} - \frac{x^2}{4} \right) = 0 - 0 = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2}{x^2}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{4}{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x^3}{4x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{4} = 0$

• $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) = \infty \left(\infty - \frac{1}{2} \right) = (\infty)(\infty) = (\infty)$

(2) $\infty - 0 = \infty$

Άσκηση 54

$\int_0^{\infty} \frac{3x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+2}}$

$= \lim\limits_{u \to \infty} \int_0^{u} \frac{3x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+2}} = \lim\limits_{u \to \infty} \int_0^{u} \left(2\sqrt{x^3+2} \right)' dx = \infty - 2\sqrt{2} = \infty$

• $\lim\limits_{x \to \infty} 2\sqrt{x^3+2} = 2 \cdot (\infty + 2) = 2 \cdot (\infty) = (\infty)$

$\int_2^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} x} \, dx$

$= \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} \, dx = \lim\limits_{u \to \infty} \int_2^{u} \frac{1}{\ln x} \, dx$

Για $x \geq 2$:

$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ κ' $\left(\frac{1}{\ln x} \right)' > \left(\frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x (\ln x)^2} > -\frac{1}{x^2}$

Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{\ln x}$ θα βρίσκεται συνεχώς πάνω

από την $\frac{1}{x}$ για κάθε $x \geq 2$

$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{\ln x} \geq \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{\ln x} = \infty$

$\cdot \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{x} = \lim_{u\to\infty}\int_2^u (\ln x)' = (+\infty) - \ln 2 = (+\infty)$

Αφού το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}dx$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από ένα άλλο ορισμένο ολοκλήρωμα το οποίο απειρίζει, τότε και το $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}dx$ απειρίζει (κριτήριο Παρεμβολής)

Άσκηση 55

(α') $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}dx$

Η e^x αυξάνεται με πολύ πιο γρήγορο ρυθμό από το x^2.

$\frac{e^x}{x^2} > 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}dx > \int_1^\infty 1dx \Rightarrow \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{e^x}{x^2}dx > \lim_{u\to\infty}\int_1^u (x)'dx$

$\Rightarrow \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{e^x}{x^2}dx > \infty \Rightarrow \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{e^x}{x^2} = \infty$

Αφού το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}dx$ είναι μεγαλύτερο από το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης $f(x)=1$ το οποίο απειρίζει, λόγω κριτηρίου παρεμβολής, όταν κάτι είναι μεγαλύτερο από άπειρο, είναι άπειρο. Άρα $\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{e^x}{x^2}dx = \infty$

(β') $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}dx$

$= \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{e^x}{x^2}dx$

$\cdot \frac{e^x}{x^2} > \frac{1}{x^2} \quad \forall x > 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{x^2}dx > \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{e^x}{x^2}dx > \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{1}{x^2}dx$

$$\Rightarrow \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{e^x}{x^2}dx > \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \left(-\frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{e^x}{x^2}dx > -1-(-\infty) = -1+(+\infty) = (+\infty)$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -(-\infty) = (+\infty)$$

Αφού το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}dx$ είναι μεγαλύτερο από το ολοκλήρωμα της $\frac{1}{x^2}$, λόγω κριτηρίου παρεμβολής, όταν κάτι είναι μεγαλύτερο από άπειρο, είναι άπειρο. Άρα $\lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{e^x}{x^2}dx = \infty$

Άσκηση 56

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$= \lim_{u\to 3^-}\int_0^u \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{5\pi}{2}-(-3) = \frac{5\pi}{2}+3$$

$$\cdot \int \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}dx = -\sqrt{9-x^2} + 5\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= -\sqrt{9-x^2} + 5\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C, \ C\in\mathbb{R}$$

$$\cdot \lim_{x\to 3^-}\left(-\sqrt{9-x^2} + 5\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C\right) = -0 + 5\arcsin(1) = \frac{5\pi}{2}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0}\left(-\sqrt{9-x^2} + 5\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C\right) = -3 + 5\cdot 0 = -3$$

Άσκηση 57

(α') $V(S) = \pi\int_0^{40} f^2 = \pi\int_0^{40} \sqrt{300\left(1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}dx \quad , 0\le x\le 40$

(β') $= 300\pi\left(40 - \frac{1}{20^4}\frac{(20)^5}{5}\right) - 300\pi\left(0 - \frac{1}{20^4}\frac{(-20)^5}{5}\right)$

$$= 300\pi\left(40 - \frac{20^5}{20^4\cdot 5}\right) - 300\pi\left(\frac{20^5}{20^4\cdot 5}\right) = 300\pi\left(40 - \frac{20}{5} - \frac{20}{5}\right)$$

$$= 300\pi(32) = 9600\pi$$

$=\int 300\left(1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\right)dx = 300\int 1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\,dx$

$=300\int 1\,dx-\int\frac{(x-20)^4}{20^4}\,dx = 300\left(\int\frac{(x-20)^4}{20^4}\,dx + x\right)$

$=300\left(x-\frac{1}{20^4}\int(x-2)^4\,dx\right)=300\left(x-\frac{1}{20^4}\frac{(x-20)^5}{5}+c\right),\ c\in\mathbb{R}$

(γ') Το μήκος του καρπουζιού είναι $40-0=40$. Άρα και το μήκος του κιβωτίου είναι 40. Το πλάτος και το ύψος του καρπουζιού, θα είναι 2 φορές η απόλυτη τιμή της $f(x)$ στο μέγιστο της f από τον άξονα $x'x$. Δηλαδή έστω m το μέγιστο $=2|f(m)|$. Στην $f(x)=\sqrt{300\left(1-\frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}$ το μέγιστο είναι το $f(20)=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$ επειδή λόγω της θετικής δύναμης το $\frac{(x-20)^4}{20^4}$ θα είναι πάντα θετικό, άρα θέλουμε την μικρότερη θετική τιμή του κλάσματος, που είναι το 0, ώστε η αφαίρεση $1-\frac{(x-20)^4}{20^4}$ να δίνει το μεγαλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, που είναι το 1. Άρα το ύψος και το πλάτος του κιβωτίου είναι $2|f(20)|$ $=2\cdot 10\sqrt{3}=20\sqrt{3}$. Άρα οι διαστάσεις του κιβωτίου είναι $40\times 20\sqrt{3}\times 20\sqrt{3}$

Άσκηση 58

$R=\{[r,\theta]: 0\le\theta\le 2\pi,\ \cos^2 2\theta\le r\le 2\cos^2 2\theta\}$

$R_0=\{[r,\theta]: 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le 2\cos^2 2\theta\}$

$R_1=\{[r,\theta]: 0\le\theta\le 2\pi,\ r\ge\cos^2 2\theta\}$

$A(R_0)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\cos^2 2\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4\cos^4 2\theta\,d\theta$

$=2\int_0^{2\pi}\cos^4 2\theta\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2 4\theta+2\cos 4\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}1\,d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2 4\theta\,d\theta+\int_0^{2\pi}2\cos 4\theta\,d\theta\right.$

$\cdot \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{\sin(8\theta)}{16}\right) + \frac{\sin(4\theta)}{2} + C, \ C\in\mathbb{R}$

Άρα $2\int_0^{2\pi}\cos^4 2\theta = \frac{1}{2}\left(2\pi+\pi+\frac{\sin(16\pi)}{16}+\frac{\sin(8\pi)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0+0+\frac{\sin(0)}{16}+\frac{\sin(0)}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(3\pi+0+0)-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{3\pi}{2}$

$A(R_1)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A(R_0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$ κ'

$A(R)=A(R_0)-A(R_1)=\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9\pi}{8}$

Άσκηση 59

$f(x)=|\cos(kx/2)|$

$V(S)=\pi\int_0^{2\pi}|\cos(kx/2)|^2 dx=\pi\int_0^{2\pi}(\cos(kx/2))^2 dx$

$=\pi\int_0^{2\pi}\cos^2(kx/2)\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(kx)}{2}\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\left(2\pi+\frac{\sin(2k\pi)}{k}\right)-\frac{\pi}{2}\left(0+\frac{\sin(0)}{k}\right)=\pi^2+0-0=\pi^2$

$\cdot\int\frac{1+\cos kx}{2}dx=\int\frac{1}{2}+\frac{\cos kx}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int 1\,dx+\frac{1}{2}\int\cos kx\,dx$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{\sin kx}{k}+C, \ C\in\mathbb{R}$

Το k είναι ανεξάρτητο του όγκου. Έτσι, ορίζοντας μια διαμέριση έστω $P_n=\{p_0,p_1\dots p_n\}$, όπου n το εύρος τιμών από το 0 μέχρι το 2π και ορίζοντας διαδοχικές κάθετες γραμμές από την f(x) μέχρι τον x'x, συγκρίνοντάς τες δεν μπορούμε να καταλάβουμε ποιο είναι το k και μάλιστα μετακινώντας τις γραμμές, μπορούμε να φτιάξουμε την απεικόνιση της συνάρτησης για οποιοδήποτε k.

Άσκηση 60

$V(S)=2\pi\int_0^{\pi} x(\sin(x-1))^2 dx$ (1)

$\int x(\sin(x-1))^2 dx$

Θέτουμε $u=x$, $dv=\sin(x-1)^2 dx$

$du=dx$ κ' $v=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{\sin(2x-2)}{4}$, αφού

$\sin(t)\cdot\cos(s)=\frac{1}{2}(\sin(t+s)+\sin(t-s))$

$=x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{\sin(2x-2)}{4}\right)-\int\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{\sin(2x-2)}{4}\,dx$

$=x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{\sin(2x-2)}{4}\right)-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{\cos(2x-2)}{8}\right)$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{x\sin(2x-2)}{4}-\frac{\cos(2x-2)}{8}+C$, $C\in\mathbb{R}$

(1)

$=2\pi\left(\frac{1}{4}\pi^2-\frac{\pi\sin(2\pi-2)}{4}-\frac{\cos(2\pi-2)}{8}-\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{0\cdot\sin(-2)}{4}+\frac{\cos(-2)}{8}\right)$

$=2\pi\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi\sin(2)}{4}-\frac{\cos(2)}{8}+\frac{\cos(2)}{8}\right)$

$=2\pi\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi\sin(2)}{4}\right)$

$=\frac{\pi^3}{2}+\frac{\pi^2\sin(2)}{2}$

$=\frac{\pi^3+\pi^2\sin(2)}{2}$

$=\frac{\pi^2(\pi+\sin(2))}{2}$

Άσκηση 61

(α') $\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t+\sin t+t\cos t)^2+(\cos t-\cos t+t\sin t)^2}\, dt$

$=\int_0^{2\pi} \sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\, dt$

$=\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\, dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\, dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2\cdot 1}\, dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2}dt=\int_0^{2\pi}|t|=\int_0^{2\pi} t$, αφού $t\geq 0$

$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)' dt=\frac{(2\pi)^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{4\pi^2}{2}-0=2\pi^2$

(β') $\int_0^{x} t\,dt=\frac{2\pi^2}{2} \Rightarrow \int_0^{x}\left(\frac{t^2}{2}\right)' dt=\pi^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}=\pi^2 \Rightarrow x^2=2\pi^2 \Rightarrow x=\pi\sqrt{2}$

αφού το $-\pi\sqrt{2}$ απορρίπτεται γιατί πρέπει $t\geq 0$

(γ') Η ταχύτητα είναι:

$v(t)=\sqrt{(-\sin t+\sin t+t\cos t)^2+(\cos t-\cos t+t\sin t)^2} \Leftrightarrow$

$v(t)=t$

Άρα στο $[0,2\pi]$ η στιγμιαία ταχύτητα μεγιστοποιείται στο 2π.

(δ') Έστω $t\in[0,2\pi]$, η χρονική στιγμή στην οποία το σημείο $(x(t),y(t))$ έχει την ελάχιστη απόσταση των σημείων της τροχιάς από το σημείο $(1,1)$.

$d(x)=\sqrt{(x(t)-1)^2+(y(t)-1)^2}$

Για $t=\frac{\pi}{2}$ το $(x(t),y(t))$ έχει την ελάχιστη

απόσταση από το $(1,1)$.

$\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right),y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

(ε')