Εργασία 2 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 1

i) Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in U$ με:

$\vec{u} = (2a_1 - b_1, 3a_1, a_1 + b_1)$ και $\vec{v} = (2a_2 - b_2, 3a_2, a_2 + b_2)$

Άρα και $\vec{u} + \vec{v} = ((2a_1 - b_1) + (2a_2 - b_2), 3a_1 + 3a_2, (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2))$

$= (2(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2), 3(a_1 + a_2), (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2))$ και είναι της μορφής $(2a - b, 3a, a + b)$, άρα $\vec{u} + \vec{v} \in U$ (1)

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα $\lambda \vec{u} = \lambda(2a_1 - b_1, 3a_1, a_1 + b_1) = (\lambda(2a_1 - b_1), \lambda(3a_1), \lambda(a_1 + b_1))$

$= (2\lambda a_1 - \lambda b_1, 3\lambda a_1, \lambda a_1 + \lambda b_1)$ και είναι της μορφής $(2a - b, 3a, a + b)$

και άρα $\lambda \vec{u} \in U$ (2)

Από (1), (2) τελικά ο U είναι υποχώρος του R^4

ii) Έστω $(2a - b, 3a, a + b) \in U$. Είναι:

$$\begin{pmatrix} 2a - b \\ 3a \\ a + b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τα διανύσματα $(2,3,1)$ και $(-1,0,1)$ παράγουν τον U και είναι Γ.Α. αφού λύνοντας τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 0 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

έχει μηδενικές μόνο λύσεις άρα είναι Γ.Α.

άρα τα $(2,3,1)$, $(-1,0,1)$ αποτελούν βάση του U.

$\vec{e_1} = (2,3,1)$

$$\vec{e_2} = (-1,0,1) - \left(\frac{(-1,0,1)\cdot(2,3,1)}{(2,3,1)(2,3,1)}\right)(2,3,1)$$

$$= (-1,0,1) - \left(\frac{-2+0+1}{4+9+1}\right)(2,3,1)$$

$$= (-1,0,1) + \left(\frac{1}{14}\right)(2,3,1) = (-1,0,1) + \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right)$$

$$= \left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{14}, \frac{15}{14}\right)$$

Τα $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ που προέκυψαν από την διαδικασία ορθογωνοποίησης των Gram-Schmidt αποτελούν ορθογώνια βάση του U ενώ τα διανύσματα

$$\hat{e_1} = \frac{\vec{e_1}}{|\vec{e_1}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\hat{e_2} = \frac{\vec{e_2}}{|\vec{e_2}|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{27}{14}}}\left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{14}, \frac{15}{14}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{42}}{21}, \frac{\sqrt{42}}{42}, \frac{5\sqrt{42}}{\sqrt{42}}\right)$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του U.

Άσκηση 2

Έστω $\vec{v_1} = (1,1,-1,2)$, $\vec{v_2} = (2,1,3,-4)$, $\vec{v_3} = (1,2,-6,10)$

Έστω $V = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ και πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Γραμμοχώρος του A: V άρα θα βρούμε βάση για τον γραμμοχώρο του A

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Α.Κ.Μ που έχει προκύψει έχει τον ίδιο γραμμοχώρο με τον αρχικό πίνακα Α. Οι μη μηδενικές γραμμές του πίνακα Α.Κ.Μ αποτελούν βάση για τον γραμμοχώρο αυτού του πίνακα, άρα τα διανύσματα $(1,0,4,-6)$ και $(0,1,-5,8)$ θα αποτελούν βάση και για τον γραμμοχώρο του Α, δηλαδή για τον υποχώρο U.

Άσκηση 3

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ Έχουμε $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ (ορίζουσα)

Ψάχνουμε την ορίζουσα του πίνακα:

$\begin{bmatrix} 2a & b & c \\ 6d & 3e & 3f \\ 2g & h & i \end{bmatrix}$ Παρατηρούμε πως η πρώτη στήλη έχει κοινό πολλαπλάσιο το 2. Άρα η ορίζουσα: (Βήμα 1)

$$\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 6d & 3e & 3f \\ 2g & h & i \end{vmatrix} \overset{1}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{2}{=} 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 = 30$$

Παρατηρούμε επίσης πως η δεύτερη γραμμή έχει κοινό πολλαπλάσιο το 3.

(Βήμα 2)

Άσκηση 4

A τετραγωνικός πίνακας 7x7

$A^T = -A$ (1)

Ξέρουμε πως $det(A^T) = det(A)$ και από την (1)

$det(A) = det(-A)$ (2)

Ο πίνακας $-A$ είναι πρακτικά ο πίνακας A πολλ/μένος με έναν πίνακα έστω B, που είναι όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του ίσα με -1. Ο A είναι 7x7 άρα και ο B, οπότε $det(B) = (-1)^7 = -1$. Επίσης ο B είναι διαγώνιος. Ξέρουμε επίσης ότι $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

$\Leftrightarrow det(-A) = -det(A)$

Από την (2) $det(A) = -det(A)$, δηλαδή πρέπει αναγκαστικά

$det(A) = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$

Άσκηση 5

Έστω A πίνακας 5x6 με βαθμό 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A έχει βαθμό 4 γιατί μετά τον αλγόριθμο Gauss-Jordan έχει 4 μη-μηδενικές γραμμές.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 8/3 & -4/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 8/3 & -4/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4/3 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4/3 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Α είναι αντιστρέψιμος μόνο και μόνο όταν $|A| \neq 0$

Δηλαδή πρέπει να βρούμε την ορίζουσα.

Έχουμε $|A| = (2)A_{21} + (1)A_{22} + (0)A_{23}$

με:

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(+6) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(+3) = +3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = +6$$

Άρα $|A| = 2.(-6) + 1.3 + 0.6 = -12 + 3 = -9 \neq 0$

Άρα ο Α είναι αντιστρέψιμος

Έχουμε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1).0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-3) = -3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

Άρα $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 7

$4x - 3y + z = 11$

$2x + y - 4z = -1$

$x + 2y - 2z = 1$

$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ Έχουμε ότι $|A| = (1)A_{31} + (2)A_{32} + (-2)A_{33}$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (11) = 11$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-18) = 18$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 10 = 10$$

Άρα $|A| = 1 \cdot 11 + 2 \cdot 18 - 2 \cdot 10 = 11 + 36 - 20 = 11 + 16 = 27 \neq 0$

Άρα το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση αφού $|A| \neq 0$.

ii) Η λύση αυτή είναι:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1 A_{x31} + 2 A_{x32} - 2 A_{x33}}{27} = \frac{81}{27} = 3$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 11 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1 A_{y31} + 1 A_{y32} - 2 A_{y33}}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 11 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot A_{z31} + 2 A_{z32} + 1 A_{z33}}{27} = \frac{54}{27} = 2$$

$Ax31 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1.(11) = 11$

$Ax32 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1).(-43) = 43$

$Ax33 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.8 = 8$

$Ay31 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.(-43) = -43$

$Ay32 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1).(-18) = 18$

$Ay33 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-26) = -26$

$Az31 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-8) = (-8)$

$Az32 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-26) = 26$

$Az33 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.10 = 10$

Upa $(x, y, z) = (3, 1, 2)$