Ομάδα Ασκήσεων 7 Σχοινάκη Μαρία

3210191

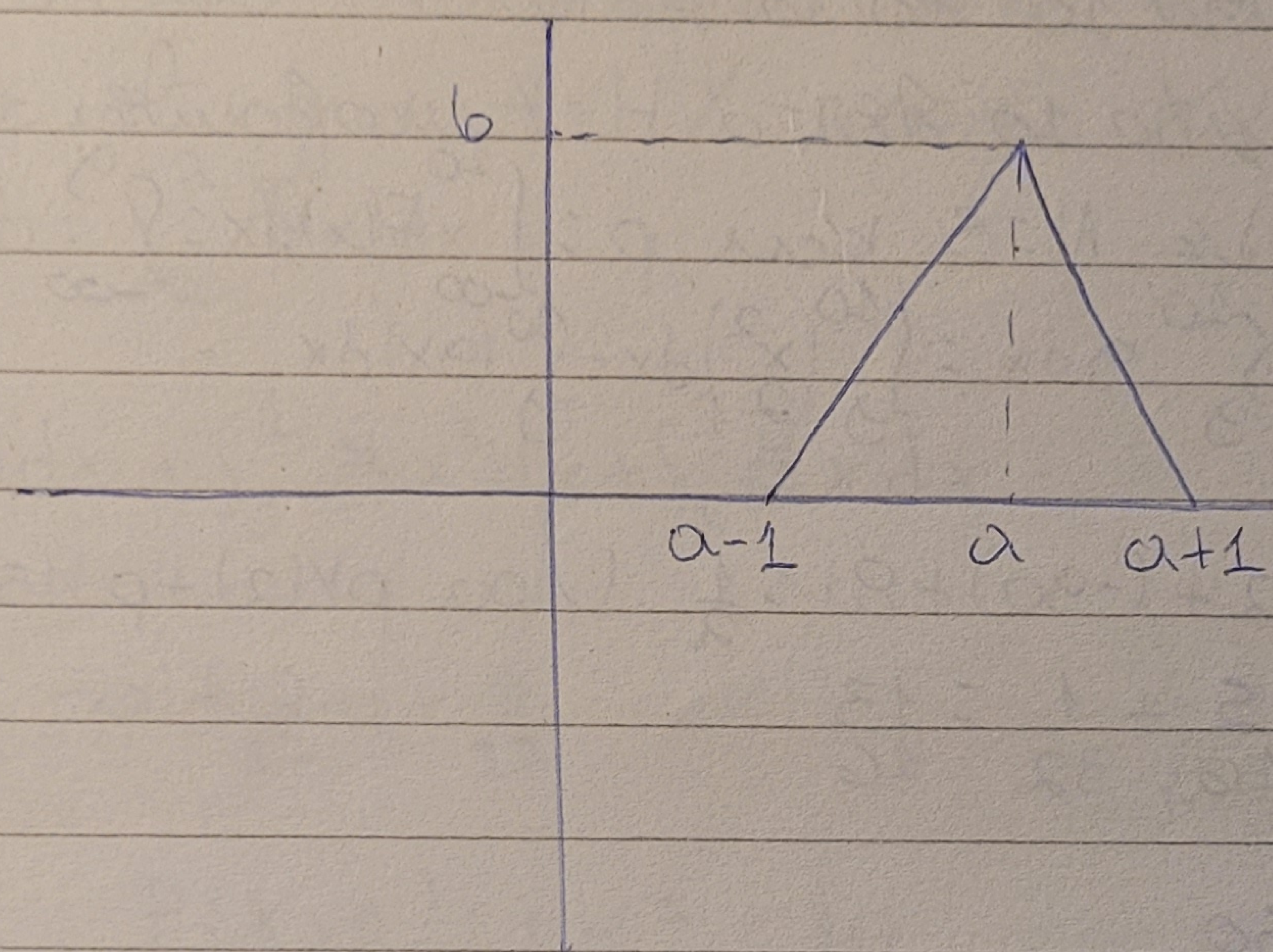
Άσκηση 49

T συνεχής T.M: χρόνος ολοκλήρωσης αγώνα σε λεπτά

$$f(x)=\begin{cases} b(x-a+1), & a-1\leq x\leq a \\ b(a+1-x), & a\leq x\leq a+1 \\ 0 & ,\text{αλλού} \end{cases}$$

$E(T)=10$ λεπτά

(α')



(β') Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$E=2b\cdot\frac{1}{2}=b$

και πρέπει $E=1$ λόγω της ολικής πιθανότητας

άρα $b=1$.

$$E(T)=10 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=10 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{a-1} 0\,dx+\int_{a-1}^{a} x(x-a+1)dx+\int_{a}^{a+1} x(a+1-x)dx$$

$$=10 \Leftrightarrow 0+\int_{a-1}^{a}(x^2-ax+x)dx+\int_{a}^{a+1}(ax+x-x^2)dx=10$$

$$\Leftrightarrow \int_{a-1}^{a} x^2dx-\int_{a-1}^{a} ax\,dx+\int_{a-1}^{a} x\,dx+\int_{a}^{a+1} ax\,dx+\int_{a}^{a+1} x\,dx+\int_{a}^{a+1} -(x^2)dx=10$$

$$\Leftrightarrow \int_{a-1}^{a}\left(\frac{x^3}{3}\right)'dx-\int_{a-1}^{a}\left(\frac{ax^2}{2}\right)'dx+\int_{a-1}^{a}\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx+\int_{a}^{a+1}\left(\frac{ax^2}{2}\right)'dx+\int_{a}^{a+1}\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx+\int_{a}^{a+1}\left(-\frac{x^3}{3}\right)'dx=10$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{3}-\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{a^3}{2}+\frac{(a-1)^2a}{2}+\frac{a^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{a(a+1)^2}{2}-\frac{a^3}{2}+\frac{(a+1)^2}{2}-\frac{a^2}{2}$$

$$-\frac{(a+1)^3}{3}+\frac{a^3}{3}=10 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^3+\frac{a^3+3a}{3}=10 \Leftrightarrow \frac{3a}{3}=10 \Leftrightarrow a=10$$

Άρα $F(x) = \begin{cases} x-9 & , 9 \le x \le 10 \\ 11-x & , 10 \le x \le 11 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

(γ) Η πιθανότητα να ολοκληρώσει τουλάχιστον 2 από αυτούς είναι να ολοκληρώσει 2, 3, 4 ή 5 σε λιγότερο από 10 λεπτά. Έστω Y τ.μ: πλήθος αγώνων λιγότερων από 10 λεπτά. Η Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=5$ και $p = \int_{-\infty}^{10} F(x)dx = \int_{-\infty}^{9} 0dx + \int_{9}^{10} (x-9)dx$

$= 0 + \int_9^{10} xdx - \int_9^{10} 9dx = \int_9^{10} \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx - \int_9^{10} (9x)' dx$

$= 50 - 81/2 + (-90) + 81 = \frac{1}{2}$. Άρα $pY(2) + pY(3) + pY(4) + pY(5)$

$= \frac{5}{16} + \frac{5}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{13}{16}$

Άσκηση 50

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ ax^3 & , x \in [0,1] \\ ax & , x \in [1,3] \\ 0 & , x > 3 \end{cases}$$

(α) Ξέρουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 ax^3 dx + \int_1^3 axdx + \int_3^{\infty} 0dx = 1$

$\Leftrightarrow 0 + \int_0^1 \left(\frac{ax^4}{4}\right)' dx + \int_1^3 \left(\frac{ax^2}{2}\right)' dx + 0 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{a}{4} - 0 + \frac{9a}{2} - \frac{a}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{17}{4} a = 1$

$\Leftrightarrow a = \frac{4}{17}$

Άρα

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , x\le 0 \\ \frac{4}{17}x^3 & , x\in[0,1] \\ \frac{4}{17}x & , x\in[1,3] \\ 0 & , x>3 \end{cases}$$

(β΄) Έστω Y τ.μ που εκφράζει το πλήθος των καντάδων που έχουν γίνει μέχρι το μπουγάδιασμα. Ξέρουμε ότι για το Y ισχύει $X\le 2$

$$P(X\le 2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1}\frac{4}{17}x^3\,dx+\int_{1}^{2}\frac{4}{17}x\,dx$$

$$=0+\frac{1}{17}-0+\frac{2\cdot 4}{17}-\frac{2}{17}$$

$$=\frac{7}{17}$$ κ΄ $$P(X>2)=1-\frac{7}{17}=\frac{10}{17}$$

Η Y ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή, με επιτυχία την καντάδα με το μπουγαδόνερο και πιθανότητα $\frac{10}{17}$

Άρα $E(Y)=1/p=\frac{1}{\frac{10}{17}}=\frac{17}{10}$

κ΄ $VAR(Y)=\frac{\left(1-\frac{10}{17}\right)}{\left(\frac{10}{17}\right)^2}=\frac{119}{100}$

(γ΄) Η Y σε αυτό το ερώτημα ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=14$ πειράματα και επιτυχία τις καντάδες χωρίς το μπουγαδόνερο (10) με $p=\frac{7}{17}$

Άρα $p_Y(10)=\binom{14}{10}\left(\frac{7}{17}\right)^{10}\left(1-\frac{7}{17}\right)^{14-10}$

$=1001\left(\frac{7}{17}\right)^{10}\left(1-\frac{7}{17}\right)^{4}$

$\approx 0{,}016$

Άσκηση 52

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sqrt{x}, & x\in[0,1) \\ cx^{3/2}, & x\in[1,4] \\ 0, & x\geq 4 \end{cases}$$

$$E(Y)=E(\sqrt{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x}\,f_X(x)\,dx \quad (1)$$

Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx+\int_{1}^{4} cx^{3/2}\,dx+\int_{4}^{\infty}0\,dx=1$$

$$\Leftrightarrow 0+\int_{0}^{1}\frac{2x\sqrt{x}}{3}dx+\int_{1}^{4}\frac{2cx^2\sqrt{x}}{5}dx+0=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}-0+\frac{64c}{5}-\frac{2c}{5}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{62c}{5}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow c=\frac{5}{186}$$

Άρα (1) $\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x}\,f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{x}.0\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{x}\sqrt{x}\,dx$

$$+\int_{1}^{4}\frac{5}{186}x^{3/2}\sqrt{x}\,dx+\int_{4}^{\infty}0\sqrt{x}\,dx$$

$$=0+\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{4}\frac{5}{186}x^2\,dx+0$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx+\int_{1}^{4}\left(\frac{5}{186}\frac{x^3}{3}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}-0+\frac{160}{279}-\frac{5}{558}$$

$$=\frac{33}{31}$$

Άσκηση 53

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\in[0,1] \\ a, & x\in[1,2] \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

(α') Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \iff \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 ax^2 dx$

$+ \int_1^2 a\,dx + \int_2^{\infty} 0\,dx = 1$

$\iff 0 + \int_0^1 \left(a\frac{x^3}{3}\right)' dx + \int_1^2 (ax)' dx + 0 = 1$

$\iff \frac{a}{3} - 0 + 2a - a = 1$

$\iff \frac{a}{3} + a = 1$

$\iff a = \frac{3}{4}$

(β') Έστω Y τ.μ που εκφράζει το πλήθος των [illegible]. Η Y ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με επιτυχία το να υπάρξει σφάλμα. και πιθανότητα

$p = \int_{1.9}^2 \frac{3}{4} dx + \int_2^{\infty} 0\,dx = \int_{1.9}^2 \left(\frac{3}{4}x\right)' dx + 0 = \frac{3}{2} - \frac{57}{40} = \frac{3}{40}$

Άρα $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{40}{3}$ κ'

$VAR(Y) = \frac{\left(1 - \frac{40}{3}\right)}{\left(\frac{40}{3}\right)^2} = -\frac{111}{1600}$

(γ') Έστω τώρα η Y σε αυτό το ερώτημα. Ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=18$ και επιτυχία τα εσταλμένα (χωρίς σφάλματα). Άρα $p=1-\frac{3}{40}=\frac{37}{40}$

Άρα

$$p_Y(16)=\binom{18}{16}\left(\frac{37}{40}\right)^{16}\left(1-\frac{37}{40}\right)^{2}\simeq 0,24$$

Άσκηση 54

$$h(x)=af(x)+(1-a)g(x)\quad,\ a\in(0,1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(af(x)+(1-a)g(x))dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} af(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}(1-a)g(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx+(1-a)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

αφού $g(x)$, $f(x)$ πυκνότητες $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)=1$

$$=a\cdot 1+(1-a)\cdot 1=a+1-a=1$$

Αφού $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)=1$, η $h(x)$ είναι πυκνότητα

(β')

$$Z=aX+(1-a)Y$$

(ε') $E(Z)=aE(X)+(1-a)E(Y)=aE(X)+E(Y)-aE(Y)$

(γ') $E(Z^2)=aE(X^2)+E(Y^2)+(-a)E(Y^2)$

(δ') $VAR(Z)=a^2(E(X^2)-(E(X))^2+(1-a)^2(E(Y^2)-E(Y))^2$

Άσκηση 55

$$f(x) = \begin{cases} c + \frac{x}{4} & , 0 \leq x < 2 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

(α') Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} \left(c + \frac{x}{4}\right) dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = 1$

$\Leftrightarrow 0 + \int_{0}^{2} c\,dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{4}\,dx + 0 = 1$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{2} (cx)'\,dx + \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right)' dx = 1$

$\Leftrightarrow 2c - 0 + \frac{1}{2} - 0 = 1$

$\Leftrightarrow 2c = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{x}{4} & , 0 \leq x < 2 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

(β') $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{2} \left(\frac{x}{4} + \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot x\,dx$

$= 0 + \int_{0}^{2} \frac{x}{4}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{4}\,dx + 0$

$= \frac{1}{4}\int_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx$

$= \frac{1}{2} - 0 + \frac{2}{3} - 0$

$= \frac{7}{6}$

Άσκηση 56

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\upsilon} e^{-x/\upsilon}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(α) Ο φοιτητής περνάει μόνο αν $Y \geq 5$. Οπότε

(10%)

$$\int_5^\infty \frac{1}{\upsilon} e^{-\frac{x}{\upsilon}} dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \int_5^\infty \left(-e^{-x/\upsilon}\right)' dx = \cancel{1/10} \Leftrightarrow$$

$$0 - \left(-e^{-\frac{5}{\upsilon}}\right) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow e^{-\frac{5}{\upsilon}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{5}{\ln(10)}$$

(β) $P(Y=10) = \int_{10}^\infty \frac{1}{\upsilon} e^{-\frac{x}{\upsilon}} dx = \int_{10}^\infty \left(-e^{-x/\upsilon}\right)' dx = e^{-\frac{10}{\upsilon}}$

$P(Y=9) = \int_9^{10} \frac{1}{\upsilon} e^{-\frac{x}{\upsilon}} dx = e^{-\frac{9}{\upsilon}} - e^{-\frac{10}{\upsilon}}$

$P(Y=8) = \int_8^9 \frac{1}{\upsilon} e^{-\frac{x}{\upsilon}} dx = e^{-\frac{8}{\upsilon}} - e^{-\frac{9}{\upsilon}}$

⋮

Αντίστοιχα $\forall\, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ είναι:

$P(Y=k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{\upsilon} e^{-\frac{x}{\upsilon}} dx = e^{-\frac{k}{\upsilon}} - e^{-\frac{(k+1)}{\upsilon}}$