Ομάδα ασκήσεων ε Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 44

$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\sin x)dx}{h}$ · $\sin x \geq -1 \Leftrightarrow 2+\sin x \geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(2+\sin x) \geq \sqrt{x}$. Έστω $f(x)=\sqrt{x}$. Η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα άρα το εμβαδόν της σε σχέση με τον xx' συνεχώς θα αυξάνεται. Οπότε $\lim_{h\to\infty} \int_1^h \sqrt{x} = \infty$ κ αφού $\sqrt{x}(2+\sin x) \geq \sqrt{x}$ τότε $\int_1^\infty \sqrt{x}(2+\sin x)dx \geq \int_1^\infty \sqrt{x}dx \Rightarrow \int_1^\infty \sqrt{x}(2+\sin x)dx = \infty$

$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\sin x)dx}{h} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{h\to\infty} \sqrt{h}(2+\sin h)$. Όμως

$\sqrt{h}(2+\sin h) \geq \sqrt{h}$. Επίσης $\lim_{h\to\infty} \sqrt{h} = \infty$. Άρα

$\lim_{h\to\infty} \sqrt{h}(2+\sin h) \geq \infty \Rightarrow \lim_{h\to\infty} \sqrt{h}(2+\sin h) = \infty$

Άσκηση 45

Έστω $k(x) = \int_\lambda^x G(t)dt$ με $\lambda\in(a,b)$ κ $k'(x) = G(x)$

Από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα λογισμού:

$\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} G(t)dt\right)' = \left(\int_\lambda^{f_2(x)} G(t)dt - \int_\lambda^{f_1(x)} G(t)dt\right)'$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας

$= (k(f_2(x)) - k(f_1(x)))' = k'(f_2(x))f'_2(x) - k'(f_1(x))f'_{(1)}(x)$

$= G(f_2(x))f'_2(x) - G(f_1(x))f'(x))$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Αν το x μεταβληθεί κατά ένα μικρό Δx το $f_2(x)$ θα αυξηθεί κατά $f'_2(x)\Delta x$, όπου $f'_2(x)$ ο ρυθμός μεταβολής του $f_2(x)$. Άρα το ολοκλήρωμα θα αυξηθεί κατά το εμβαδόν $G(f_2(x))f'_2(x)\Delta x$. Το $f_1(x)$ θα αυξηθεί κατά $f'_1(x)\Delta x$, όπου $f'_1(x)$ ο ρυθμός μεταβολής του $f_1(x)$. Άρα το ολοκλήρωμα θα μειωθεί κατά το εμβαδόν $G(f_1(x))f'_1(x)\Delta x$. Άρα η μεταβολή θα είναι:

$G(f_2(x))f'_2(x)\Delta x - G(f_1(x))f'_1(x)\Delta x$ κ

$\frac{G(f_2(x))f'_2(x)\Delta x - G(f_1(x))f'_1(x)\Delta x}{\Delta x} = G(f_2(x))f'_2(x) - G(f_1(x))f'_1(x)$

Δηλαδή η παράγωγος του ολοκληρώματος

Άσκηση 46

(α') $\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx$

Παρατηρούμε ότι τα άκρα του ολοκληρώματος είναι τα $0, \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$

Το ολοκλήρωμα περιέχει $\cos x$ και $\sin x$, για τα οποία:
$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$ κ' $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$

Θέτουμε $x=0+\frac{\pi}{2}-y \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y$

Άρα $(x)'dx=(\frac{\pi}{2}-y)'dy \Rightarrow dx=-dy$

Για $x=0$ με $x=\frac{\pi}{2}-y \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$

κ'

Για $x=\frac{\pi}{2}$ με $x=\frac{\pi}{2}-y \Rightarrow y=0$

Άρα $\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx = \int_{\pi/2}^{0} -\frac{(\cos(\frac{\pi}{2}-y))^{124}}{(\cos(\frac{\pi}{2}-y))^{124}+(\sin(\frac{\pi}{2}-y))^{124}}\,dy$

$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos(\frac{\pi}{2}-y))^{124}}{(\cos(\frac{\pi}{2}-y))^{124}+(\sin(\frac{\pi}{2}-y))^{124}}\,dy$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin(y))^{124}}{(\sin(y))^{124}+(\cos(y))^{124}}\,dy$

Άρα $P = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx \overset{(1)}{} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx \overset{(2)}{}$

(Β') Προσθέτουμε τις (1),(2) κατά μέλη

$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx = 2P$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}} + \frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx = 2P$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx = 2P$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} 1\, dx = 2P$

$\Rightarrow [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2P \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 0 = 2P \Rightarrow 2P = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \Rightarrow P = \frac{\pi}{4}$

Άσκηση 47

(α') $\int t^2 \cos t\, dt = \int t^2 (\sin t)'\, dt$

$\Rightarrow \int t^2 (\sin t)'\, dt = t^2 \sin t - \int 2t \sin t\, dt$

$\Rightarrow \int t^2 (\sin t)'\, dt = t^2 \sin t - \int 2t (-\cos t)'\, dt$

$\Rightarrow \int t^2 (\sin t)'\, dt = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C,\ C \in \mathbb{R}$

(β') $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos t\, dt$

$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \underline{\frac{\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}}} - \underline{\underline{2\sin\frac{\pi}{4}}} - \underline{\frac{\pi^2}{16}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} + \underline{\underline{2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$

$= \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2}$

Άσκηση 48

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(a \sin x)\, dx$

Έστω $f(x) = \sin(a\sin x)$ κ' $D_f = [-\pi, \pi]$

Για κάθε $x \in D_f$, $-x \in D_f$

Για κάθε $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$, αφού γενικά η $\sin(x)$ είναι περιττή θα είναι και η $f(x)$ περιττή

Θέτουμε $x = -y$. Άρα

$(x)'dx = (-y)'dy \Rightarrow dx = -dy$

Για $x=-\pi$ θε $x=-y \Rightarrow -\pi=-y \Rightarrow y=\pi$

κ'

Για $x=\pi$ θε $x=-y \Rightarrow \pi=-y \Rightarrow y=-\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{-\pi} -f(x)\,dx = \int_{\pi}^{-\pi} -f(-y)\,dy$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)\,dy = -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy$$

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$\Rightarrow 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(a\sin x)\,dx = 0$

Άσκηση 49

(α') $\lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{\int_1^h \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx}{h^2}$

Στο $[1,h)$ ισχύει: $\sqrt{x}\geq 1 \Leftrightarrow \ln(x)\sqrt{x} \geq \ln(x)$. Η $\ln(x)$ είναι γν. αύξουσα άρα όσο οι τιμές που παίρνει τείνουν στο ∞, τόσο και το εμβαδόν της σε σχέση με τον xx' θα τείνει στο ∞.

· $\ln(x)\sqrt{x} \geq \ln(x) \Rightarrow \int_1^{\infty} \ln(x)\sqrt{x}\,dx \geq \int_1^{\infty} \ln(x)\,dx \Rightarrow \int_1^{\infty} \ln(x)\sqrt{x}\,dx \geq \infty)$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \ln(x)\sqrt{x}\,dx = \infty$. Άρα

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx}{h^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{h\to\infty} \frac{\overset{\infty\cdot\infty}{\sqrt{h}\,\ln(h)}}{2h} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{\ln(h)+2}{2\sqrt{h}}}{2}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{\ln(h)+2}{4\sqrt{h}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{h}}{4\cdot\frac{1}{2\sqrt{h}}} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{h}}{\frac{2}{\sqrt{h}}}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h}}{2h} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \frac{\frac{1}{2\sqrt{h}}}{2} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{4\sqrt{h}}$$

$\frac{1}{\infty}$
$= 0$

(β') $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}{\frac{2}{x^2}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} \ (e^{\infty}) = \infty$

(γ') $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$, αφού $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$ κ' $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \ (e^{-\infty}) = 0$

Άσκηση 50

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{10 + 5e^{\frac{1}{x^3}}}$

• $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = 0$, αφού $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x^3}} \ (e^{-\infty}) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} \tan x = 0$

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} \overset{0 \cdot 0}{=} 0$, αφού $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^3}} \ (e^{+\infty}) = \infty$ κ' $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^3}}} = 0$

(β') $\lim_{n\to \infty} \frac{(\ln(n))^7}{\sqrt{n}}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{7(\ln(n))^6 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7(\ln(n))^6 \cdot 2\sqrt{n}}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(42(\ln(n))^5 \cdot 2\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} + 7(\ln(n))^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{42(\ln(n))^5 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \frac{7(\ln(n))^6}{\sqrt{n}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{42(\ln(n))^5 2\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{7(\ln(n))^6}{\sqrt{n}}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(\underset{(1)}{\frac{210(\ln(n))^4 \cdot 2\sqrt{n}}{n}} + \frac{42(\ln(n))^5}{\sqrt{n}}\right) + \lim_{n\to\infty} \underset{(2)}{\frac{42(\ln(n))^5 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}} = 0 + 0 \ \boxed{= 0}$

(1)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{210(\ln(n))^4 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{42(\ln(n))^5}{\sqrt{n}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{840(\ln(n))^3 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \frac{210(\ln(n))^4}{\sqrt{n}}\right)}_{(3)} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{210(\ln(n))^4 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}}_{(4)} = 0 + 0 \ \boxed{=0}$$

(3)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{840(\ln(n))^3 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{210(\ln(n))^4}{\sqrt{n}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2520(\ln(n))^2 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \frac{840(\ln(n))^3}{\sqrt{n}}\right)}_{(5)} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{840(\ln(n))^3 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}}_{(6)} = 0 + 0 \ \boxed{=0}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2520(\ln(n))^2 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{840(\ln(n))^3}{\sqrt{n}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{5040(\ln(n)) \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \frac{2520(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}\right)}_{(7)} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2520(\ln(n))^2 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}}_{(8)} = 0 + 0 \ \boxed{=0}$$

(7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5040(\ln(n)) \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2520(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(5040 \cdot \frac{1}{n} \cdot 2\sqrt{n} + 5040(\ln(n)) \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{(9)} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{5040(\ln(n)) \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}}_{(10)} = 0 + 0 \ \boxed{=0}$$

(9)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5040 \cdot 2\sqrt{n}}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{5040 \ln(n)}{\sqrt{n}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} 5040 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{5040 \, \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5040}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{5040 \cdot 2\sqrt{n}}{n} = 0 + 0 \ \boxed{=0}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5040 \, 2\sqrt{n}}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{5040}{\sqrt{n}} \ \boxed{=0}$$

(10)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5040 \cdot 2\sqrt{n} \cdot (\ln(n))}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5040 \cdot 2\sqrt{n}}{n} + \frac{5040 \ln(n)}{\sqrt{n}}\right) \overset{(9)}{=} 0$$

(8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2520(\ln(n))^2 \cdot 2\sqrt{n}}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5040\ln(n)\cdot 2\sqrt{n}}{n} + \frac{2520(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}\right) = 0+0 \; \boxed{=0}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2520(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{5040\ln(n)\cdot 2\sqrt{n}}{n}$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{840(\ln(n))^3 \cdot 2\sqrt{n}}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty}\left(\overset{(8)}{\frac{2520(\ln(n))^2 2\sqrt{n}}{n}} + \frac{840(\ln(n))^3}{\sqrt{n}}\right) = 0+0 \; \boxed{=0}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{840(\ln(n))^3}{\sqrt{n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \overset{(8)}{\frac{2520(\ln(n))^2 \cdot 2\sqrt{n}}{n}} = 0$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{210(\ln(n))^4 \cdot 2\sqrt{n}}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty}\left(\overset{(6)}{\frac{840(\ln(n))^3 \cdot 2\sqrt{n}}{n}} + \frac{210(\ln(n))^4}{\sqrt{n}}\right) = 0+0 \; \boxed{=0}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{210(\ln(n))^4}{\sqrt{n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \overset{(6)}{\frac{840(\ln(n))^3 \cdot 2\sqrt{n}}{n}} = 0$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{42(\ln(n))^5 \cdot 2\sqrt{n}}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty}\left(\overset{(4)}{\frac{210(\ln(n))^4 2\sqrt{n}}{n}} + \frac{42(\ln(n))^5}{\sqrt{n}}\right) = 0+0 \; \boxed{=0}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{42(\ln(n))^5}{\sqrt{n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \overset{(4)}{\frac{210(\ln(n))^4 \cdot 2\sqrt{n}}{n}} = 0$$

(γ') $\lim\limits_{h\to 0^+} \sup\limits_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$

Έστω $g(h) = \sup\limits_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ κ' $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Στο $(0,h)$, $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$. Άρα το σύνολο τιμών της f στο $(0,h)$ έχει supremum ίσο με 1

Άρα $\lim\limits_{h\to 0^+} \sup\limits_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x} = 1$

Άσκηση 51

(α') $\int \frac{dx}{(x^2-4)}$

$$= \int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)}\cdot\frac{1}{(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{4(x-2)}\,dx - \int \frac{1}{4(x+2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-2)}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(|x-2|) - \frac{1}{4}\ln(|x+2|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

(β') $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$$= \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx =$$

Θέτω $y = x-2$ κ' $(y)'dy = (x-2)'dx \Rightarrow dy = dx$

$$\int \frac{1}{(y+1)(y-1)y}\,dy = \int \frac{1}{(y^2-1)y}\,dy = \int \frac{1}{y^3-y}\,dy = \int \frac{1}{y^3(1-\frac{1}{y^2})}\,dy$$

Θέτω $u = 1 - \frac{1}{y^2}$ κ' $(u)'du = (1-\frac{1}{y^2})'dy \Rightarrow du = \frac{2}{x^3}dy \Rightarrow dy = \frac{y^3}{2}du$

$$\int \frac{1}{2uy^3}\,y^3\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|1 - \frac{1}{y^2}|) + C = \frac{1}{2}\ln(|1 - \frac{1}{(x-2)^2}|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x^2-4x+4-1|) - \frac{1}{2}\ln(|(x-2)^2|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|(x-3)(x-1)|) - \ln(|x-2|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-3|) + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \ln(|x-2|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 52

(α') $\lim_{x\to0^+} x^{\sin x}$

$= \lim_{x\to0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to0^+} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1,$

· $\lim_{x\to0^+} \sin x \ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-(\sin x)^2}{x\cos x}$

$= \lim_{x\to0^+} -\frac{\sin x}{\cos x} = 0$

(β') $\lim_{x\to0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln\sqrt{x}^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} e^{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}} = e^0 = 1,$

· $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln\sqrt{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{-\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to0^+} -\frac{x}{\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{-1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} -2\sqrt{x} = (-2).0 = 0$

(γ') $\lim_{x\to0^+} (\tan x)^{(\tan x)} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln(\tan x)^{\tan x}} = \lim_{x\to0^+} e^{\tan x.\ln(\tan x)} = e^0 = 1,$

· $\lim_{x\to0^+} \tan x.\ln(\tan x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\tan x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{(\cos x)^2}}{\frac{-1}{(\tan x)^2}\cdot\frac{1}{(\cos x)^2}}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{-1}{(\tan x)^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-(\tan x)^2}{\tan x}$

$= \lim_{x\to0^+} -\tan x$

$= \lim_{x\to0^+} -\frac{\sin x}{\cos x}$

$= -\frac{0}{1}$

$= 0$