Ομάδα ασκήσεων 5

Άσκηση 29

Σχοινάκη Μαρία
3210191

$FD(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$

Έστω $h(x)=x^2 FD(x)$

Το πεδίο ορισμού της h είναι το $\mathbb{R}$. Άρα $D_h=\mathbb{R}$

Έστω ένα σημείο $\xi=0$

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2FD(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xFD(x)=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2FD(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}xFD(x)=0$

Άρα $h'(0)=0$ άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο 0

αφού $-|x|\leq xFD(x)\leq |x|$, άρα από κριτήριο παρεμβολής $h'(0)=0$

Έστω ένα σημείο κ ρητό. $h(k)=k^2\cdot 1=k^2$

Έστω η συνεχής στο κ κ' $\varepsilon=\frac{k^2}{2}>0$

Άρα για ε>0 $\exists\ \delta>0$: αν $x\in(k-\delta,k+\delta)$ να ισχύει

$|h(x)-h(k)|=|h(x)-k^2|<\varepsilon$

$\Rightarrow h(x)>k^2-\frac{k^2}{2}$

$\Rightarrow h(x)>\frac{k^2}{2}$

Άρα $h(x)>0$

Όμως $\forall x\in(k-\delta,k+\delta)$ $\exists$ άρρητα x για τα οποία

$h(x)=x^2FD(x)=0$ Άρα Άτοπο

Άρα η h δεν είναι συνεχής σε ρητά σημεία κ

άρα δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη σε αυτά

Έστω τώρα άρρητο σημείο λ. $h(\lambda)=\lambda^2\cdot 0=0$

Έστω η συνεχής στο λ κ' $\varepsilon=\lambda^2>0$

Άρα για ε>0 $\exists\ \delta>0$: αν $x\in(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$ να ισχύει

$|h(x)-h(\lambda)|=|h(x)-0|=|h(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow -\lambda^2<h(x)<\lambda^2 \Rightarrow h(x)<\lambda^2$

Όμως $\forall x\in(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$ $\exists$ ρητά x για τα οποία ισχύει

$h(x)=x^2FD(x)=x^2>0$. Άρα Άτοπο. Άρα η h δεν είναι παρ/μη στα λ.

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0 καθώς σε κάθε άλλο σημείο δεν είναι καν συνεχής.

Άσκηση 30

$$(\tan(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\cos(x+h)}{h\cdot\cos(x+h)\cos(x)} \quad \left(\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)\right.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cdot\cos(x)} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\cot(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)\cdot\sin(x) - \sin(x+h)\cos(x)}{h\cdot\sin(x+h)\cdot\sin(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\sin(h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\cdot\sin(x)} = -1\cdot\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

Άσκηση 31

$k(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $|k(x)| \le K$ $\forall x\in\mathbb{R}$ κ' $K\in\mathbb{R}$

$F(x) = (x+3)^2 k(x)$

• $F(-3) = 0\cdot k(-3) = 0$

$|F(x)| = |(x+3)^2 k(x)| \le K(x+3)^2$

$\Rightarrow -K(x+3)^2 \le F(x) \le K(x+3)^2$

$\lim_{x\to -3}(-K(x+3)^2) = -K\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to -3}(K(x+3)^2) = K\cdot 0 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x\to -3} F(x) = 0$

κ' $F(-3) = \lim_{x\to -3} F(x)$. Άρα η f είναι συνεχής στο -3

(β) $\lim_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)^2 k(x) - 0}{(x+3)} = \lim_{x\to -3} (x+3)k(x) = 0 \cdot k(-3) = 0$

Άρα $f'(-3)=0$

(γ) Έστω $k(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x+3}\right), & x\neq -3 \\ 1, & x=-3 \end{cases}$

$|k(x)| \leq K = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ αφού $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x+3}\right) \leq 1$

$f'(x) = 2(x+3)\cdot \sin\left(\frac{1}{x+3}\right) + (x+3)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x+3}\right)\cdot(-x-3)^{-2}$

$= 2(x+3)\cdot\sin\left(\frac{1}{x+3}\right) - \cos\left(\frac{1}{x+3}\right) \ \forall x \neq -3$

Για $x=-3$ $f'(-3)=0$

Η $f'(x)$ δεν είναι συνεχής στο -3 αφού $f'(-3)=0$ και το $\cos\left(\frac{1}{x+3}\right)$ έχει ως συνέπεια η $f'(x)$ να παίρνει όλες τις τιμές του $[-1,1]$ σε αυθαίρετα μικρές αντίστοιχες γειτονιές του -3. Άρα η f' δεν είναι παραγωγίσιμη αφού η f' δεν είναι καν συνεχής. Άρα η f'' δεν υπάρχει.

Άσκηση 32

$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

$(\operatorname{arccot}(y))' = \frac{1}{(\cot(x))'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = -\sin^2(x) = -\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)} = \frac{-\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)}}{\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)}}$

$= \frac{-1}{\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} = \frac{-1}{1+\cot^2(x)} = \frac{-1}{1+y^2}, \ y\in\mathbb{R}$

Άσκηση 33

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, η f' υπάρχει παντού στο (a,b)

Έστω $x_1, x_2 \in (a,b)$ κ' $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$. Η f' είναι συνεχής στο (a,b) άρα από Θεώρημα Bolzano $\exists$ ένα τουλάχιστον $x_0: f'(x_0)=0$. Άτοπο, αφού $f'(x)\neq 0$ στο (a,b). Άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (a,b), άρα $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$. Αν $f'(x)>0$, η f είναι γν. αύξουσα. Αν $f'(x)<0$, η f είναι γν. φθίνουσα.

(δ') $\int (\sin(2t))(\cos(t))\,dt$ $\left((\sin(x))(\cos(y)) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}\right)$

$= \int \frac{\sin(t)+\sin(3t)}{2}$

$= -\frac{\cos(t)}{2} - \frac{\cos(3t)}{6} + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

(ε') $\int (\sin^3 x)(\cos^7 x)\,dx$

$= \int (\sin^3 x)(\cos^2 x)^3 \cdot \cos x\, dx$

$= \int (\sin^3 x)(1-\sin^2 x)^3 \cdot \cos x\, dx$

$= \int (\sin^3 x)(1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x)\cos x\, dx$

$= \int (\sin^3 x-3\sin^5 x+3\sin^7 x-\sin^9 x)\cos x\, dx$

$= \int \cos(x)\sin^3 x-3\sin^5 x\cdot\cos(x)+\cos(x)3\sin^7 x-\cos(x)\sin^9 x)\,dx$

$= \int \cos(x)\sin^3 x\,dx - \int 3\sin^5 x\cdot\cos(x)\,dx + \int \cos(x)3\sin^7 x\,dx - \int \cos(x)\sin^9 x\,dx$

$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{3\sin^6 x}{6} + \frac{3\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C\ ,\ C\in\mathbb{R}$

Άσκηση 35

$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

(α') Για $x\neq 0$

$f'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)'$

$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} - \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)\cdot x}{2\sqrt{|x|}}$

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Στο 0

$f(0)=0$

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}$

$\left|x\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| = |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| \leq |x|$

$\left|x\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| \leq |x|$

$-|x| \le x \sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} \le |x|$

$\cdot \lim_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$

Άρα από κριτήριο Παρεμβολής

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0$

Άρα $f'(0)=0$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}} - \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)\cdot x}{2\sqrt{|x|}}\right) = 0$

Άρα η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(Β') $\left|\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| \le 1 \Rightarrow \left|2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right| \le |2x|$

$\left|-\frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)\cdot x}{2\sqrt{|x|}}\right| \le \left|\frac{-x}{2\sqrt{|x|}}\right|$

$|f'(x)| \le |2x| + \left|\frac{-x}{2\sqrt{|x|}}\right|$

$\Rightarrow |f'(x)| \le 2|x| + \left|\frac{-x}{2\sqrt{|x|}}\right|$

$\Rightarrow -2|x| - \left|\frac{-x}{2\sqrt{|x|}}\right| \le f'(x) \le 2|x| + \left|\frac{-x}{2\sqrt{|x|}}\right|$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $[-M, M]$, $M>0$

$\forall x\in(a,b)\ \exists K = 2|x| + \left|\frac{-x}{2\sqrt{|x|}}\right| : |f'(x)| \le K$

Άρα η f είναι Lipschitz συνεχής σε όλα τα $[-M, M]$