ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
DEPARTMENT OF INFORMATICS

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Διδάσκουσα: Αλκμήνη Σγουρίτσα

1η Σειρά Ασκήσεων - Εαρινό Εξάμηνο 2023

Προθεσμία: **24 Απριλίου 2023**

0.5 Μονάδες bonus στον τελικό βαθμό

Οι λύσεις των ασκήσεων πρέπει να γραφτούν σε υπολογιστή (πχ Word ή Latex), και να παραδοθούν στο **eclass** σε μορφή **pdf**. Η προθεσμία της παράδοσης είναι **24 Απριλίου 2023**, και ώρα 11:59μμ.

Βαθμολογία: **10 μονάδες συνολικά**
(αντιστοιχούν σε **0.5 Μονάδες bonus** στον τελικό βαθμό)

Πληροφορίες για Latex
Εδώ θα βρείτε έναν οδηγό για Latex:
https://mathbooksgr.files.wordpress.com/2011/09/introductiontolatex.pdf
Μπορείτε να δοκιμάσετε το online tool "Overleaf" για τα αρχεία σε Latex, στο οποίο πρέπει να κάνετε εγγραφή αλλά χρησιμοποιείται δωρεάν: https://www.overleaf.com/
Στο eclass θα βρείτε ένα template αρχείο (.tex αρχείο) που θα σας βοηθήσει να ξεκινήσετε.

Ασκήσεις

1. (**1 μον.**) Βάλτε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά, f_1, f_2, f_3, ..., ώστε να ισχύει $f_i = O(f_{i+1})$. Δεν χρειάζεται να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\log(n^n),\ (\log(2^n))^2,\ \log\sqrt{n},\ \log(4^n),\ \sqrt{\log_9 n},\ 2^{n\log n},\ n^{\log n},\ 8^{\log n},\ 2^{\frac{\log n}{2}},\ 2^n,\ n!$$

2. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του O (big O) για να δείξετε ότι

   (α') (**0.5 μον.**) $n \cdot 2^n = O(3^n)$

   (β') (**0.5 μον.**) $n^2 \cdot 2^n + 10 = O(3^n)$

   Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μαθηματική επαγωγή.

3. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

   Συνάρτηση $f(n)$:
   ```
   if n ≥ 1:
       for i = 1 to n:
           print(i)
       f(⌊n/2⌋)
       f(⌊n/2⌋)
   ```

   Υποθέστε ότι καλείτε την $f(n)$ για κάποιο $n \geq 2$.

   (α΄) (**1 μον.**) Πόσοι αριθμοί (όχι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους) θα εκτυπωθούν;

   (β΄) (**1 μον.**) Πόσες φορές θα εκτυπωθεί ο αριθμός 1;

   Δώστε τις απαντήσεις σας σα συνάρτηση του n. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον συμβολισμό $\Theta(\cdot)$ αν σας εξυπηρετεί. Σε κάθε περίπτωση **βρείτε την αναδρομική σχέση** που δινει το πλήθος των ζητούμενων αριθμών και χρησιμοποιείστε το Master Theorem για την επίλυσή της. Για τη διευκόλυνσή σας μπορείτε να υποθέσετε ότι το n είναι μία δύναμη του 2, δηλαδή $n = 2^k$, για κάποιο $k \geq 1$.

4. Ένας πίνακας A με n στοιχεία λέγεται ότι έχει πλειοψηφικό στοιχείο αν πάνω από τα μισά στοιχεία είναι ίδια. Προσοχή, ένα στοιχείο που εμφανίζεται ακριβώς $n/2$ φορές δεν είναι πλειοψηφικό στοιχείο. Αυτό επιπλέον σημαίνει ότι υπάρχει το πολύ ένα πλειοψηφικό στοιχείο. Τα στοιχεία δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους με ερωτήσεις του τύπου $A[i] < A[j]$ (σκεφτείτε για παράδειγμα πως είναι αρχεία εικόνας ή ήχου και όχι αριθμοί). Μπορείτε όμως να ελέγξετε σε σταθερό χρόνο αν δύο στοιχεία είναι ίδια, δηλαδή αν ισχύει $A[i] = A[j]$ ή όχι.

   Σας δίνεται περιγραφικά ο παρακάτω αλγόριθμος: Σε έναν πίνακα $A[1..n]$, δημιουργήστε $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ζεύγη. Αν n περιττός, ελέγξτε αν το στοιχείο που περισσεύει είναι πλειοψηφικό. Αν ναι, επιστρέφεται αυτό το στοιχείο. Στην περίπτωση που το n είναι περιττός και το στοιχείο που περισσεύει δεν είναι πλειοψηφικό, ή στην περίπτωση που το n είναι άρτιος, για κάθε ζεύγος που έχει και τα δύο στοιχεία ίδια, κρατήστε το ένα από τα δύο. Για κάθε ζεύγος με διαφορετικά στοιχεία, πετάξτε και τα δύο. Επαναλάβετε τη διαδικασία από την αρχή θεωρώντας σαν είσοδο κάθε φορά τα στοιχεία που έχετε κρατήσει, έως ότου μείνετε με 0 στοιχεία (ή βρεθεί πλειοψηφικό στοιχείο). Στην τελευταία σελίδα δίνονται σχηματικά 4 παραδείγματα για την εφαρμογή ενός τέτοιου αλγορίθμου.

   (α΄) (**0.5 μον.**) Υποθέστε ότι το n είναι άρτιος. Μετά από μία επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας (ξεκινώντας με τον πίνακα $A[1..n]$), θα καταλήξετε με το πολύ $n/2$ στοιχεία. Έστω B ο πίνακας με αυτά τα στοιχεία. Δείξτε ότι αν το x ήταν πλειοψηφικό στοιχείο του A, τότε το x είναι πλειοψηφικό στοιχείο του B. (Σημείωση: το ανάποδο δεν ισχύει πάντα, δείτε το 4ο παράδειγμα στην τελευταία σελίδα)

   (β΄) (**0.5 μον.**) Υποθέστε ότι το n είναι περιττός. Μετά από μία επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας (ξεκινώντας με τον πίνακα $A[1..n]$), είτε θα βρείτε το πλειοψηφικό στοιχείο του A κατά τον έλεγχο του περισσευούμενου στοιχείου, είτε θα καταλήξετε με το πολύ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ στοιχεία. Στη δεύτερη περίπτωση, έστω B ο πίνακας με αυτά τα στοιχεία. Δείξτε ότι αν το x ήταν πλειοψηφικό στοιχείο του A, τότε το x είναι πλειοψηφικό στοιχείο του B.

(γ′) **(1 μον.)** Σχεδιάστε έναν "διάιρει-και-βασίλευε" αλγορίθμο σε ψευδογλώσσα που χρησιμοποιεί την παραπάνω ιδέα. Εξηγήστε πώς ο αλγόριθμος βρίσκει το πλειοψηφικό στοιχείο αν υπάρχει τέτοιο.

(δ′) **(1 μον.)** Βρείτε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Για τον υπολογισμό της πολυπλοκότητας **δώστε την αναδρομική σχέση** για τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου και χρησιμοποιήστε το Master Theorem για την επίλυσή της.

5. Δίνονται n κουτιά όπου το καθένα χωράει 20 μπάλες. Δίνονται $20 \cdot n$ μπάλες που η κάθε μία είναι χρωματισμένη με ένα χρώμα. Υπάρχουν συνολικά n διαφορετικά χρώματα, που σημαίνει ότι κάθε μπάλα έχει ένα από τα n χρώματα, και για καθένα από τα n χρώματα τουλάχιστον μία μπάλα έχει αυτό το χρώμα. Σημειώνεται ότι για κάθε χρώμα δεν έχουμε απαραίτητα τον ίδιο αριθμό μπαλών, πχ μπορεί ένα χρώμα να το έχει μία μόνο μπάλα ή ένα χρώμα να το έχουν οι μισές μπάλες. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να μην υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν 20 μπάλες του ίδιου χρώματος σε καθένα από τα n κουτιά. Υπάρχει όμως τρόπος να τοποθετηθούν οι μπάλες έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει μπάλες το πολύ δύο διαφορετικών χρωμάτων. Με άλλα λόγια, υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν οι μπάλες έτσι ώστε σε κάθε κουτί όλες οι μπάλες είναι είτε του ίδιου χρώματος, είτε δύο διαφορετικών χρωμάτων (σημειώνεται ότι επιτρέπεται ένα κουτί να περιέχει μόνο ένα χρώμα μπαλών και ένα άλλο κουτί να περιέχει δύο χρώματα).

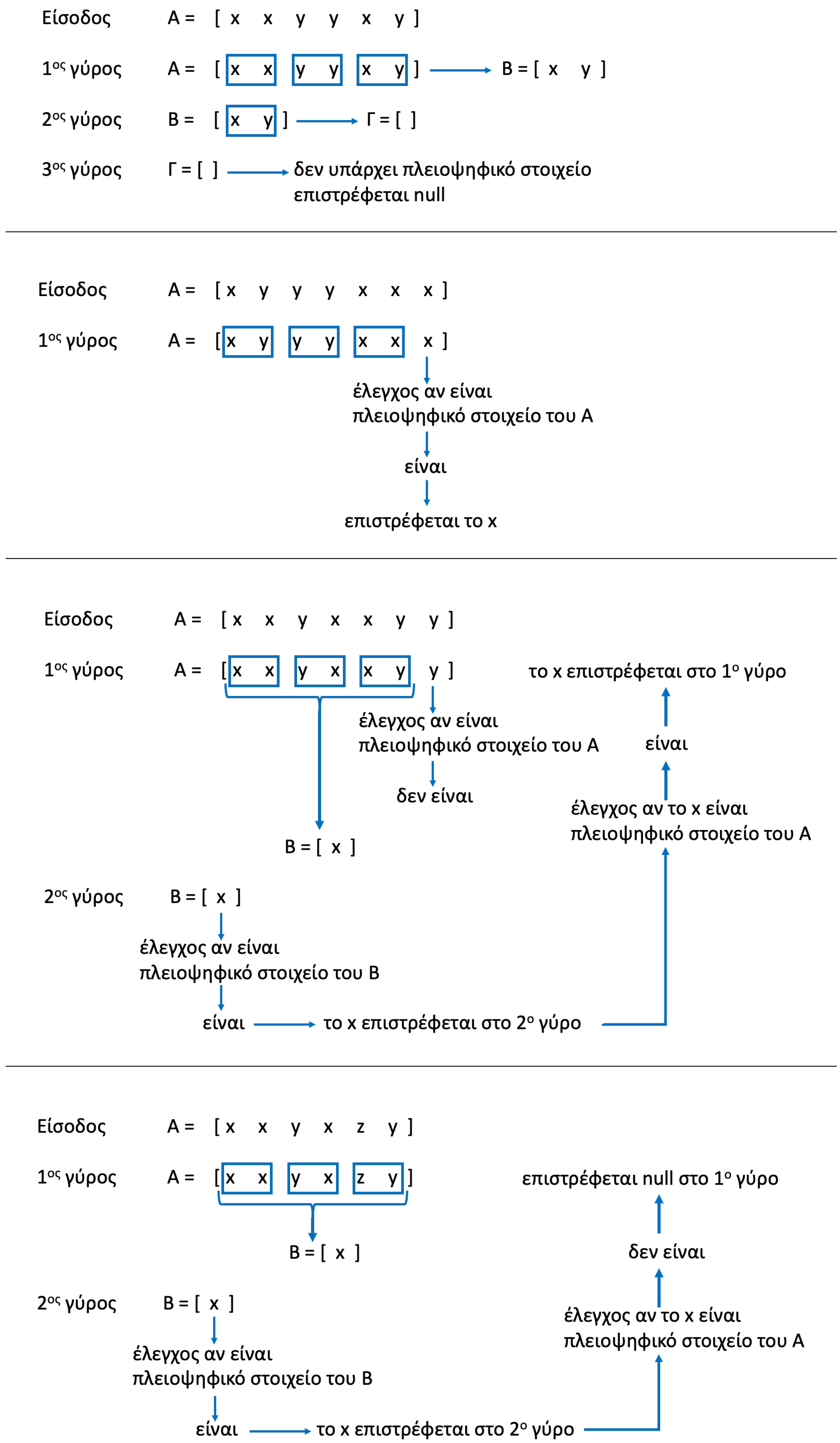
   Δίνονται τα παρακάτω παραδείγματα:

   - $n = 2$: Υποθέστε 2 κουτιά και 40 μπάλες: 13 κόκκινες και 27 μπλε. Μπορούμε να τοποθετήσουμε 13 κόκκινες μπάλες και 7 μπλε στο ένα κουτί και 20 μπλε μπάλες στο άλλο.
   - $n = 3$: Υποθέστε 3 κουτιά και 60 μπάλες: 6 κίτρινες, 13 κόκκινες και 41 μπλε. Μπορούμε να τοποθετήσουμε 6 κίτρινες μπάλες και 14 μπλε στο πρώτο κουτί, 13 κόκκινες μπάλες και 7 μπλε στο δεύτερο κουτί και 20 μπλε μπάλες στο τρίτο κουτί.
   - $n = 4$: Υποθέστε 4 κουτιά και 80 μπάλες: 6 κίτρινες, 13 κόκκινες, 28 μπλε και 33 πράσινες. Υπάρχουν πάνω από ένας τρόποι να τοποθετήσουμε τις μπάλες:
     - 1ος τρόπος: 6 κίτρινες και 14 μπλε $\rightarrow$ κουτί 1. 13 κόκκινες και 7 πράσινες $\rightarrow$ κουτί 2. 14 μπλε και 6 πράσινες $\rightarrow$ κουτί 3. 20 πράσινες $\rightarrow$ κουτί 4.
     - 2ος τρόπος: 6 κίτρινες και 14 πράσινες $\rightarrow$ κουτί 1. 13 κόκκινες και 7 μπλε $\rightarrow$ κουτί 2. 19 πράσινες και 1 μπλε $\rightarrow$ κουτί 3. 20 μπλε $\rightarrow$ κουτί 4.

(α′) **(1 μον.)** Έστω ότι σας δίνεται πίνακας $A[1..n]$ με τον αριθμών των μπαλών κάθε χρώματος, δηλαδή υπάρχουν $A[i]$ μπάλες χρώματος i, $A[i] > 0$ για κάθε i, και $\sum_{i=1}^{n} A[i] = 20 \cdot n$. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο που τοποθετεί τις μπάλες έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει μπάλες το πολύ δύο διαφορετικών χρωμάτων. Δώστε τον αλγόριθμο είτε περιγραφικά, είτε σε ψευδογλώσσα.

(β′) **(1 μον.)** Αποδείξτε ότι η λύση που βρίσκει ο αλγόριθμός σας είναι σωστή.

(γ′) **(1 μον.)** Υπολογίστε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σα συνάρτηση του n, δικαιολογώντας την απάντησή σας. Υποθέστε ότι η διαδικασία της τοποθέτησης μιας μπάλας σε ένα κουτί γίνεται σε ένα βήμα, δηλαδή το γέμισμα ενός κουτιού με 20 μπάλες χρειάζεται χρόνο $O(1)$, και ότι οι πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης γίνονται επίσης σε ένα βήμα.



Σχήμα 1: Παραδείγματα του αλγορίθμου της άσκησης 4.