Ομάδα ασκήσεων 3 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 13

Έστω $f(x)$ άρτια με $\lim_{x\to 0+} f(x)=L$

Λόγω του ορισμού του ορίου $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ τέτοιο ώστε $\forall\ x\in(0,\delta)$ να ισχύει $|f(x)-L|<\varepsilon$

Έστω τώρα $x\in(-\delta,0)$ κ' $\varepsilon,\delta>0$ τότε
$-\delta<x<0 \Rightarrow 0<-x<\delta \Rightarrow |f(-x)-L|<\varepsilon$ όμως επειδή η f είναι άρτια $f(-x)=f(x)$
Άρα $|f(-x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
Άρα $\exists\delta>0: \forall x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ να ισχύει $|f(x)-L|<\varepsilon$
Άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=L$ αφού $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=L$

Άσκηση 14

Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x)=k>0$

Θέτουμε $\varepsilon=k/2$ άρα από τον ορισμό του ορίου
$\exists\delta>0: 0<|x-\varepsilon|<\delta \Rightarrow |f(x)-k|<\varepsilon \Rightarrow -k/2<f(x)-k<k/2$
$\Rightarrow f(x)-k>-k/2 \Rightarrow f(x)>k/2$ αφού $k>0$
Θέτω $a=x_0-\delta$ κ' $b=x_0+\delta$, $P=k/2$
Άρα $a<x_0<b \Rightarrow x_0-\delta<x_0<x_0+\delta$ κ' $f(x)>P=k/2$

Άσκηση 15

$\lim_{h\to 0+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$

Έστω $g(h)=\sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ κ' $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

Στο $(0,h)$, $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ Άρα το σύνολο τιμών της f στο $(0,h)$ έχει supremum ίσο με 1
Άρα $\lim_{h\to 0+} g(h)=1$

Άσκηση 16

• $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{5-x^2-2x-5}{\sqrt{x}(\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5})}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2-2x}{\sqrt{x}(\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5})}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x(x+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5})}\right)$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}(x+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}(x+2)}{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5}}$

$=\frac{0\cdot 2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=0$

• $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\tan x}{\sin x\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x\cos x}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}}{\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}}{\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x}=\frac{1+1\cdot 1}{1\cdot 1}=\frac{1+1}{1}=2$

Άσκηση 17

Θέτω $\varepsilon=10-\pi$ κ' σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου

$\exists\, x_0 : \forall\, x>x_0$ να ισχύει

$|f(x)-10|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-10|<10-\pi$

$\Rightarrow \pi-10<f(x)-10<10-\pi \Rightarrow \pi<f(x)<20-\pi$

$\Rightarrow f(x)>\pi$

Άσκηση 18

• $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}$

$x\to +\infty$ άρα $x>0$ οπότε $x\geq\lfloor x\rfloor$ κ' $x-\lfloor x\rfloor<1$

άρα $0\leq x-\lfloor x\rfloor<1 \Rightarrow \frac{0}{\sqrt{x}}\leq\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{0}{\sqrt{x}}\right)=0=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}=0$

B) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10$

Θέτω $f(x) = \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}}$ (1) κοντά στο $\frac{\pi}{2}$

κ' $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 10$

(1) $f(x)(x-\frac{\pi}{2}) = a\sin(x+b)$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} a\sin(x+b) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)(x-\frac{\pi}{2})$

Άρα $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} a\sin(x+b) = 0$

$\Rightarrow a\sin(\frac{\pi}{2}+b) = 0$

$\Rightarrow a\cos b = 0$

$\Rightarrow a = 0$ ή $\cos b = 0$

$\Rightarrow b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Έστω $a = 0$ και $b = \frac{\pi}{2}$

γ) Από το (B) ερώτημα για να ισχύει $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10$ πρέπει

$a\cos b = 0$

Δηλαδή

- $a = 0$ κ' $\cos b \neq 0$

  $\Rightarrow b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ή

- $a \neq 0$ κ' $\cos b = 0$

  $\Rightarrow b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ή

$a = 0$ κ' $\cos b = 0$

$\Rightarrow b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Άσκηση 19

α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$

$0 \le \frac{|\cos x|}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to+\infty}(0) = 0 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x = 0$

β) $\lim_{x\to+\infty}|\cos x|^x$

$\forall x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$, $|\cos x|^x = 0$
$\forall x = 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, $|\cos x|^x = 1$
Άρα το $\lim_{x\to+\infty}|\cos x|^x$ δεν υπάρχει

γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$

$x \to +\infty$ άρα $x > 0$ οπότε $x \ge \lfloor x \rfloor$ κ' $x - \lfloor x \rfloor < 1$
Άρα $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow \frac{0}{\sqrt{x}} \le \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{0}{\sqrt{x}}\right) = 0 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} = 0$

Άσκηση 20

$f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα και όχι φραγμένη άνω

Η f είναι αύξουσα στο $[a,+\infty)$ άρα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [a,+\infty)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$ (1)

Έστω $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

Έστω $f(x_0) > L$ κ' $\varepsilon = f(x_0) - L$
$\Rightarrow \varepsilon > 0$

(1) $x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$
$\Rightarrow f(x) \geq L + \varepsilon$

Εξ ορισμού του ορίου $\exists M : x > M$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < L + \varepsilon$

Άτοπο

Άρα $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$