Ομάδα Ασκήσεων 10 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 69

α) Η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-b,b]$ άρα

$E(X) = \mu = \frac{-b+b}{2} = 0$ και διασπορά $VAR(X) = \frac{(b+b)^2}{12} = \frac{4b^2}{12} = \frac{b^2}{3}$

• $|X-\mu| \geq c \Leftrightarrow X-\mu \geq c$ ή $X-\mu \leq c$

$\Leftrightarrow X \geq \mu + c$ ή $X \leq \mu + c$

$\Leftrightarrow X \geq c$ ή $X \leq c$

• $P(X \geq c) = P(c \leq X \leq b) = \frac{b-c}{b+b} = \frac{b-c}{2b}$

• $P(X \leq c) = \frac{c+b}{b+b} = \frac{c+b}{2b}$

Άρα $P(|X-\mu| \geq c) = \frac{b-c}{2b} + \frac{c+b}{2b} = \frac{2b}{2b} = 1$

Σύμφωνα με την ανισότητα του Chebyshev

$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{VAR(X)}{c^2} = \frac{\frac{b^2}{3}}{c^2} = \frac{b^2}{3c^2}$

Αν $b^2 \geq 3c^2$ ισχύει και το b^2 κατά πολύ μεγαλύτερο από το $3c^2$ τότε το φράγμα είναι κατά πολύ μεγαλύτερο.

β) Η X ακολουθεί την κατανομή Laplace άρα

$E(x) = \mu = \theta = 0$ και $VAR(x) = 2a^2$

• $P(X \geq \mu + c) = P(X \geq c) = \int_c^{+\infty} \frac{a}{2} e^{-a|x|} dx = \int_c^{+\infty} \left(-\frac{1}{2e^{ax}}\right)' dx = 0 + \frac{1}{2e^{ac}}$

$= 1/2e^{ac}$

• $P(X \leq \mu + c) = P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} \left(\frac{e^{ax}}{2}\right)' dx = \frac{e^{ac}}{2} - 0 = e^{ac}/2$

Άρα $P(|X-\mu| \geq c) = \frac{1}{2e^{ac}} + \frac{e^{ac}}{2} = \frac{1+e^{2ac}}{2e^{ac}}$

Σύμφωνα με την ανισότητα Chebyshev

$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{VAR(X)}{c^2} = \frac{2a^2}{c^2}$

Άρα η πιθανότητα με το φράγμα είναι πολύ κοντά

γ) Η X έχει κανονική κατανομή άρα
$E(X)=\mu$ και $VAR(X)=\sigma^2$

• $P(X \geq \mu + c) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu+c-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)$

• $P(X \leq \mu + c) = \Phi\left(\frac{\mu+c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)$

Άρα $P(|X-\mu| \geq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = \underline{1}$

Σύμφωνα με την ανισότητα Chebychev
$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{VAR(X)}{c^2} = \frac{\sigma^2}{c^2}$

Άρα η πιθανότητα με το φράγμα δεν απέχουν πολύ.

Άσκηση 70

α) $\sum_{i=5}^{10} (x-4)/k = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} + \frac{5}{k} + \frac{6}{k} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{21}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 21$

β) $E(X) = \sum_{i=5}^{10} x p_X(x) = \sum_{i=5}^{10} \frac{1}{21} x(x-4)$

$= \frac{1}{21}(5 + 6\cdot 2 + 7\cdot 3 + 8\cdot 4 + 9\cdot 5 + 10\cdot 6) = \frac{1}{21}\cdot(175) = \frac{25}{3}$

• $E(X^2) = \sum_{i=5}^{10} x^2 p_X(x) = \frac{1}{21}(5^2 + 6^2\cdot 2 + 7^2\cdot 3 + 8^2\cdot 4 + 9^2\cdot 5 + 10^2\cdot 6)$

$= \frac{1}{21}(1505) = \frac{215}{3}$

$VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{215}{3} - \left(\frac{25}{3}\right)^2$
$= \frac{215}{3} - \frac{625}{9} = \frac{645}{9} - \frac{625}{9} = \frac{20}{9}$

γ) Έστω X_i $i \in \{1,2,3,\dots 100\}$ Τ.Μ για κάθε χτύπημα.
$E(X_i) = \frac{25}{3}$, $VAR(X_i) = \frac{20}{9}$
Άρα από το Κ.Ο.Θ έχουμε:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 850\right) = P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - \frac{25}{3}}{\frac{20}{9}\sqrt{1/100}} \geq 850\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot\frac{25}{3}}{\frac{20}{9}\sqrt{100}} \geq \frac{850 - 100\cdot\frac{25}{3}}{10\cdot\frac{20}{9}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 1 - \Phi(1.118) \simeq 1 - 0,8665 \simeq 0,1335$$

Άσκηση 71

Έστω X_i, $i = \{1,2,3\dots N\}$ Τ.Μ που εκφράζει το βάρος κάθε καρπουζιού από μια καλλιέργεια. $E(X_i) = 15$ κ' τυπική απόκλιση 1.

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i > 3000\right) < 10^{-4} \iff P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i > 3000\right) < 10^{-4}$$

$$\iff P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - 15N}{\sqrt{N}} > \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) < 10^{-4}$$

$$\iff 1 - \Phi\left(\frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) < 10^{-4} \iff \Phi\left(\frac{3000-15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4}$$

$\iff \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1 - 10^{-4})$. Έστω $x = \Phi^{-1}(1-10^{-4})$ κ' $\sqrt{N} = X$

Άρα λύνουμε την εξίσωση:

$$\frac{3000 - 15X^2}{X} = x \iff 3000 - 15X^2 = xX \iff xX + 15X^2 - 3000 = 0$$

$\Delta = x^2 + 4 \cdot 15 \cdot 3000$ κ' $x \simeq 1.192$

Άρα $X = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4\cdot 15 \cdot 3000}}{30} \overset{X>0}{=} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 4 \cdot 15 \cdot 3000}}{30} \simeq 14.10$

Άρα $N_0 = 198.81$ κ' N_0 ακέραιο, άρα 198 καρπούζια

Άσκηση 72

Έστω X_i, $i=\{1,2,3\dots100\}$ τ.μ που εκφράζει το μήκος κάθε άλματος.

• $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 205\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{N}} > \frac{205-100\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right)$

$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 2}{\sqrt{100}} > \frac{205-100\cdot 2}{\sqrt{100}}\right)$

$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 200}{10} > \frac{5}{10}\right) = 1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,30$

για το αρσενικό

• $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 205\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{N}} > \frac{205-100\mu}{\sigma\sqrt{N}}\right)$

$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 1,9}{\sqrt{100}} > \frac{205-100\cdot 1,9}{\sqrt{100}}\right)$

$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 190}{10} > \frac{15}{10}\right) = 1-\Phi\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 0,9332$

για το θηλυκό

B) Έστω A το ενδεχόμενο το καγκουρό να είναι αρσενικό και A' να είναι θηλυκό. Άρα $P(A)=P(A')=0.5$

Έστω A_1 το ενδεχόμενο το καγκουρό να υπερβεί τα 205 μέτρα.

$P(A_1|A) = 1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ και $P(A_1|A') = 1-\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$

Οπότε από τον κανόνα του Bayes

$P(A|A_1) = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1|A)P(A)+P(A_1|A')P(A')} = \frac{\left(1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 0,5}{\left(1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 0,5+\left(1-\Phi\left(\frac{3}{2}\right)\right)\cdot 0,5}$

$= \frac{1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)}{2-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{3}{2}\right)} \simeq \frac{0,30}{1,2332} \simeq 0,2432$

Άσκηση 73

Έστω X_i, $i = \{1, 2, 3, \dots 150\}$ Τ.Μ που εκφράζει το βάρος της εκάστοτε κολοκύθας. Η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

Άρα $E(X) = \frac{11+5}{2} = \frac{16}{2} = 8$

& $VAR(X) = \frac{(11-5)^2}{12} = \frac{6^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$

$P(X_i > 10) = P(10 < X_i < 11) = \frac{11-10}{11-5} = \frac{1}{6}$