Ομάδα Ασκήσεων 9

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 57

(α') Έστω Υ τ.μ που εκφράζει το πλήθος των παιδιών που θα εμφανίσουν το νόσημα. Κ. Καθένα από τα 6 παιδιά είναι ένα ανεξάρτητο πείραμα με επιτυχία, να εμφανίσει το νόσημα και με πιθανότητα $p=\frac{1}{4}$ και αποτυχία να μην το εμφανίσει. Η Υ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. $Y \sim$ Διων$(6, 1/4)$. Άρα

$$p_Y(2) = \binom{6}{2}(1/4)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!}\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{81}{256} = \frac{1215}{4096} \simeq 0{,}29$$

(β') Έστω X_i η διάρκεια ζωής του i-οστού παιδιού.
Θέλουμε $P(X_i<90) = \Phi\left(\frac{90-80}{5}\right) = \Phi(2)$
και αφού είναι ανεξάρτητα,

$$P(\underbrace{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6}_{<90}) = P(X_1<90)P(X_2<90)\ldots P(X_6<90) = (\Phi(2))^6$$

Άσκηση 58

Έστω Χ τ.μ που εκφράζει το ύψος των αγοριών. Είναι $X \sim N(1.70, 0{,}1)$. Θέλουμε $P(X_i>1.95)$ όπου X_i το ύψος του i-οστού αγοριού με $i\in\{1,2,3\ldots 300\}$

$$P(X_i>1.95) = 1-\Phi\left(\frac{1.95-1.70}{0{,}1}\right) = 1-\Phi\left(\frac{1.25}{0{,}1}\right) = 1-\Phi\left(\frac{25}{2}\right)$$

Έστω τώρα Υ τ.μ που εκφράζει το πλήθος των αγοριών που ο προπονητής κάλεσε. Καθένα από τα 300 αγόρια είναι ένα ανεξάρτητο πείραμα, με επιτυχία, να τον καλέσει ο προπονητής και πιθανότητα $p=1-\Phi\left(\frac{25}{2}\right)$ και αποτυχία να μην τον καλέσει. Η Υ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. $Y\sim$ Διων$\left(300, 1-\Phi\left(\frac{25}{2}\right)\right)$

Άρα

$$p_Y(2) = \binom{300}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{25}{2}\right)\right)^2\left(1-1+\Phi\left(\frac{25}{2}\right)\right)^{298}$$

$$= 44850\left(1-\Phi\left(\frac{25}{2}\right)\right)^2\left(\Phi\left(\frac{25}{2}\right)\right)^{298}$$

Άσκηση 59

(α') Έστω Γ το ενδεχόμενο να έρθουν γράμματα και Κ να έρθει κορώνα.

Από τον κανόνα της ολικής πιθανότητας έχουμε

$$P(Z<\tfrac{1}{2}) = P(Z<\tfrac{1}{2}|Γ)P(Γ) + P(Z<\tfrac{1}{2}|K)P(K)$$

$$= P(X<\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{2} + P(Y<\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{2} = \int_{-\infty}^{1/2} 1\,dx\cdot\tfrac{1}{2} + \int_{-\infty}^{1/2}\tfrac{1}{9}e^{-y/9}dy\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$= \int_{0}^{1/2} 1\,dx\cdot\tfrac{1}{2} + \int_{0}^{1/2}\tfrac{1}{9}e^{-y/9}dy\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + (1-e^{-1/2})\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \frac{1-e^{-1/2}}{2}$$

(β') $F(z) = P(Z\leq z)$ και από τον κανόνα της ολικής πιθανότητας

$$= P(Z\leq z|Γ)P(Γ) + P(Z\leq z|K)P(K)$$

$$= P(X\leq z)\cdot\tfrac{1}{2} + P(Y\leq z)\cdot\tfrac{1}{2}$$

Αν $z<0$ τότε

$$F(z) = 0\cdot\tfrac{1}{2} + 0\cdot\tfrac{1}{2} = 0$$

Αν $z\in[0,1]$ τότε

$$F(z) = z\cdot\tfrac{1}{2} + (1-e^{-z})\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(z+1-e^{-z})$$

Αν $z>1$

$$F(z) = 1\cdot\tfrac{1}{2} + (1-e^{-z})\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + (1-e^{-z})\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(2-e^{-z})$$

Άρα τελικά

$$F(z) = \begin{cases} 0 & , z<0 \\ \tfrac{1}{2}(z+1-e^{-z}) & , z\in[0,1] \\ \tfrac{1}{2}(2-e^{-z}) & , z>1 \end{cases}$$

και πυκνότητα

$$f(z) = \begin{cases} 0 & , z<0 \\ \frac{1}{2}(1+e^{-z}), & z\in[0,1] \\ \frac{e^{-z}}{2} & , z>1 \end{cases}$$

Άσκηση 60

Έστω X_A, X_B οι χρόνοι παράδωσης από τα εστιατόρια A και B αντίστοιχα.

Έστω X τ.μ που εκφράζει τον μέγιστο χρόνο. Δηλαδή $X = \max(X_A, X_B)$ και X_A, X_B ανεξάρτητα

$F(x) = P(X\le x) = P(\max(X_A,X_B)\le x) = P(X_A\le x, X_B\le x)$

$= P(X_A\le x)P(X_B\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y_1)dy_1 \cdot \int_{-\infty}^{x} f(y_2)dy_2$

$= \int_0^x \frac{1}{\theta}e^{-y_1/\theta}dy_1 \cdot \int_0^x \frac{1}{\theta}e^{-y_2/\theta}dy_2 = (1-e^{-x/\theta_1})(1-e^{-x/\theta_2})$

$= (1-e^{-x/30})(1-e^{-x/20})$

και $f(x) = F'(x) = 0 - e^{-x/20}(-\frac{1}{20}) - e^{-x/30}(-\frac{1}{30}) + e^{-x/12}(-\frac{1}{12})$

$= \frac{1}{20}e^{-x/20} + \frac{1}{30}e^{-x/30} - \frac{1}{12}e^{-x/12}$

Άρα $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^{\infty} x f(x)dx =$

$= \int_0^{\infty} x\left(\frac{1}{20}e^{-x/20} + \frac{1}{30}e^{-x/30} - \frac{1}{12}e^{-x/12}\right)dx$

$= \int_0^{\infty} \frac{x}{20}e^{-x/20}dx + \int_0^{\infty}\frac{x}{30}e^{-x/30}dx - \int_0^{\infty}\frac{x}{12}e^{-x/12}dx$

$= 20 + 30 - 12 = 38$

(Β') Έστω τώρα Υ Τ.Μ τ.ω $Y = min(XA, XB)$

$F(Y) = P(Y \leq y) = P(min(XA, XB) \leq y) = 1 - P(min(XA, XB) > y)$
$= 1 - P(XA > y, XB > y) = 1 - P(XA > y) P(XB > y)$
$= 1 - e^{-x/\theta_1} e^{-x/\theta_2} = 1 - e^{-x/30} e^{-x/20} = 1 - e^{-x/12}$

Άρα $E(Y) = 12$

Άσκηση 61
Έστω Χ Τ.Μ που εκφράζει τα δευτερόλεπτα που τρέχει το πρόγραμμα. $X \sim Exp(1/60)$
$P(X > 90) = 1 - P(X \leq 90) = 1 - F(90) = 1 - (1 - e^{-90/(1/60)})$
$= e^{-5400}$

Έστω Υ το πλήθος των προγραμμάτων που τρέχουν περισσότερο από 90 δευτερόλεπτα. Η Υ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με επιτυχία να τρέξει ένα πρόγραμμα παραπάνω από 90 δευτερόλεπτα και πιθανότητα e^{-5400} και αποτυχία να τρέξει λιγότερα. Έχουμε 20 ανεξάρτητα πειράματα

$p_Y(0) = \binom{20}{0} (e^{-5400})^0 (1 - e^{-5400})^{20} = (1 - e^{-5400})^{20}$

$p_Y(1) = \binom{20}{1} (e^{-5400})^1 (1 - e^{-5400})^{19} = 20 e^{-5400} (1 - e^{-5400})^{19}$

$p_Y(2) = \binom{20}{2} (e^{-5400})^2 (1 - e^{-5400})^{18} = 190 (e^{-5400})^2 (1 - e^{-5400})^{18}$

$p_Y(3) = \binom{20}{3} (e^{-5400})^3 (1 - e^{-5400})^{17} = 1140 (e^{-5400})^3 (1 - e^{-5400})^{17}$

Η πιθανότητα να τρέχουν τουλάχιστον 3 προγράμματα είναι η πιθανότητα να τρέξουν 3,4,5...20 προγράμματα

Δηλαδή $1-P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)$

$=1-(1-e^{-5400})^{20}+(e^{-5400})(1-e^{-5400})^{19}20+190(e^{-5400})^{2}(1-e^{-5400})^{18}$

Άσκηση 62

(α) $P(X<m)=\Phi(\frac{m-m}{\sigma^2})=\Phi(0)=0.5000$

(β) $P(|X-m|>k\sigma)$, $k=1,2,3$

Η: $Z=\frac{|X-m|}{\sigma}$, $Z\sim(N(0,1))$

Άρα αν $\sigma>0$:

$P(Z>k)$

Για $k=1$, $P(Z>1)=1-\Phi(\frac{1-0}{1})=1-\Phi(1)=1-0.8413=0,1587$

Για $k=2$, $P(Z>2)=1-\Phi(\frac{2-0}{1})=1-\Phi(2)=1-0,9772=0,0228$

Για $k=3$, $P(Z>3)=1-\Phi(\frac{3-0}{1})=1-\Phi(3)=1-0,9987=0,0013$

Αν $\sigma<0$:

$P(Z<k)$

Για $k=1$, $P(Z<1)=\Phi(\frac{1-0}{1})=\Phi(1)=0,8413$

Για $k=2$, $P(Z<2)=\Phi(\frac{2-0}{1})=\Phi(2)=0,9772$

Για $k=3$, $P(Z<3)=\Phi(\frac{3-0}{1})=\Phi(3)=0,9987$

Αν $\sigma=0$:

$P(|X-m|>0)=1$

(γ) $P(X>m+k\sigma)=P(X-m>k\sigma)$

Για $k=1.28$, $P(Z>1.28)=1-\Phi(\frac{1.28-0}{1})=1-\Phi(1.28)=0,1003$

Για $k=3.09$, $P(Z>3.09)=1-\Phi(\frac{3.09-0}{1})=1-\Phi(3.09)=0,001$