Εργασία 1 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 1

$z = x + f(u)$ με $u = xy$

$\Leftrightarrow z = x + f(xy)$

• $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1 + \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 + \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot y$

• $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x$

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x} &= x + x\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y = x + xy\frac{\partial f}{\partial u} \\ y\frac{\partial z}{\partial y} &= xy\frac{\partial f}{\partial u} \end{aligned}\right\} x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x + xy\frac{\partial f}{\partial u} - xy\frac{\partial f}{\partial u} = x$$

Άσκηση 2

$\omega = f(x,y)$ με $x = u\cos a - v\sin a$ κ' $y = u\sin a + v\cos a$

• $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ (1)

• $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (2)

• $\dfrac{\partial \omega}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos a + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin a$ (3)

• $\dfrac{\partial \omega}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot(-\sin a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos a$ (4)

Αντικαθιστούμε τις (1)(2)(3)(4) στην $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial v}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos a + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin a\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot(-\sin a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos a\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos a\right)^2 + 2\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos a\sin a + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin a\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(-\sin a)\right)^2 - 2\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos a\sin a + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos a\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos a\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(-\sin a)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin a\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos a\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left((\cos a)^2 + (-\sin a)^2\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left((\sin a)^2 + (\cos a)^2\right) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot 1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot 1 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ που ισχύει

Άσκηση 3

$\omega = f(u)$ με $u = x+y$

$\Rightarrow \omega = f(x+y)$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 \\ &\cdot\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 \end{aligned}\right\}\ \text{Άρα } \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

Άσκηση 4

$f(x,y) = 2x^2+3xy+4y^2$ στο $P(1,1)$

Η κατεύθυνση προς την οποία οι τιμές της f μειώνονται με τον γρηγορότερο ρυθμό είναι αντίθετη από εκείνη του διανύσματος κλίσης.

Στο $P(1,1)$ το διάνυσμα κλίσης της f είναι:

$\nabla f(1,1) = f_x(1,1)\hat{i} + f_y(1,1)\hat{j}$

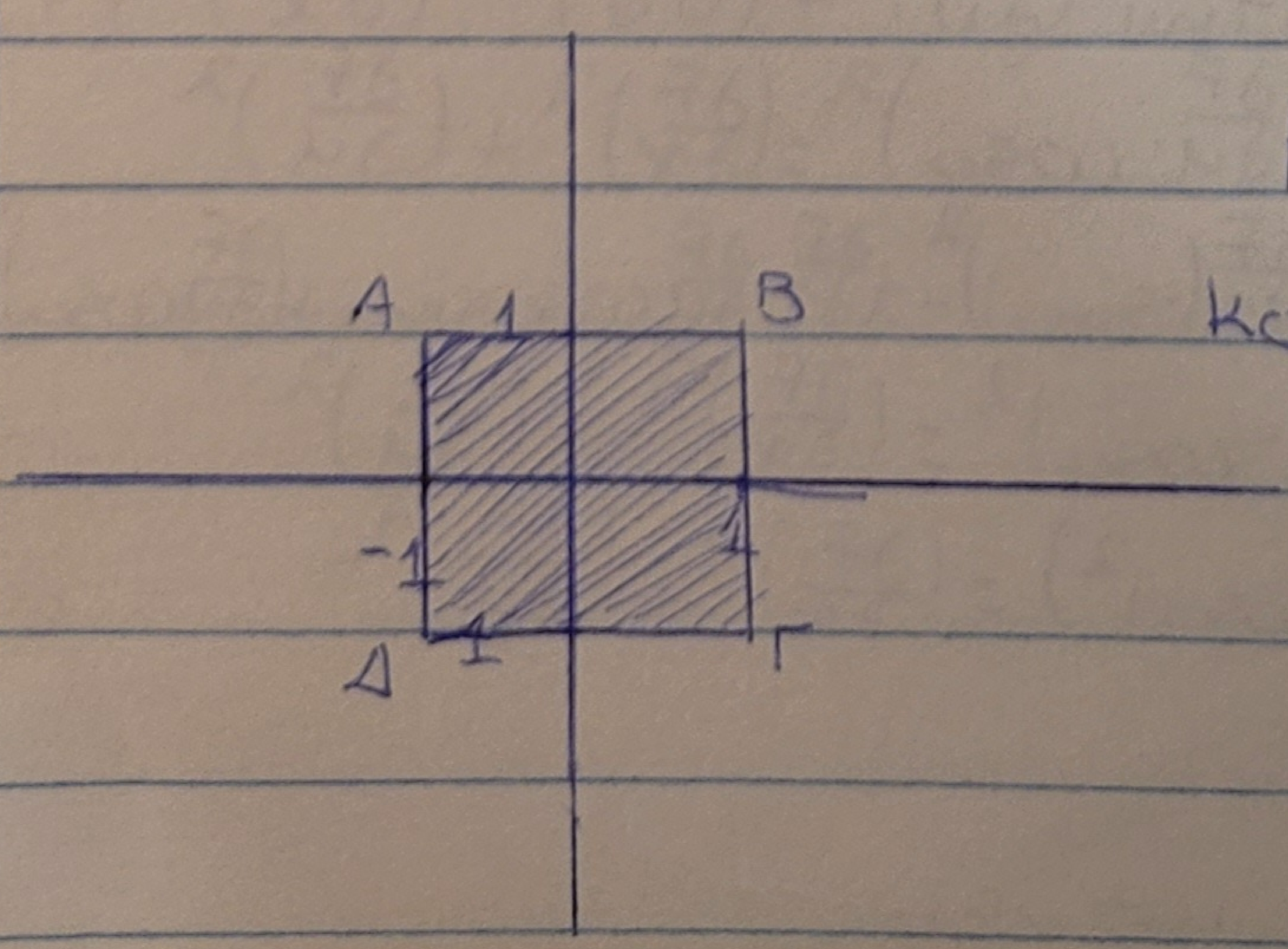
- $f_x = 4x+3y$ με $f_x(1,1) = 4+3 = 7$

- $f_y = 3x+8y$ με $f_y(1,1) = 3+8 = 11$

Άρα $\nabla f(1,1) = 7\hat{i}+11\hat{j}$ και άρα η τελική ζητούμενη κατεύθυνση θα είναι αυτή του διανύσματος $-7\hat{i}-11\hat{j}$

Άσκηση 5

$f(x,y) = x+2y$ με πεδίο ορισμού την κλειστή τετραγωνική περιοχή με κορυφές τα σημεία $(\pm 1, \pm 1)$



Η περιοχή αυτή είναι συμπαγής και η $f(x,y) = x+2y$ συνεχής, άρα η f <u>έχει</u> ολικά ακρότατα σημεία

• Ελεύθερα στάσιμα σημεία δεν υπάρχουν αφού οι δύο μερικές παράγωγοι της f δεν μηδενίζουν πουθενά

$f_x = 1$

$f_y = 2$

• Δεσμευμένα στάσιμα σημεία

ΑΒ : $y = 1$, $f(x,1) = x+2$, $f' = 1 \neq 0$

ΒΓ : $x = 1$, $f(1,y) = 2y+1$, $f' = 2 \neq 0$

ΓΔ : $y = -1$, $f(x,-1) = x-2$, $f' = 1 \neq 0$

ΔΑ : $x = -1$, $f(-1,y) = 2y-1$, $f' = 2 \neq 0$

Άρα η f δεν έχει δεσμευμένα στάσιμα σημεία

• Κορυφές Α, Β, Γ, Δ

$A(-1,1)$, $f(-1,1) = -1+2 = 1$

$B(1,1)$, $f(1,1) = 1+2 = 3$

$\Gamma(1,-1)$, $f(1,-1) = 1-2 = -1$

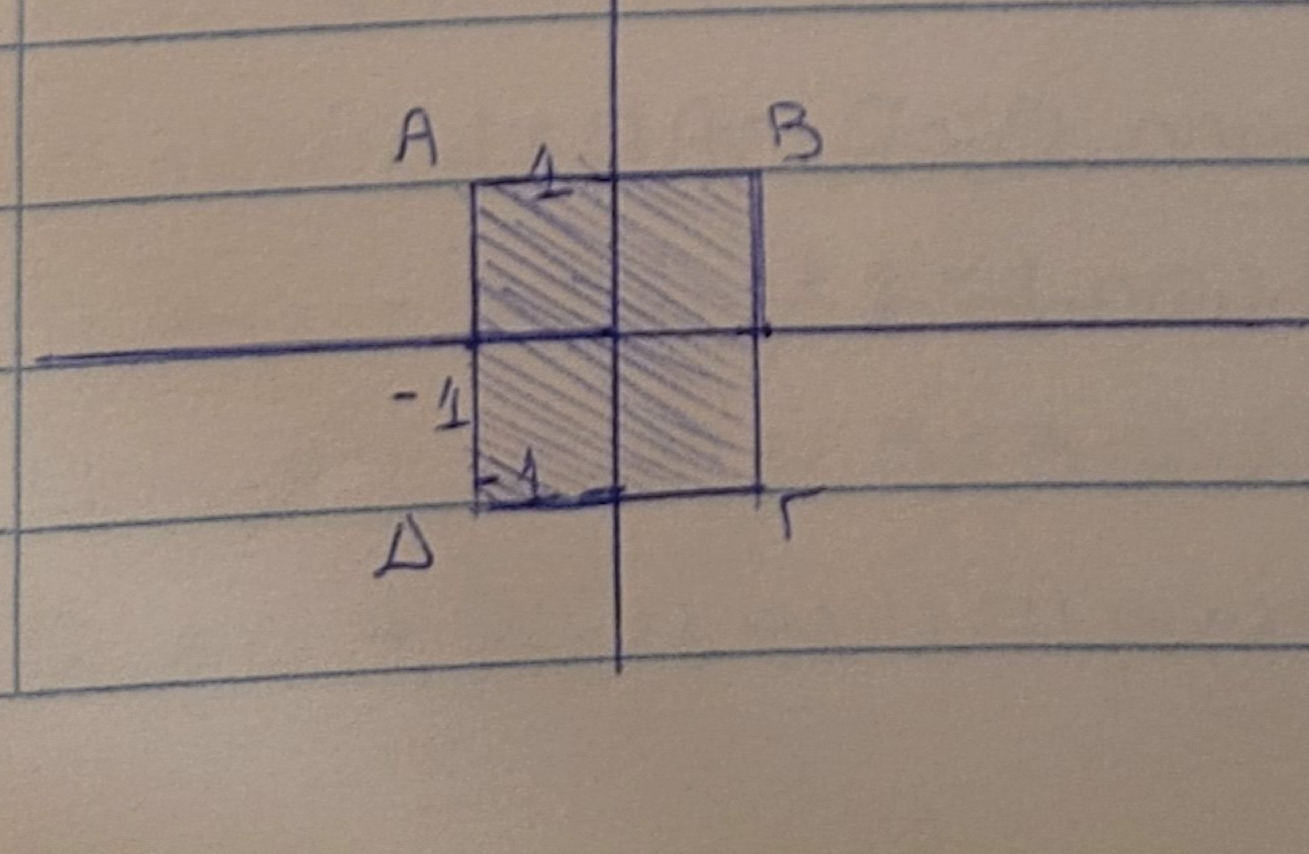
$\Delta(-1,-1)$, $f(-1,-1) = -1-2 = -3$

Οι ολικές ακρότατες τιμές πρέπει να υπολογιστούν μεταξύ αυτών των αριθμών.

Η μέγιστη τιμή είναι το 3 στο σημείο $B(1,1)$ και η ελάχιστη τιμή είναι το -3 στο σημείο $\Delta(-1,-1)$

Άσκηση 6

$f(x,y) = x^2+y^2-x$ με πεδίο ορισμού την κλειστή τετραγωνική περιοχή με κορυφές τα σημεία $(\pm 1, \pm 1)$



Η περιοχή αυτή είναι συμπαγής και η $f(x,y) = x^2+y^2-x$ συνεχής, άρα η f <u>έχει</u> ολικά ακρότατα σημεία

• Ελεύθερα στάσιμα σημεία

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x,y) = 2x-1=0 \\ F_y(x,y) = 2y = 0 \end{array}\right\} x=\frac{1}{2},\ y=0$$

Το $(\frac{1}{2},0)$ είναι εσωτερικό σημείο άρα είναι και ελεύθερο στάσιμο σημείο

• Δεσμευμένα στάσιμα σημεία

$AB: \ y=1, \ F(x,1) = x^2+1-x = x^2-x+1, \ F' = 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ κ' $y=1$

$B\Gamma: \ x=1, \ F(1,y) = y^2+1-1 = y^2, \ F' = 2y=0 \Rightarrow y=0$ κ' $x=1$

$\Gamma\Delta: \ y=-1, \ F(x,-1) = x^2+1-x = x^2-x+1, \ F' = 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ κ' $y=-1$

$\Delta A: \ x=-1, \ F(-1,y) = y^2+1+1 = y^2+2, \ F' = 2y=0 \Rightarrow y=0$ κ' $x=-1$

Άρα είναι το σημείο $(\frac{1}{2},-1)$, το $(\frac{1}{2},1)$, το $(-1,0)$ και το $(1,0)$

• Κορυφές Α, Β, Γ, Δ

$A(-1,1), \quad F(-1,1) = 1+1+1 = 3$

$B(1,1), \quad F(1,1) = 1+1-1 = 1$

$\Gamma(1,-1), \quad F(1,-1) = 1+1-1 = 1$

$\Delta(-1,-1), \quad F(-1,-1) = 1+1+1 = 3$

$E(\frac{1}{2},0), \quad F(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4}+0-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$Z(\frac{1}{2},1), \quad F(\frac{1}{2},1) = \frac{1}{4}+1-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$

$H(\frac{1}{2},-1), \quad F(\frac{1}{2},-1) = \frac{1}{4}+1-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$

$\Theta(-1,0), \quad F(-1,0) = 1+0+1 = 2$

$I(1,0), \quad F(1,0) = 1+0-1 = 0$

Οι ολικές ακρότατες τιμές πρέπει να υπολογιστούν μεταξύ αυτών των αριθμών.
Η μέγιστη τιμή είναι το 3 στα σημεία $A(-1,1)$ και $\Delta(-1,-1)$. Η ελάχιστη τιμή είναι το $-\frac{1}{4}$ στο σημείο $E(\frac{1}{2},0)$.

Άσκηση 7

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$

$4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το γραμμικό σύστημα που έχει ως επαυξημένο πίνακα τον τον πίνακα Α.Κ.Μ που έχει προκύψει είναι:

$$\left.\begin{array}{l} 6x_3 = 6 \Leftrightarrow x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \overset{x_3=1}{\Leftrightarrow} x_1 = 1 \end{array}\right\} (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$$

και αντικαθιστώντας στο αρχικό σύστημα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 0 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ που ισχύει} \\ 3 + 0 - 2 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ που ισχύει} \\ 4 - 0 - 1 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ που ισχύει} \\ 2 + 0 + 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ που ισχύει} \end{array}\right\} \text{Άρα η λύση } (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1) \text{ είναι ορθή}$$