Ομάδα Ασκήσεων 5 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 33

Η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους σημαίνει τουλάχιστον ένας να μην μπορεί να φάει το φαγητό της επιλογής του. Δηλαδή το ενδεχόμενο οι καλεσμένοι να ζητήσουν περισσότερες από 16 πίτσες ή να ζητήσουν περισσότερες από 12 μακαρονάδες, έστω A. Έστω X τ.μ τέτοια ώστε να δείχνει το πλήθος των καλεσμένων που διαλέγουν πίτσα, με $S_X=\{0,1,2...20\}$. Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=20$ πειράματα και $p=0.6$ η πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή η πιθανότητα επιλογής πίτσας.

$X \sim$ Διων$(20,0.6)$. Άρα έχουμε:

$$P(A)=\sum_{x=17}^{20} P(X=x)+\sum_{x=0}^{7} P(X=x)=\sum_{x\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,17,18,19,20\}} \binom{20}{x} 0{,}6^{x}\cdot 0{,}4^{20-x}$$

αφού για να έχουμε επιτυχία πρέπει να επιλεχθούν περισσότερες από 16 πίτσες ή λιγότερες από 8 πίτσες.

$$P(A)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}4^{20}+\binom{20}{1}0{,}6^{1}\cdot 0{,}4^{19}+\binom{20}{2}0{,}6^{2}\cdot 0{,}4^{18}+\binom{20}{3}0{,}6^{3}\cdot 0{,}4^{17}$$
$$+\binom{20}{4}\cdot 0{,}6^{4}\cdot 0{,}4^{16}+\binom{20}{5}\cdot 0{,}6^{5}\cdot 0{,}4^{15}+\binom{20}{6}\cdot 0{,}6^{6}\cdot 0{,}4^{14}+\binom{20}{7}\cdot 0{,}6^{7}\cdot 0{,}4^{13}$$
$$+\binom{20}{17}\cdot 0{,}6^{17}\cdot 0{,}4^{3}+\binom{20}{18}\cdot 0{,}6^{18}\cdot 0{,}4^{2}+\binom{20}{19}\cdot 0{,}6^{19}\cdot 0{,}4^{1}+\binom{20}{20}\cdot 0{,}6^{20}\cdot 0{,}4^{0}$$
$$\simeq 0{,}0369901 \simeq 0{,}037$$

Άσκηση 34

α) Έστω X τ.μ που εκφράζει το πλήθος των βολών που μπαίνουν. Όταν ο παίκτης είναι φορμαρισμένος βάζει (Φ) τις βολές με πιθανότητα 0,7. Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=10$ πειράματα (βολές) και $p=0{,}7$ η πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή να μπει η βολή.

$X \sim$ Διων$(10,0{,}7)$. Άρα

$$P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot 0{,}7^{6}\cdot 0{,}3^{4}=\frac{10!}{6!\,4!}\cdot 0{,}7^{6}\cdot 0{,}3^{4}$$
$$=210\cdot 0{,}7^{6}\cdot 0{,}3^{4}\simeq 0{,}2.$$ Άρα

Όταν ο παίχτης είναι ντεφορμέ, βάζει τις βολές με (N) πιθανότητα 0,2. Άρα έχοντας $N=10$ πειράματα (βολές). Τώρα έχουμε $p=0,2$ πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή να μπει η βολή.

$X \sim$ Διων$(10, 0{,}2)$ Άρα

$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^4 = \frac{10!}{6!\,4!} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^4$

$= 210 \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^4$

$\simeq 0{,}005$

(Β') Από τον κανόνα του Bayes έχουμε

$$P(\Phi|X=6) = \frac{P(X=6|\Phi) \cdot P(\Phi)}{P(X=6|\Phi) \cdot P(\Phi) + P(X=6|N) \cdot P(N)}$$

$$\simeq \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}005 \cdot 0{,}4} \simeq \frac{60}{61} \simeq 0{,}98$$

Άσκηση 35

α) Για να χρειαστεί ο διαγωνιζόμενος 20 προσπάθειες για να πετύχει τον στόχο 3 φορές, συμβαίνει πως η 20η ήταν επιτυχείς και ακριβώς 2 από τις υπόλοιπες 19 ήταν επίσης επιτυχείς.

Έστω Α το ενδεχόμενο η 20η βολή να είναι επιτυχής και Β από τις 19 οι 2 ακριβώς επιτυχείς. Έστω Χ τ.μ που εκφράζει το πλήθος των επιτυχημένων στόχων. Η Χ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=19$ πειράματα και $p=0,25$ πιθανότητα επιτυχίας.

$X \sim$ Διων$(19, 0{,}25)$ Άρα

$P(X=2) = \binom{19}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{17} = \frac{19!}{2!\,17!} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{17}$

$= 171 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{17} \simeq 0{,}08$

Άρα

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}25 \cdot P(X=2) \simeq 0{,}25 \cdot 0{,}08 \simeq 0{,}02$

Β) Έστω X_1, X_2, X_3 τα πλήθη των προσπαθειών για να πετύχουμε τον 1ο, 2ο, 3ο στόχο αντίστοιχα. Άρα $X_1+X_2+X_3$ προσπάθειες.
$E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$. Τα X_1, X_2, X_3 ακολουθούν την γεωμετρική κατανομή με $p=0,25$ πιθανότητα επιτυχίας.
Άρα $E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{1}{0,25}+\frac{1}{0,25}+\frac{1}{0,25}=3 \cdot 4=12$

Άσκηση 36

Έστω A το ενδεχόμενο ένας φοιτητής να ανήκει στο T1 και B να ανήκει στο T2.

$P(A)=\frac{50}{50+30}=\frac{50}{80}=\frac{5}{8}$

$P(B)=\frac{30}{50+30}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$

Έστω X τ.μ. που εκφράζει τον βαθμό του φοιτητή

$P(X=1|A)=\binom{10}{1} \cdot 0,6 \cdot 0,4^9=10 \cdot 0,6 \cdot 0,4^9 \simeq 0,001$

$P(X=1|B)=\binom{10}{1} \cdot 0,5 \cdot 0,5^9=10 \cdot 0,5 \cdot 0,5^9 \simeq 0,009$

Από τον κανόνα του Bayes

$P(B|X=1)=\frac{P(X=1|B)P(B)}{P(X=1|B)P(B)+P(X=1|A)P(A)}$

$\simeq \frac{0,009 \cdot \frac{3}{8}}{0,009 \cdot \frac{3}{8}+0,001 \cdot \frac{5}{8}} \simeq \frac{27}{32} \simeq 0,84$

Άσκηση 37

α) Υπάρχουν $\binom{100}{2}$ διαφορετικοί συνδυασμοί.
Για να υπάρχει στην επιλογή μου ο Magnion πρέπει ή η πρώτη ή η δεύτερη κάρτα να είναι ο Magnion, έστω ενδεχόμενο A.

$P(A)=\frac{1}{100}+\frac{1}{100}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$

Β) Έστω B το ενδεχόμενο να πάρουμε και τον Electricon και τον Magnion. $|B|=1$ προφανώς. Άρα

$P(B)=\frac{1}{\binom{100}{2}}=\frac{1}{\frac{100!}{2!98!}}=\frac{2!98!}{100!}=\frac{2!98!}{100 \cdot 99 \cdot 98!}=\frac{2}{100 \cdot 99}=\frac{2}{9900}=\frac{1}{4950}$

γ) Έστω C το ενδεχόμενο η επιλογή μας να περιέχει του Magmion ή του Electricon. Θα βρούμε την πιθανότητα του C' και θα την αφαιρέσουμε από το 1. Χωρίς τους 2 αυτούς Gormiti θα μείνουν $\binom{98}{2}$ συνδυασμοί άρα

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{\binom{98}{2}}{\binom{100}{2}} = 1 - \frac{\frac{98!}{2!96!}}{\frac{100!}{2!98!}} = 1 - \frac{98!98!2!}{100!96!2!}$$

$$= 1 - \frac{98!98.97.96!}{100.99.98!96!} = 1 - \frac{98.97}{100.99} = 1 - \frac{4753}{4950} = \frac{197}{4950} = 0,0397$$

δ) Η M ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $N=200$ πειράματα, $p=\frac{1}{50}$ πιθανότητα επιτυχίας. Είναι

$$P(M=7) = \binom{200}{7} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^7 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{193} = \frac{200!}{7!193!} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^7 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{193}$$

Άσκηση 3η

X = αριθμός επιβατών που περιμένουν το λεωφορείο

M = χωρητικότητα λεωφορείου

Y = υπεράριθμοι επιβάτες

Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή.

$S_Y = \{0,1,2,3....\}$

$$Y = \begin{cases} X-M, & X-M \geq 0 \\ 0, & X-M < 0 \end{cases}$$

$$p_Y(0) = \sum_{x=0}^{M-1} p_X(x) = \sum_{x=0}^{M-1} P(X=x) = \sum_{x=0}^{M-1} (1-p)^{x-1} p \quad \text{για } X-M<0$$

$$p_Y(X-M) = \sum_{x=M}^{\infty} p_X(x) = \sum_{x=M}^{\infty} P(X=x) = \lim_{v \to \infty} \sum_{x=M}^{v} (1-p)^{x-1} p \quad \text{για } X-M \geq 0$$

Άσκηση 39

Έστω X τ.μ που εκφράζει τον αριθμό της ρίψης στην οποία εμφανίζεται πρώτη φορά κορώνα. X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με $P(X=x)=(1-\frac{1}{2})^{x-1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}^{x-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}^{x}=2^{-x}$

$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{x}P(X=x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{x}\cdot2^{-x}=\lim_{v\to\infty}\sum_{k=1}^{v}1=\infty$

Ενώ η μέση τιμή είναι άπειρη και κάθε τιμή στοιχήματος είναι υποτίθεται φθηνή, κανένας δεν θέλει να δώσει μεγάλες τιμές για να παίξει. Άρα τα 50 ευρώ θεωρούνται πολλά για να παίξω το παιχνίδι.

Άσκηση 40

α) N μεγάλος αριθμός ζέβρων. Οι m από αυτές έχουν ραδιοπομπό. Μετά αιχμαλωτίσαμε n ζέβρες.
Ο αριθμός X των ζέβρων που αιχμαλωτίσαμε εκ νέου και φέρουν ραδιοπομπούς ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή.

β) $X=k$

$\frac{P_k(N)}{P_k(N-1)}=N'$

$6.\ N'=\frac{P_k(N)}{P_k(N-1)} \iff N'=$