ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 1

$S = \{(a,b) \mid |a-b| \leq 5\}$

$S = \{(a,b) \mid -5 \leq a-b \leq 5\}$

• Η S είναι συμμετρική γιατί $|a-b| \leq 5 \Leftrightarrow |b-a| \leq 5$ άρα για κάθε (a,b) θα περιέχεται και το (b,a) στην S.

• Η S είναι αυτοπαθής γιατί $|x-x| \leq 5$ άρα $(x,x) \in S$ $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού $|x-x| = 0 \leq 5$ για $\forall x \in \mathbb{R}$

• Η S δεν είναι μεταβατική γιατί έστω $(a,b) \in S$ και $(b,z) \in S$, τότε το $(a,z) \notin$ απαραίτητα στην S. π.χ $(1,6)(6,10)$ $|1-6| = 5 \leq 5$ κ' $|6-10| = 4 \leq 5$ όμως $|1-10| = 9 > 5$ άρα δεν ισχύει.
Άρα η S δεν είναι σχέση ισοδυναμίας

Άσκηση 2

• S ορίζεται σε ένα σύνολο A κ' είναι συμμετρική κ' μεταβατική
Η S είναι αυτοπαθής αν $\forall x \in A$ ισχύει xSx.
Το επιχείρημα δεν είναι σωστό αφού έχει μια λογική παράλειψη όπως είναι τυχαία. Μπορεί όντως για κάποιο x, y λόγω της συμμετρικότητας και της μεταβατικότητας της S να ισχύει το xSx, όμως αυτό δεν αρκεί για να αποδείξουμε ότι η S είναι αυτοπαθής, καθώς η σχέση ισχύει αποκλειστικά για κάποιο x και όχι για κάθε $x \in A$

Άσκηση 3

S σχέση που ορίζεται στο $\mathbb{Z}$, $(x,y) \in S$ αν $x^2 \equiv y^2 (\bmod 4)$
δηλ αν $\exists$ ακέραιος m: $x^2 - y^2 = 4m$

(α) • $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x^2 - x^2 = 0 = 0 \cdot 4$, άρα $\forall x \in \mathbb{Z}$ ισχύει η σχέση $x^2 - y^2 = 4m$. Άρα $(x,x) \in S$ κ' η S είναι αυτοπαθής.

• $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $x^2 - y^2 = 4m \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 4(-m)$ άρα με $x, y \in \mathbb{Z}$ $\forall$ $(x,y) \in S$, xSy και $(y,x) \in S$, ySx. Άρα η S είναι συμμετρική

• $x, y, z \in \mathbb{Z}$: $(x,y) \in S$, $(y,z) \in S$, $x^2 - y^2 = 4m_1$ κ' $y^2 - z^2 = 4m_2$
Άρα $x^2 - z^2 = 4m_1 + 4m_2 \Leftrightarrow x^2 - z^2 = 4(m_1 + m_2)$

Άρα $(x,z) \in S$, xSz αφού $\exists\ (m_1+m_2)$ (άθροισμα ακεραίων $=$ ακέραιος): $x^2-z^2=4(m_1+m_2)$. Αφού αν $\forall\ xSy$ και ySz, τότε και xSz, η S είναι μεταβατική.

(β') Κλάσεις ισοδυναμίας της S

$[0]=\{y \in \mathbb{Z} \mid 0-y^2=4k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ κ' $k \leq 0$
$=\{y \in \mathbb{Z} \mid y^2=-4k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$=\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 16 \dots\}$ άρτιοι

$[1]=\{y \in \mathbb{Z} \mid 1-y^2=4k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ κ' $k \leq 0$
$=\{y \in \mathbb{Z} \mid y^2=1-4k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$=\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 15 \dots\}$ περιττοί

$[0]$, $[1]$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Άσκηση 4

S αυτοπαθής και μεταβατική. Άρα $\forall\ x \in A$ xSx κ' $\forall\ xSy$, ySz ισχύει xSz

- $(x,y) \in R$ αν $(x,y) \in S$ κ' $(y,x) \in S$

Αφού η S είναι αυτοπαθής, $\Rightarrow \forall\ x \in A$ xSx άρα xRx αφού xSx. Άρα $\forall\ x \in A$ xRx κ' η R είναι αυτοπαθής.
Πρακτικά η R αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη (x,y) τέτοια ώστε: το $(x,y) \in S$ και το συμμετρικό του επίσης $\in S$. Ένα ζεύγος όμως της μορφής (x,x) έχει "συμμετρικό ζεύγος" του ίδιο του τον εαυτό. Άρα όλα τα ζεύγη της μορφής $(x,x) \in S | \in R$ επειδή ανήκει και το συμμετρικό της στην S και άρα στην R, αφού είναι το ίδιο το ζεύγος. Και αφού κάθε x που ανήκει στο A έχει ως αποτέλεσμα το $(x,x) \in S$ και άρα $(x,x) \in R$, η R είναι αυτοπαθής.

- $x, y \in A$ $\forall$ xRy ισχύει και yRx. Αυτό συμβαίνει διότι για να μπορεί ένα ζεύγος να ανήκει στην R θα πρέπει το ζεύγος και το συμμετρικό του να ανήκουν στην S.

$(x,y)\in R$ αν $(x,y)\in S$ και $(y,x)\in S$. Όμως:
$(y,x)\in R$ αν $(y,x)\in S$ και $(x,y)\in S$ που ισχύει
$\forall\, x,y\in A: (x,y)\in S$ και $(y,x)\in S$. Άρα $\forall\, xSy$ ζεύγος
στην R, υπάρχει και το συμμετρικό και αυτό ισχύει
για κάθε ζεύγος $(x,y)\in R$. Άρα αφού $x,y\in A, \forall\, xRy$ και
yRx, η R είναι συμμετρική.

- $\forall\, xSy,\ ySz$ ισχύει xSz αφού S μεταβατική. Όμως
η S είναι και αυτοπαθής άρα όντας μεταβατική πρέπει
να υπάρχει ένα τουλάχιστον $(x,y)\in S$ με $x,y\in A$ και
μάλιστα $x\neq y$. Η S είναι όμως αυτοπαθής άρα $\forall\, x\in A$
$: xSx$ και $(x,y)\in S$ πρέπει και $(y,x)\in S$. Όμως $\forall\, x,y\in A$
$: (x,y)\in S$ κ' $(y,x)\in S$, το $(x,y)\in R$. Η R είναι και
συμμετρική, άρα και $(y,x)\in R$. Όμως $\forall\, x\in A,\ xRx$ άρα
$\forall\, x\in A: (x,y)\in S$, θα ισχύει και $(x,y)\in R,\ (y,x)\in R$. Άρα
αν η R αποτελείται μόνο από ζεύγη της μορφής:
(x,x) κ' $(x,y),(y,x)$ η R είναι μεταβατική. Για κάθε
ζεύγος της μορφής $x,y,z\in A: (y,z)\in S$ κ' $(x,y)\in S$ επειδή η S είναι
αυτοπαθής και μεταβατική θα πρέπει και $(z,y)\in S$ με
$x\neq y,\ y\neq z$ κ' $x\neq z$ κ' θα πρέπει και $(y,x)\in S$. Άρα
$: x,y,z\in A$ με $x\neq y,\ y\neq z$ κ' $x\neq z$

$(x,y) \rightarrow (y,x)$ (αφού είναι αυτοπαθής κ' μεταβατική)
$(y,z) \rightarrow (z,y)$ (αφού είναι αυτοπαθής κ' μεταβατική)
$\downarrow$
(x,z) (επειδή η S είναι μεταβατική)
$\downarrow$
(z,x) (αφού η S είναι αυτοπαθής και μεταβατική)

Αφού $(x,y),(y,x),(y,z),(z,y),(x,z),(z,x)\in S$ θα ανήκουν και
στην R αφού $(x,y)\in R$ αν $(x,y)\in S$ κ' $(y,x)\in S$ χωρίς
βλάβη της γενικότητας. Άρα αν η R είναι της μορφής
$: R=\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x),(y,z),(z,y),(x,z),(z,y)\}$ η R είναι
μεταβατική αφού $\forall\, x,y,z\in A : xRy$ κ' yRz $\exists$ το (x,z) και
ανήκει στην R. Άρα η R σε κάθε περίπτωση είναι μεταβατική.

Αφού η R είναι μεταβατική, αυτοπαθής και συμμετρική, η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο A.

Άσκηση 5

Έστω P_1, P_2 σχέσεις μερικής διάταξης στο A, άρα οι P_1, P_2 είναι αυτοπαθείς, αντισυμμετρικές και μεταβατικές. Δηλαδή
$\forall x \in A,\ xP_1x$, για $x,y,z \in A$ με xP_1y κ' $yP_1z \Rightarrow xP_1z$, κ' $xP_1y, yP_1x \Rightarrow x=y$
$\forall x \in A,\ xP_2x$, για $x,y,z \in A$ με xP_2y κ' $yP_2z \Rightarrow xP_2z$, κ' $xP_2y, yP_2x \Rightarrow x=y$
Αφού $\forall x \in A$ xP_1x κ' xP_2x άρα $x P_1 \cup P_2 x$, άρα η $P_1 \cup P_2$ είναι αυτοπαθής. Αφού $\forall (x,y) \in P_1$ κ' $(y,x) \in P_1 \Rightarrow x=y$ και $\forall (x,y) \in P_2$ κ' $(y,x) \in P_2 \Rightarrow x=y$ άρα $\forall (x,y) \in P_1 \cup P_2$ κ' $(y,x) \in P_1 \cup P_2 \Rightarrow x=y$. Αυτό ισχύει γιατί ακόμα και $(x,y) \in P_1$ κ' $(y,x) \in P_1$ κ' $(a,b) \in P_2$ κ' $(b,a) \in P_2$, τα $(a,b),(b,a),(x,y),(y,x) \in P_1 \cup P_2$ και μάλιστα $x=y$ κ' $a=b$. Άρα αφού $\forall (x,y) \in P_1 \cup P_2$ κ' $(y,x) \in P_1 \cup P_2$ και $x=y$ η $P_1 \cup P_2$ είναι αντισυμμετρική. Οι P_1, P_2 είναι μεταβατικές άρα για κάποια $x,y,z,a,b,c \in A$, αν

$\left.\begin{array}{l} xP_1y, \text{ κ' } yP_1z \text{ άρα } xP_1z \\ aP_2b, \text{ κ' } bP_2c \text{ άρα } aP_2c \end{array}\right\}$ Άρα ακόμα και αν (x,y) κ' $(y,z) \notin P_2$ θα ανήκουν στην $P_1 \cup P_2$ κ' αν $(a,b) \notin P_1$ κ' $(b,c) \notin P_1$ θα ανήκουν στην $P_1 \cup P_2$ κ' $(x,z),(a,c)$ θα ανήκουν στην $P_1 \cup P_2$. Άρα αφού για $x,y,z \in A$ $(x,y) \in P_1 \cup P_2$ κ' $(y,z) \in P_1 \cup P_2 \Rightarrow (x,z) \in P_1 \cup P_2$, η $P_1 \cup P_2$ είναι μεταβατική. Άρα η $P_1 \cup P_2$ είναι σχέση μερικής διάταξης.

Άσκηση 6

$(p,q) \in S$ αν $p \wedge q$ είναι ταυτολογία. Αφού το $p \wedge q$ είναι πάντα αληθής για να είναι ταυτολογία πρέπει το p, το q να είναι προτασιακοί τύποι που σε κάθε περίπτωση δίνουν αληθής. Άρα δεδομένου ότι δεν δίνουν όλοι οι τύποι πάντα αληθής η S δεν θα περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του συνόλου. Άρα η S δεν είναι αυτοπαθής. Λόγω της αντιμεταθετικότητας $p \wedge q \equiv q \wedge p$. Άρα $\forall pSq$, qSp. Άρα συμμετρική. Αφού $\forall pSq$ κ' qSr $(p,r) \in S$, αφού οι $p \wedge q$, $q \wedge r$ ταυτολογίες τότε και pSr ταυτολογία, η S είναι μεταβατική.

Άσκηση 7

p	q	r	$\neg p$	$q \to r$	$p \lor r$	$\neg p \to (q \to r)$	$q \to (p \lor r)$
A	A	A	Ψ	A	A	A	A
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
A	Ψ	A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	A	A	A	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	A

Οι δύο τύποι έχουν τις ίδιες τιμές αληθείας, άρα είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

Άσκηση 8

p_0	p_1	p_2	$p_1 \leftrightarrow p_2$	$p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_2)$	$\neg(p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$
A	A	A	A	A	Ψ
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	A	A	A	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	Ψ

Η $\neg(p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$ είναι αληθής στα (A, A, Ψ) και (A, Ψ, A) άρα έστω όλες οι τιμές να είναι A.
Το (A, A, Ψ) είναι (A, A, ¬A) οπότε $(p_0 \land p_1 \land \neg p_2)$
Το (A, Ψ, A) είναι (A, ¬A, A) οπότε $(p_0 \land \neg p_1 \land p_2)$

Άρα η πρόταση είναι: $(p_0 \land p_1 \land \neg p_2) \lor (p_0 \land \neg p_1 \land p_2)$