

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

1. Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών ως εξής:

$$(a, b) \in S \text{ εάν και μόνον εάν } |a - b| \leq 5.$$

Είναι η S σχέση ισοδυναμίας;

2. Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται σε ένα σύνολο A και η οποία είναι συμμετρική και μεταβατική. Υπάρχει κάποιο λάθος στα παρακάτω επιχειρήματα;

“ Έστω τυχαίο στοιχείο x του συνόλου A . Επιλέγουμε $y \in A$ τέτοιο ώστε xSy . Όμως από τη συμμετρικότητα της S έχουμε ySx και από την μεταβατικότητα της S προκύπτει xSx . Άρα η S είναι αυτοπαθής.”

3. Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται στο \mathbb{Z} (σύνολο ακέραιων) ως εξής:

$$(x, y) \in S \text{ εάν και μόνον εάν } x^2 \equiv y^2 \pmod{4}.$$

(Δηλαδή $(x, y) \in S$ εάν και μόνον εάν υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $x^2 - y^2 = 4m$)

(α') Να αποδειχθεί ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β') Να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του \mathbb{Z} ως προς την S .

4. Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται σε ένα σύνολο A και η οποία είναι αυτοπαθής και μεταβατική. Έστω σχέση R η οποία επίσης ορίζεται στο A ως εξής:

$$(x, y) \in R \text{ εάν και μόνον εάν } (x, y) \in S \text{ και } (y, x) \in S.$$

Να αποδειχθεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

5. Έστω P_1, P_2 σχέσεις μερικής διάταξης που ορίζονται σε ένα σύνολο A .

Η $P_1 \cup P_2$ θα είναι επίσης σχέση μερικής διάταξης;

6. Έστω σχέση S , η οποία ορίζεται στο σύνολο των προτασιακών τύπων ως εξής:

$$(p, q) \in S \text{ εάν και μόνον εάν } p \wedge q \text{ είναι ταυτολογία.}$$

Να εξετασθεί εάν η S είναι αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική.

7. Είναι οι προτασιακοί τύποι $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ και $q \rightarrow (p \vee r)$ ταυτολογικά ισοδύναμοι;

8. Ένας προτασιακός τύπος είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή αν είναι της μορφής $\psi_0 \vee \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$ όπου κάθε $\psi_i, i = 0, 1, \dots, n$ είναι σύζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών. Βρείτε προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2))$.