Ομάδα Ασκήσεων 1 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 1

i) $[0,1]+[2,3]=[2,4]$

Το σύνολο $[0,1]$ περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1 μαζί με αυτά λόγω του συμβολισμού `[' (κλειστό), τα άκρα περιλαμβάνονται στο σύνολο. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με το σύνολο $[2,3]$. Περιέχει όλους τους αριθμούς από το 2 μέχρι το 3 μαζί με αυτούς. Το μικρότερο νούμερο του πρώτου συνόλου είναι το 0, ενώ του δεύτερου το 2. Άρα το μικρότερο στοιχείο του τελικού συνόλου θα είναι το 2. Κάθε αριθμός του πρώτου συνόλου προστίθεται διαδοχικά με κάθε αριθμό του δεύτερου συνόλου. Το μεγαλύτερο στοιχείο του πρώτου συνόλου είναι το 1, προστιθέμενο με το μεγαλύτερο στοιχείο του δεύτερου συνόλου, το 3, μας δίνει 4, που θα είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του τελικού συνόλου. Άρα το άθροισμα του $[0,1]$ με το $[2,3]$ μας δίνει όλα τα στοιχεία του $[2,4]$.

ii) $\mathbb{Z}+(0,1)=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Κάθε μη ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός ακεραίου και ενός αριθμού που ανήκει στο $(0,1)$, ενώ πρέπει να ισχύει πως ο ακέραιος πρέπει να είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος του μη ακεραίου. Ωστόσο στο σύνολο $(0,1)$ δεν περιέχεται ακέραιος αριθμός και κάθε ακέραιος μπορεί να γραφτεί μόνο ως άθροισμα ακεραίων*. Άρα το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, δεν περιέχεται στο τελικό σύνολο. Άρα $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

* στην προκειμένη περίπτωση, γιατί προστίθεται ακέραιος με μη ακέραιο.

iii) $\mathbb{Z}+[0,1]=\mathbb{R}$

Όπως προαναφέρθηκε στο ερώτημα ii $\mathbb{Z}+(0,1)=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Τώρα όμως στο σύνολο $[0,1]$ εμπεριέχονται οι αριθμοί 0 και 1 που είναι ακέραιοι. Κάθε ακέραιος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ακεραίων*. Οπότε προσθέτοντας κάθε ακέραιο του $\mathbb{Z}$ με το 0 ή το 1 θα πάρουμε το $\mathbb{Z}$. Άρα $\mathbb{Z}+[0,1]=\mathbb{R}$ * Στην προκειμένη περίπτωση, γιατί το ένα προστιθέμενο στοιχείο είναι ακέραιος

iv) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

Το άθροισμα δύο ρητών είναι ρητός. Άρα $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$.

v) $\mathbb{Q}+(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

Το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι πάντα άρρητο. Άρα κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}$ προστιθέμενο με κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (άρρητοι) θα έχει ως αποτέλεσμα άρρητο. Άρα το σύνολο των άρρητων, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Άσκηση 2

• Έστω $x\in A\cup(B\cap C)$. $x\in A$ ή $x\in B\cap C$

Αν $x\in A$ τότε και $x\in A\cup B$ και $x\in A\cup C$. Άρα $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Αν $x\in B\cap C$ τότε $x\in B$ και $x\in C$. Άρα $x\in A\cup B$ και $x\in A\cup C$

Άρα $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Άρα $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

• Έστω $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. $x\in A\cup B$ και $x\in A\cup C$

Άρα $x\in A$ ή $x\in B$ και $x\in C$

Αν $x\in A$ τότε $x\in A\cup(B\cap C)$

Αν $x\notin A$, $x\in B$ και $x\in C$ τότε $x\in B\cap C$

Άρα $x\in A\cup(B\cap C)$

Άρα $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

Άρα $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$

Έστω $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. $x\in A$ αλλιώς $x\notin A\cap B$ και $x\notin A\cap C$ άρα κ' $x\notin(A\cap B)\cup(A\cap C)$. $x\in B\cup C$ αλλιώς $x\notin A\cap B$ κ' $x\notin A\cap C$ άρα κ' $x\notin(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Άρα $x\in A\cap(B\cup C)$

Άρα $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

Έστω $x\in A\cap(B\cup C)$. $x\in A$ κ' $x\in B$ ή $x\in C$. Άρα $x\in A\cap B$ ή $x\in A\cap C$. Άρα $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Άρα $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Άρα $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$

Άσκηση 3

α) Αν $xy=0$ τότε $y=0$ ή $x=0$ ή $y=x=0$

Έστω $x\neq 0$ και $y\neq 0$

τότε $x \cdot y \neq 0$ άτοπο

Άρα $x=0$ ή $y=0$ ή $x=y=0$

Άσκηση 4

i) $(0,1)$

Είναι ανοιχτό διάστημα και άρα όλα τα στοιχεία του είναι εσωτερικά.

ii) $(0,1]$

Είναι ανοιχτό στο 0 και κλειστό στο 1. Άρα δεν είναι ανοιχτό και έχει εσωτερικό το $(0,1) \subseteq (0,1]$. Το 1 έχει αυθαίρετα κοντά του αριθμούς εκτός του $(0,1]$

iii) $\mathbb{Q}$

Δεν είναι ανοιχτό σύνολο. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε κάποιον άρρητο. Άρα κανένα σημείο του $\mathbb{Q}$ δεν είναι εσωτερικό. Άρα το εσωτερικό του $\mathbb{Q}$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$

iv) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Δεν είναι ανοιχτό. Κάθε στοιχείο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (άρρητος) βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε κάποιον ρητό. Άρα κανένα σημείο του $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ δεν είναι εσωτερικό. Άρα το εσωτερικό του $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.

v) $\mathbb{Z}$

Δεν είναι ανοιχτό σύνολο. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε κάποιον μη ακέραιο. Άρα κανένα σημείο του $\mathbb{Z}$ δεν είναι εσωτερικό. Άρα το εσωτερικό του $\mathbb{Z}$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$

vi) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Είναι ανοιχτό σύνολο. Κάθε μη ακέραιο στοιχείο είναι εσωτερικό στο σύνολο $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Άρα το εσωτερικό του $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι το $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

Άσκηση 5

i) $[0,1)$

minimum $=0$, infimum $=0$

supremum $=1$

Το $[0,1)$ δεν έχει maximum γιατί είναι ανοιχτό στο 1.

ii) $(0,1]$

maximum $=1$, supremum $=1$

infimum $=0$

Το $(0,1]$ δεν είχει minimum γιατί είναι ανοιχτό στο 0

iii) $\mathbb{Q}$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ έχει άπειρα στοιχεία άρα δεν ορίζεται το maximum, minimum, infimum, supremum

iv) $\left\{1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\}$ $\quad 1-\frac{1}{2} < 1-\frac{1}{3} < 1-\frac{1}{4}$

Supremum $=1$ γιατί κάποια στιγμή η διαφορά $1-\frac{1}{\nu}$ θα τείνει στο 1

infimum $=\frac{1}{2}$, minimum $=\frac{1}{2}$

Το σύνολο έχει άπειρα στοιχεία άρα δεν ορίζεται το maximum

v) $A=\{x : (x-\sqrt{2})(x-3) \leq 0\}$

$(x-\sqrt{2})(x-3) \leq 0$

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$(x-\sqrt{2})(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [\sqrt{2}, 3]$

infimum $=\sqrt{2}$, minimum $=\sqrt{2}$

supremum $=3$, maximum $=3$

vi) $A \cap \mathbb{Q} = ((\sqrt{2}, 3] - (\mathbb{R}-\mathbb{Q}))$

infimum $=\sqrt{2}$, minimum δεν ορίζεται αφού είναι ανοιχτό στο $\sqrt{2}$

supremum $=3$, maximum $=3$

Άσκηση 7

$A+B \overset{\Delta}{=} \{z \in \mathbb{R} : z = a+b, a \in A, b \in B\}$

Αφού τα A, B είναι μη κενά και φραγμένα άνω τότε ορίζονται τα $\sup A$, $\sup B$

Αφού $A \neq \{\emptyset\}$ τότε θα περιέχει ένα τουλάχιστον $k1$

κ' αφού $B \neq \{\emptyset\}$ τότε θα περιέχει ένα τουλάχιστον $k2$

Άρα το σύνολο $A+B$ θα περιέχει ένα τουλάχιστον $k1+k2$

Άρα θα είναι μη κενό το σύνολο $A+B$

Τα A, B σύνολα είναι φραγμένα άρα υπάρχουν $M_1, M_2 : v \leq M_1$ (1) κ' $\delta \leq M_2$ (2) $\forall v \in A$ κ' $\forall \delta \in B$

Έστω κάποιο $\lambda \in A+B$ τότε θα υπάρχουν $v, \delta : \lambda = v+\delta$ με $v \in A$ κ' $\delta \in B$

Άρα $\lambda = v+\delta \leq M_1+M_2$ από (1), (2)

Άρα το $A+B$ έχει άνω φράγμα το M_1+M_2

Από το αξίωμα της πληρότητας το $A+B$ έχει supremum το $\sup(A+B)$

$\forall \lambda \in A+B$, $\lambda = v+\delta \leq \sup A + \sup B$

Άρα $\sup A+\sup B$ είναι άνω φράγμα του $A+B$

Έστω $\xi > 0$ κ' $\xi/2 > 0$, $\exists$ $k1, k2$ με $k1 \in A$ κ' $k2 \in B$: $k1 > \sup A - \xi/2$, $k2 > \sup B - \xi/2$

Άρα $k1+k2 > \sup A + \sup B - \xi$

Άρα $\exists$ $x = k1+k2 \in A+B > \sup A+\sup B - \xi$

Άρα $\sup A+\sup B$ είναι min άνω φράγμα αφού αφαιρώντας οποιοδήποτε ξ δεν είναι πια άνω φράγμα