Ομάδα Ασκήσεων 10 Σχοινάκη Μαρία

Άσκηση 62 3210191

$y'(x) = y^2(x)(1-y(x))$, $x$ χρόνος, $y(x) \in [0,1]$

α) $\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$

Για $A, B, C = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{x^2(1-x)+x(1-x)+x.x^2}{x.x^2.(1-x)} = \frac{x^2-x^3+x-x^2+x^3}{x.x^2(1-x)}$

$= \frac{x}{x.x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2(1-x)}$

β) $y'(x) = y^2(x)(1-y(x))$

Έστω $y(x) \neq 0$ και $y(x) \neq 1$

$\frac{y'(x)}{y^2(x)(1-y(x))} = 1 \overset{(\alpha')}{\Leftrightarrow} y'(x)\left(\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y^2(x)} + \frac{1}{1-y(x)}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} + \frac{y'(x)}{y^2(x)} + \frac{y'(x)}{1-y(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{y(x)} + \frac{dy}{y^2(x)} + \frac{dy}{1-y(x)} = 1$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(x)} + \int \frac{dy}{y^2(x)} + \int \frac{dy}{1-y(x)} = \int 1\, dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| + C_1 - \frac{1}{y(x)} + C_2 - \ln\left(\left|\frac{1}{1-y(x)}\right|\right) + C_3$

$= x + C_4 \Leftrightarrow \ln(y(x)) - \ln\left(\frac{1}{1-y(x)}\right) - \frac{1}{y(x)} = x + (C_4 - C_1 - C_2 - C_3)$ έστω $C \in \mathbb{R}$

κ' $y(x) \in [0,1]$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y(x)}{1-y(x)}\right) - \frac{1}{y(x)} = x + C$, $C \in \mathbb{R}$

γ) Ναι η $y(x) = 1$ και η $y(x) = 0$

Για $y(x) = 1 \Rightarrow (1)' = 1^2.0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει

Για $y(x) = 0 \Rightarrow (0)' = 0^2.1 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει

Άσκηση 63

$y'(x) + (\tan x) y(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad (1)$

• $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx = -\ln(|\cos x|) + c$

$= \ln\left(\left|\frac{1}{\cos x}\right|\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

και έστω $c = 0$

$e^{\ln\left(\left|\frac{1}{\cos x}\right|\right)} = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{\cos x}$ αφού $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos 0 > \cos x > \cos\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 1 > \cos x > 0$

Άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$\frac{1}{\cos x} y'(x) + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot y(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \cdot y'(x) + \frac{\sin x}{(\cos x)^2} \cdot y(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos x} \cdot y(x)\right)' = \left(\tan x + c\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \cdot y(x) = \tan x + c$

$\Leftrightarrow y(x) = \frac{\tan x + c}{\frac{1}{\cos x}} \Leftrightarrow y(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + c}{\frac{1}{\cos x}} \Leftrightarrow y(x) = \sin x + c \cdot \cos x, \quad c \in \mathbb{R}$

$(1)\ (\sin x + c \cdot \cos x)' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (\sin x + c \cdot \cos x) = \frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \cos x - c \cdot \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + c \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - 1}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει

Άσκηση 64

$(\tan x)y'(x)+y(x)=\sin^2 x$ στο $(0,\pi/2)$ (1)

• $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\neq 0$, αφού στο $(0,\frac{\pi}{2})$ $\sin x>0$ κ' $\cos x>0$

(1) $y'(x)+\frac{y(x)}{\tan x}=\frac{\sin^2 x}{\tan x} \Leftrightarrow y'(x)+\frac{1}{\tan x}\cdot y(x)=\sin x\cdot\cos x$

$\Leftrightarrow y'(x)+\cot\cdot y(x)=\sin x\cdot\cos x$ (2)

• $\int\cot=\ln(|\sin x|)+C$, έστω $C=0$, $C\in\mathbb{R}$

και $e^{\ln(|\sin x|)}=|\sin x|=\sin x$ αφού $\sin x>0$ στο $(0,\pi/2)$

(2) $\Leftrightarrow \sin x\cdot y'(x)+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x\cdot y(x)=\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x\cdot y'(x)+\cos x\cdot y(x)=\sin^2 x\cdot\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x\cdot y(x))'=\left(\frac{\sin^3 x}{3}+C1\right)' \Leftrightarrow \sin x\cdot y(x)=\frac{\sin^3 x}{3}+C1$

$\Leftrightarrow y(x)=\frac{\frac{\sin^3 x}{3}}{\sin x}+\frac{C1}{\sin x} \Leftrightarrow y(x)=\frac{\sin^3 x+3C1}{3\sin x}$, $C1\in\mathbb{R}$

κ' έστω $3C1\in\mathbb{R}=C$. Άρα

$y(x)=\frac{\sin x^3+C}{3\sin x}$

• $y(x)=\frac{\sin x^2}{3}+\frac{C}{3\sin x}$

• $\frac{\sin x^2}{3}>0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$, ενώ το $\frac{C}{3\sin x}$ τείνει στο άπειρο όταν

$x\to 0^+$.

Αν $C>0$ τότε θα τείνει στο $+\infty$ ενώ αν $C<0$ θα τείνει στο $-\infty$. Αν $C=0$ τότε η λύση θα τείνει στο 0.

Άσκηση 6Ϛ

(α) $y'(x) + (\cos x) y(x) = e^{-\sin x} \ln x \quad , x>0$

$\cdot \int \cos x = \sin x + c$ έστω $c=0$. Έχουμε

$e^{\sin x} \cdot y'(x) + e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot y(x) = e^{\sin x} \cdot e^{-\sin x} \cdot \ln x$

$\Leftrightarrow (e^{\sin x} \cdot y(x))' = e^{0} \cdot \ln x \Leftrightarrow (e^{\sin x} \cdot y(x))' = \ln x \quad (1)$

$\cdot \int \ln x = \int (x)' \cdot \ln x$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x \ln x - \int 1 = x \ln x - x + C \quad , C \in \mathbb{R}$

$= x(\ln x - 1) + C$

$(1) \; (e^{\sin x} \cdot y(x))' = (x(\ln x - 1) + C)'$

$\Leftrightarrow e^{\sin x} \cdot y(x) = x(\ln x - 1) + C \quad , e^{\sin x} \neq 0$

$\Leftrightarrow y(x) = \dfrac{x(\ln x - 1) + C}{e^{\sin x}}$

B) $y(x) = \dfrac{x(\ln x - 1)}{e^{\sin x}} + \dfrac{C}{e^{\sin x}} \Leftrightarrow y(x) = (x(\ln x - 1) + C) e^{-\sin x}$

Το $e^{-\sin x} \geq e^{-1}$ αφού $-1 \leq \sin x \leq 1$

Άρα $e^{-\sin x} > 0$, ενώ $x(\ln x - 1) + C$ τείνει στο άπειρο καθώς το $x$ τείνει στο άπειρο. $x \to \infty$ ... (2) $\in \mathbb{R}$

Άρα σε κάθε περίπτωση:

Όλες οι λύσεις τείνουν στο άπειρο.

Άσκηση 66

(α') $(\tan(y(x)))y'(x) = x\sin x$

$\Leftrightarrow (\tan y\, dy) = x\sin x\, dx$

$\Leftrightarrow \int \tan y\, dy = \int x\sin x\, dx$

$\Leftrightarrow -\ln(|\cos y|) + C_1 = -\cos x.(x) + \sin x + C_2 \ (1),\ C_2 \in \mathbb{R}$

αφού

$\int x\sin x\, dx = \int x(-\cos x)'\, dx$

$= x(-\cos x) - \int -\cos x = x(-\cos x) + \int \cos x$

$= -x\cos x + \sin x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$

$(1)\ -\ln(|\cos y|) = -x\cos x + \sin x + C \quad , \quad C_1 + C_2 = C,\ C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln(|\cos y|) = x\cos x - \sin x + C$

$\Leftrightarrow |\cos y| = e^{x\cos x - \sin x + C}$

$\Leftrightarrow |y(x)| = \arccos(e^{x\cos x - \sin x + C})$

$\Leftrightarrow y(x) = \pm\arccos(e^{x\cos x - \sin x + C})$

(β') $y(0) = 0 \Leftrightarrow \arccos(e^{0-0+C}) = 0$

$\Leftrightarrow \arccos(e^{C}) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Η ειδική λύση είναι

$y(x) = \arccos(e^{x\cos x - \sin x})$

γ) Η $\arccos(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ που είναι το σύνολο τιμών της $\cos x$

Άρα πρέπει $-1 \leq e^{x\cos x - \sin x + C} \leq 1$. Όμως $e^{x\cos x - \sin x + c} > 0$

$\cdot\ e^{x\cos x - \sin x + C} \leq 1 \Leftrightarrow x\cos x - \sin x + c \leq 0$

Οπότε όποια και να είναι η ειδική λύση θα πρέπει το x να έχει συγκεκριμένες τιμές.

Άρα δεν υπάρχει καμία ειδική λύση που να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 67

$z'(x)+(\sin x)z(x)=(\sin x)z^2(x) \quad , x\in\mathbb{R}$

(α') $y(x)=\dfrac{1}{z(x)} \Rightarrow y'(x)=-\dfrac{z'(x)}{z^2(x)}$   Αν $z(x)\neq 0$

$$-\frac{z'(x)}{z^2(x)}-\frac{(\sin x)z(x)}{z^2(x)}=-\sin x \Leftrightarrow y'(x)-\sin x(y(x))=-\sin x$$

$$\Rightarrow e^{\cos x}y'(x)-\sin x\cdot e^{\cos x}\cdot y(x)=-e^{\cos x}\cdot\sin x$$

$$\Leftrightarrow (e^{\cos x}\cdot y(x))'=(e^{\cos x}+C)'$$

$$\Leftrightarrow e^{\cos x}\cdot y(x)=e^{\cos x}+C \ , C\in\mathbb{R} \ , e^{\cos x}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\frac{C}{e^{\cos x}} \ , C\in\mathbb{R}$$

Άρα $z(x)=\dfrac{1}{y(x)}=\dfrac{1}{\frac{C}{e^{\cos x}}}=\dfrac{e^{\cos x}}{C}$ , $C\in\mathbb{R}^*$