Ομάδα Ασκήσεων 3

Σχοινάκη Μαρία
3210191

Άσκηση 19

(α') $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

(β') $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{1}{9}$, αφού το να φέρεις εξάρες έχει πιθανότητα μία στις 36 και το να φέρεις διπλές με ζυγά (2-2, 2-4, 2-6 κτλ) είναι 9 στις 36

(γ') $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$, αφού η πιθανότητα για να φέρεις διπλές είναι 6/36 (1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6)

(δ') $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{P(\Omega)} = \frac{\frac{1}{36}}{1} = \frac{1}{36}$

(ε') $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$ αφού το B είναι το ενδεχόμενο να φέρεις εξάρες, ενώ το A περιττά και οι εξάρες είναι ζυγά, άρα έχουν τομή το κενό σύνολο και $P(\emptyset) = 0$.

Άσκηση 20

(α') Έχουμε 30 βιβλία και 3 βιβλιοθήκες από 10 η καθεμία άρα 30 αντικείμενα που χωρίζονται σε 3 ομάδες από 10. Άρα $\binom{30}{10,10,10}$ δυνατοί συνδυασμοί. Ορίζουμε δειγματικό χώρο $\Omega = \binom{30}{10,10,10} = \frac{30!}{10!10!10!}$. Ορίζουμε επίσης ενδεχόμενο A η πρώτη βιβλιοθήκη να έχει 10 λογοτεχνικά και η δεύτερη 5 λογοτεχνικά. Άρα από τα 15 συνολικά λογοτεχνικά, υπάρχουν $\binom{15}{10}$ διαφορετικοί συνδυασμοί να βάλουμε 10 λογοτεχνικά στην πρώτη βιβλιοθήκη. Στην δεύτερη βιβλιοθήκη θα μπουν τα 5 λογοτεχνικά που μείνανε $\binom{5}{5}$ και 5 μαθηματικών με $\binom{15}{5}$ διαφορετικούς τρόπους. Όσο για την τρίτη, θα μπουν τα υπόλοιπα 10 μαθηματικά $\binom{10}{10}$. Άρα $|A| = \binom{15}{10}\binom{15}{5}$ με πιθανότητα

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{15}{10}\binom{15}{5}}{\binom{30}{10,10,10}}=\frac{\frac{15!}{10!5!}\cdot\frac{15!}{5!10!}}{\frac{30!}{10!10!10!}}=\frac{15!15!10!10!10!}{30!10!10!5!5!}$$

$$=\frac{15!15!10!}{30!5!5!}$$

(β') Έστω A_1 το ενδεχόμενο 5 λογοτεχνικά βιβλία να είναι στην δεύτερη βιβλιοθήκη και A_2 το ενδεχόμενο τα υπόλοιπα 10 λογοτεχνικά να είναι στην πρώτη βιβλιοθήκη. Χρησιμοποιούμε δεσμευμένη πιθανότητα.

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$$

Το $P(A_1A_2)$ είναι η πιθανότητα που υπολογίσαμε στο α' ερώτημα καθώς έχουμε και 5 λογοτεχνικά στο A_1 στην δεύτερη βιβλιοθήκη και 10 λογοτεχνικά στο A_2 στην πρώτη βιβλιοθήκη. Το $P(A_1)$ είναι η πιθανότητα 5 λογοτεχνικά να βρίσκονται στην δεύτερη βιβλιοθήκη. Δηλαδή έχοντας τον δειγματικό χώρο Ω, τώρα μας απασχολούν μόνο 5 λογοτεχνικά, δηλαδή $\binom{15}{5}$ και τα υπόλοιπα 25 βιβλία δηλαδή $\binom{25}{10,5,10}$.

Άρα $P(A_1)=\frac{\binom{25}{10,5,10}\cdot\binom{15}{5}}{\binom{30}{10,10,10}}$ και

$$P(A_2|A_1)=\frac{\frac{\frac{15!\,15!}{10!5!10!5!}}{\frac{30!}{10!10!10!}}}{\frac{\frac{15!\,25!}{10!5!10!10!5!}}{\frac{30!}{10!10!10!}}}=\frac{\frac{15!\,15!}{10!5!10!5!}}{\frac{15!\,25!}{10!5!10!10!5!}}=\frac{15!\,10!}{25!}$$

(γ) Τώρα ψάχνουμε το $P(A_1|A_2)$. Το $P(A_1A_2)$ είναι το ίδιο με το α' ερώτημα. Το $P(A_2)$ είναι η πιθανότητα να έχουν 10 λογοτεχνικά βιβλία στην πρώτη χωρίς να μας ενδιαφέρει κάτι άλλο. Δηλαδή $\binom{15}{10}$ συνδυασμοί για τα 10 λογοτεχνικά και $\binom{20}{10,10}$ για τα υπόλοιπα βιβλία. Άρα $P(A_2)=\frac{\binom{15}{10}\binom{20}{10,10}}{\binom{30}{10,10,10}}$ και

$$P(A_1|A_2)=\frac{\frac{\frac{15!\,15!}{10!5!10!5!}}{\frac{30!}{10!10!10!}}}{\frac{\frac{15!\,20!}{10!10!10!}}{\frac{30!}{10!10!10!}}}=\frac{\frac{15!\,15!}{10!5!10!5!}}{\frac{15!\,20!}{10!10!10!}}=\frac{15!\,10!}{20!5!5!}$$

Άσκηση 21

Ορίζουμε δειγματικό χώρο Ω που περιλαμβάνει όλες τις πιθανές διατάξεις των 6 ατόμων με $|\Omega| = 6!$.
Ορίζουμε επίσης ένα ενδεχόμενο A_1 που αποτελείται από όλες τις πιθανές διατάξεις τέτοιες ώστε ο A να είναι πιο δημοφιλής από τον B και ένα A_2, ο A να είναι πιο δημοφιλής από τον C.

Για να είναι ο A πιο δημοφιλής από τον B πρέπει:
Υποθέτωντας ότι ο B βρίσκεται στην 6η θέση, υπάρχουν 5! πιθανές διατάξεις των υπόλοιπων ατόμων με $A > B$. Τώρα ας υποθέσουμε πως το B βρίσκεται στην 5η θέση. Ο μόνος περιορισμός είναι το A να μην βρίσκεται στην 6η θέση. Άρα μένουν 4 θέσεις για την 6η θέση και 4! διαφορετικές διατάξεις των υπόλοιπων θέσεων. Άρα $4 \cdot 4!$ και έτσι κάνουμε για τις θέσεις του B στην 4η, 3η, 2η. Άρα

$$P(A_1) = \frac{5! + 4 \cdot 4! + 3 \cdot 4! + 2 \cdot 4! + 4!}{6!} = \frac{1}{2} = 0,5$$

1	2	3	4	5	6
					B
				B	
			B		
		B			
	B				

Η πιθανότητα του $P(A_1)$ ισούται με αυτή του $P(A_2)$ καθώς απλά αλλάζουν τα ονόματα και άρα από την πολ/κη αρχή $P(A_1A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Που είναι και λογικό αφού θα ισχύει ή $A > B$ ή $B > A$ δηλαδή 0,5

Άρα $P(A_2 | A_1) = \dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$

$= \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ είναι η πιθανότητα ο A να είναι πιο δημοφιλής από τον C, δεδομένου ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B

Άσκηση 22

(α) Αρχικά ορίζουμε δειγματικό χώρο Ω που αποτελείται από όλες τις δυνατές ομάδες επιλογών με $|\Omega| = \binom{60}{4}$

Ορίζουμε ενδεχόμενο Α να επιλεγούν και οι 3 πράκτορες.

Ψάχνουμε την πιθανότητα η 4άδα επιλογής να αποτελείται από 3 πράκτορες και 1 έντιμο. Μπορούμε να επιλέξουμε έναν έντιμο με 57 διαφορετικούς τρόπους. Άρα θα είναι

$$P(A) = \frac{57}{\binom{60}{4}} = \frac{57}{\frac{60!}{4!\,56!}} = \frac{57 \cdot 4!\,56!}{60!} = \frac{57 \cdot 4!\,56!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57!} = \frac{4!}{60 \cdot 59 \cdot 58} = \frac{1}{8555} \simeq 0{,}0001$$

(β) Ορίζουμε ενδεχόμενο Β να μην διέρρευσε το πρότζεκτ.

Για να μην διαρρεύσει πρέπει να μην επιλεγεί πράκτορας. Δηλαδή από τους 60 αφαιρούμε τους 3 πράκτορες και σχηματίζουμε 4άδες. Άρα $|B| = \binom{57}{4}$ με πιθανότητα

$$P(B) = \frac{\binom{57}{4}}{\binom{60}{4}} = \frac{\frac{57!}{4!\,53!}}{\frac{60!}{4!\,56!}} = \frac{57!\,56!\,4!}{60!\,53!\,4!} = \frac{57!\,56!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57!\,53!} = \frac{56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53!}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 53!}$$

$$= \frac{56 \cdot 55 \cdot 54}{60 \cdot 59 \cdot 58} = \frac{1386}{1711} \simeq 0{,}81$$

(γ) Ορίζουμε ενδεχόμενο Γ να διέρρευσε τελικά το πρότζεκτ.

$P(\Gamma) = 1 - P(B) \simeq 0{,}19$

Ψάχνουμε την πιθανότητα να έχουν επιλεχθεί και οι 3 πράκτορες δεδομένου ότι διέρρευσε το πρότζεκτ. Δηλαδή το

$P(A|\Gamma) = \frac{P(A\Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{P(A)}{P(\Gamma)}$ αφού $A \subseteq \Gamma$ καθώς ένας τρόπος να ισχύσει το Γ είναι να ισχύσει το Α. Άρα $A \cap \Gamma = A$ οπότε

$$P(A|\Gamma) = \frac{P(A)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{1}{8555}}{\frac{325}{1711}} = \frac{1711}{2780375} = \frac{1}{1625} \simeq 0{,}0006$$

πιθανότητα να έχουν επιλεχθεί και οι 3 πράκτορες δεδομένου ότι διέρρευσε το πρότζεκτ

Άσκηση 23

Για να βρούμε την πιθανότητα τα παιδιά να σπάσουν την πινιάτα, θα βρούμε την πιθανότητα να μην την σπάσουν και θα την αφαιρέσουμε από το 1. Ορίζουμε ενδεχόμενο A_1 τα παιδιά να μην σπάσουν την πινιάτα. Έστω A αστοχία και $X\mu$ μέτριο χτύπημα. Είναι

$$A = \{A_1A_2A_3A_4, A_1A_2A_3X\mu_4, A_1A_2X\mu_3A_4, A_1X\mu_2A_3A_4, X\mu_1A_2A_3A_4\}$$

με $A_1A_2A_3X\mu_4$ να αστοχήσουν οι πρώτοι 3 και να την χτυπήσει ελαφριά ο 4ος. Η αστοχία έχει $\frac{1}{2}$ η πιθανότητα και το μέτριο χτύπημα $\frac{1}{4}$. Άρα

$$P(A_1) = P(A_1A_2A_3A_4) + P(A_1A_2A_3X\mu_4) + P(A_1A_2X\mu_3A_4) + P(A_1X\mu_2A_3A_4) + P(X\mu_1A_2A_3A_4)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16} + \frac{4}{32} = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16}$$

Άρα $P(A_1) = \frac{3}{16}$ και η πιθανότητα να σπάσει η πινιάτα είναι $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

Άσκηση 24

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 η σειρά επιλογής των 5 χαρτιών. Πρακτικά θέλουμε να ισχύει $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ όπου x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 μπορούν να πάρουν τις τιμές από το 1 μέχρι το 52. Ο αριθμός των πιθανών διατάξεων του x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι $5!$ (μετάθεση), ενώ από αυτές τις $5!$ διατάξεις μόνο μία αντιστοιχεί στην αύξουσα σειρά $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Άρα έστω A το ενδεχόμενο να έχουμε αύξουσα σειρά. Η πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{1}{5!}$$

Άσκηση 25

(α) Ορίζουμε ενδεχόμενο A να εγκριθεί η δαπάνη. Έστω Y το ενδεχόμενο υπέρ και K το ενδεχόμενο κατά καθώς και Y_D το ενδεχόμενο ο D να ψηφίσει υπέρ. $P(Y)=\frac{3}{4}$, $P(K)=\frac{1}{4}$.
Για να εγκριθεί η δαπάνη πρέπει ή να ψηφίσουν όλοι υπέρ ή το πολύ ένας κατά. Δηλαδή,

$A=\{Y_AY_BY_CY_D, Y_AY_BY_CK_D, Y_AY_BK_CY_D, Y_AK_BY_CY_D, K_AY_BY_CY_D\}$

$P(A)=P(Y_AY_BY_CY_D)+P(Y_AY_BY_CK_D)+P(Y_AY_BK_CY_D)+P(Y_AK_BY_CY_D)$
$+P(K_AY_BY_CY_D)$

$$=\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

$$=\frac{81}{256}+\frac{27}{256}+\frac{27}{256}+\frac{27}{256}+\frac{27}{256}$$

$$=\frac{81}{256}+\frac{108}{256}=\frac{189}{256}\simeq 0{,}73$$

(β) Ψάχνουμε την πιθανότητα να έχει ψηφίσει υπέρ ο A, δεδομένου ότι η δαπάνη εγκρίθηκε. Άρα

$$P(Y_A|A)=\frac{P(AY_A)}{P(A)}$$

Το $P(AY_A)$ είναι η τομή του να εγκριθεί η δαπάνη και να ψηφίσει υπέρ ο A. Άρα

$AY_A=\{Y_AY_BY_CY_D, Y_AY_BY_CK_D, Y_AY_BK_CY_D, Y_AK_BY_CY_D\}$

$P(AY_A)=P(Y_AY_BY_CY_D)+P(Y_AY_BY_CK_D)+P(Y_AY_BK_CY_D)+P(Y_AK_BY_CY_D)$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}$$

$$=\frac{81}{256}+\frac{27}{256}+\frac{27}{256}+\frac{27}{256}$$

$$=\frac{81}{256}+\frac{81}{256}=\frac{162}{256}\simeq 0{,}63$$

$$P(Y_A|A)=\frac{P(AY_A)}{P(A)}=\frac{\frac{162}{256}}{\frac{189}{256}}=\frac{162}{189}\simeq 0{,}85$$

Άσκηση 26

(α) Ορίζουμε ενδεχόμενο A να έχουν και οι δύο γονείς το στίγμα. Έστω τώρα ενδεχόμενο B να μην έχει κανένας γονιός το στίγμα. Έστω ενδεχόμενο C να έχει ένας από τους δύο, οποιοσδήποτε. Λόγω της ανεξαρτησίας θα είναι $P(A)=0.01^2=0,0001$, $P(B)=0.99^2=0,9801$.

Τα A, B, C είναι διαμέριση άρα θα είναι:

$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0,0001-0,9801=0,0198$

Έστω τώρα $\Pi 1$ το ενδεχόμενο να έχει το πρώτο παιδί το στίγμα και $\Pi 2$ το ενδεχόμενο να έχει το δεύτερο παιδί το στίγμα. Ισχύει ότι

$P(\Pi_1\Pi_2|A)=P(\Pi_1|A)P(\Pi_2|A)$

$P(\Pi_1\Pi_2|B)=P(\Pi_1|B)P(\Pi_2|B)$

$P(\Pi_1\Pi_2|C)=P(\Pi_1|C)P(\Pi_2|C)$, ενώ τα $\Pi_1\Pi_2$ είναι εξαρτημένα με $P(\Pi_1\Pi_2)\neq P(\Pi_1)P(\Pi_2)$

Άρα $P(\Pi_1\Pi_2|C)=P(\Pi_1|C)P(\Pi_2|C)=0,02^2=0,0004$

(β) Αφού δεν γνωρίζουμε τίποτα για τους γονείς και ψάχνουμε την πιθανότητα να ισχύει το $\Pi_1\Pi_2$ από τον ορισμό της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$P(\Pi_1\Pi_2)=P(\Pi_1\Pi_2|A)P(A)+P(\Pi_1\Pi_2|B)P(B)+P(\Pi_1\Pi_2|C)P(C)$

$=P(\Pi_1|A)P(\Pi_2|A)P(A)+P(\Pi_1|B)P(\Pi_2|B)P(B)+P(\Pi_1|C)P(\Pi_2|C)P(C)$

$=\frac{1}{2}^2\cdot 0,0001+0+0.02^2\cdot 0.0198\simeq 0,000032$

(γ) 1) Από τον κανόνα του Bayes:

$P(C|\Pi_1\Pi_2)=\frac{P(C\Pi_1\Pi_2)}{P(\Pi_1\Pi_2)}=\frac{P(\Pi_1\Pi_2|C)P(C)}{P(\Pi_1\Pi_2)}=\frac{0.0004\cdot 0.0198}{0,000032}\simeq 0,2475$

2) Ισχύει ότι $P(B|\Pi_1\Pi_2)=0$. Άρα

$P(A|\Pi_1\Pi_2)=1-P(C|\Pi_1\Pi_2)-P(B|\Pi_1\Pi_2)$

$=1-0,2475-0$

$=0,7525$