ΕΡΓΑΣΙΑ 2 Σχοινάκη Μαρία

3210191

Άσκηση 1

$A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

Θέλουμε οι μεταθέσεις να περιέχουν τις συμβολοσειρές ba και gf με την συγκεκριμένη σειρά, δηλαδή πρώτα το b και αμέσως μετά το a και πρώτα το g και αμέσως μετά το f. Άρα ας θεωρήσουμε το ba έναν χαρακτήρα και το gf έναν άλλο. Άρα πλέον έχουμε $7-2=5$ στοιχεία, τα ba, c, d, e, gf και εφόσον θέλουμε τον αριθμό των μεταθέσεων, παίρνουμε τον τύπο $P(\nu,\nu)=\nu!=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$

Άσκηση 2

i) Έστω S το σύνολο των υπό εξέταση λέξεων και T το σύνολο των συνδυασμών των 12 στοιχείων του A, όπου $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ ανά 6. Ορίζουμε συνάρτηση μεταξύ του S και του T, όπου σε κάθε στοιχείο του S αντιστοιχίζουμε έναν συνδυασμό των 12 στοιχείων του A ανά 6, ο οποίος συνδυασμός έχει για στοιχεία του, τους αριθμούς των θέσεων στις οποίες εμφανίζονται οι άσσοι (ή τα μηδενικά αφού είναι ισάριθμα). Άρα η συνάρτηση είναι επί και 1-1. Άρα $|S|=|S'|=|S|=C(\nu,\mu)=\frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}=C(12,6)$
$=\frac{12!}{6!6!}$

ii) Οι λέξεις που έχουν τουλάχιστον 3 άσσους, υπάρχουν σε πολλές περιπτώσεις, 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9 ή 10 ή 11 ή 12 άσσους. Οπότε πρέπει να προσθέσουμε τις διαδοχικές περιπτώσεις των αριθμών των λέξεων. Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι:

$$\left(\sum_{i=3}^{11} \frac{12!}{i!(12-i)!}\right)+12!$$

Άσκηση 3

A_1, A_2, A_3 σύνολα: $A_1 \subseteq A_2$ κ' $A_2 \subseteq A_3$

$|A_1| = 100$

$|A_2| = 1000$

$|A_3| = 10.000$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$
$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 100 + 1000 + 10.000 - 100 - 100 - 1000 + 100 = 10.000$

Άσκηση 4

Η λέξη «ΔΙΑΚΡΙΤΑ» περιέχει 2 «Ι», 2 «Α» άρα έστω σύνολο $A = \{1, 2, 2, 1, 1, 1\}$ όπου εκφράζει τον αριθμό των γραμμάτων από τα αριστερά προς τα δεξιά όπου,

$a_1 = 1(\Delta)$, $a_2 = 2(I)$, $a_3 = 2(A)$, $a_4 = 1(K)$, $a_5 = 1(P)$, $a_6 = 1(T)$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι

$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ όπου $n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 8$ και $n_i = a_i$

Άρα $\frac{8!}{1!2!2!1!1!1!} = \frac{8!}{2!2!} = \frac{40.320}{4} = 10.080$

ii) Τώρα θέλουμε τα 2 «Α» να εμφανίζονται μαζί. Ας τα θεωρήσουμε έναν χαρακτήρα(στοιχείο) πλέον,

$A = \{1, 2, 1, 1, 1, 1\}$ και ο ζητούμενος αριθμός είναι:

$\frac{n!}{n_1! n_2! n_r!} = \frac{7!}{1!1!2!1!1!1!} = \frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520$

Άσκηση 5

Γράφημα G με $V(G)=6$, $12 E(G)$ κάθε κορυφή έχει βαθμό 2 ή 5

Ξέρουμε, ότι θα υπάρχει μια τουλάχιστον κορυφή 2ου βαθμού και μια τουλάχιστον 5ου αφού από το λήμμα της χειραψίας:

$$2E(G)=\sum_{i=1}^{6} d(v_i)$$

$$\Rightarrow 2\cdot 12=\sum_{i=1}^{6} d(v_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} d(v_i)=24$$

Αν όλες οι κορυφές είναι 5ου βαθμού τότε:

$24=30$ που δεν ισχύει

Αν όλες οι κορυφές είναι 2ου βαθμού τότε:

$24=12$ που δεν ισχύει

Άρα τουλάχιστον μια κορυφή είναι 2ου και τουλάχιστον μια άλλη 5ου βαθμού.

Έστω οι κορυφές 5ου βαθμού $=x$ και οι κορυφές 2ου βαθμού $=y$. Άρα $5x+2y=24$ (1)

Όμως κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Άρα $x=2$ ή $x=4$ αφού αν $x=0$ πρέπει $y=6$ που απορρίπτεται, ενώ αν $x=6$ πρέπει $y=0$ που επίσης απορρίπτεται.

Για $x=2$: $5\cdot 2+2y=24 \Rightarrow 10+2y=24 \Rightarrow 2y=14 \Rightarrow y=7$. Όμως $y\leq 4$ άρα απορρίπτεται

Για $x=4$: $5\cdot 4+2y=24 \Rightarrow 20+2y=24 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$ δεκτή

Άρα το γράφημα G έχει 4 κορυφές 5ου βαθμού και 2 κορυφές 2ου βαθμού.

Άσκηση 6

G συνεκτικό k-κανονικό γράφημα, όπου k ο βαθμός κορυφών

$V(G) \rightarrow$ άρτιος

$E(G) \rightarrow$ περιττό

Από το λήμμα της χειραψίας:

$2E(G) = kV(G) \Rightarrow E(G) = \frac{kV(G)}{2}$ (1)

Έστω k άρτιος

Αν k άρτιος του τύπου περιττός$\times 2$ θα έχουμε:

$\frac{k}{2}$ = περιττός κ' περιττός$\times$άρτιο = άρτιος

Αν k άρτιος του τύπου άρτιος$\times 2$ θα έχουμε:

$\frac{k}{2}$ = άρτιος κ' άρτιος$\times$άρτιος = άρτιος

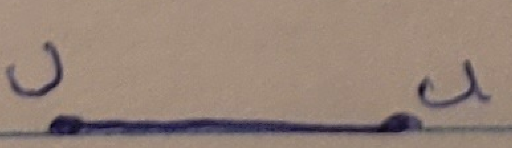
Άρα σε κάθε περίπτωση $\frac{kV(G)}{2}$ = άρτιος το οποίο απορρίπτεται αφού (1) $E(G) = \frac{kV(G)}{2}$ και $E(G)$ περιττό

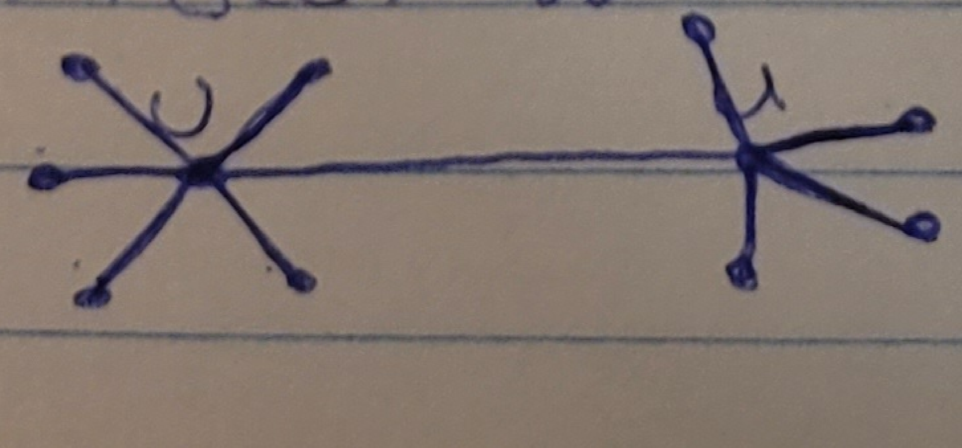
Άρα k περιττός

Το G είναι συνεκτικό, όμως δεν είναι άρτιο, άρα δεν είναι Eulerian

Άσκηση 7

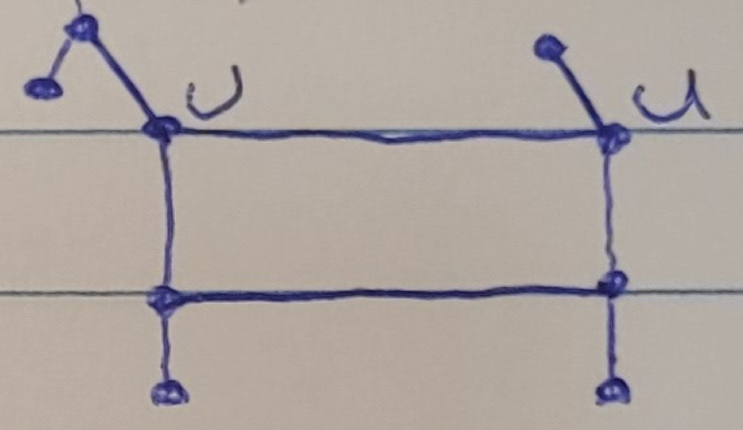
Οι u,υ είναι γειτονικές κορυφές, δηλαδή συνδέονται με μια ακμή. Όμως το γράφημα G δεν περιέχει κύκλους μήκους 3, οπότε έστω μια κορυφή ν, η ν δεν θα πρέπει να συνδέεται μέσω ακμών με την u και την υ, θα πρέπει με το πολύ μια από τις δύο. Γενικά κάθε κορυφή θα πρέπει να είναι n-1 βαθμού το πολύ. Αν η υ, u δεν συνδέονται αλλιώς παρά μόνο με την ακμή που τις ενώνει, θα ισχύει ότι η $d(u)+d(υ) = n$

π.χ 

ή 

Αν τώρα οι u, v συνδέονται με κάποιο τρόπο εκτός της ακμής που αρχίζει από v και τελειώνει σε u (και αντίστροφα) αυτό θα πρέπει να γίνεται με τουλάχιστον 4 ακμές, αφού με 3 σχηματίζεται κύκλος μήκους 3. Το άθροισμα των βαθμών των γειτονικών κορυφών είναι το πολύ n.

Άρα $d(v)+d(u) \leq n$. π.χ



Άρα σε κάθε περίπτωση:

$$d(v)+d(u) \leq n$$

Άσκηση 8

G απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα 5-κανονικό, δηλαδή κάθε του κορυφή είναι 5ου βαθμού. Έχει 48 κορυφές.

Από το λήμμα της χειραψίας:

$$2E(G)=\sum_{i=1}^{48} d(v_i) \Rightarrow 2E(G)=5\cdot 48 \Rightarrow E(G)=5\cdot 24 \Rightarrow E(G)=120$$

Από το θεώρημα Euler:

$V(G)+F(G)=E(G)+2$, όπου $V(G)$ το πλήθος των κορυφών, $F(G)$ το πλήθος των εδρών και $E(G)$ το πλήθος των ακμών.

$48+F(G)=120+2 \Rightarrow F(G)=122-48 \Rightarrow F(G)=74$ έδρες.