Ομάδα Ασκήσεων 2 Σχοινάκη Μαρία

Άσκηση 11 3210191

Έχουμε επαναληπτικές διατάξεις 5 αντικειμένων από 24.
Άρα το πλήθος των διαφορετικών λέξεων που μπορούν να φτιαχτούν είναι: $24^5 = |\Omega|$

α) Έστω A το πλήθος των λέξεων που περιέχουν A.
Αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των λέξεων που δεν έχουν A και να το αφαιρέσουμε από το 1. Άρα είναι επαναληπτικές διατάξεις 5 αντικειμένων από 23, αφού βγάλαμε το γράμμα A. Άρα 23^5 και

$P(A=0) = \frac{23^5}{24^5}$

Άρα το πλήθος των λέξεων που περιέχουν A, έχει πιθανότητα: $P(A\neq 0) = 1 - \frac{23^5}{24^5} = \frac{24^5 - 23^5}{24^5} \simeq 0.19$

β) Έστω B το πλήθος των λέξεων που έχουν B.
Ψάχνουμε το $P(A\neq 0) + P(B\neq 0) - P(A\neq 0, B\neq 0)$ άρα πρακτικά το $P(A\cup B)$.

$P(A\cup B)$ με πιθανότητα $= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Από (α) ερώτημα $P(A) = \frac{24^5 - 23^5}{24^5}$, για το B θα ακολουθεί ίδια διεργασία. Είναι επαναληπτικές διατάξεις 5 αντικειμένων από 23 αφού βγάλαμε το B. Άρα 23^5 και

$P(B=0) = \frac{23^5}{24^5}$

Άρα το πλήθος των λέξεων που περιέχουν B, έχει πιθανότητα: $P(B\neq 0) = 1 - \frac{23^5}{24^5} = \frac{24^5 - 23^5}{24^5} \simeq 0.19$

Το πλήθος των λέξεων που δεν περιέχουν A και B είναι: $\frac{22^5}{24^5}$ άρα το πλήθος των λέξεων που περιέχουν το A ή το B $(A\cup B)$ είναι $1 - \frac{22^5}{24^5}$

γ) Από (β) ερώτημα $P(A\cup B) = 1-\frac{22^5}{24^5}$

$\Leftrightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 1-\frac{22^5}{24^5}$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)+1-\frac{22^5}{24^5} = \frac{24^5-23^5}{24^5}+\frac{24^5-23^5}{24^5}$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) = -1+\frac{22^5}{24^5}+1-\frac{23^5}{24^5}+1-\frac{23^5}{24^5}$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) = 1 + \frac{-2\cdot 23^5+22^5}{24^5} \simeq 0.03$

δ) Θα υπολογίσουμε όλες τις λέξεις που περιέχουν το Β χωρίς να περιέχουν το Α. Δηλαδή.

$P(B\neq 0, A=0) = P(B)-P(A\cap B) = 1-\frac{23^5}{24^5} - 1 - \frac{-2\cdot 23^5+22^5}{24^5}$

$= \frac{23^5-22^5}{24^5} \simeq 0.16$

Άσκηση 12

Έστω Α ενδεχόμενο ο παίχτης να λάβει 7 από τα 52 φύλλα και να είναι όλα ίδιας φυλής. Υπάρχουν 13 φύλλα σε κάθε φυλή. Άρα υπάρχουν $\binom{13}{7}$ δυνατές 7-άδες φύλλων της ίδιας φυλής και έχουμε 4 φυλές άρα $\binom{13}{7}\binom{13}{7}\binom{13}{7}\binom{13}{7}$

Άρα $|A| = 4\binom{13}{7}$ και ο δειγματικός χώρος $|\Omega| = \binom{52}{7}$

Άρα $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4\cdot\frac{13!}{7!6!}}{\frac{52!}{7!45!}} = \frac{4\cdot 13!7!45!}{7!6!52!}$

$= \frac{4\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!\cdot 45!}{6!\cdot 52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45!} = \frac{4\cdot 11\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 51\cdot 5\cdot 7\cdot 4\cdot 47\cdot 46} =$

$= \frac{11.3.3.2.4}{51.47.46.5.7.4} = \frac{11.3.6}{51.47.46.5.7} = \frac{11.3}{391.47.35} = \frac{33}{643195} \simeq 0{,}00005$

(B') Τα ενδεχόμενα ο παίχτης να έχει 5-άδα, 6-άδα, 7-άδα φύλλων της ίδιας φυλής είναι ξένα μεταξύ τους. Άρα ο παίχτης έχει 5 τουλάχιστου φύλλα της ίδιας φυλής όταν συμβαίνει ένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα. Έστω E το ενδεχόμενο της 5-άδος, C το ενδεχόμενο της 6-άδας και A (α') ερώτημα το ενδεχόμενο της 7-άδας.

$P(B) = P(E \cup C \cup A)$ τα οποία είναι ξένα άρα,

$P(B) = P(E) + P(C) + P(A)$

Για το E:

Υπάρχουν $\binom{13}{5}$ δυνατές 5-άδες φύλλων της ίδιας φυλής και έχουμε 4 φυλές. Άρα $4.\binom{13}{5}$ και τα υπόλοιπα 2 φύλλα από τα 7 μπορούν να είναι οποιαδήποτε 2 από τα 39 (3x13) που μένουν. Άρα οι δυνατές 2-άδες είναι $\binom{39}{2}$. Άρα $|E| = 4.\binom{13}{5}\binom{39}{2}$

$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4.\binom{13}{5}\binom{39}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{4.\frac{13!}{5!8!}.\frac{39!}{2!37!}}{\frac{52!}{7!45!}}$

$= \frac{4.13!.39!.45!.7!}{2!5!8!37!52!} = \frac{2.13.12.11.10.9.8!.39.38.37!.45!.7!}{5!8!.37!.52.51.50.49.48.47.46.45!}$

$= \frac{2.13.12.11.10.9.39.38.7.6.}{52.51.50.49.48.47.46} = \frac{2.11.9.39.38.6}{4.51.5.7.4.47.46} = \frac{73359}{2572780} \simeq 0.028$

Για το C:

Υπάρχουν $\binom{13}{6}$ δυνατές 6-άδες φύλλων της ίδιας φυλής και έχουμε 4 φυλές. Άρα $4\binom{13}{6}$ και το άλλο φύλλο που από τα 7 μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα 39 (3x13) που μένουν. Άρα $|C| = 4.\binom{13}{6}.39$

$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4.39.\binom{13}{6}}{\binom{52}{7}} = \frac{156.\frac{13!}{6!7!}}{\frac{52!}{7!45!}} = \frac{156.13!.7!.45!}{6!7!.52!}$

$= \frac{156.13.12.11.10.9.8.7.6!.45!7!}{6!7!.52.51.50.49.48.47.46.45!} = \frac{156.11.9.9}{4.51.5.7.4.47.46} = \frac{1287}{643195} \simeq 0{,}0020$

Άρα $P(B) = \frac{33}{643195} + \frac{73359}{2572780} + \frac{1297}{643195} = \frac{78639}{2572780} \simeq 0{,}03$

(γ') Έστω η πρώτη δυάδα οποιοσδήποτε αριθμός από τους 13. Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ τρόποι για την δυάδα αυτή. Ωστόσο υπάρχουν $13 \cdot \binom{4}{2}$ δυνατές δυάδες για την πρώτη δυάδα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η δεύτερη δυάδα θα έχει πάλι $\binom{4}{2}$ τρόπους αλλά αυτή την φορά από 12 νούμερα (ή φιγούρες) αφού το 13° οποίο και αν είναι χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη δυάδα. Άρα $\binom{4}{2} \cdot 12$ δυνατές (δεύτερες) δυάδες. Αναλόγως, υπάρχουν $\binom{4}{2} \cdot 11$ δυνατές (τρίτες) δυάδες. Τώρα, έχουμε 6 φύλλα. Το 7ο μπορεί να είναι οποιοδήποτε φύλλο οποιασδήποτε φυλής, αρκεί να μην έχει χρησιμοποιηθεί με άλλη φυλή στις δυάδες. Οι δυάδες έχουν 3 νούμερα (φιγούρες), άρα αποκλείονται $3 \cdot 4 = 12$ χαρτιά και μένουν $52 - 12 = 40$ έγκυρα φύλλα. Άρα

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 40}{\binom{52}{7}}$$

$$= \frac{\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 40}{\frac{52!}{7!45!}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 40 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 7! \cdot 45!}{2!2!2!2!\,52!}$$

$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 40 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7! \cdot 45!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45!} = \frac{11 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7!}{4 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 4 \cdot 47 \cdot 46}$$

$$= \frac{11 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{51 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 4 \cdot 47 \cdot 46} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{51 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 46}$$

$$= \frac{2376}{128639} \simeq 0{,}018$$

Άσκηση 13

Η κάλπη έχει 300 μπάλες, άσπρες. Αφού βγάλαμε τυχαία 100 και τις βάψαμε μαύρες, μετά η κάλπη θα έχει 100 μαύρες και 200 άσπρες.

Υπάρχουν $\binom{300}{100}=\frac{300!}{100!200!}$ δυνατές 100-άδες επιλογών.

Ψάχνουμε την πιθανότητα η 100-άδα επιλογής μας να αποτελείται από 10 μαύρες και 90 άσπρες μπάλες. Ορίζουμε τον δειγματικό χώρο Ω ως το πλήθος των δυνατών 100-άδων, δηλαδή $|\Omega|=\binom{300}{100}=\frac{300!}{100!200!}$ και ορίζουμε έστω A το ενδεχόμενο να έχουμε 10 μαύρες και 90 άσπρες μπάλες. Θα χωρίσουμε το πείραμα σε δύο μέρη. Μπορούμε να επιλέξουμε 90 άσπρες μπάλες από τις 200 με $\binom{200}{90}=\frac{200!}{90!110!}$ τρόπους και 10 μαύρες

μπάλες από τις 100 με $\binom{100}{10}=\frac{100!}{10!90!}$ τρόπους. Ο συνδυασμός

αυτών των δύο είναι $\binom{200}{90}\cdot\binom{100}{10}$ λόγω της πολλ/κής αρχής.

$|A|=\binom{200}{90}\binom{100}{10}=\frac{200!}{90!110!}\cdot\frac{100!}{10!90!}$ και έχει πιθανότητα

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\frac{200!100!}{90!110!10!90!}}{\frac{300!}{100!200!}}=\frac{200!200!100!100!}{300!110!90!90!10!}$$

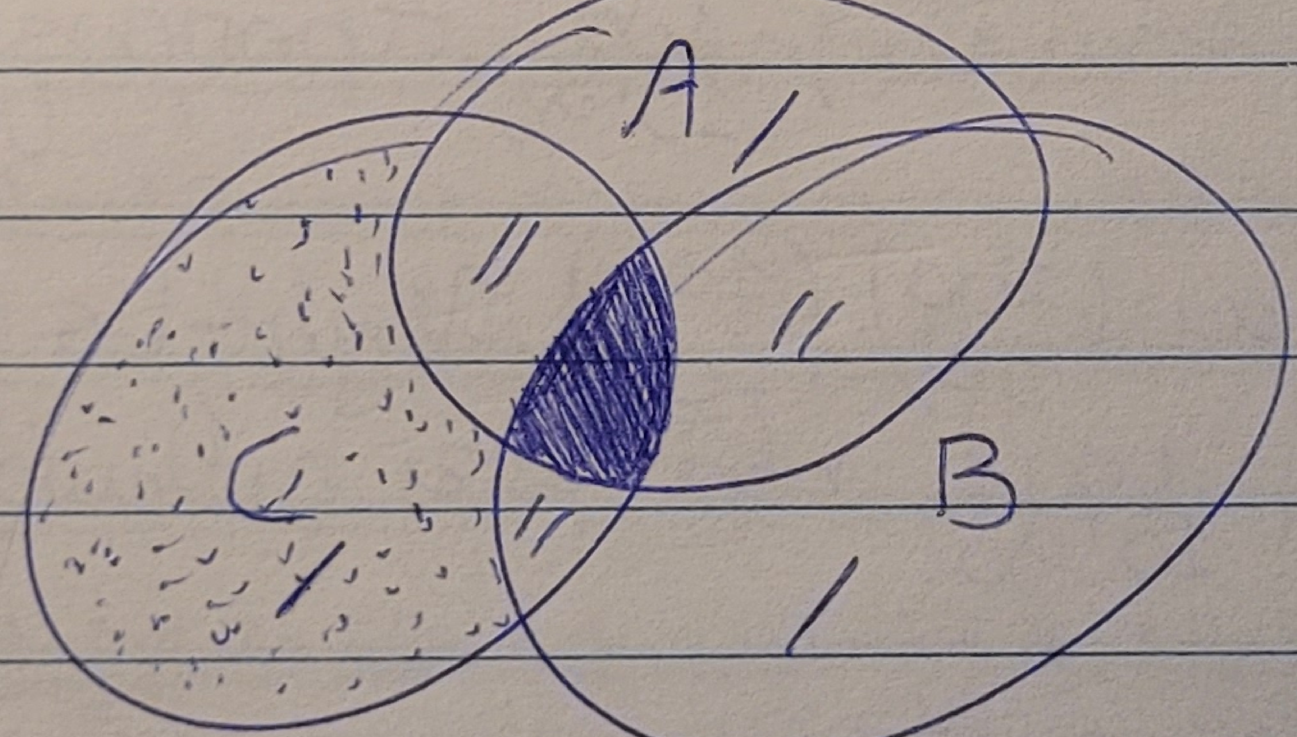
Άσκηση 14

Υπάρχουν n^k διαφορετικές διατάξεις με επανάθεση (αφού κάθε φορά επιστρέφεται ο λαχνός), αφού n είναι οι λαχνοί και k οι φορές επιλογής λαχνού, όσο δηλαδή μια διατεταγμένη k-άδα από n αντικείμενα (λαχνούς). Άρα ορίζουμε τον δειγματικό χώρο ως αυτές τις k-άδες και πλήθος $|\Omega|=n^k$

(α) Για να βρούμε την πιθανότητα το 1 να επιλεχθεί τουλάχιστον μία φορά, αρκεί να βρούμε την πιθανότητα να μην επιλεγεί καθόλου και να την αφαιρέσουμε από το 1 ($P(\Omega)$) αφού τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι ξένα και η ένωσή τους καλύπτει όλο τον δειγματικό χώρο. Για να μην επιλεγεί σίγουρα το 1 πρέπει να το "βγάλουμε". Άρα θα μείνουν $n-1$ λαχνοί και $(n-1)^k$ πιθανές k-άδες. Άρα η πιθανότητα να μην επιλεχθεί το 1 είναι $\frac{(n-1)^k}{n^k}$ και η πιθανότητα να επιλεγεί μία φορά τουλάχιστον είναι

$$1-\frac{(n-1)^k}{n^k} = 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

(Β') $k \geq 3$ άρα υπάρχει πιθανότητα ακόμα και αν $k=3$ να επιλεχθούν μία τουλάχιστον φορά. Επίσης το να επιλεχθούν οι 1, 2, 3 λαχνοί τουλάχιστον μία φορά ο καθένας σημαίνει $A \cap B \cap C$, όπου A οι k-άδες που περιέχουν 1, B οι k-άδδες που περιέχουν 2 και C οι k-άδες που περιέχουν 3. (ενδεχόμενα). Θα μοιάζει κάπως έτσι:



Τα A, B, C είναι ίσα αφού είναι ισοπίθανα. Άρα $|A|=|B|=|C|$. Πρέπει να υπολογίσουμε την γραμμοσκιασμένη περιοχή. Αρχικά, $|A \cup B \cup C| = 1-\frac{(n-3)^k}{n^k}$, αφού έστω πως δεν υπάρχει ούτε το 1 ούτε το 2 ούτε το 3 στην k-άδα τότε η πιθανότητα είναι $\frac{(n-3)^k}{n^k}$, ενώ για να υπάρχει ένα τουλάχιστον από αυτά, έχει πιθανότητα $1-\frac{(n-3)^k}{n^k}$. Επίσης, αφού A, B, C ισοπίθανα, $|A \cup B| = |A \cup C| = |C \cup B|$ και $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C|$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|+|A \cap B \cap C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|$

$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|-|A|-|B|-|C|+|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|$

Από (α') ερώτημα $|A| = 1-\frac{(n-1)^k}{n^k} = |B| = |C|$ αφού είναι ισοπίθανα

$|A\cup B\cup C| = 1-\frac{(n-3)^k}{n^k}$ και $|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|$. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε ή το $|A\cap B|$ ή το $|A\cap C|$ ή το $|B\cap C|$. Έστω το $|B\cap C|$. Αφαιρώντας από το $|A\cup B\cup C|$ το $|A\cup C|$ θα μας μείνει το $|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$. (κουκίδες)

$|A\cup C| = 1-\frac{(n-2)^k}{n^k}$ όπως υπολογίσαμε το $|A\cup B\cup C|$. Αν τώρα από το $|A\cup C|$ αφαιρέσουμε το C, θα μείνει το ίδιο κομμάτι όπως με τις κουκίδες αφού είναι ισοπίθανα απλά θα περιέχεται και το $|B\cap C| - |A\cap B\cap C|$ έστω $|K|$

$|A\cup C| - |C| = 1-\frac{(n-2)^k}{n^k} - 1 + \frac{(n-1)^k}{n^k} = \frac{(n-1)^k}{n^k} - \frac{(n-2)^k}{n^k}$ από το

οποίο αν αφαιρέσουμε το κομμάτι με τις κουκίδες θα μας δώσει το $|K|$. Άρα

$$|K| = \frac{(n-1)^k}{n^k} - \frac{(n-2)^k}{n^k} - \left(1-\frac{(n-3)^k}{n^k} - 1 + \frac{(n-2)^k}{n^k}\right)$$

$$= \frac{(n-1)^k}{n^k} - \frac{(n-2)^k}{n^k} + \frac{(n-3)^k}{n^k} - \frac{(n-2)^k}{n^k} = \frac{(n-1)^k}{n^k} - 2\frac{(n-2)^k}{n^k} + \frac{(n-3)^k}{n^k}$$

Όμως $|B\cap C|=|A\cap C|=|A\cap B|$. Άρα αν από το $|A|$ ή $|B|$ ή $|C|$, έστω το $|B|$, αφαιρέσουμε το κομμάτι με τις κουκίδες και $2|K|$ μια για το $|B\cap C|$ και μια για το $|A\cap B|$, θα πάρουμε το $|A\cap B\cap C|$. Αλλιώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που βρήκαμε στην αρχή.

$$|A\cap B\cap C| = 1-\frac{(n-1)^k}{n^k} + \frac{(n-3)^k}{n^k} - \frac{(n-2)^k}{n^k} - 2\frac{(n-1)^k}{n^k} + 4\frac{(n-2)^k}{n^k} - 2\frac{(n-3)^k}{n^k}$$

$$\Rightarrow |A\cap B\cap C| = 1 - 3\frac{(n-1)^k}{n^k} + 3\frac{(n-2)^k}{n^k} - \frac{(n-3)^k}{n^k}$$

και πιθανότητα

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{|A\cap B\cap C|}{|\Omega|} = \frac{1-3(n-1)^k+3(n-2)^k-(n-3)^k}{n^k}$$

Άσκηση 15

Ορίζουμε δειγματικό χώρο Ω που το πλήθος του, $|\Omega| = \binom{2n}{n}$ ισούται με το πλήθος των δυνατών συνδυασμών τα n βραβεία να δοθούν στους $2n$ διαγωνιζόμενους. Ορίζουμε επίσης ενδεχόμενο A να πάρει βραβείο ένα από τα δύο άτομα κάθε ζευγαριού. Έχοντας n ζευγάρια και από κάθε ζευγάρι έχουμε 2 επιλογές για το που να δώσουμε το βραβείο, υπάρχουν 2^n διαφορετικοί συνδυασμοί ζευγών.

Άρα $|A| = 2^n$ και

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{2^n}{\frac{2n!}{n!\,n!}} = \frac{2^n\, n!\, n!}{2n!}$$

Άσκηση 16

Ορίζουμε δειγματικό χώρο Ω που το πλήθος του $|\Omega| = \binom{2n}{k}$ ισούται με το πλήθος των δυνατών συνδυασμών να επιλεχθούν k κατάσκοποι από τους $2n$ συνολικά κατασκόπους.

α) Ορίζουμε ενδεχόμενο A να επιλεχθούν j άνδρες από τους n συνολικά άνδρες στους k επιλαχόντες και προφανώς $k-j$ γυναίκες από τις n συνολικά γυναίκες στους k επιλαχόντες. Άρα θα είναι:

$|A| = \binom{n}{j}\cdot\binom{n}{k-j}$, άρα το A έχει πιθανότητα

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n}{k}} = \frac{\frac{n!\,n!}{j!(n-j)!(k-j)!(n-(k-j))!}}{\frac{2n!}{k!(2n-k)!}}$$

B) Έστω τώρα ενδεχόμενο B να μην συμπεριληφθούν άτομα του ίδιου ανδρόγυνου στην ίδια αποστολή. Αυτό σημαίνει ότι αυτά τα k επιλεγμένα άτομα ανήκουν ξεχωριστά το καθένα σε ένα ανδρόγυνο. Άρα επιλέγονται k από τα n ανδρόγυνα, τα οποία το καθένα στέλνει ή άντρα ή γυναίκα. Δηλαδή $\forall k$ επιλογή, 2 επιλογές. Άρα

$|B| = \binom{n}{k}2^k$ και $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k}2^k}{\binom{2n}{k}} = \frac{\frac{n!\,2^k}{k!(n-k)!}}{\frac{2n!}{k!(2n-k)!}}$

Άσκηση 17
Δεδομένου ότι έχουμε 20 αντικείμενα και επιλέγουμε 4 από αυτά. Οι δυνατές 4-άδες παπουτσιών είναι $\binom{20}{4}$. Άρα ορίζοντας έναν δειγματικό χώρο Ω θα έχει πλήθος $|Ω| = \binom{20}{4}$

α) Έστω ενδεχόμενο Α, να μην υπάρχει ούτε ένα ζευγάρι παπούτσια. Αυτό σημαίνει ότι από τα 4 επιλεγμένα παπούτσια, πρέπει το καθένα να ανήκει σε διαφορετικό ζευγάρι. Άρα από τα 10 ζευγάρια να επιλεχθούν τα 4 και από αυτά τα 4 να επιλεχθεί το δεξί ή το αριστερό. Άρα από την πολλα/κη αρχή:
$|A| = \binom{10}{4} \cdot 2^4$ με πιθανότητα

$$P(A) = \frac{|A|}{|Ω|} = \frac{\binom{10}{4} \cdot 2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{10!}{4!6!} \cdot 16}{\frac{20!}{4!16!}} = \frac{16 \cdot 16! \, 10! \, 4!}{20! \cdot 6! \, 4!} = \frac{16 \cdot 16! \cdot 10!}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16! \, 6!}$$

$$= \frac{16 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 6!} = \frac{224}{323} \simeq 0,69$$

(Β) Έστω ενδεχόμενο Β, να υπάρχει ακριβώς ένα ζευγάρι. Πρέπει τα άλλα δύο παπούτσια να μην ανήκουν στο ίδιο ζευγάρι. Έχουμε 10 διαφορετικά ζευγάρια εκ των οποίων 1, έστω x θα υπάρχει στην 4-άδα. Τα άλλα δύο παπούτσια θα πρέπει από τα υπόλοιπα 18 παπούτσια να διαλεχθούν αφού βγάλαμε το x. Άρα από τα 9 ζευγάρια θα πρέπει να επιλεγούν 2 και από αυτά τα 2 το δεξί ή αριστερό. Από την πολλα/κη αρχή έχουμε ότι:
$|B| = 10 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2^2$ με πιθανότητα:

$$P(B) = \frac{|B|}{|Ω|} = \frac{10 \cdot 2^2 \cdot \binom{9}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{40 \cdot \frac{9!}{2!7!}}{\frac{20!}{4!16!}} = \frac{40 \cdot 9! \cdot 4! \, 16!}{20! \, 2! \, 7!}$$

$$= \frac{40 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7! \, 4 \cdot 3 \cdot 2! \, 16!}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16! \cdot 2! \cdot 7!} = \frac{40 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8}{19 \cdot 2 \cdot 17} =$$

$$= \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{19 \cdot 17} = \frac{96}{323} \simeq 0,29$$

γ) Έστω ενδεχόμενο C, από τα 4 επιλεγμένα παπούτσια να έχουμε 2 ζευγάρια. Άρα από τα 10 διαφορετικά ζευγάρια, επιλέγονται 2. Δηλαδή:

$|C| = \binom{10}{2}$ με πιθανότητα

$$P(C) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{10!}{2!8!}}{\frac{20!}{4!16!}} = \frac{16!\,10!\,4!}{20!\,8!\,2!} = \frac{16!\,10.9.8!\,4.3.2!}{20.19.18.17.16!\,8!\,2!}$$

$$= \frac{10.9.4.3}{20.19.18.17} = \frac{4.3}{2.19.2.17} = \frac{3}{323} \simeq 0{,}0092$$

Παρατηρούμε για επαλήθευση πως:

$$P(A)+P(B)+P(C) = \frac{224}{323} + \frac{96}{323} + \frac{3}{323} = \frac{323}{323} = 1 = P(\Omega)$$

Άσκηση 18

Ορίζουμε δειγματικό χώρο, $|\Omega| = \binom{50}{10}$ όπου το 50 είναι οι 20 ελέφαντες και οι 30 πεζικάριοι. και το 10 ο αριθμός επιλογής των επιβιβασμένων. Έστω ενδεχόμενο A να επιβιβαστούν τουλάχιστον 7 ελέφαντες. Αυτό σημαίνει ή 7 ή 8 ή 9 ή 10 ελέφαντες να επιβιβαστούν. Δηλαδή το A ενδεχόμενο περιέχει 4 υποενδεχόμενα και έστω αυτά A7, A8, A9, A10 αντίστοιχα. Θα είναι:

$|A| = |A7| + |A8| + |A9| + |A10|$, αφού A7, A8, A9, A10 ξένα και $A = A7 \cup A8 \cup A9 \cup A10$.

• Το A7 σημαίνει 7 ελέφαντες και $10-7=3$ πεζικάριους. Άρα από την πολλ/κη αρχή:

$|A7| = \binom{20}{7}\cdot\binom{30}{3}$ με πιθανότητα

$$P(A7) = \frac{\binom{20}{7}\binom{30}{3}}{\binom{50}{10}} = \frac{\frac{20!}{7!13!}\cdot\frac{30!}{3!27!}}{\frac{50!}{10!40!}} = \frac{20!\,.30!\,40!\,10!}{50!\,27!\,13!\,7!\,3!}$$

• Το A8 σημαίνει 8 ελέφαντες και $10-8=2$ πεζικάριους. Άρα από την πολλ/κη αρχή:

$|A8| = \binom{20}{8}\cdot\binom{30}{2}$ με πιθανότητα

$$P(A8) = \frac{\binom{20}{8}\cdot\binom{30}{2}}{\binom{50}{10}} = \frac{\frac{20!\,30!}{8!12!2!28!}}{\frac{50!}{10!40!}} = \frac{40!\,30!\,20!\,10!}{50!\,28!\,12!\,8!\,2!}$$

Το A_9 συμβαίνει 9 ελέφαντες και $10-9=1$ πεξικάριος.
Άρα από την πολλα/κη αρχή:
$|A_9| = \binom{20}{9} \cdot 30$ δε πιθανότητα
$$P(A_9) = \frac{30\binom{20}{9}}{\binom{50}{10}} = \frac{30 \cdot \frac{20!}{9!11!}}{\frac{50!}{10!40!}} = \frac{30 \cdot 40!20!10!}{50!11!9!}$$

Το A_{10} συμβαίνει 10 ελέφαντες
Άρα
$|A_{10}| = \binom{20}{10}$ δε πιθανότητα
$$P(A_{10}) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{50}{10}} = \frac{\frac{20!}{10!10!}}{\frac{50!}{10!40!}} = \frac{40!20!10!}{50!10!10!} = \frac{40!20!}{50!10!}$$
Άρα $P(A) = P(A_7) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10})$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{20!30!40!10!}{50!27!13!7!3!} + \frac{40!30!20!10!}{50!28!12!8!2!} + \frac{30 \cdot 40!20!10!}{50!11!9!} + \frac{40!20!}{50!10!}$$