1. Введение

Приветствуем Вас в приложении "РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА".

1.1. Добро пожаловать

Все составляющие проекта являются частью курсовой работы по дисциплине "Разработка приложений в визуальных средах".
Тема работы: "Разработка приложения решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса".
Номер задания: 64.

1.2. Функционал

В приложении реализованы следующие функции:
• Выбор количества неизвестных в СЛАУ (от 2 до 6)
• В зависимости от выбранного количества неизвестных автоматическое конфигурирование шаблона системы для дальнейшего его заполнения значениями
• Заполнение системы вручную
• Заполнение системы автоматически при обращении приложения к серверу!
• Очистка системы от значений
• Нахождение значений неизвестных
• Сохранение результатов исходных данных в основные офисные приложения(Word, Excel)

1.3. Об авторе

Автор: Шкрабо Мария Михайловна.
На 2021 год - студентка 2 курса Белорусского Национального Технического Университа Факультета Информационных Технологий и Робототехники группы 10701119.

2. Теоретические сведения

Ме́тод Га́усса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.,

2.1. История

Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода — в китайском трактате «Математика в девяти книгах».

2.2. Описание метода

Пусть исходная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Её можно записать в матричном виде:

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица A называется основной матрицей системы, b — столбцом свободных членов.

Тогда, согласно свойству элементарных преобразований над строками, основную матрицу этой системы можно привести к ступенчатому виду (эти же преобразования нужно применять к столбцу свободных членов):

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} + \alpha_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{1j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{1j_n}x_{j_n} & = & \beta_1 \\ \alpha_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{2j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{2j_n}x_{j_n} & = & \beta_2 \\ & \ldots & \\ \alpha_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{rj_n}x_{j_n} & = & \beta_r \\ 0 & = & \beta_{r+1} \\ & \ldots & \\ 0 & = & \beta_m \end{cases},$$

где $\alpha_{1j_1}, \ldots, \alpha_{rj_r} \neq 0$.

При этом будем считать, что базисный минор (ненулевой минор максимального порядка) основной матрицы находится в верхнем левом углу, то есть в него входят только коэффициенты при переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$.

Тогда переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ называются главными переменными. Все остальные называются свободными.

Если хотя бы одно число $\beta_i \neq 0$, где $i > r$, то рассматриваемая система несовместна, т. е. у неё нет ни одного решения.

Пусть $\beta_i = 0$ для любых $i > r$.

Перенесём свободные переменные за знаки равенств и поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент при самом левом x (α_{ij_i}, $i = 1, \ldots, r$, где i — номер строки):

$$\begin{cases} x_{j_1} + \widehat{\alpha}_{1j_2} x_{j_2} + \ldots + \widehat{\alpha}_{1j_r} x_{j_r} & = & \widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_{1j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{1j_n} x_{j_n} \\ x_{j_2} + \ldots + \widehat{\alpha}_{2j_r} x_{j_r} & = & \widehat{\beta}_2 - \widehat{\alpha}_{2j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{2j_n} x_{j_n} \\ & \ldots & \\ x_{j_r} & = & \widehat{\beta}_r - \widehat{\alpha}_{rj_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{rj_n} x_{j_n} \end{cases}, \quad \widehat{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_i}}, \quad \widehat{\alpha}_{ij_k} = \frac{\alpha_{ij_k}}{\alpha_{ij_i}} \quad (2),$$

где $i = 1, \ldots, r, \quad k = i + 1, \ldots, n.$

Если свободным переменным системы (2) придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных снизу вверх (то есть от нижнего уравнения к верхнему), то мы получим все решения этой СЛАУ. Так как эта система получена путём элементарных преобразований над исходной системой (1), то по теореме об эквивалентности при элементарных преобразованиях системы (1) и (2) эквивалентны, то есть множества их решений совпадают.

Следствия:

1: Если в совместной системе все переменные главные, то такая система является определённой.

2: Если количество переменных в системе превосходит число уравнений, то такая система является либо неопределённой, либо несовместной.

2.2.1. Алгоритм

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа.

• На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают содержащую его строку в крайнее верхнее положение, делая эту строку первой. Далее ненулевые элементы первого столбца всех нижележащих строк обнуляются путём вычитания из каждой строки первой строки, домноженной на отношение первого элемента этих строк к первому элементу первой строки. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают, пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.

• На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки.

Метод Гаусса требует $O(n^3)$ арифметических операций.

2.2.2. Пример

Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:

$$\begin{cases} 2x + y - z & = & 8 \\ -3x - y + 2z & = & -11 \\ -2x + y + 2z & = & -3 \end{cases}$$

Обнулим коэффициенты при *x* во второй и третьей строчках. Для этого прибавим к ним первую строчку, умноженную на $\frac{3}{2}$ и 1, соответственно:

$$\begin{cases} 2x + y - z & = & 8 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 1 \\ 2y + z & = & 5 \end{cases}$$

Теперь обнулим коэффициент при y в третьей строке, вычтя из неё вторую строку, умноженную на 4:

$$\begin{cases} 2x + y - z & = & 8 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = & 1 \\ -z & = & 1 \end{cases}$$

В результате мы привели исходную систему к треугольному виду, тем самым закончив первый этап алгоритма.

На втором этапе разрешим полученные уравнения в обратном порядке. Имеем:
z = 1 из третьего;
y = 3 из второго, подставив полученное *z*;
x = 2 из первого, подставив полученные z и *y*.
Таким образом исходная система решена.

В случае, если число уравнений в совместной системе получилось меньше числа неизвестных, то тогда ответ будет записываться в виде фундаментальной системы решений.

2.3. Достоинства метода

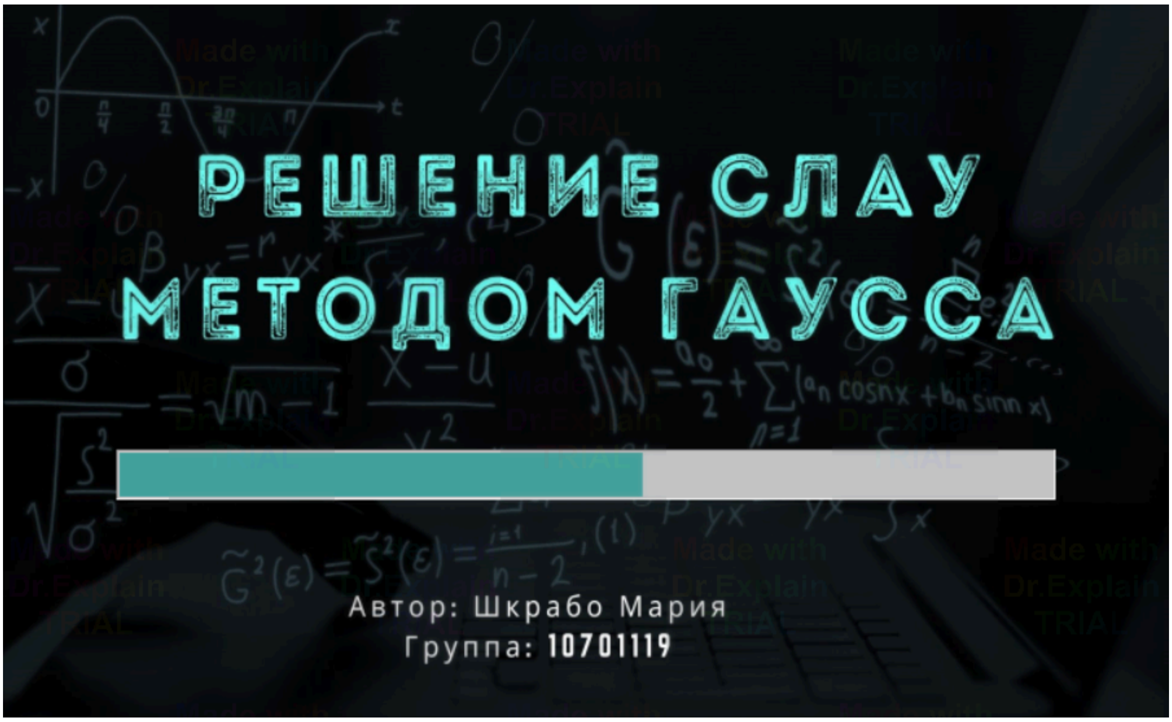
• Для матриц ограниченного размера менее трудоёмкий по сравнению с другими методами.
• Позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение.
• Позволяет найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

3. Навигация по приложению

Руководство для пользователя по использованию данного приложения.

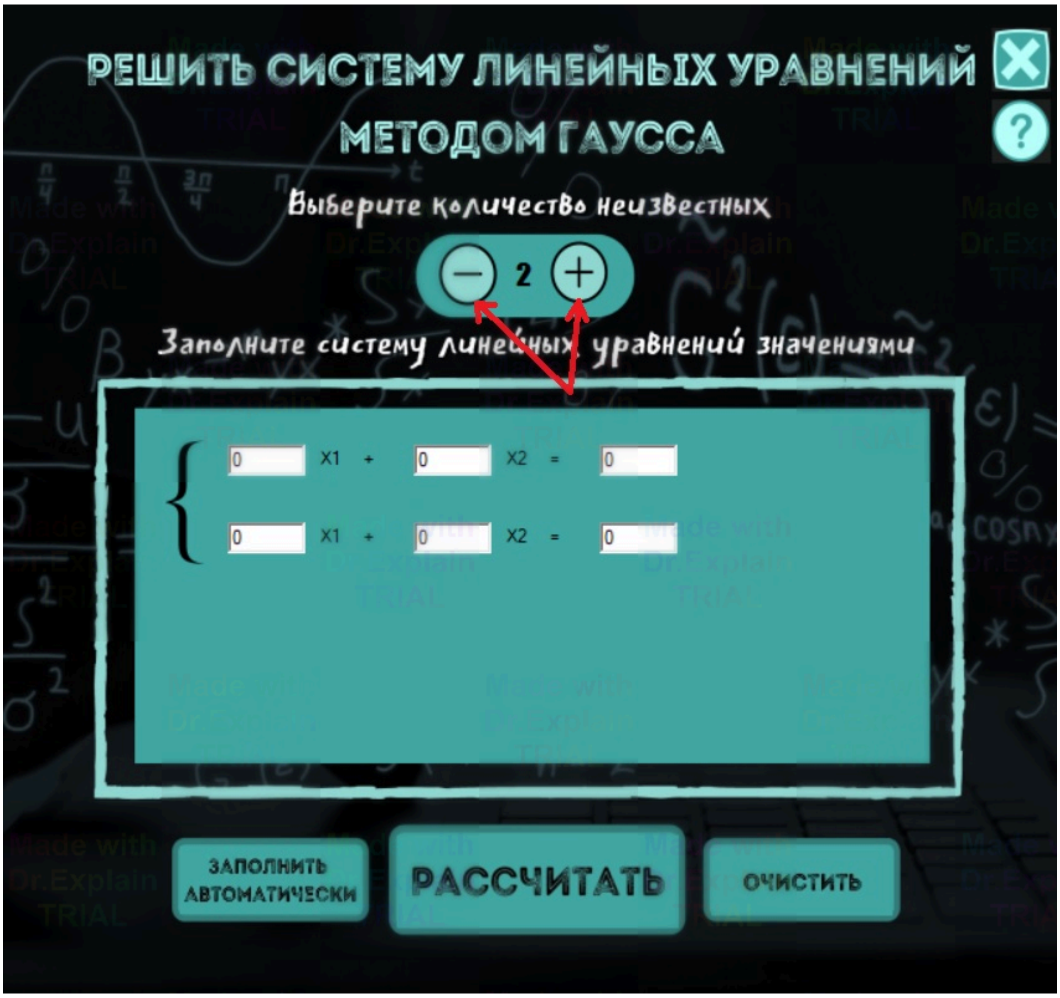
3.1. Заставка

При запуске приложения появляется загрузочное меню:



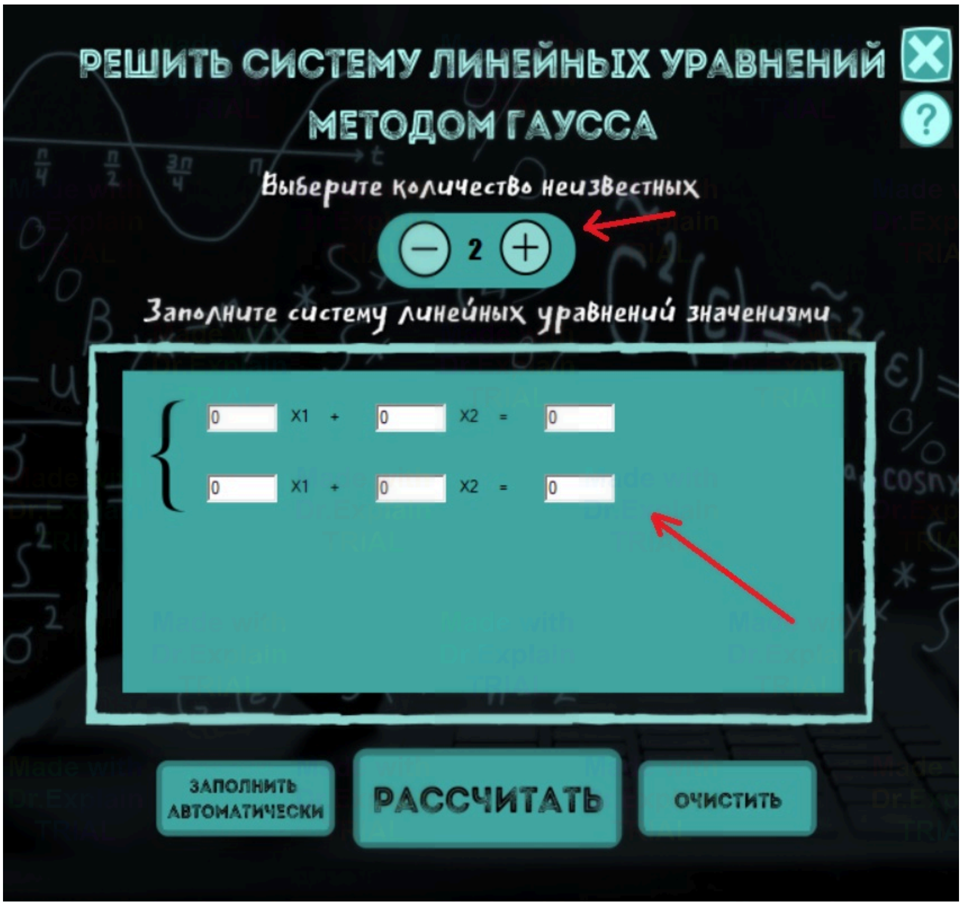
3.2. Количество неизвестных

Пользователь может задать количество неизвестных нажатием на кнопки "-" (количество неизвестных уменьшается) и "+" (количество неизвестных увеличивается). Данное значене может изменяться в диапазоне от 2 до 6 включительно.

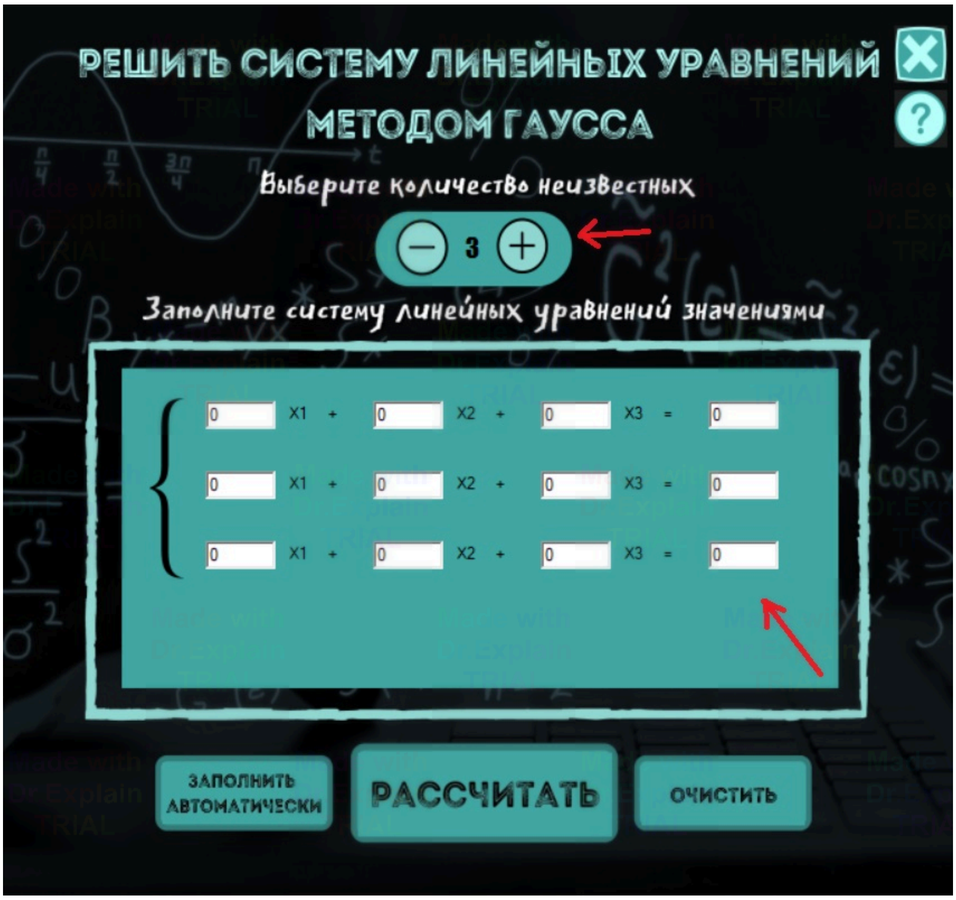


3.3. Заполнение шаблона

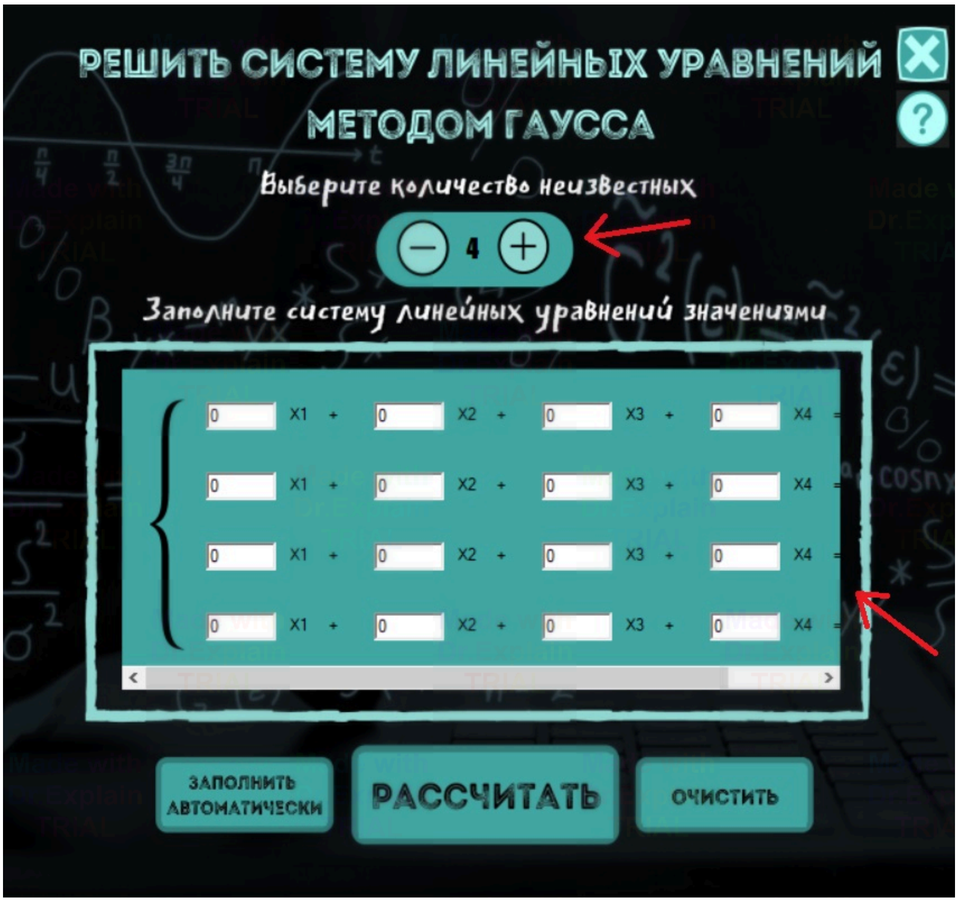
Изначально создаётся шаблон системы линейных алгебраических уравнений из двух неизвестных. С изменением поля о количестве неизвестных значений, соответственно изменяется шаблон. Поля для коэффициентов автоматически заполняются нулями.



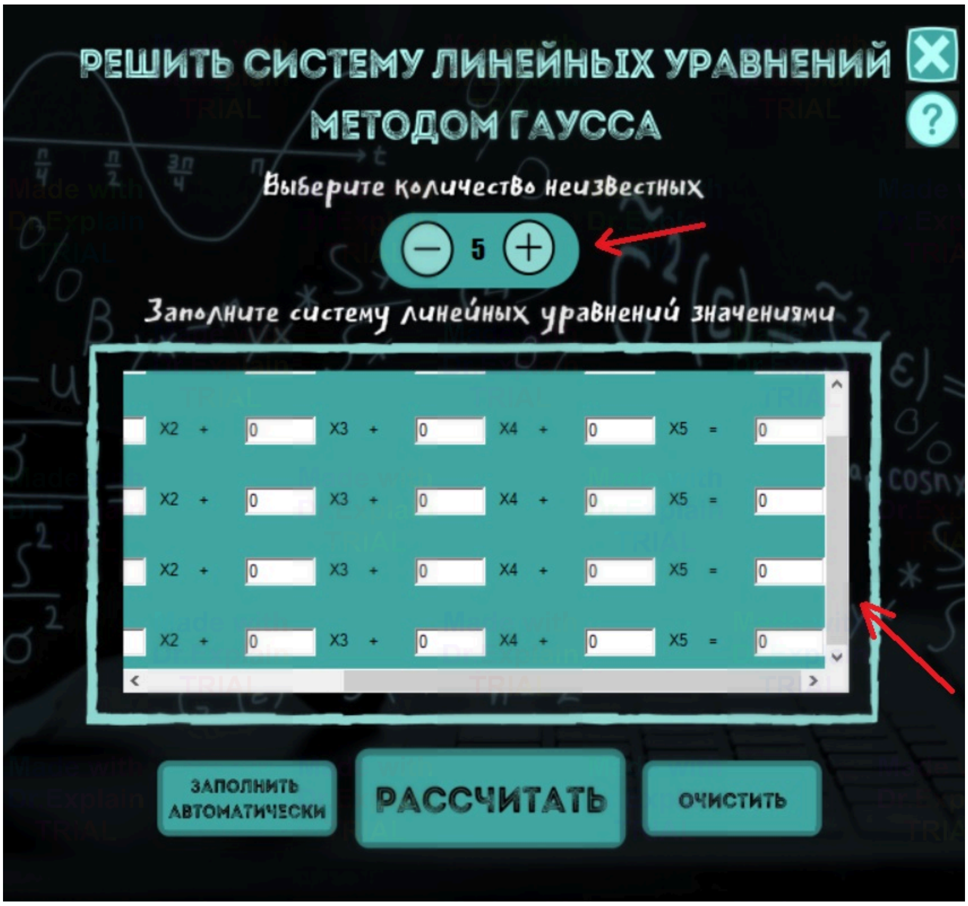
Шаблон при количестве неизвестных равном 2



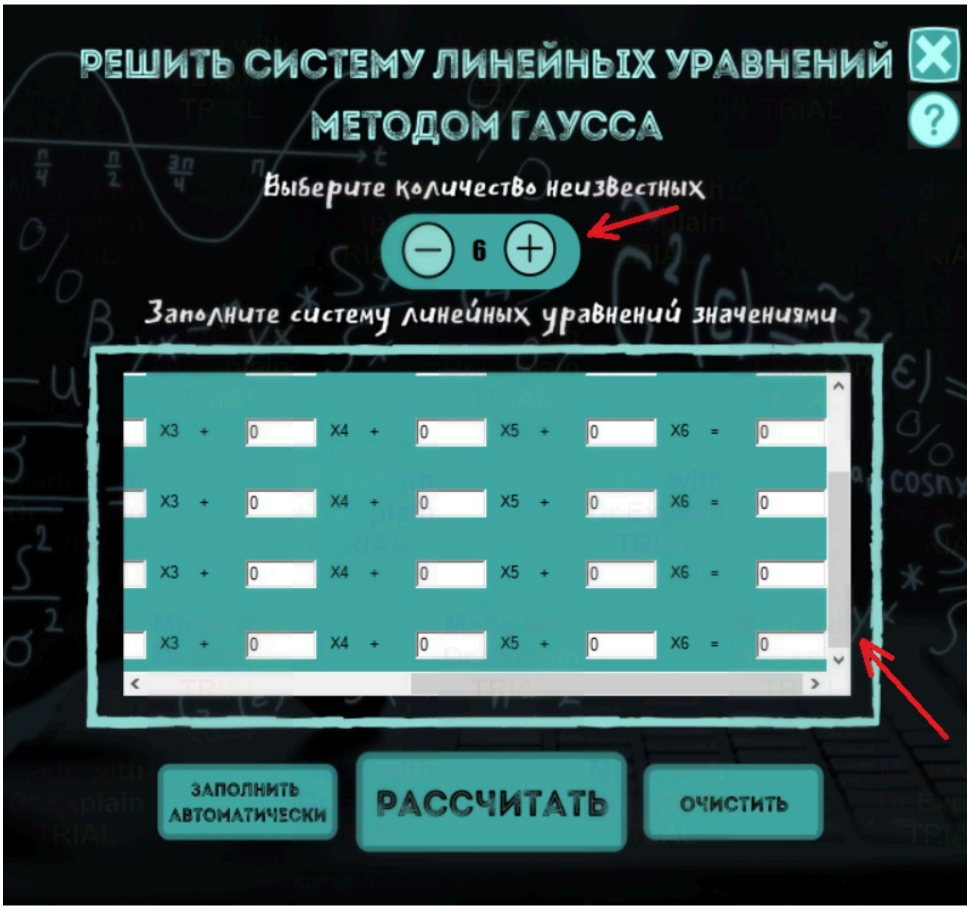
Шаблон при количестве неизвестных равном 3



Шаблон при количестве неизвестных равном 4



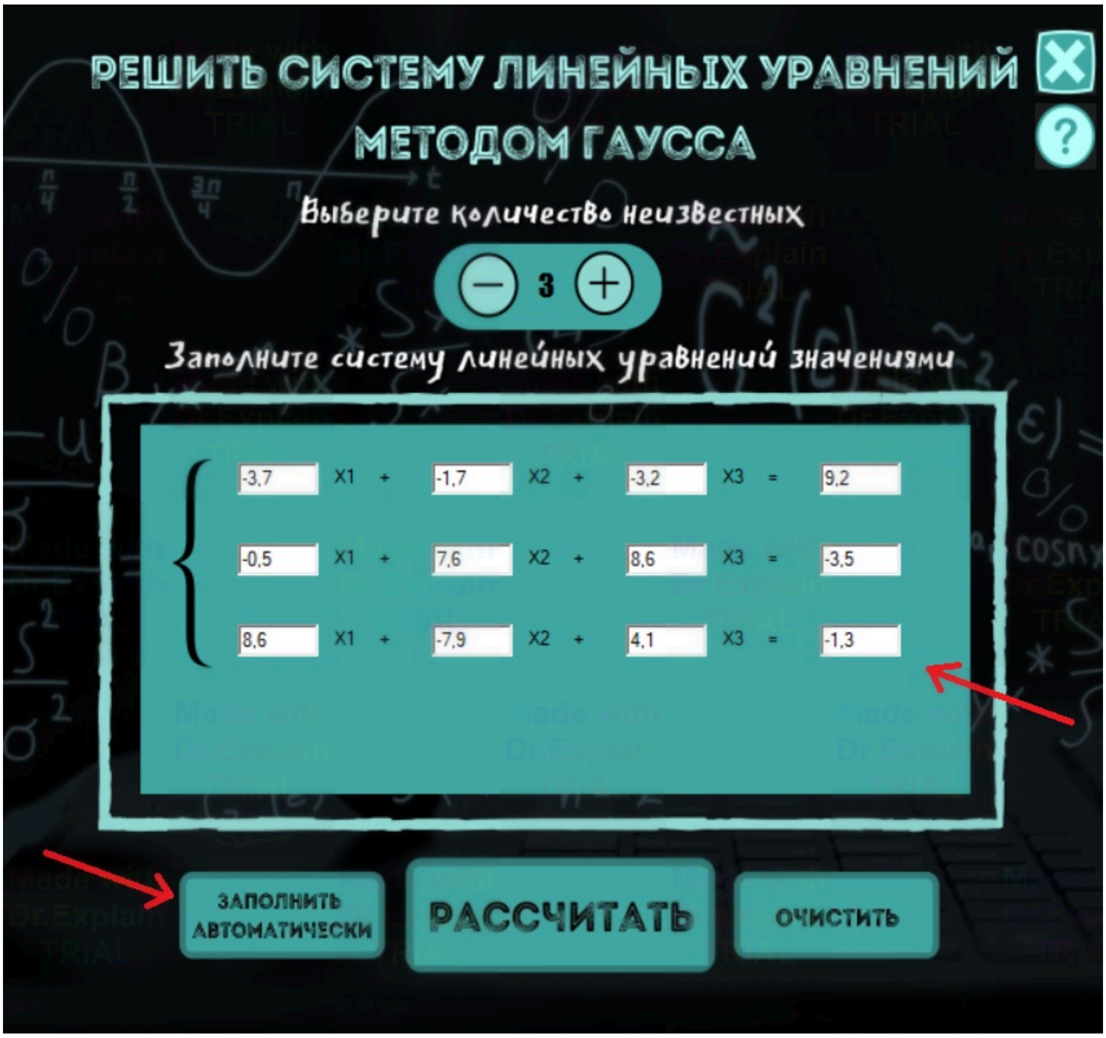
Шаблон при количестве неизвестных равном 5



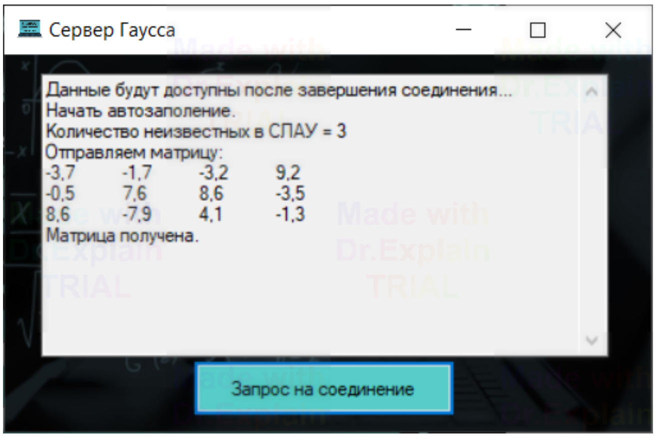
Шаблон при количестве неизвестных равном 6

3.3.1. Автоматическое заполнение

Нажатием на кнопку "Заполнить автоматически" система заполняется случайными числами. При этом приложение обращается к серверу, который в свою очередь генерирует случайные числа для формирования матрицы.



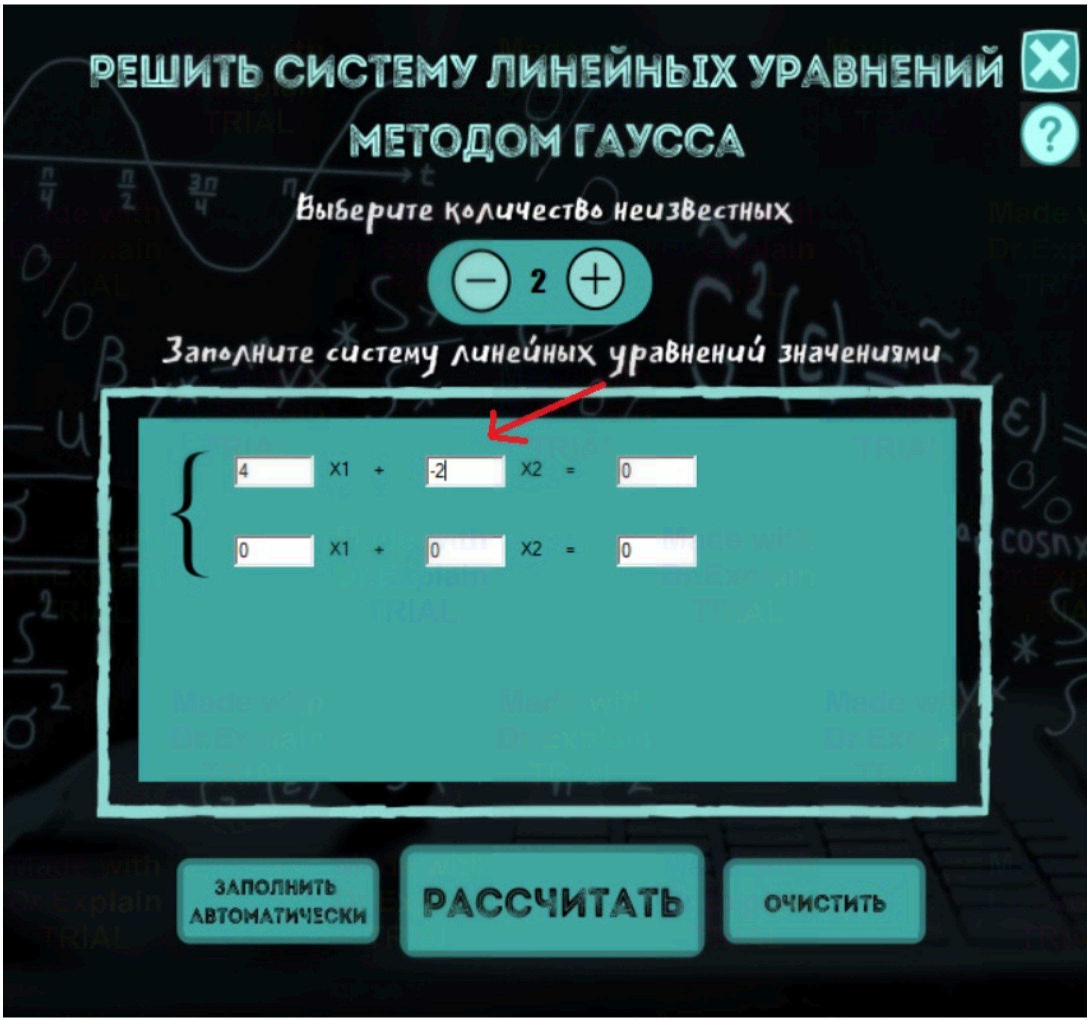
Приложение после автозаполнения



Сервер в этот момент

3.3.2. Заполнение вручную

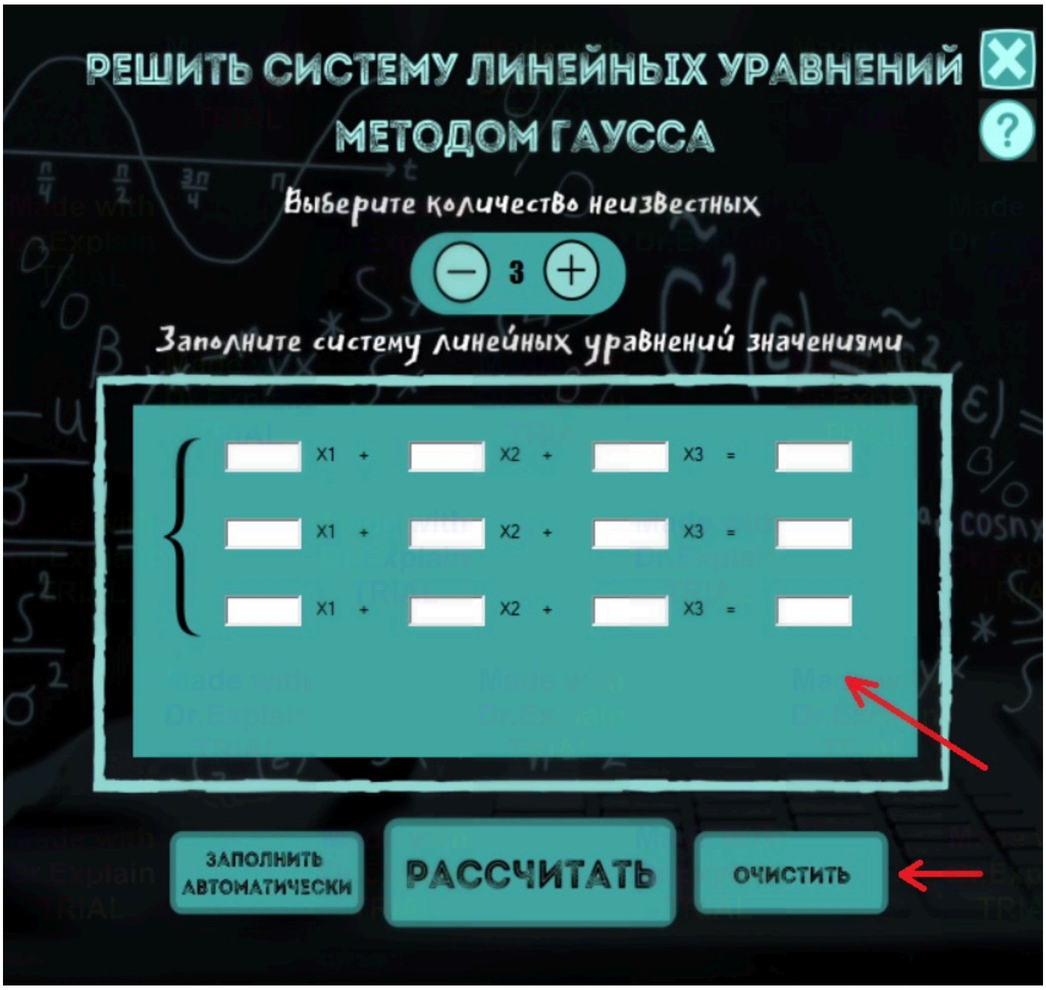
Значения коэффициентов пользователь может ввести вручную.



Пользователь вводит значение X2

3.3.3. Очистить

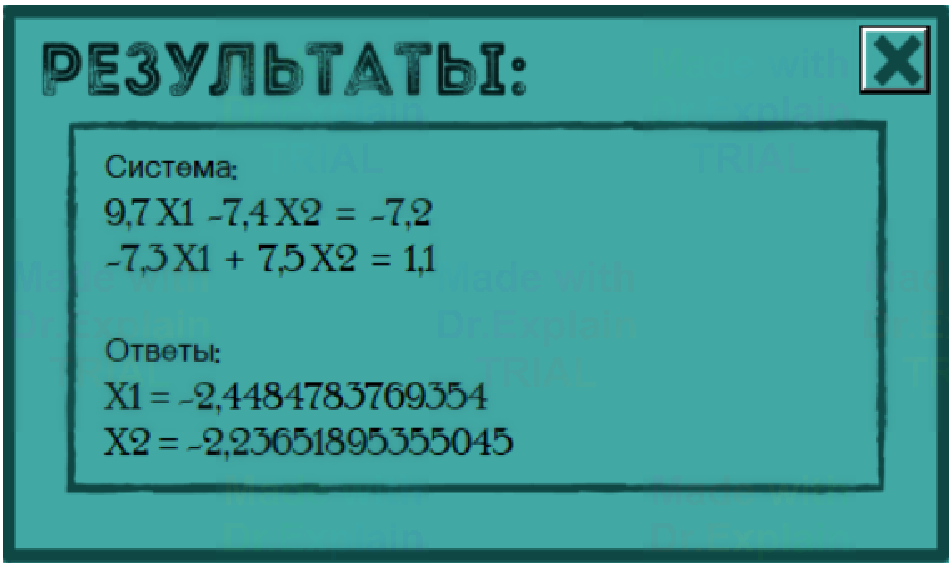
Нажатием на кнопку "Очистить" система очищается от коэффициентов.



3.4. Результат

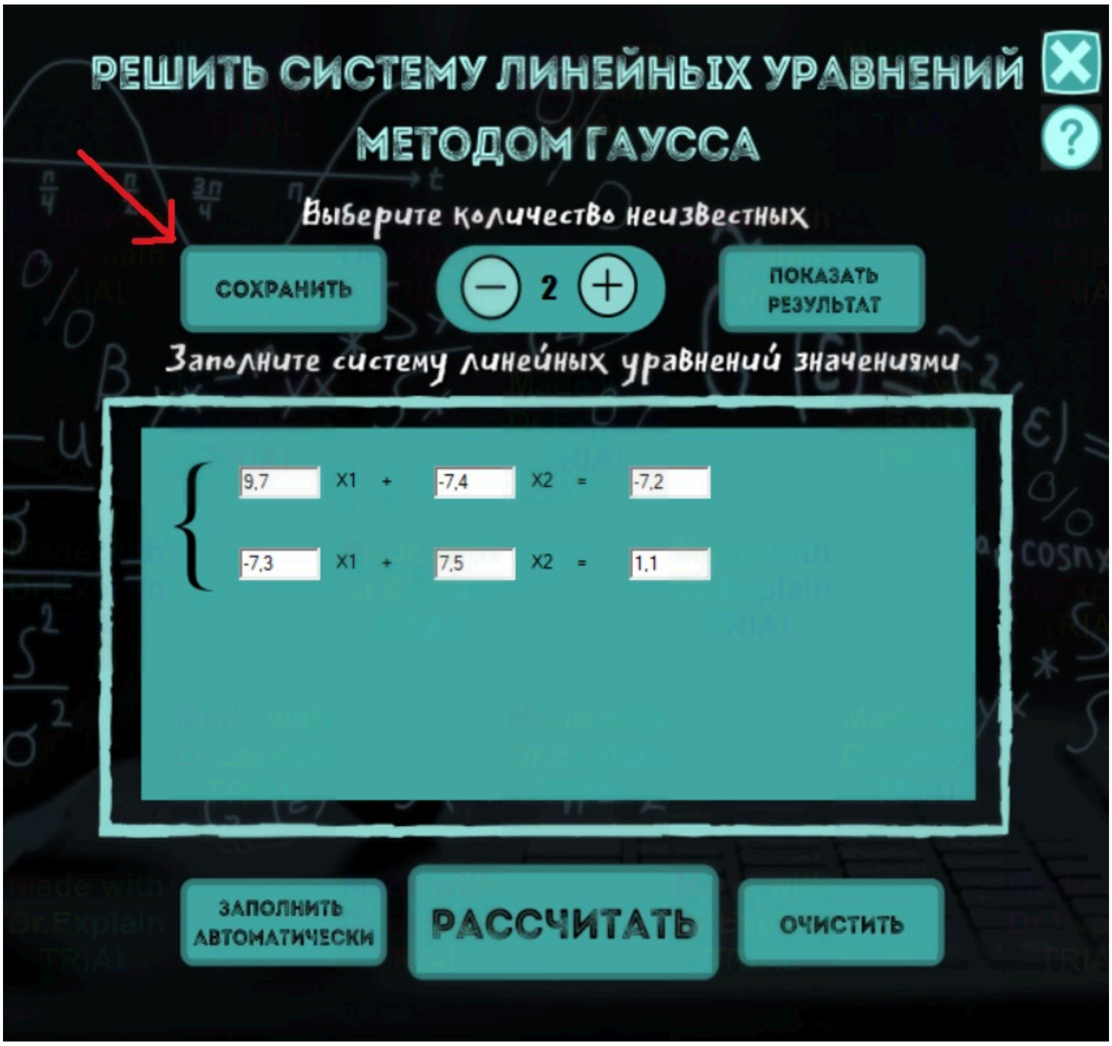
Окно результатов содержит исходную систему уравнений и посчитанные методом Гаусса значения.

Окно появляется после того, как будут расчитаны значения (после нажатия на кнопку "Расчитать"), или нажатием на клавишу "Показать результат", которая появится только после того, как будут расчитаны значения.

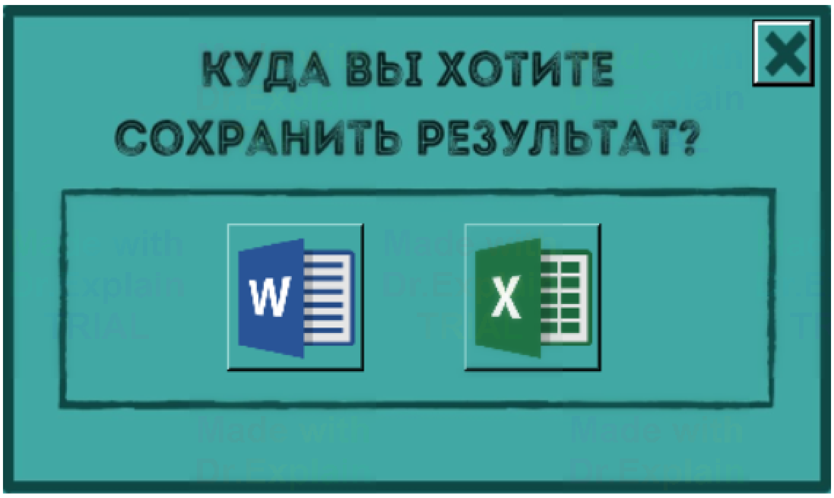


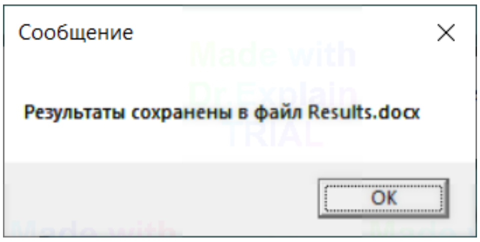
3.5. Сохранение результата

Окно сохранения появляется после нажатия на кнопку "Сохранить", которая появляется после того, как будут расчитаны значения (после нажатия на кнопку "Расчитать").

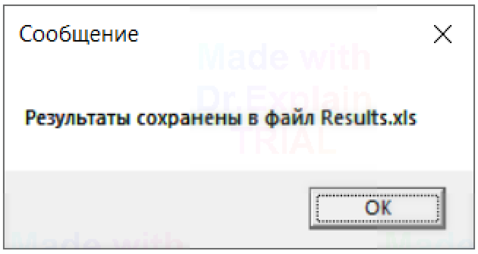


В окне сохранения перед пользователем стоит выбор: сохранить результат в Word или в Excel.





Окно, которое появляется после выбора окошка сохранения результата в Word.



Окно, которое появляется после выбора окошка сохранения результата в Excel.

3.6. Вызов системы помощи

Для открытия программы Help, нажмите на соотвествующую иконку в меню: