3 Fourier pentru semnale discrete

3.1 Definiții

i) un semnal de perioadă N_0 poate fi descris printr-un număr finit de armonice ale frecvenței fundamentale $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$:

$$f[k] = \sum_{r=0}^{N_0-1} D_r e^{jr\Omega_0 k}$$

cu coeficienții:

$$D_r = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} f[k] e^{-jr\Omega_0 k}$$

ii) transformata Fourier în timp discret (DTFT) este

$$F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j\Omega k}$$

iar transformata inversă este

$$f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F(\Omega) e^{j\Omega k} \mathrm{d}\Omega$$

iii) transformata Fourier discretă în timp discret (DFT) este

$$F[r] = \sum_{k=0}^{N_0-1} f[k] e^{-j\frac{2\pi}{N_0} rk}$$

iar transformata inversă este

$$f[k] = \sum_{r=0}^{N_0-1} F[r] e^{j\frac{2\pi}{N_0} rk}$$

3.2 Proprietăți DTFT

Table 3: Proprietăți DTFT uzuale

Operație	**Timp**	**Frecvență**
adunare	$ax[n] + by[n]$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$
deplasare în timp	$x[n-n_0]$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$
deplasare în frecvență	$x[n]e^{j\Omega_0 n}$	$X(\Omega - \Omega_0)$
conjugare	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
inversare timp	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
convoluție în timp	$x[n] * y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
multiplicare în timp	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)Y(\Omega - \theta)d\theta$
diferențiere în timp	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
acumulare	$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi X(0) \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
diferențiere în frecvență	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
relația lui Parseval	$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lvert x[k]\rvert^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$

Table 4: Transformări DTFT uzuale

$x[n]$	$X(\Omega)$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$, $\lvert a\rvert < 1$
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$, $\lvert a\rvert < 1$
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$, $\lvert a\rvert < 1$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$\frac{1}{2\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$	$u[n]$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega - 2\pi k)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$
$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)\right]$
$\sin(\Omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)\right]$
$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$\begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N \\ 0, & \lvert n\rvert > N \end{cases}$	$\frac{\sin(\Omega(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\Omega/2)}$
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$	$\begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\Omega\rvert \le W \\ 0, & W < \lvert\Omega\rvert \le \pi \end{cases}$

4 Relațiile lui Parseval

1. Semnal periodic (de perioadă T) cu timp continuu $f(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} D_n e^{jn\omega_0 t}$ are energia pe o perioadă

$$\int_T |f(t)|^2 dt = T \sum_{n\in\mathcal{Z}} |D_n|^2$$

2. Semnal cu timp continuu din L_2 cu transformata Fourier $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ are energia

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

3. Semnal periodic (de perioadă N) cu timp discret $x[n] = \sum_{k=<N>} D_k e^{jk\omega_0 n}$ are energia pe o perioadă

$$\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N} |D_k|^2$$

4. Semnal cu timp discret din ℓ_2 cu transformata Fourier $X(\omega) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} x[n]e^{-j\omega n}$ are energia

$$\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$