1 Seria Fourier continuă

i) în reprezentare trigonometrică:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t,$$

$$\forall t_1 \leq t \leq t_1 + T_0 \text{ și } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

cu coeficienții:

$$a_0 = \frac{\int_{T_0} f(t)\mathrm{d}t}{\int_{T_0} 1\mathrm{d}t} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_n = \frac{\int_{T_0} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t}{\int_{T_0} \cos^2 n\omega_0 t\mathrm{d}t} = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t,\ \forall n \geq 1$$

$$b_n = \frac{\int_{T_0} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t}{\int_{T_0} \sin^2 n\omega_0 t\mathrm{d}t} = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t,\ \forall n \geq 1.$$

ii) în reprezentare compactă:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad \forall t_1 \leq t \leq t_1 + T_0.$$

cu coeficienții:

$$C_0 = a_0;\ C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ C_n \geq 0,$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right),\ n \geq 1.$$

iii) în reprezentare exponențială:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \forall t_1 \leq t \leq t_1 + T_0$$

cu coeficienții:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t.$$

iv) echivalențe:

- trigonometric clasic $\Rightarrow$ trigonomeric compact:

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ \theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right),\ n \geq 1.$$

- trigonometric clasic $\Rightarrow$ exponențial:

$$D_n = \frac{a_n - jb_n}{2},\ D_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2},\ \forall n \geq 1$$

- trigonometric compact $\Rightarrow$ exponențial:

$$D_n = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n},\ D_{-n} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n},\ n \geq 1$$

v) simetrii:

- pt. o funcție pară, $f(t) = f(-t)$, avem $b_n = 0$;
- pt. o funcție impară, $f(t) = -f(-t)$, avem $a_0 = a_n = 0$;
- dacă $f(t)$ este pară atunci $D_n = \frac{a_n}{2}$;
- dacă $f(t)$ este impară atunci $D_n = -(-1)^n \frac{jb_n}{2}$.

2 Transformata Fourier continuă

i) transformata Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

ii) transformata Fourier inversă:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Table 1: Transformări Fourier uzuale

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F}(\omega)$
$e^{-at}\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0$
$e^{at}\mathbf{1}(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}, \quad a > 0$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a > 0$
$te^{-at}\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}, \quad a > 0$
$t^n e^{-at}\mathbf{1}(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}, \quad a > 0$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$\mathbf{1}(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j\omega}$
$\cos\omega_0 t\mathbf{1}(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
$\sin\omega_0 t\mathbf{1}(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega_0 t\mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t\mathbf{1}(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_0\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0), \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

Table 2: Proprietăți ale transformatei Fourier

Operație	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F}(\omega)$
adunare	$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1\omega+F_2(\omega)$
multiplicare cu scalar	$kf(t)$	$kF(\omega)$
simetrie	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
scalare în timp	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
deplasare în timp	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
deplasare în frecvență	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
convoluție în timp	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
convoluție în frecvență	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$
diferențiere în timp	$\frac{d^n f}{d^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
integrare în timp	$\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
derivare în frecvență	$tf(t)$	$j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)$