

Informática II
Practica No. 6

Sesiones 1 y 2

Movimiento de una partícula

Es bastante común que un sistema físico no pueda ser resuelto analíticamente, usualmente debido al gran número de variables que lo afectan. Para el estudio de estos sistemas se recurre a herramientas de simulación, estas lo que hacen es calcular el estado del sistema después de un muy pequeño lapso de tiempo. Usan como base el estado actual y las ecuaciones que modelan el sistema.

El movimiento de una partícula se ve afectado por una gran variedad de fenómenos físicos, tales como la fricción con el aire y las colisiones, por lo que es difícil obtener un modelo analítico de su comportamiento. Así entonces, es útil modelar el sistema mediante una simulación. A continuación se describen algunos de los fenómenos que afectan este sistema.

Ecuaciones de movimiento:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{v}t + \vec{a}t^2/2 \quad y \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Estas ecuaciones son vectoriales y pueden ser expresadas como ecuaciones de componentes en el eje X y de componentes en el eje Y:

$$x = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_y t + \frac{a_y t^2}{2},$$

$$v_x = v_{x0} + a_x t, \quad v_y = v_{y0} + a_y t.$$

Dónde:

x: posición en x del cuerpo, x_0 : posición inicial en x del cuerpo

y: posición en y del cuerpo, y_0 : posición inicial en y del cuerpo

v_x : velocidad en x del cuerpo, v_{x0} : velocidad inicial en x del cuerpo

v_y : velocidad en y del cuerpo, v_{y0} : velocidad inicial en y del cuerpo

a_x : aceleración en x del cuerpo, a_y : aceleración en y del cuerpo

t: tiempo transcurrido.

Aceleración Gravitacional:

Cuando un cuerpo es sometido a un campo gravitacional, este es afectado por una fuerza de atracción hacia la fuente del campo. Si el cuerpo se mueve en un rango pequeño de distancias al centro, la aceleración gravitacional que este sufre puede ser aproximada por una constante:

$$a_g = g$$

Fricción con el aire:

Cuando un cuerpo se mueve en un fluido, este siente una fuerza en dirección contraria a su desplazamiento, ocasionado por las partículas que componen el fluido. La fuerza que siente el objeto está dada por:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$$

Con base en la expresión para la fuerza sobre un cuerpo de masa invariante:

$$F = ma$$

Se puede llegar a la expresión para la desaceleración que sufre el cuerpo, causada por la fricción:

$$a_D = \frac{1}{2m} \rho v^2 C_D A$$

Esta ecuación también se puede representar como ecuaciones en componentes del eje X y componentes del eje Y:

$$a_{Dx} = -\frac{1}{2m} \rho v^2 C_D A \cos(\theta) \quad y \quad a_{Dy} = -\frac{1}{2m} \rho v^2 C_D A \sin(\theta)$$

Dónde:

a_{Dx} : desaceleración en x, a_{Dy} : desaceleración en y

ρ : densidad del fluido, m : masa

C_D : el coeficiente de fricción, que depende de la forma del cuerpo

A : el área transversal del cuerpo

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$: magnitud de la velocidad

$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$: ángulo del movimiento

La aceleración de un cuerpo cambia para cada estado del sistema y es la suma de las aceleraciones causadas por todos los demás cuerpos.

Choque inelástico:

Cuando dos cuerpos chocan suele presentarse una pérdida de energía, estos choques son conocidos como choques inelásticos y pueden ser modelados a partir de un coeficiente de

restitución, que relaciona la magnitud de las velocidades de los cuerpos antes y después del choque:

$$e = - \frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} \quad v_1 = -e(u_1 - u_2) + v_2$$

Dónde:

v_1 : velocidad de 1 luego del choque, v_2 : velocidad de 2 luego del choque

u_1 : velocidad de 1 antes del choque, u_2 : velocidad de 2 antes del choque

Simplificaciones:

Para simular un sistema de esferas en un medio específico se puede reducir la expresión para la desaceleración debida a la fricción con el medio teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- El área transversal de una esfera es el área de un círculo de igual radio que la esfera:
 $A = \pi r^2$
- Todos los cuerpos tienen la misma forma, por lo que el coeficiente de fricción es una constante en el sistema.
- Solo existe un medio en el sistema, por lo que la densidad es constante.

Así entonces se tiene una serie de constantes que pueden ser expresadas como una sola constante K, obteniendo las siguientes expresiones para la desaceleración en X y Y:

$$a_{Dx} = - \frac{K v^2 r^2}{m} \cos(\theta) \quad y \quad a_{Dy} = - \frac{K v^2 r^2}{m} \sin(\theta)$$

Además se tiene que en el sistema la aceleración gravitacional es una aceleración constante, negativa, en el eje Y. Por lo que las aceleraciones totales son:

$$a_x = - \frac{K v^2 r^2}{m} \cos(\theta) \quad y \quad a_y = - \frac{K v^2 r^2}{m} \sin(\theta) - g$$

Y son estas las que se usan en las ecuaciones de movimiento mencionadas anteriormente.

También se puede simplificar la expresión del coeficiente de restitución si se tiene en cuenta únicamente colisiones con objetos inamovibles (paredes, suelo), ya que la velocidad de estos siempre es cero:

$$e = - \frac{v_1}{u_1} \rightarrow v_1 = -e u_1$$

Se observa entonces que la velocidad después del choque contra uno de estos objetos, es la velocidad inicial multiplicada por una constante negativa y esta constante tiene valores entre 0 y 1. Los choques pueden ser analizados en una sola dimensión perpendicular a la superficie, por lo que al chocar con superficies verticales u horizontales solo se modifica la velocidad en X o la velocidad en Y respectivamente.

Ejemplos

1. El profesor realizará un sistema más sencillo, específicamente movimiento rectilíneo con rebote.
 - a. Modelado de cuerpos.
 - b. Visualización de los cuerpos.
 - c. Actualización de la posición de los cuerpos.

Ejercicios

1. Leer y desarrollar la guía descrita en el documento "Introduccion GUI Qt.pdf", para familiarizarse con el manejo de widgets de Qt.
2. En base a la explicación anterior, realizar un programa con interfaz gráfica para visualizar cuerpos en movimiento bajo la acción de la gravedad y colisiones inelásticas. El programa debe tener las siguientes características:
 - Debe ser posible simular simultáneamente el movimiento de un número indefinido de esferas.
 - El área en que se mueven las esferas debe estar limitada, y estas deben rebotar contra los bordes de dicha área.
 - Las esferas se deben ver afectadas por atracción gravitacional y fricción con el aire.
 - El radio (r), la masa (m), la posición inicial (x, y), la velocidad inicial (v_x, v_y), el coeficiente de restitución (e) y el coeficiente de fricción (K) de cada esfera deben ser diferentes.

Para facilitar la simulación se recomiendan los siguientes rangos posibles de valores para los parámetros de la simulación:

- Área de simulación= 1000x500 pixeles.
- $\Delta t = 0.1$
- Constante gravitacional= 10
- Radio= [5, 30]
- Masa= [50, 600]
- Posición inicial en $y > 50$
- Velocidades iniciales < 300
- Coeficiente de restitución= [0.5, 1]
- Coeficiente de fricción= [0, 0.01]

Nota: Se sugiere el uso de las librerías `QGraphicsscene` y `QGraphicsItem` para hacer la simulación, y de un `QGraphicsView` para observarla. Revise la documentación de estas librerías.

Esta guía fue desarrollada por Miguel Montoya Rendón bajo la supervisión de Augusto Salazar.