# Modelos Avanzados de Computación

Entrega 4


María del Mar Ruiz Martín
Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada - UGR
18001 Granada, Spain


Curso 2016/2017

## Ejercicio 1

**Demostrar que los siguientes problemas son NP-Completos:**

**b) Empaquetado de Conjuntos. Dada una colección C de conjuntos finitos y un entero $K \leq |C|$, ¿Existen K conjuntos disjuntos en C?**

En primer lugar debemos comprobar que efectivamente es un problema NP. Esto es trivial, puesto que podemos construir una máquina de Turing no determinista que seleccione K conjuntos y compruebe si son disjuntos, y dicha comprobación se realiza en tiempo polinómico.

Para comprobar que es completo reduciremos el problema del conjunto independiente al empaquetado de conjuntos, puesto que saebemos que este es NP-completo. Para ello crearemos la siguiente clase de conjuntos a partir del grafo G = (V,E) de entrada del problema del clique:

- Por cada vértice $v \in V$ creamos un conjunto
- Por cada arista $e_i \in E$ añadimos un nuevo elemento $x_i$ a los dos conjuntos correspondientes con los vértices extremos de la arista.

Claramente si hay K conjuntos disjuntos, los K vértices correspondientes no compartían ninguna arista y por tanto existe un conjunto independiente de tamaño al menos K. Por otro lado, si existe un conjunto independiente de tamaño K, por la construcción dada de los conjuntos, aquellos correspondientes con los vértices del conjunto independiente tendrán intersección vacía dos a dos y por tanto existen K conjuntos disjuntos en C.

Finalmente queda comprobar que la reducción realizada supone espacio logarítmico. Esto es inmediato puesto que los conjuntos se escriben directamente en la salida de la reducción. Por tanto, podemos concluir que el problema del empaquetado de conjuntos es NP-Completo.

**d) Subgrafo común maximal. Dados los grafos $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$, y un entero positivo K, ¿existen subconjuntos $E_1' \subseteq E_1$ y $E_2' \subseteq E_2$ tales que $|E_1'| = |E_2'| \geq K$ y tales que los dos subgrafos $G_1' = (V_1, E_1'), G_2' = (V_2, E_2')$ son isomorfos?**

La máquina de Turing no determinista que dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ selecciona dos subgrafos $G_1' = (V_1, E_1'), G_2' = (V_2, E_2')$ tales que $E_1' \subseteq E_1$ y $E_2' \subseteq E_2$ con $|E_1'| = |E_2'| \geq K$ y comprueba si son isomorfos resuelve el problema del subgrafo común maximal en tiempo polinómico. Por tanto, dicho problema es NP.

Para demostrar que el problema es NP-completo reduciremos el problema del clique al actual. Para el problema del clique contamos con un grafo G = (V,E) y un natural K, y buscamos un clique con al menos K vértices. Construimos a continuación G' = (V',E') como el grafo completo de orden K y pasamos a resolver el problema del subgrafo común maximal para los grafos G y G' buscando una solución para el natural K(K-1). Así, es claro que si G tiene un subgrafo maximal de K vértices, que por tanto tendrá K(K-1) aristas, este será isomorfo a G' y se encontrará como subgrafo común minimal. Por otro lado, si se encuentra un subgrafo común maximal de K(K-1) aristas, este debe ser todo G', y puesto que existe un isomorfismo entre G' y un subgrafo de G podemos asegurar que G cuenta con un clique de K(K-1) aristas, esto es, K vértices.

Finalmente es trivial que la reducción se realiza en espacio logarítmico, puesto que tan solo se realizan accesos al grafo G para copiarlo en la cinta de salida. Por tanto, el problema del subgrafo común maximal es NP-Completo.

**e) Suma de cuadrados mínima. Dado un conjunto finito A y un tamaño $s(a) > 0$, para todo $a \in A$ y dos enteros positivos K y J, ¿pueden particionarse los elementos de A en K conjuntos disjuntos $A_1, A_2, ...A_k$ de tal forma que $\sum_{i=1}^{K}(\sum_{a\in A} s(a))^2 \leq J$?**

Dados A, K y J, la máquina de Turing que crea de forma no determinista la partición $A_1, A_2, ...A_k$ y comprueba que $\sum_{i=1}^{K}(\sum_{a\in A} s(a))^2 \leq J$ resuelve el problema en tiempo polinómico, y por tanto el problema pertenece a la clase NP.

Para comprobar que además es NP-Completo reduciremos el problema de la partición al problema de la suma de cuadrados mínima. Para ello realizaremos una consideración inicial:

$$\left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\right)^2 + \left(\sum_{a\in A'} s(a)\right)^2 \leq \frac{\left(\sum_{a\in A} s(a)\right)^2}{2} = \frac{\left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a) + \sum_{a\in A'} s(a)\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\right)^2 + \left(\sum_{a\in A'} s(a)\right)^2 + 2\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\sum_{a\in A'} s(a)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\right)^2 + \left(\sum_{a\in A'} s(a)\right)^2 \leq 2\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\sum_{a\in A'} s(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\right)^2 + \left(\sum_{a\in A'} s(a)\right)^2 - 2\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\sum_{a\in A'} s(a) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a) - \sum_{a\in A'} s(a)\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{a\in A\setminus A'} s(a) = \sum_{a\in A'} s(a)$$

Esto es, existe una solución del problema de la partición si, y solo si, $\left(\sum_{a\in A\setminus A'} s(a)\right)^2 + \left(\sum_{a\in A'} s(a)\right)^2 \leq \frac{\left(\sum_{a\in A} s(a)\right)^2}{2}$. Por tanto, dado un conjunto A y un tamaño s existe una solución al problema de la partición si, y solo si, existe una solución del problema de la suma de cuadrados mínima para el conjunto A y la medida s junto con K = 2 y $J = \frac{\left(\sum_{a\in A} s(a)\right)^2}{2}$.

Por tanto la reducción del problema de la partición a la suma de cuadrados mínima consiste en calcular la suma de las medidas de los elementos de A e introducirlo como entrada a la máquina que resuelve el problema de la suma de cuadrados mínima juntos con A, s y k = 2. Claramente dicha reducción ocupa espacio logarítmico, puesto que la suma la podemos realizar en espacio logarítmico y el resto de operaciones consisten sencillamente en escribir en la cinta de salida. En conclusión, el problema de la suma de cuadrados mínima es NP-Completo.

**h) Conjunto dominante. Dado un grafo G = (V,E), y un entero positivo $K \leq |V|$ ¿existe un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y tal que todo vértice $v \in V\setminus V'$ está conectado con al menos un vértice de V'?**

Dado un grafo G = (V,E), y un entero positivo $K \leq |V|$, la máquina de Turing que selecciona de forma no determinista $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y comprueba si todo vértice de $v \in V\setminus V'$ está conectado con al menos un vértice de V' resuelve el problema en tiempo polinómico, y por tanto el problema es NP.

Para comprobar que el problema es NP-Completo vamos a realizar una reducción del problema del cubrimiento por vértices al problema del conjunto dominante. La reducción consistirá en lo siguiente:

Sea G = (V,E) el grafo dado para el problema del conjunto dominante, construimos G' = (V',E'), donde $V' = (V \cup_{e\in E} v_e)\setminus V_1$ con $V_1$ el conjunto de los nodos de V que no se conectan con ningún otro, y $E' = E \cup_{e\in E} ((v_1, v_e) \cup (e_2, v_e))$, donde $e_1, e_2$ son los vértices de la arista e. Es decir, G' es el grafo formado por añadir a G un vértice por cada arista y ademas unir dicho vértice con los dos que formaban dicha arista. El natural K será el dado para el problema del cubrimiento. Puesto que estas operaciones se realizan directamente en la cinta de salida la reducción supone espacio logarítmico.

Veamos entonces que la reducción esá bien construida. En primer lugar suponemos que tenemos $V_s$ solución del problema del cubrimiento por vértices para el grafo G. Entonces, para toda arista $e \in E$ uno de sus dos vértices está en $V_s$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que en $V_s$ no hay ningún nodo aislado, puesto que no aporta nada a la solución y si lo eliminásemos de $V_s$ el conjunto resultante seguiría siendo solución. Es inmediato que $V_s$ también es solución del conjunto dominante para G', puesto que todo vértice de $V'\setminus V_s$ está unido con algún otro mediante una arista, y por tanto dicho otro vértice estará en $V_s$.

Finalmente veamos que toda solución $V_s$ del problema del conjunto dominante para G' y K también lo es para el problema del cubrimiento para el grado G y el natural K. En primer lugar podemos suponer, sin pérdida de generalidad que en $V_s$ no hay ninguno de los nodos que no están en V, puesto que si esto pasase, podríamos cambiar este vértice por cualquiera de los dos a los que es adyacente y $V_s$ seguiría siendo solución. Veamos por reducción al absurdo que efectivamente $V_s$ es solución del problema del conjunto dominante:

Supongamos que $V_s$ no es solución del problema del conjunto dominante, entonces $\exists e \in E$ de forma que ninguno de los dos vértices extremos está en $V_s$, pero entonces el vértice intermedio que se crea en G' que solo se une con los dos extremos de e no estaría unido a ninguno de $V_s$ y entonces $V_s$ no sería solución. Por tanto, el problema del conjunto dominante es NP-Completo.