Colegio Capouilliez
Entrenamiento Olimpiada Nacional de Ciencias
Matemática 9o.
3 de marzo de 2021

Capouilliez

# Teoría de Conjuntos

PARTE 1

**Nota.** No debes acabarla en casa. Ve guardando tu trabajo para entregarlo cuando se te solicite. Puedes trabajar en el orden en el que lo desees. Algunos problemas serán resueltos en clase. Puedes plantear tus dudas en cualquier momento de la sesión.

## Concepto

Explica a qué se refiere cada uno de los siguientes términos e indica la notación utilizada para cada uno. No olvides definir tus objetos matemáticos antes de trabajar con ellos.

- Conjunto
- Unión de conjuntos
- Intersección de conjuntos
- Conjunto universo y conjunto vacío
- Complemento de un conjunto
- Contención y contención propia

## Investigación

Investiga para responder las siguientes preguntas. Al final de la clase, un estudiante será seleccionado al azar para presentar la solución de alguna pregunta.

- ¿Qué es el conjunto potencia de un conjunto? ¿Qué notación utilizamos para referirnos a él?
- ¿Qué es la diferencia entre dos conjuntos? ¿Qué notación utilizamos para referirnos a ella?
- ¿Qué es la difernecia simétrica entre dos conjuntos? ¿Qué notación utilizamos para referirnos a ella?

## Problemas y aplicación

Realiza los ejercicios 1,2,4,5,6 y alguno de tu elección.
**Nota.** Hay algunos ejercicios que involucran temas aún no explicados, no te preocupes, iremos poco a poco.

**1.** ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

**a)** $\{1,2,3\}$ **b)** $\{3,2,1,3\}$ **c)** $\{3,1,2,3\}$ **d)** $\{1,2,2,3\}$

**2.** Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

**a)** $1 \in A$ **b)** $\{1\} \in A$ **c)** $\{1\} \subseteq A$ **d)** $\{\{1\}\} \subseteq A$
**e)** $\{2\} \in A$ **f)** $\{2\} \subseteq A$ **g)** $\{\{2\}\} \subseteq A$ **h)** $\{\{2\}\} \subset A$

**3.** Para $A = \{1,2,\{2\}\}$, ¿cuáles de las ocho proposiciones del ejercicio 2 son verdaderas?

**4.** ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

**a)** $\emptyset \in \emptyset$ **b)** $\emptyset \subset \emptyset$ **c)** $\emptyset \subseteq \emptyset$
**d)** $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **e)** $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ **f)** $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

**5.** Determine todos los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

**a)** $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ **b)** $\{n + (1/n) \mid n \in \{1,2,3,5,7\}\}$
**c)** $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0,1,2,3,4\}\}$
**d)** $\{1/(n^2 + n) \mid n$ es un entero positivo impar y $n \leq 11\}$

**6.** Consideremos los siguientes seis subconjuntos de $\mathbf{Z}$:

$$A = \{2m+1 \mid m \in \mathbf{Z}\}; \quad B = \{2n+3 \mid n \in \mathbf{Z}\}; \quad C = \{2p-3 \mid p \in \mathbf{Z}\};$$

$$D = \{3r+1 \mid r \in \mathbf{Z}\}; \quad E = \{3s+2 \mid s \in \mathbf{Z}\}; \quad F = \{3t-2 \mid t \in \mathbf{Z}\}.$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas?

**a)** $A = B$ **b)** $A = C$ **c)** $B = C$
**d)** $D = E$ **e)** $D = F$ **f)** $E = F$

**7.** Sean $A$, $B$ conjuntos de un universo $\mathcal{U}$.

**a)** Escriba una proposición cuantificada para expresar la relación de contenido propia $A \subset B$.

**b)** Niegue el resultado de la parte (a) para determinar cuándo $A \not\subset B$.

**8.** Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, determine el número de

**a)** subconjuntos de $A$.
**b)** subconjuntos no vacíos de $A$.
**c)** subconjuntos propios de $A$.
**d)** subconjuntos propios no vacíos de $A$.
**e)** subconjuntos de $A$ que contienen tres elementos.
**f)** subconjuntos de $A$ que contienen 1, 2.
**g)** subconjuntos de $A$ que contienen cinco elementos, incluyendo 1, 2.
**h)** subconjuntos propios de $A$ que contienen 1, 2.
**i)** subconjuntos de $A$ con un número par de elementos.
**j)** subconjuntos de $A$ con un número impar de elementos.
**k)** subconjuntos de $A$ con un número impar de elementos y que incluyen el elemento 3.

**9.** **a)** Si un conjunto $A$ tiene 63 subconjuntos propios, ¿cuánto vale $|A|$?
**b)** Si un conjunto $B$ tiene 64 subconjuntos de cardinal impar, ¿cuánto vale $|B|$?
**c)** Generalice el resultado de la parte (b).

**10.** ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son no vacíos?

**a)** $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 2x + 7 = 3\}$ **b)** $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$
**c)** $\{x \mid x \in \mathbf{Q}, x^2 + 4 = 6\}$ **d)** $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$
**e)** $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 5 = 4\}$ **f)** $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$
**g)** $\{x \mid x \in \mathbf{C}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$

**11.** Cuando está a punto de salir de un restaurante, un hombre nota que tiene una moneda de 1 centavo, otra de 5, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos de dólar. ¿De cuántas formas puede dejar una (al menos una) de sus monedas para la propina si **a)** no hay restricciones? **b)** quiere quedarse con algo de cambio? **c)** quiere dejar al menos 10 centavos?

**12.** Para $\mathcal{U} = \mathbf{Z}^+$, sea $A \subseteq \mathcal{U}$ el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 18\}$.

**a)** ¿Cuántos subconjuntos de $A$ contienen seis elementos?

b) ¿Cuántos subconjuntos de seis elementos (de $A$) contienen cuatro enteros pares y dos enteros impares?

c) ¿Cuántos subconjuntos de $A$ sólo contienen enteros impares?

d) ¿Cuántos de los subconjuntos de la parte (c) contienen los enteros 3 y 7?

**13.** Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$. ¿Cuántos subconjuntos $A$ de $S$ satisfacen

a) $|A| = 5$?

b) $|A| = 5$ y que el mínimo elemento de $A$ sea 5?

c) $|A| = 5$ y que el mínimo elemento de $A$ sea menor que 5?

**14.** a) ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ contienen al menos un entero par?

b) ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ contienen al menos un entero par?

c) Generalice los resultados de las partes (a) y (b).

**15.** Dé un ejemplo de tres conjuntos $W$, $X$, $Y$ tales que $W \in X$ y $X \in Y$ pero $W \notin Y$.

**16.** Escriba las siguientes tres filas del triángulo de Pascal de la figura 3.3.

**17.** Complete la demostración del teorema 3.1.

**18.** Para los conjuntos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, demuestre la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente: Si $A \subseteq B$, $B \nsubseteq C$, entonces $A \nsubseteq C$.

## Creación

Escribe un problema reto sobre teoría de conjuntos. Puedes trabajar con un compañero.