BSM206 Mantıksal Devre Tasarımı

2. Hafta – Fonksiyon İfade Şekilleri ve Diğer Lojik İşlemler

Dr. Öğr. Üyesi Onur ÇAKIRGÖZ
onurcakirgoz@bartin.edu.tr

ANAHAT

- Kanonik ve Standart Biçimler
  - Kanonik Biçimde Gösterim
    - Minterimlerin Toplamı
    - Maksterimlerin Çarpımı
  - Kanonik Yapılar Arasında Dönüşüm
  - Standart Biçimde Gösterim
    - Çarpımların Toplamı
    - Toplamların Çarpımı
- Standart Olmayan Biçim
- Diğer Lojik İşlemler

Kanonik ve Standart Biçimler

- İkili değişkenler, örneğin x, normal (x) veya tümleyen formunda (x’) bulunurlar.
- VE işlemiyle birleştirilmiş x ve y ikili değişkenlerini düşünelim. Her bir değişken iki formda da bulunabileceğinden, olası dört kombinasyon vardır:
  - x’y’
  - x’y
  - xy’
  - xy
- Bu dört VE terimi *minterim* veya *standart çarpım* diye adlandırılır.
- Benzer şekilde, n adet değişken birleştirilerek 2^n sayıda minterim elde edilebilir.

Kanonik ve Standart Biçimler

- Aşağıda 3 değişken için Minterim ve Maksterim tablosu yer almaktadır. Burada, 3 değişken altında, 0'dan 7'ye (0'dan 2^n – 1'e kadar) ikili sayılar listelenmiştir.
- Tablodaki her bir minterim bu 3 değişkene VE işlemi uygulanarak elde edilir.

			Minterms		Maxterms	
x	**y**	**z**	**Term**	**Designation**	**Term**	**Designation**
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Kanonik ve Standart Biçimler

- Her bir minterimin belirli bir değişkene karşı düşen ikili biti 0 ise değişken üs işareti alır, 1 ise üs işareti almaz.
- Her bir minterim için m_j şeklinde bir sembol kullanılmaktadır. Burada j, belirli bir minterime karşı düşen ikili sayının onlu eşdeğeridir.
- Benzer şekilde, üslü veya üssüz değişkenlere VEYA işlemi uygulanmasıyla maksterim veya standart toplam elde edilir.
- Her bir maksterimin belirli bir değişkene karşı düşen ikili biti 0 ise değişken üssüz, 1 ise üslü olur.
- Her bir maksterim için M_j şeklinde bir sembol kullanılmaktadır.

Kanonik ve Standart Biçimler

- Bir Boole fonksiyonu, verilen bir doğruluk tablosundan, fonksiyonun 1 olduğu minterimlere VEYA işlemi uygulanarak elde edilir.
- Örneğin, aşağıdaki tabloda f_1 fonksiyonunun 1 olduğu satırlar bulunur. 001, 100 ve 111 kombinasyonlarına karşılık düşen minterimler sırasıyla x'y'z, xy'z' ve xyz şeklindedir. Dolayısıyla,
- f_1 boole fonksiyonu:

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

x	y	z	Function f_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Kanonik ve Standart Biçimler

- Boole cebrinin 1. önemli özelliği: **Her boole fonksiyonu minterimlerin toplamı olarak ifade edilebilir.** (toplam'la kastedilen terimlerin VEYA'lanmasıdır.)
- Şimdi bir boole fonksiyonunun *tümleyenini* göz önüne alalım. Bu amaçla, doğruluk tablosunda fonksiyonunun 0 olduğu her bir kombinasyona ilişkin minterimler VEYA'lanır:

$$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

- f_1' fonksiyonunun *tümleyeni* alınırsa f_1 fonksiyonu elde edilir:

$$f_1 = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z')(x' + y' + z)$$
$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$$

x	y	z	Function f_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Kanonik ve Standart Biçimler

- Boole cebrinin 2. önemli özelliği: **Her boole fonksiyonu maksterimlerin çarpımı olarak ifade edilebilir.** (çarpım'la kastedilen terimlerin VE'lenmesidir.)
- **Maksterim çarpımlarının doğruluk tablosundan doğrudan elde edilme yöntemi:** Doğruluk tablosunda fonksiyonunun 0 olduğu her bir kombinasyona ilişkin maksterimler VE'lenir.
- **Kanonik Biçimde Gösterim:** Boole fonksiyonlarının *minterimlerin toplamı* veya *maksterimlerin çarpımı* olarak ifade edilmesidir.
- Bir önceki örnekte:

$$f_1 = m_1 + m_4 + m_7 = M_0 \,.\, M_2 \,.\, M_3 \,.\, M_5 \,.\, M_6$$

Minterimlerin Toplamı

- Her boole fonksiyonu minterimlerin toplamı olarak ifade edilebilir.
- Bazı durumlarda boole fonksiyonlarını minterimlerin toplamı şeklinde ifade etmek uygundur.
- Eğer fonksiyon bu formda **değilse** ifadeyi bu biçime getirmek için eksik olan terimler eklenerek fonksiyon minterimlerin toplamı biçimine getirilir.
- Bunu yapmak için terimlerin her birinin tüm değişkenleri içerip içermediğine bakılır.
- Değişkenlerden biri veya daha fazlası eksikse, örneğin x eksik bir değişken olsun, eksik olan terim (x + x’) ile VE’lenir.

Minterimlerin Toplamı - Örnek

- **Örnek:** $F = A + B'C$ boole fonksiyonunu minterimlerin toplamı şeklinde ifade edin.
- **Çözüm:** Fonksiyonun A, B ve C gibi üç değişkeni vardır. Birinci terim A'da iki değişken eksiktir. Dolayısıyla,

$$A = A(B + B') = AB + AB'$$

- Olur. Burada hala C değişkeni eksiktir.

$$A = AB(C + C') + AB'(C + C')$$
$$= ABC + ABC' + AB'C + AB'C'$$

- Fonksiyonun ikinci teriminde bir değişken eksiktir.

$$B'C = B'C(A + A') = AB'C + A'B'C$$

- Tüm terimler birleştirilerek alttaki fonksiyon elde edilir:

$$F = ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C$$

Minterimlerin Toplamı – Örnek(Devam)

- Ancak AB'C terimi 2 kere görünmektedir. Bunlardan biri silinebilir.
- Minterimler sıraya sokulur ve aşağıdaki fonksiyon elde edilir:

$$F = A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

$$= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

- (Minterimlerin toplamı) biçimindeki boole fonksiyonu aşağıdaki gibi **kısa** biçimde gösterilebilir:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

Minterimlerin Toplamı

- Verilen bir Boole fonksiyonunu minterimlerin toplamı şeklinde oluşturmanın daha basit yolu vardır:
- Fonksiyonun doğruluk tablosunu doğrudan cebirsel ifadeden oluşturup, tablodan minterimleri bulmak.
- **Örnek:** Önceki örneği ele alalım:

$$F = A + B'C$$

- **Çözüm:** Doğruluk tablosunda, A = 1 olan kombinasyonlar ile BC = 01 olan kombinasyonlar için F sütunundaki karşılıklarına 1 konulur. F=1 olan kombinasyonlar minterimleri (1, 4, 5, 6, 7) vermektedir.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Maksterimlerin Çarpımı

- Her boole fonksiyonu maksterimlerin çarpımı olarak ifade edilebilir.
- Boole fonksiyonlarını maksterimlerin çarpımı olarak ifade edebilmek için bunlar öncelikle VEYA'lı terimler haline getirilmelidir.
- Bunun için aşağıdaki *dağılma kuralı* uygulanır:

$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

- Bundan sonra, her VEYA terimindeki eksik bir değişken için, örneğin x eksik bir değişken olsun, ifade xx' ile VEYA'lanır.

Maksterimlerin Çarpımı - Örnek

- **Örnek:** $F = xy + x'z$ boole fonksiyonunu maksterimlerin çarpımı şeklinde ifade edin.
- **Çözüm:** Öncelikle, fonksiyonu VEYA'lı terimler haline getirmeliyiz. Bunun için dağılma kuralı uygulanır:

$$F = xy + x'z = (xy + x')(xy + z)$$
$$= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z)$$
$$= (x' + y)(x + z)(y + z)$$

- Her bir VEYA teriminde bir değişken eksiktir. Dolayısıyla,

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$
$$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$$
$$y + z = y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$$

Maksterimlerin Çarpımı – Örnek(Devam)

- Tüm terimler birleştirilip tekrarlayanlar çıkarılırsa:

$$F = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$$
$$= M_0 M_2 M_4 M_5$$

- Elde edilir.
- (Maksterimlerin Çarpımı) biçimindeki boole fonksiyonu aşağıdaki gibi **kısa** biçimde gösterilebilir:

$$F(x, y, z) = \prod(0, 2, 4, 5)$$

Kanonik Yapılar Arasında Dönüşüm

- Minterimlerin toplamı biçiminde ifade edilen bir fonksiyonun *tümleyeni*, orijinal fonksiyonda bulunmayan minterimlerin toplamına eşittir.
- Yani, boole fonksiyonu kendisini 1 yapan minterimlerin toplamı şeklinde ifade edilirken, fonksiyonun *tümleyeni* fonksiyonu 0 yapan minterimlerin toplamına eşittir.
- Örneğin, aşağıdaki fonksiyonu tümleyenini kullanarak kanonik olarak dönüştürün:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

- Bu fonksiyonun tümleyeni şöyle bulunur:

$$F'(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

- F' nün tümleyenine DeMorgan kuralı uygulanırsa:

$$F = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' = M_0 M_2 M_3 = \prod(0, 2, 3)$$

Kanonik Yapılar Arasında Dönüşüm

- Önceki örnekteki son dönüştürme, aşağıdaki bağıntı sayesinde yapılmıştır:

$$m_j' = M_j$$

- Yani, j indisli maksterim aynı indisli minterimin tümleyenidir veya tam tersi de doğrudur.
- **Kanonik Yapılar Arasında Genelleştirilmiş Dönüşüm Yöntemi:**
  - Bir kanonik biçimden diğerine dönüşüm yapmak için önce Σ ve Π birbiriyle değiştirilir.
  - Yeni biçimde, orijinal biçimde olmayan sayılar yer alır.
- Eksik terimleri bulmak için; n, fonksiyondaki ikili değişken sayısı olmak üzere, toplam minterim ve maksterim sayısının 2^n olduğu unutulmamalıdır.

Kanonik Yapılar Arasında Dönüşüm

- Boole fonksiyonları doğruluk tabloları ve kanonik dönüştürme yöntemleri kullanılarak cebirsel bir ifadeden => maksterimlerin çarpımına dönüştürülebilir.
- Örneğin, aşağıdaki boole fonksiyonunu ele alalım:

$$F = xy + x'z$$

- İlk olarak, doğruluk tablosu oluşturulur. F'nin 1 olması için, xy = 11 veya xz = 01 olmalıdır. Tüm bu kombinasyonlar bulunur ve F sütunundaki karşılıklarına 1 yazılır.
- Fonksiyonun minterimleri tablodan 1, 3, 6 ve 7 olarak bulunur: $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 6, 7)$
- Geri kalanlar, yani F=0 olanlar ise maksterimlerdir. Dolayısıyla, $F(x, y, z) = \prod(0, 2, 4, 5)$

x	*y*	*z*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Minterms

Maxterms

Standart Biçim (Standart Gösterim)

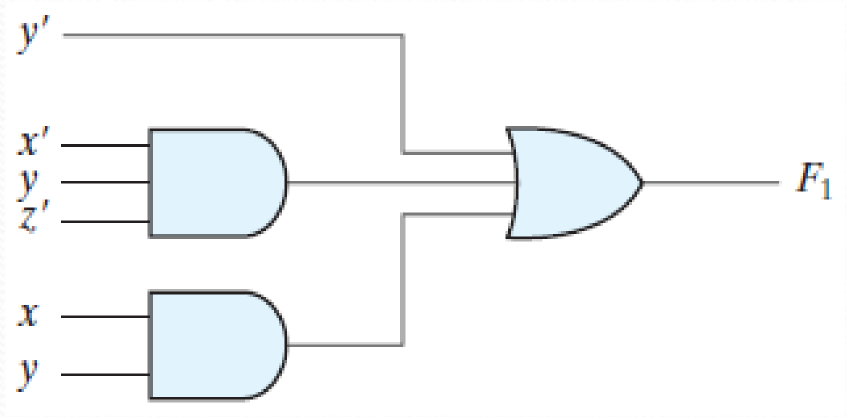
- Kanonik biçimlerde değişken sayısı eksik değildir.
- Çünkü, her minterim veya maksterim tanım gereği tümlenmiş veya tümlenmemiş bütün değişkenleri içerir.
- Boole fonksiyonlarını ifade etmenin bir diğer yolu standart biçimler'dir.
- Bu yapıda fonksiyonu oluşturan terimler 1, 2 veya daha çok sayıda değişken içerebilir. (Eksik değişken olabilir.)
- İki tür standart biçim vardır:
  - Çarpımların toplamı
  - Toplamların çarpımı

Standart Biçim (Standart Gösterim)

- Bir veya daha çok sayıdaki değişkenin VE'lenmesiyle oluşan Boole ifadeleri *çarpım terimleri* diye adlandırılır. Bu terimlerin VEYA'lanmasıyla **Çarpımların Toplamı** adı verilen yapı oluşur.
- Örnek bir fonksiyon (**Çarpımların Toplamı**):

$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

- F_1 fonksiyonu sırasıyla 1, 2 ve 3 değişkenden oluşan üç çarpım teriminin toplamından oluşur.
- Toplam bir VEYA işlemidir.
- İki-seviye gerçekleme:

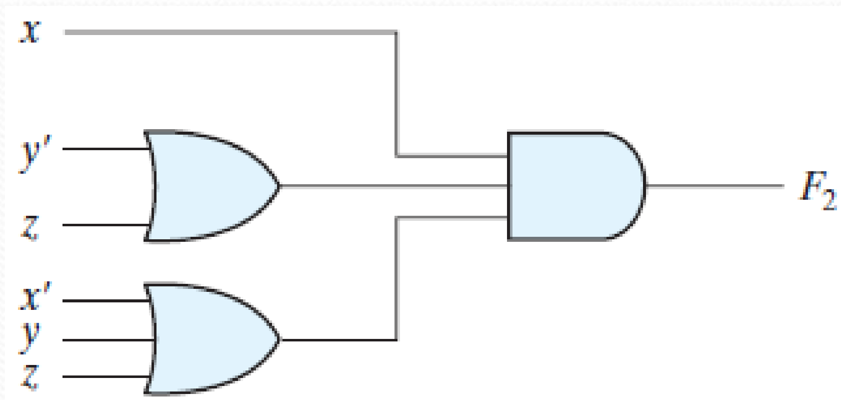


Standart Biçim (Standart Gösterim)

- Bir veya daha çok sayıdaki değişkenin VEYA'lanmasıyla oluşan Boole ifadeleri *toplam terimleri* diye adlandırılır. Bu terimlerin VE'lenmesiyle **toplamların çarpımı** adı verilen yapı oluşur.
- Örnek bir fonksiyon (**Toplamların Çarpımı**):

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z')$$

- F_2 fonksiyonu sırasıyla 1, 2 ve 3 değişkenden oluşan üç toplam teriminin çarpımından oluşur.
- Çarpım bir VE işlemidir.
- İki-seviye gerçekleme:



Standart Olmayan Biçim

- Boole fonksiyonları standart olmayan biçimde de ifade edilebilir.
- Örnek bir fonksiyon (**Standart Olmayan Biçimde**):

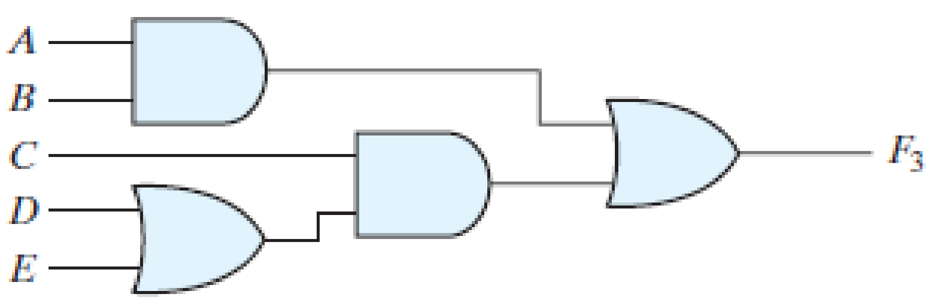
$$F_3 = (AB + CD)(A'B' + C'D')$$

- F_3 fonksiyonu ne çarpımların toplamı, ne de toplamların çarpımı biçimindedir.
- Ancak, dağılma kuralından yararlanarak parantezleri kaldırıp ifadeyi standart biçime dönüştürebiliriz:

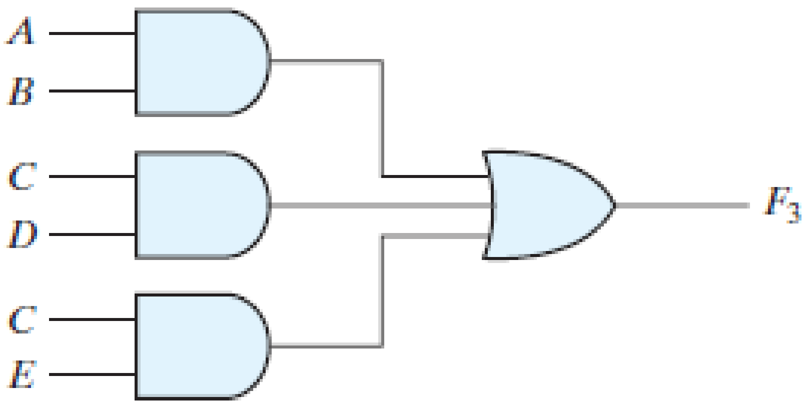
$$F_3 = A'B'CD + ABC'D'$$

Standart Olmayan Biçim

- Üç-seviye ve İki-seviye gerçekleme örnekleri:
- Alttaki 2 boole fonksiyonu ve doğal olarak 2 devre diyagramı eşdeğerdir.
- Soldaki fonksiyon standart biçimde değildir. Sağdaki fonksiyon ise standart biçimde ifade edilmiştir.



(a) $AB + C(D + E)$



(b) $AB + CD + CE$

Diğer Lojik İşlemler

- n tane ikili değişken için 2^{2n} tane farklı fonksiyon elde edilir.
- Dolayısıyla, n = 2 için 16 tane Boole fonksiyonu vardır.
- İki tane ikili değişkenle elde edilen 16 fonksiyondan 2 tanesi VE ve VEYA fonsiyonlarıdır.
- Aşağıda, x ve y ikili değişkenleriyle elde edilebilecek 16 fonksiyona ilişkin doğruluk tabloları verilmiştir.
- Burada, F_1 fonsiyonu VE'ye, F_7 fonsiyonu ise VEYA'ya aittir.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Diğer Lojik İşlemler (İki Değişkene İlişkin 16 Fonksiyonun Boole İfadeleri Tablosu)

Boole Fonksiyonları	İşlem Sembolü	İsim	Açıklama
$F_0 = 0$		Sıfır	İkili sabit 0
$F_1 = xy$	$x . y$	VE	x ve y
$F_2 = xy'$	x / y	Yasaklama	x fakat y değil
$F_3 = x$		İletim	x
$F_4 = x'y$	y / x	Yasaklama	y fakat x değil
$F_5 = y$		İletim	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Özel VEYA	x veya y fakat her ikisi birden değil
$F_7 = x + y$	$x + y$	VEYA	x veya y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	VEYA DEĞİL	VEYA-Değil
$F_9 = xy + x'y'$	$x \odot y$	Eşdeğer	x eşit y
$F_{10} = y'$	y'	Tümleyen	y Değil
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	İçerme	y, x'ten sonra ise
$F_{12} = x'$	x'	Tümleyen	x Değil
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	İçerme	x, y'den sonra ise
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	VE DEĞİL	VE-Değil
$F_{15} = 1$		Bir	İkili sabit 1

Diğer Lojik İşlemler

- Her fonksiyon, VE, VEYA ve DEĞİL Boole işlemleri cinsinden ifade edilebilir. (Önceki tablo 1. sütun)
- Bazı fonksiyonları ifade etmek için özel işlem sembolleri kullanılabilir. (Önceki tablo 2. sütun)
- $\oplus$ (Özel VEYA) sembolü dışındaki sembollerin kullanımı pek yaygın değildir.
- Önceki tabloda belirtilen 16 fonksiyon üç kategoriye ayrılabilir:
  - 0 ve 1 sabitlerini veren iki fonksiyon (F_0 ve F_{15})
  - Tümleyen ve transfer gibi tek işlemli olan dört fonksiyon (F_3, F_5, F_{10} ve F_{12})
  - Geri kalan on fonksiyon (8 farklı ikili işlem yer almaktadır.)

Diğer Lojik İşlemler

- İletim (Transfer): Giriş değişkenine eşit olan fonksiyonlara denir.
- Yasak ve İçerme ikili işlemleri bilgisayar lojiğinde çok nadiren kullanılır.
- Dijital devre tasarımında en çok kullanılan 8 fonksiyon:
  1. DEĞİL (Tek İşlemli Fonksiyon)
  2. Transfer (Tek İşlemli Fonksiyon)
  3. VE
  4. VEYA
  5. VEYADEĞİL (NOR)
  6. VEDEĞİL (NAND)
  7. ÖZELVEYA (EXCLUSIVE-OR veya XOR)
  8. Eşdeğerlik