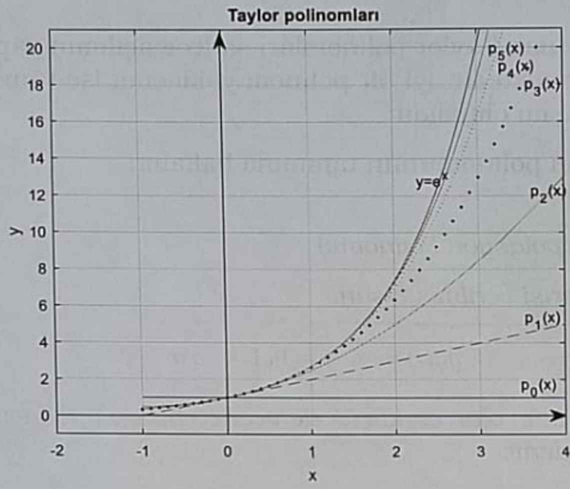


e^x

$\sin x$

$\cos x$

Şekil 4.3: Taylor Polinomları

olur. Bu durumda örneğin $p_3(3) = -5$ bulunur. Ancak gerçek değer $f(3) = 1/3$ olduğundan yaklaşık bir dğer elde edilmemiş olmaktadır. Hata terimine bakıldığında

$$r_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}, 1 < \xi < x$$

olduğundan hata n büyüdükçe mutlak değer olarak büyümektedir. $x = 3$ sayısı $x_0 = 1$ sayısına yeterince yakın bir değer değildir. Yani Taylor polinomu yaklaşık hesaplamalar için her zaman kullanılabilecek bir yaklaşım yöntemi değildir. Çünkü, ancak polinomun yazıldığı nokta etrafında iyi yaklaşımlar vermektedir. Yaklaşımlar için sonraki bölümlerde daha kullanışlı polinomlar verilecektir.

Taylor polinomları sayısal analizde yaklaşım amacıyla kullanılmaz, sayısal yöntemlerin çıkarımı ve hata tahminleri için kullanılır.

4.2 Lagrange İnterpolasyonu

Bölüm 4.1 de anlatılan Taylor polinomları sadece açılımın yapıldığı noktada iyi yaklaşımlar vermektedir. İyi bir polinom yaklaşımı ise tüm aralıkta fonksiyona iyi bir yaklaşım olmalıdır.

Şimdi interpolasyon polinomunun tanımına bakalım.

Tanım 4.2.1 *(İnterpolasyon Polinomu)*

$n+1$ tane (x_i, y_i) verisi verilmiş olsun.

$$p(x_i) = y_i, \; i = 0, 1, \cdots, n$$

*olacak şekilde mümkün olan en küçük dereceden bir $p(x)$ polinomuna **interpolasyon polinomu** denir.*

İnterpolasyon polinomu tektir.

Teorem 4.2.1 *Eğer $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ farklı reel sayılar ise, bu durumda keyfi $y_0, y_1, \cdots, y_n$ sayıları için*

$$p_n(x_i) = y_i, \; i = 0, 1, \cdots, n$$

*olacak şekilde derecesi en fazla n olan **tek** bir p_n polinomu vardır.*

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonu ve x_0 noktası için 0. dereceden interpolasyon polinomu

$$p_0(x) = f(x_0)$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonu ve x_0, x_1 noktaları için 1. dereceden interpolasyon polinomu

$$p_1(x_0) = f(x_0), p_1(x_1) = f(x_1)$$

sağlayan

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

polinomu olur. Eğer

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

şeklinde tanımlanırsa, $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ noktalarından geçen **lineer Lagrange interpolasyon polinomu**

$$p_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

olur. Buradan

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$p_1(x_0) = 1.f(x_0) + 0.f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

ve

$$p_1(x_1) = 0.f(x_0) + 1.f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

elde edilir. Bu nedenle p_1 polinomu $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ noktalarından geçen tek birinci dereceden polinomdur.

Örnek 4.2.1 $(2, 4)$ *ve* $(5, 1)$ *noktalarından geçen lineer Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz.*

Verilen noktalar için

$$L_0(x) = \frac{x - 5}{2 - 5} = -\frac{(x - 5)}{3}$$

ve

$$L_1(x) = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{(x - 2)}{3}$$

olur. Bu durumda

$$p_1(x) = -\frac{(x - 5)}{3}.4 + \frac{(x - 2)}{3}.1 = -x + 6$$

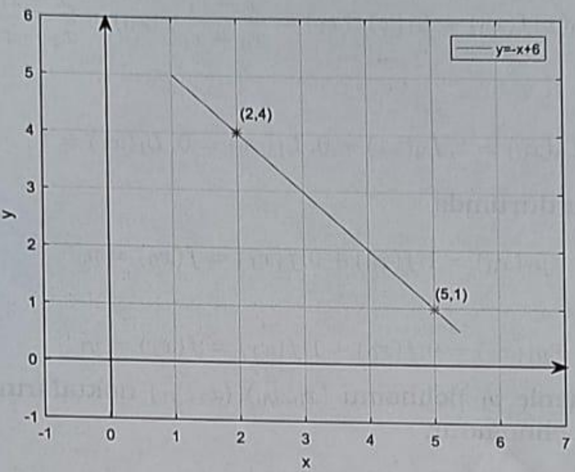
olur. Şekil 4.4 de $y = p_1(x)$ polinomunun grafiği çizilmiştir. Genel durumda Lagrange interpolasyon polinomlarına bakalım.

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))$$

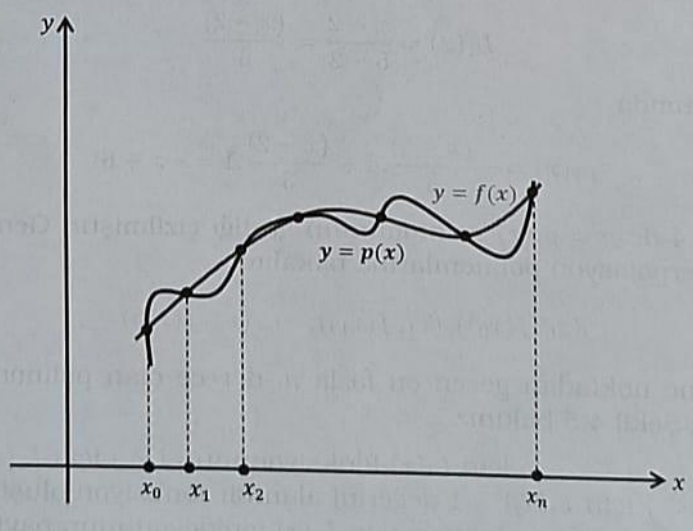
gibi $n + 1$ tane noktadan geçen en fazla n. derece olan polinoma bakalım. Örnek olarak Şekil 4.5 bakınız.

Bu durumda $i = 0, 1, \cdots, n$ için $L_i(x)$ fonksiyonunun $i \neq j$ için $L_i(x_j) = 0$ değerini alan ve $i = j$ için $L_i(x_i) = 1$ değerini alan bir fonksiyon oluşturulmalıdır. $i = j$ için $L_i(x_i) = 1$ değeri alınması için $L_i(x)$ fonksiyonunun payında

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$



Şekil 4.4: Birinci Dereceden Lagrange Polinomu



Şekil 4.5: Lagrange İnterpolasyon Polinom Yaklaşımı

olursa $L_i(x_i) = 1$ değerinin alınması için fonksiyonun paydasında aynı terimin $x = x_i$ de hesaplanmış hâli olması gerekir. Yani, bu durumda

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

olur.

Tanım 4.2.2 *(Lagrange İnterpolasyon Polinomu)*

$[a,b]$ aralığında $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ gibi $n+1$ tane farklı nokta verilsin. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunu bu $n+1$ noktada kesen n. dereceden Lagrange interpolasyon polinomu $L_i(x)$ şu şekilde tanımlıdır:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Yani,

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda n. derecden Lagrange polinomu $P_n(x)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) \tag{4.1}$$

olarak tanımlıdır.

Örnek 4.2.2 *$(-2,4), (0,2)$ ve $(2,8)$ noktalarından geçen ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu bulalım.*

Bu durumda

$$x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2, f(x_0) = 4, f(x_1) = 2, f(x_2) = 8$$

olur. İlk olarak $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ katsayı polinomlarını bulalım.

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(0+2)(0-2)}$$

ve

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)}{(2+2)(2-0)}$$

olur. Ayrıca,

$$f(x_0) = 4, f(x_1) = 2, f(x_2) = 8$$

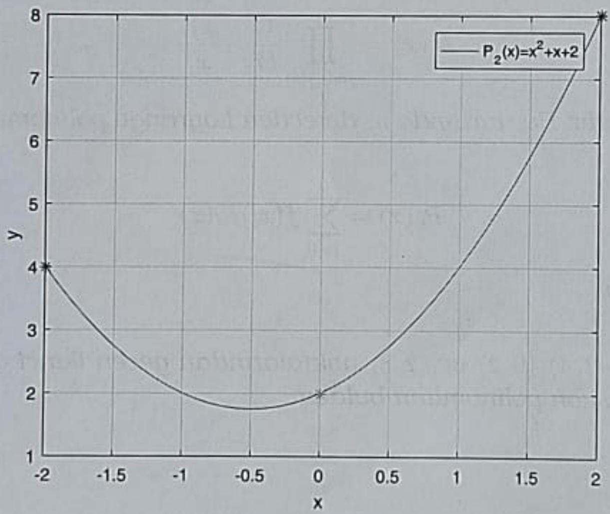
olduğundan bu değerler

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x)$$

tanımına yazılır:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \tfrac{x(x-2)}{8}.4 + \tfrac{(x+2)(x-2)}{-4}.2 + \tfrac{x(x+2)}{8}.8 \\ &= x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

olur. Şekil 4.6 de verilen noktalar ve interpolasyon polinomu çizilmiştir.



Şekil 4.6: İkinci Dereceden İntepolasyon Polinomu ve Noktalar

Örnek 4.2.3 *(i) $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için $x_0 = 2, x_1 = 2.75, x_2 = 4$ noktalarını kullanarak ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu bulalım.*

(ii) Bulduğunuz bu polinomu $f(3) = 1/3$ değerine yaklaşık bir değer bulmak için kullanalım.

(i) İlk olarak $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ katsayı polinomlarını bulalım.

$$L_0(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)$$

ve

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75)$$

olur. Ayrıca,

$$f(x_0) = f(2) = 1/2, f(x_1) = f(2.75) = 4/11, f(x_2) = f(4) = 1/4$$

olur. Bu durumda

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x)$$

tanımından

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \tfrac{1}{3}(x-2.75)(x-4) - \tfrac{64}{165}(x-2)(x-4) + \tfrac{1}{10}(x-2)(x-2.75) \\ &= \tfrac{1}{22}x^2 - \tfrac{35}{88}x + \tfrac{49}{44} \end{aligned}$$

olur. Şekil 4.7 de polinom yaklaşımı ve fonksiyonun grafikleri verilmiştir.

(ii) $f(3) = 1/3$ değerine yaklaşım

$$f(3) \approx P_2(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88}x + \frac{49}{44} \approx 0.32955$$

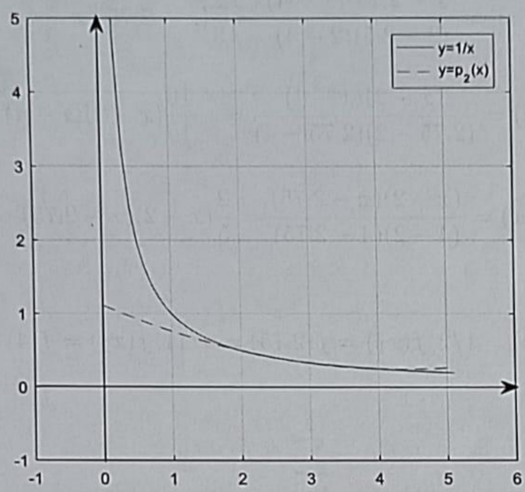
olarak bulunur. Örnek 4.1.6 de ise $x_0 = 1$ etrafındaki Taylor polinomunun gerçek değerden çok uzak bir yaklaşım değeri verdiği için kullanılamayacağı görülmüştü. Lagrange interpolasyon polinomu ile ise gerçek değere yakın bir yaklaşım elde edilmiştir.

Örnek 4.2.4 *Tablo 4.2 da herhangi bir ölçüm sonucunu gösteren veriler verilmektedir. Bu veriler için ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomu ile*

x	1	3	5	9	15
y	8	4	-8	-10	-1

Tablo 4.2: Veriler

$f(2)$ *değerini bulunuz.*



Şekil 4.7: İkinci Dereceden Lagrange Polinom Yaklaşımı

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

olur. Şimdi $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ katsayı polinomlarını bulalım.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{x^2-8x+15}{8}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} = \frac{-x^2+6x-5}{4}$$

ve

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \frac{x^2-4x+3}{8}$$

olur. Ayrıca,

$$f(x_0) = f(1) = 8, f(x_1) = f(3) = 4, f(x_2) = f(5) = -8$$

olarak verildiğinden

$$P_2(x) = \frac{x^2-8x+15}{8}.8 + \frac{-x^2+6x-5}{4}.4 + \frac{x^2-4x+3}{8}.8 = -x^2+2x+7$$

olarak bulunur. Bu durumda $f(2) = P_2(2) = 7$ olur.

Şimdi bir interpolasyon polinomu ile fonksiyon yaklaşımı yaparken hata terimini, kalan terimi veya hata için üst sınırın ne olacağına bakalım.

Teorem 4.2.2 *$f \in C^{n+1}[a,b]$ ve $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığında farklı noktalar olsun. O zaman, $P_n(x)$ interpolasyon polinomu olmak üzere*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

sağlayan $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktaları arasında bir $\xi(x) \in (a,b)$ sayısı vardır.

Lagrange interpolasyon polinom hata terimi sayısal türev veya sayısal integral yöntemlerinde hata analizinde kullanılır. Ayrıca Taylor polinomunun hata terimine çok benzemektedir. n. dereceden Taylor polinomunun hata terimi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ile verilir. Lagrange polinomu $x_0, x_1, \cdots, x_n$ noktalarındaki bilgiyi kullandığı için $(x-x_0)^{n+1}$ terimi yerine $n+1$ tane terimin çarpımını yani,

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

çarpımını kullanır. Bu nedenle Lagrange interpolasyon polinomundaki hata terimi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

olmaktadır.

Örnek 4.2.5 *Örnek 4.2.3 de $f(x) = 1/x$ fonksiyonuna $[2,4]$ aralığında*

$$x_0 = 2, x_1 = 2.75, x_2 = 4$$

noktalarını kullanarak ikinci dereceden Lagrange polinomu bulunmuştu. Bu polinom için hata terimini ve $[2,4]$ aralığı için maksimum hatayı bulalım.

$f(x) = 1/x, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = 2x^{-3}, f'''(x) = -6x^{-4}$ olur. Bu durumda ikinci dereceden Lagrange polinomu için hata terimi $\xi(x) \in (2,4)$ olmak üzere

$$\frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = -(\xi(x))^{-4}(x-2)(x-2.75)(x-4)$$

formundadır. $(\xi(x))^{-4}$, $(2,4)$ aralığındaki maksimum değeri $2^{-4} = 1/16$ olur. Verilen aralıkta

$$g(x) = (x-2)(x-2.75)(x-4) = x^3 - \frac{35}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - 22$$

polinomunun mutlak değerinin maksimumunu bulmak gerekmektedir.

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{35}{2}x + \frac{49}{2} = \frac{1}{2}(3x-7)(2x-7)$$

olduğundan $x = 7/3$ ve $x = 7/2$ noktaları kritik noktalardır.

$$g(7/3) = 25/108, g(7/2) = -9/16$$

olduğundan maksimum hata

$$\frac{f'''(\xi(x))}{3!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \leq \frac{1}{16.6}\left|-\frac{9}{16}\right| = \frac{3}{512} \approx 0.00586$$

olur.

4.3 Newton İnterpolasyonu

Bölünmüş Farklar

Bölüm 4.2 de $x_0, x_1, \cdots, x_n$ veri noktalarında f fonksiyonu ile aynı değerler alan n. dereceden Lagrange polinomu tanımlanmıştı. Bu polinom tek bir tane olmasına rağmen alternatif olarak daha kullanışlı olan farklı yazım şekilleri bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi Newton interpolasyon polinomudur. Burada

$$P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x)$$

polinomları kullanılır. Lagrange polinomlarında $P_{n-1}(x)$ ve $P_n(x)$ arasında bir bağlantı yoktur. Her polinom teker teker oluşturulur ve bu nedenle yüksek dereceli polinomları oluşturmak için çok fazla hesaplama gerekli olur.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) \\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\
P_3(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
\vdots &= \quad \vdots \\
P_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlandığında $P_n(x)$ polinomunu $P_{n-1}(x)$ polinomundan yararlanarak yazmak mümkün olur. Burada $P_n(x)$ polinomu $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ noktalarından (n tane nokta) geçen **Newton polinomudur.**

f fonksiyonuna $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ noktalarında kesen interpolasyon polinomundaki katsayıları $a_k, k = 0, 1, \cdots, n$ belirlemek için

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

olur. Benzer şekilde

$$P_n(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

eşitliğinden

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

olarak bulunur. Şimdi bölünmüş farklar gösterimi ile katsayıların ifadesine bakalım.

Tanım 4.3.1 *(Bölünmüş Farklar)*

Sıfırıncı bölünmüş fark

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Birinci bölünmüş fark

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

İkinci bölünmüş fark

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$(k-1)$. *bölünmüş fark*

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k-1}], f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

tanımlandıktan sonra k. *bölünmüş fark*

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

En son olarak n. *bölünmüş fark*

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

olarak tanımlıdır.

Bu durumda

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

ve

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

olur. Böylece Newton interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde hesaplandığında katsayıların $k = 0, 1, \cdots, n$ için

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

olduğu görülür. Bu durumda **Newton interpolasyon polinomu**

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{4.2}$$

olur. Tablo hâlinde verilmiş veriler için bölünmüş farklar aşağıdaki örnek tablodaki gibi yazılabilir.

x	$f(x)$	1.B.F.	2.B.F.	3.B.F.
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$			

Örnek 4.3.1 *Örnek 4.2.2 deki verilerden geçen Newton interpolasyon polinomunu bulalım. Noktalar*

$$(x_0, y_0) = (-2, 4), (x_1, y_1) = (0, 2), (x_2, y_2) = (2, 8)$$

olarak verilmiştir.

$f[x_0] = f(x_0) = 4$ olur. Ayrıca

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-4}{0-(-2)} = -1$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{2-0} = 3$$

ve

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1$$

olur. Bu durumda Newton interpolasyon polinomu

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

formülünden

$$P(x) = 4 + (-1)(x + 2) + 1.x(x + 2) = x^2 + x + 2$$

olarak bulunur. Örnek 4.2.2 de verilen Lagrange interpolasyon polinomu ile aynıdır. Daha öncede Teorem 4.2.1 te belirtildiği gibi interpolasyon polinomu tektir. Örnek için bölünmüş farklar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	$f(x)$	1.B.F.	2.B.F.
$x_0 = -2$	$f[x_0] = 4$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{2-4}{0-(-2)} = -1$	
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 2$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3-(-1)}{2-(-2)} = 1$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{8-2}{2-0} = 3$	
$x_2 = 2$	$f[x_2] = 8$		

$P_n(x)$ polinomu Newton interpolasyon polinomu olsun ve $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım için kullanılsın, yani

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

şeklinde olur. $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise tüm $x \in [a, b]$ için Newton hata terimi

$$E_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f^{(n+1)(\xi(x))}}{(n+1)!}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\xi(x) \in [a, b]$ sayısı vardır. Yani, Newton interpolasyon polinomunun hata terimi Lagrange interpolasyon polinomunun hata terimiyle aynıdır. İnterpolasyon polinomu tek olduğundan hata terimi de tektir.

Newton bölünmüş farklar formülü eğer noktalar eşit aralıklı ise daha basit bir formda ifade edilebilir. Böyle bir durumda

$$h = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$$

ve

$$x = x_0 + sh$$

notasyonu ile

$$x - x_i = (s-i)h$$

olur. Bu durumda Denklem 4.2

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \; & shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ & \cdots + s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, .., x_n] \end{aligned}$$

olur.

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

olarak yazılabilir. Binom formülü

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

kullanılarak $P_n(x)$ polinomu

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \tag{4.3}$$

biçiminde yazılabilir.

Newton İleri Fark Formülü

İleri fark operatörü

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$$

ile gösterilir. Bu durumda

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) = \frac{1}{h} \triangle f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\triangle f(x_1) - \triangle f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2} \triangle^2 f(x_0)$$

ve genel olarak

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \triangle^k f(x_0)$$