4. BÖLÜM

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

3.1. Giriş :

n-yinci mertebeden bir lineer dif. denklem

$$b_n(x)\cdot y^{(n)} + b_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)\cdot y = g(x) \quad \dots (4.1)$$

biçimindedir. Burada $g(x)$ ve $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ katsayıları sadece x değişkenine bağlıdır. Bir başka deyişle y'ye veya y nin herhangi bir türevine bağlı değillerdir.

Eğer $g(x)\equiv 0$ ise o zaman (4.1) denklemi homojendir. Aksi durumda homojen değildir. Eğer (4.1)'deki tüm $b_j(x)$ katsayıları sabitse bir lineer dif. denklem sabit katsayılıdır. Eğer bu katsayılardan biri veya daha fazlası sabit değilse (4.1) denklemi değişken katsayılıdır.

Şimdi (4.1) lineer dif. denklemini ve aşağıdaki n tane başlangıç koşulu ile verilen başlangıç- değer problemini düşünelim:

$$y(x_0) = C_0, \quad y'(x_0)=C_1, \quad y''(x_0)=C_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1} \quad \dots (4.2)$$

Eğer $g(x)$ ve $b_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ fonksiyonları x_0'ı içeren bir I aralığında sürekli ise ve I'da $b_n(x)\neq 0$ ise o zaman (4.1) ve (4.2) ile verilen başlangıç - değer probleminin I'da tanımlı tek bir çözümü vardır.

$b_n(x)\neq 0$ olmak üzere (4.1) denklemi $b_n(x)$ ile bölünürse

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = \phi(x) \quad \dots (4.3)$$

bulunur.

$L(y)$ operatörünü, $a_i(x)$ $(i=0,1,2,\dots,n-1)$ fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmak üzere

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y \quad \cdots (4.4)$$

ile tanımlayalım. O zaman (4.3) denklemi

$$L(y) = \phi(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.5)$$

olarak yazılabilir ve özel durumda bir lineer homojen denklem

$$L(y) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4.6)$$

halinde ifade edilebilir.

TANIM: (Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık):

Bir $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyon kümesi verilsin. Eğer $x \in [a,b]$ için

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.7)$$

eşitliğini sağlayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'lerin hepsi sıfır değilse $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyon kümesi $[a,b]$ aralığı üzerinde lineer bağımlıdır.

ÖRNEK: $\{x, 5x, 1, \sin x\}$ kümesi $[-1,1]$ üzerinde lineer bağımlıdır, çünkü

$$c_1 x + c_2 5x + c_3 \cdot 1 + c_4 \cdot \sin x = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $c_1 = -5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ ve $c_4 = 0$ sabitleri vardır. ■

Eğer (4.7) eşitliğinin sağlanması yalnızca $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olması halinde oluyorsa $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ fonksiyonlar kümesi $[a,b]$ aralığında lineer bağımsızdır.

3.2. LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TEMEL TEOREMİ

TEOREM n-yinci mertebeden lineer homojen $L(y) = 0$ diferensiyel denkleminin birbirinden farklı m tane çözümü $y_1, y_2, \dots, y_m$ olsun. $(m \leq n)$. Bu durumda $c_1, c_2, \dots, c_m$

katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur.

TANIM: (Lineer kombinasyon): $y_1, y_2, \dots, y_m$ herhangi m tane fonksiyon ve $c_1, c_2, \dots, c_m$ herhangi keyfi sabit sayılar olsun. Bu durumda

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

ifadesine $y_1, y_2, \dots, y_m$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.

Bu tanımdan yararlanarak yukarıdaki teorem şöyle de ifade edilebilir: "Bir lineer homojen dif. denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür". Bu teorem, lineer homojen dif. denklemlerin Temel Teoremidir.

TANIM (Wronskian Determinantı): $y_1, y_2, \dots, y_n$ gibi n tane fonksiyon verilsin ve bu fonksiyonlar her $x \in [a,b]$ için $(n-1)$-yinci mertebeden türeve sahip olsun. Bu durumda $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının wronskian'ı

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantıdır.

Eğer bu determinant sıfıra eşitse $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımlı olur, sıfırdan farklıysa lineer bağımsız olur.

Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının herbiri

$$b_n(x)\,y^{(n)} + b_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)\,y' + b_0(x)\,y = 0 \quad \ldots \quad (4.8)$$

denkleminin birer çözümü ise ve bu fonksiyonlar aynı zamanda kendi aralarında lineer bağımsız iseler bunların lineer kombinasyonu olan

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \quad \ldots \ldots \quad (4.9)$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümüdür.

(4.9) ile verilen y_h fonksiyonu verilen homojen denklemin genel çözümü veya homojen çözümüdür. Halbuki amacımız sadece (4.8) denkleminin genel çözümünü bulmak değil (4.1) denkleminin genel çözümünü bulmaktır. Bunun için değişik metotlar geliştirilmiş ve böylece (4.1) denkleminin bir özel çözümü olan y_p bulunabilmiştir. Ayrıca ifade edelim ki, y_h çözümü (4.8) denkleminin mertebesine eşit sayıda keyfi sabit sayı içerdiği halde, y_p çözümü herhangi bir sabit sayı içermez. Sonuç olarak $y = y_h + y_p$ fonksiyonu (4.1) denkleminin genel çözümüdür.

Öyleyse, homojen olmayan bir dif. denklemin genel çözümünü bulmak için önce denklemin homojen kısminın y_h homojen çözümünü bulmak, sonra denkleminin y_p özel çözümünü bulmak ve sonunda bunları toplayıp $y = y_h + y_p$ şeklinde yazmak gerekmektedir.

ÖRNEK : $\{\sin 3x, \cos 3x\}$ kümesinin wronskianı bulunuz.

Çözüm :
$$W = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ (\sin 3x)' & (\cos 3x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\sin 3x \end{vmatrix}$$
$$= -3\sin^2 3x - 3\cos^2 3x = -3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = -3$$

ÖRNEK : $\{x, x^2, x^3\}$ kümesinin wronskianını bulunuz.

Çözüm :
$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x' & (x^2)' & (x^3)' \\ x'' & (x^2)'' & (x^3)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

ÖRNEK : $y'' + 9y = 0$ denkleminin iki çözümünün $y_1 = \sin 3x$ ve $y_2 = \cos 2x$ olduğu biliniyorsa genel çözümünü bulunuz.

Çözüm : y_1 ve y_2 nin wronskianı -3 tür ve sıfırdan farklıdır. O halde lineer bağımsız olduğundan verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 2x$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - 2y' + y = 0$ denkleminin iki çözümü e^{-x} ve $5e^{-x}$ tir. Genel çözüm $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ midir?

Çözüm :
$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ (e^{-x})' & (5e^{-x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ -e^{-x} & -5e^{-x} \end{vmatrix} = 0$$

hesaplanır. Böylece e^{-x} ve $5e^{-x}$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa sağlamaz.

NOT: $W \neq 0$ ise genel çözüm olur.
$W = 0$ ise denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

4.3. SABİT KATSAYILI HOMOJEN LİNEER DİF. DENKLEMLER

Karakteristik Denklem : a, b ve c reel sabitler olmak üzere

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (4.10)$$

dif. denklemine

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

şeklinde bir karakteristik denklem karşılık gelir.

ÖRNEK : $y'' + 3y' - 4y = 0$ dif. denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ dır.

Genel Çözüm : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dır. Burada $\Delta = b^2 - 4ac$ diskriminantının alacağı 3 farklı değere göre kökler reel veya kompleks olabilir. Buna göre

I. Durum : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise λ_1 ve λ_2 reel ve farklıdır. Bu durumda dif. denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (4.12)$$

olur. $\lambda_2 = -\lambda_1$ özel durumunda (4.12) çözümü

$$y = k_1 \cosh \lambda_1 x + k_2 \sinh \lambda_2 x$$

olarak yeniden yazılabilir.

II. Durum : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise yani $\lambda_1 = \lambda_2$ ise iki lineer bağımsız çözüm $e^{\lambda_1 x}$ ve $x e^{\lambda_2 x}$ tir. Genel çözüm

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (4.13)$$

olur.

III. Durum: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise λ_1 ve λ_2 komplekstir. Burada $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olup iki eşlenik kompleks sayı elde edilir.

Burada iki lineer bağımsız çözümü $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ve $e^{(\alpha-i\beta)x}$ dır ve böylece dif. denklemin genel çözümü

$$y = k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

şeklindedir. Ancak dif. denklemin genel çözümünün bu şekilde verilmesi genel olarak pek uygun olmadığından Euler formülü adı verilen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısı kullanılarak genel çözüm

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta x \quad \ldots \quad (4.14)$$

şeklinde verilebilir.

UYARI: Yukarıdaki çözümler, dif. denklem lineer olmadığında veya sabit katsayılı olmadığında geçerli değildir. Örneğin $y'' - x^2 y = 0$ denklemini düşünelim. Karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = x$ ve $\lambda_2 = -x$ dir. Ancak çözüm

$$y = c_1 e^{(x).x} + c_2 e^{(-x).x} = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$$

değildir. (Değişken katsayılılar ileride verilecektir)

ÖRNEK: $y'' - y' - 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ şeklinde olup $(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ bulunur. Kökler reel ve farklı olduğundan I. Duruma göre çözümü

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

olur.

ÖRNEK: $y'' - 5y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem $\lambda^2 - 5 = 0$ dır. $\lambda_1 = +\sqrt{5}$ ve $\lambda_2 = -\sqrt{5}$ olup çözüm

$$y = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 e^{-\sqrt{5}x}$$

dır.

ÖRNEK: $y'' - 8y' + 16y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4.16 = 0$ olup çakışık iki kök vardır. $\left\{\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a}\right\}$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4$$

Kökler reel ve eşit old. II. Duruma göre çözüm

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

olur.

ÖRNEK: $y'' - 6y' + 25y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-6) \mp \sqrt{(-6)^2 - 4.25}}{2} = 3 \mp \frac{\sqrt{-64}}{2}$$

$$= 3 \mp \frac{\sqrt{64 i^2}}{2} = 3 \mp 4i$$ old. III. Duruma göre

$$y = c_1 e^{3x}.\cos 4x + c_2 e^{3x}.\sin 4x$$

olur.

ÖRNEK: $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda + 2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$ ve $\lambda_3 = -2$ old. genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x}$$

dır.

ÖRNEK : $y^{(IV)} - 9y'' + 20y = 0$ denklemini çözünüz. (9)

Çözüm : $\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0 \Rightarrow m^2 - 9m + 20 = 0$ $(\lambda^2 = m)$

$\Rightarrow m = 4$ ve $m = 5 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -\sqrt{5},\ \lambda_4 = \sqrt{5}$!

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{\sqrt{5}x} + c_4 e^{-\sqrt{5}x}$$

ÖRNEK : $y^{V} - 2y^{IV} + y''' = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 e^{1x} + c_5 x e^{1.x}$$

ÖRNEK : $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = 0$ karakteristik denkleminde $\lambda = -2$ yazılırsa denklemi sağlar. Bu nedenle $(\lambda + 2)$ terimi bu karakteristik denklemin bir çarpanı olur

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 & \lambda + 2 \\ \hline
-\ \lambda^3 + 2\lambda^2 & \lambda^2 - 8\lambda + 18 \\ \hline
\quad -8\lambda^2 + 2\lambda & \\
-\ -8\lambda^2 - 16\lambda & \\ \hline
\quad\quad +18\lambda + 36 & \\
-\quad 18\lambda + 36 & \\ \hline
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = (\lambda + 2)\cdot(\lambda^2 - 8\lambda + 18)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-8) \mp \sqrt{64 - 72}}{2} = 4 \mp i\sqrt{2}$$

olup genel çözüm

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}\cdot\cos\sqrt{2}x + c_3 e^{4x}\cdot\sin\sqrt{2}x$$

ÖRNEK : $9y''+6y'+5y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=0$

denklemini çözünüz.

Çözüm : $9\lambda^2+6\lambda+5=0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4.9.5}}{18}=\frac{-6\pm\sqrt{-144}}{18}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{144i^2}}{18}=-\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}i$$

olduğundan genel çözüm

$$y=c_1e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\cos\frac{2}{3}x+c_2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{2}{3}x$$

bulunur.

$y(0)=6$ olduğundan $x=0$ ve $y=6$ değerleri için

$$6=c_1e^0\underbrace{\cos 0}_{=1}+c_2e^0\underbrace{\sin 0}_{=0}\quad\Rightarrow\quad\boxed{c_1=6}$$

$y'(0)=0$ olduğundan $x=0$ ve $y=0$ değerleri için

önce y' türevini hesaplayalım:

$$y'=-\frac{1}{3}c_1e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\cos\frac{2}{3}x+c_1e^{-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}x\right)$$

$$-\frac{1}{3}c_2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{2}{3}x+c_2e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\left(\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{3}c_1+c_2\cdot\frac{2}{3}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{3}\cdot 6+c_2\cdot\frac{2}{3}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{c_2=3}$$

olup çözüm

$$y=6e^{-\frac{1}{3}x}\cos\frac{2}{3}x+3e^{-\frac{1}{3}x}\sin\frac{2}{3}x$$

olur.

4.4. SABİT KATSAYILI, HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİF. DENKLEMLER

n- yinci mertebeden sabit katsayılı ve homojen olmayan bir lineer dif. denklem

$$b_n(x) \cdot y^{(n)} + b_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + b_1(x) y' + b_0(x) y = g(x) \dots (4.15)$$

şeklindeydi. Böyle bir denklemin genel çözümü $y = y_h + y_p$ şeklinde veriliyordu. Eğer $g(x) = 0$ ise denklemin homojen çözümü y_h idi ve bundan önceki kısımda homojen bir dif. denklemin nasıl çözüleceğini gördük. Şimdi ise amacımız $g(x) \neq 0$ iken yani homojen olmayan bu denklemin bir özel çözümü olan ve keyfi sabit sayı içermeyen y_p çözümünü ve sonuç olarak da (4.15) denkleminin genel çözümünü bulmaktır.

y_p nin bulunması ile ilgili olarak birkaç metot geliştirilmiştir. Bu metotlardan "Belirsiz katsayılar Metodu" ve "Parametrelerin değiştirilmesi metodu" nu inceleyeceğiz.

A) BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Metodun Basit Hali

Belirsiz katsayılar metodu, yalnızca eğer $g(x)$ ve tüm türevleri $\{ y_1(x), \dots, y_n(x) \}$ ile gösterilen aynı sonlu lineer bağımsız fonksiyonlar kümesi cinsinden yazılabiliyorsa uygulanabilir. Metoda $A, B, C, \dots$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y_p = A y_1(x) + B y_2(x) + C y_3(x) + \dots + K y_n(x)$$

biçiminde bir özel çözüm kabul edilerek başlanır. Daha sonra bu çözüm dif. denklemde yerine yazılıp benzer terimlerin katsayıları eşitlenerek $A, B, C, \dots$ sabitleri bulunur.

I. Durum : $g(x) = P_n(x)$ ise

(Yani eşitliğin sağ tarafı n-yinci dereceden bir polinom ise)

$$y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Kx + M$$

biçiminde bir çözüm kabul edilir.

II. Durum : $g(x) = ke^{ax}$ ise (a ve k sabit)

$$y_p = Ae^{ax}$$

biçiminde bir çözüm kabul edilir.

III. Durum : $g(x) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x$ ise (k_1, k_2, β sabit)

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

biçiminde bir özel çözüm kabul edilir.

Uyarı : k_1 ve k_2 'den birisi sıfır bile olsa III. durumdaki y_p geçerlidir. Mesela $g(x) = k_1 \sin \beta x$ olsa bile

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

dır.

Genelleştirmeler :

Eğer $g(x)$ terimi, yukarıda verilen 3 farklı fonksiyon türünün herhangi ikisinin veya hepsinin birbiriyle çarpımı ise, y_p bunlara karşılık kabul edilen çözümlerin çarpımı olarak alınır ve bunlar birleştirilir. Örneğin

$g(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$ ise (Üstel ile polinomun çarpımı ise)

$$y_p = e^{ax}(Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Kx + M)$$

kabul edilir. Eğer

$g(x) = P_n(x) . \sin \beta x$ ise

$$y_p = (Ax^n + \dots + Kx + M)\sin \beta x + (Ax^n + \dots + Kx + M)\cos \beta x$$

kabul edilir.

Değişiklikler

Eğer keyfi sabitler göz ardı edildiğinde, kabul edilen y_p çözümünün herhangi bir terimi y_h nın de bir terimi ise, o zaman kabul edilen y_p çözümü x^m ile çarpılarak değiştirilmelidir. Burada m sayısı, terimlerdeki farklılığı sağlayacak en küçük pozitif tam sayıdır.

ÖRNEK : $y''-y'-2y = 4x^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm : öncelikle denklemin homojen çözümünü bulalım.

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \text{ ve } \lambda_2=2.$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi de y_p özel çözümünü bulalım:

$g(x) = 4x^2$ bir polinom old. I. Duruma göre

$y_p = Ax^2+Bx+C$ kabul edelim. Böylece

$y_p' = 2Ax+B$ ve

$y_p'' = 2A$

olur. y_p, y_p' ve y_p'' ifadeleri verilen dif. denklemde yerine yazılırsa

$$y''-y'-2y = 4x^2$$

$$\Rightarrow 2A-(2Ax+B)-2(Ax^2+Bx+C) = 4x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-2A)}_{=4}x^2+(\underbrace{-2A-2B}_{=0})x+(\underbrace{2A-B-2C}_{=0}) = 4x^2+0x+0$$

Buradan $A=-2$, $B=2$, $C=-3$ bulunur. Böylece

$y_p = -2x^2+2x-3$ özel çözümü bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = y_h+y_p = c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-2x^2+2x-3$$

olur.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : önceki sorudan $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ bulunmuştu.

$g(x) = 8e^{3x}$ old. II. Duruma göre

$$y_p = Ae^{3x}$$

kabul edelim. Buradan

$$y_p' = 3Ae^{3x} \quad \text{ve}$$

$$y_p'' = 9Ae^{3x}$$

bulunur. Bu ifadeler verilen dif. denklemde yerine yazılırsa,

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 8e^{3x}$$

$$\Rightarrow 4Ae^{3x} = 8e^{3x} \Rightarrow 4A = 8 \Rightarrow A = 2$$

$\Rightarrow \quad y_p = Ae^{3x} = 2e^{3x}$ özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + 2e^{3x}$$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y'' - y' - 2y = 3\sin 2x$ denkleminin çözünüz.

Çözüm : $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ bulunmuştu.

$g(x) = 3\sin 2x$ old. III. duruma göre

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ kabul edelim. Buradan

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

ifadeleri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x) - 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = 3\sin 2x$$

$$\Rightarrow (\underbrace{-6A+2B}_{=3})\sin 2x + (\underbrace{-6B-2A}_{=0})\cos 2x = 3\cdot\sin 2x + 0\cdot\cos 2x$$

$\Rightarrow A = \frac{19}{20}, \quad B = -\frac{19}{60} \quad \Rightarrow y_p = \frac{19}{20}\sin 2x - \frac{19}{60}\cos 2x$ olup

genel çözüm $\quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{19}{20}\sin 2x - \frac{19}{60}\cos 2x$

dır.

ÖRNEK : $y' - 5y = 2e^{5x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$ olup $y_h = c_1 e^{5x}$ homojen çözümü bulunur.

$g(x) = 2e^{5x}$ olduğundan y_p nin tahmini II. Duruma göre $y_p = Ae^{5x}$ olur. Fakat y_p ile y_h aynı biçimde olduğundan y_p 'yi değiştirmemiz gerekir.

y_p 'yi x ile çarparsak $(m=1)$

$$y_p = Axe^{5x}$$

elde edilir. Bu ifadenin y_h ile hiçbir ortak terimi olmadığından özel çözüm olarak kabul edilebilir.

Türev alınırsa

$$y_p' = Ae^{5x} + 5Axe^{5x}$$

olup verilen dif. denklemde yerine yazılırsa

$$\left(Ae^{5x} + 5Axe^{5x}\right) - 5\left(Axe^{5x}\right) = 2e^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{5x} = 2e^{5x}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2$$

bulunur. Böylece

$$y_p = 2xe^{5x}$$

özel çözümü elde edilir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} + 2xe^{5x}$$

bulunur.

ÖRNEK : $y'' + 4y = 5\cos 2x$ denkleminí çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{0x}\cos 2x + c_2 e^{0x}\sin 2x$

$\Rightarrow y_h = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$

homojen çözümü elde edilir.

Şimdi de y_p özel çözümünü bulalım. Öncelikle

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$

kabul edelim. Bu kabuldeki $\cos 2x$ ile y_h çözümündeki $\cos 2x$ aynı biçimde old. y_p yi değiştirmeliyiz.

Bu nedenle y_p 'yi x ile çarparsak

$y_p = Ax\sin 2x + Bx\cos 2x$

olur. Türev alınırsa

$y_p' = A\sin 2x + Ax.2\cos 2x + B\cos 2x + Bx(-2\sin 2x)$

$\Rightarrow y_p'' = 2A\cos 2x + A.2\cos 2x + Ax(-4\sin 2x) + (-2B\sin 2x)$
$+ B(-2\sin 2x) + Bx(-4\cos 2x)$

olup bunlar verilen dif. denklemde yerlerine yazılırsa,

$[4A\cos 2x - 4Ax\sin 2x - 4B\sin 2x - 4Bx\cos 2x]$

$+ 4[Ax\sin x + Bx\cos 2x] = 5\cos 2x$

$\Rightarrow \underbrace{4A}_{=5}\cos 2x - \underbrace{4B}_{=0}\sin 2x = 5\cos 2x + 0.\sin 2x$

$\Rightarrow A = \frac{5}{4}$ ve $B = 0$

$\Rightarrow y_p = Ax\sin 2x + Bx\cos 2x = \frac{5}{4}x\sin 2x + 0$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{5}{4}x\sin 2x$

genel çözümü bulunur.

ÖRNEK : $y''' - y' = 3e^{2x} + 4e^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = +1$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi y_p özel çözümünü bulalım :

Eğer $y_p = Ae^{2x} + Be^{-x}$ kabul edilirse y_p'deki Be^{-x} ile y_h'deki $c_3 e^{-x}$ aynı biçimden olur. O zaman Be^{-x} terimi x ile çarpılmalıdır. Yani

$$y_p = Ae^{2x} + Bxe^{-x} \quad \text{kabul edilirse}$$

$$y_p' = 2Ae^{2x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x} - Be^{-x} - (Be^{-x} + Bx(-e^{-x}))$$

$$= 4Ae^{2x} - 2Be^{-x} + Bxe^{-x}$$

$$y_p''' = 8Ae^{2x} + 2Be^{-x} + (Be^{-x} + Bx(-e^{-x}))$$

$$= 8Ae^{2x} + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

bulunur. Bu terimler verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$(8Ae^{2x} + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}) - (2Ae^{2x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}) = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 6Ae^{2x} + 2Be^{-x} = 3e^{2x} + 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 6A = 3 \ \text{ ve } \ 2B = 4 \ \Rightarrow \ A = 1/2 \ \text{ ve } \ B = 2 \ \text{ olup}$$

$y_p = \frac{1}{2} e^{2x} + 2xe^{-x}$ özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} + 2xe^{-x}$$

genel çözümü elde edilir.

ÖRNEK : $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$ denk. çözünüz.

Çözüm : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ olacağından

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ homojen çözümü bulunur.

Şimdi y_p özel çözümünü araştıralım:

$g(x) = 2xe^{-x}$ ifadesi bir polinom ile üstelin çarpımı old.

$$y_p = (Ax+B) \cdot e^{-x}$$

kabul edelim. Böylece

$$y_p' = -Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}$$

$$y_p'' = Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x}$$

$$y_p''' = -Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}$$

türevleri, verilen dif. denklemde yerlerine yazılırsa

$$(-Axe^{-x} + 3Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + Be^{-x})$$
$$+ 11(-Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}) - 6(Axe^{-x} + Be^{-x}) = 2xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-24A}_{=2}xe^{-x} + (\underbrace{26A - 24B}_{=0})e^{-x} = 2xe^{-x} + 0 \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{12}, \quad B = \frac{-13}{144}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

genel çözümü bulunur.

(19)

ÖRNEK : $y' - 5y = 3e^{x} - 2x + 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{5x}$ homojen çözümü elde edilir.

$g(x) = 3e^{x} - 2x + 1$ ifadesi üstel fonk. ile polinomun toplamı olduğundan

$y_p = Ae^{x} + (Bx + C)$ kabul edilirse

$y_p' = Ae^{x} + B$

olup verilen denklemde yerine yazılırsa

$$Ae^{x} + B - 5(Ae^{x} + Bx + C) = 3e^{x} - 2x + 1$$

$$\Rightarrow -4Ae^{x} - 5Bx + (B - 5C) = 3e^{x} - 2x + 1$$

$$\Rightarrow -4A = 3, \quad -5B = -2, \quad B - 5C = 1$$

$$\Rightarrow A = -3/4 \quad B = 2/5 \quad C = -3/25$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{3}{4}e^{x} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{5x} - \frac{3}{4}e^{x} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$$

genel çözümü elde edilir.

B) PARAMETRELERİN DEĞİŞTİRİLMESİ METODU

Parametrelerin değiştirilmesi, ilgili $L(y)=0$ homojen denkleminin çözümü bilindiğinde n-yinci mertebeden $L(y)=g(x)$ lineer dif. denkleminin bir özel çözümünü bulmanın bir başka metodudur.

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$ 'ler $L(y)=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümü ise o zaman $L(y)=0$ denkleminin homojen çözümünün

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

olduğunu biliyoruz.

Metot :

$L(y) = g(x)$ 'in bir özel çözümü

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n \quad \ldots \ldots \quad (4.16)$$

biçimindedir. Burada $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 'ler bulunması gereken fonksiyonlardır.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ 'leri bulmak için aşağıdaki lineer denklemler $v_1', v_2', \ldots, v_n'$ türevleri için ortak çözülür.

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + \cdots + v_n' y_n = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + \cdots + v_n' y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = g(x)$$

Sonra herbir integral sabiti gözardı edilerek integral alınıp $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ler bulunur ve (4.16) 'da yerlerine yazılır.

Örneğin, $n=3$ özel durumu için

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + v_3' y_3 = 0$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + v_3' y_3' = 0$$
$$v_1' y_1'' + v_2' y_2'' + v_3' y_3'' = g(x)$$

denklemi çözülür.

$n=2$ özel durumu için

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = g(x)$$

denklemi ve $n=1$ özel durumu için

$$v_1' y_1 = g(x)$$

tek denklemi elde edilir.

Metodun Kapsamı

Parametrelerin değiştirilmesi metodu her lineer dif. denkleme uygulanabilir. Bundan dolayı Belirsiz katsayılar metodundan daha güçlüdür. Ancak her iki metodun da uygulanabilir olduğu durumlarda Belirsiz Katsayılar Metodu tercih edilir.

ÖRNEK : $y'' + y = \tan x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Homojen kısmın genel çözümü

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$ dır.

Parametrelerin değiştirilmesi metoduna göre

$$y_p = v_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + v_2 \underbrace{\sin x}_{y_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

olur. Böylece

$$\left.\begin{aligned} v_1' \cdot (\cos x) + v_2'(\sin x) &= 0 \\ v_1'(-\sin x) + v_2'(\cos x) &= \tan x \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini bulmalıyız. Cramer metoduyla

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\tan x \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos x - \sec x \quad \text{ve}$$

$$v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \sin x$$

bulunur. v_1 ve v_2 yi bulmak için integral alınırsa

$$v_1 = \int v_1' \, dx = \int (\cos x - \sec x) dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int v_2' \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

fonksiyonları elde edilir. v_1 ve v_2 nin bu değerleri

(*) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$y_p = v_1 \cos x + v_2 \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) \cos x + (-\cos x) . \sin x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\cos x . \ln|\sec x + \tan x|$$ özel çözümü ve

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

genel çözümü bulunur.

(23)

ÖRNEK : $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemin homojen çözümü

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

bulunur. Böylece özel çözüm için

$$y_p = v_1 e^x + v_2 x e^x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

kabul edilir. Buna göre

$$\left.\begin{aligned} v_1'(e^x) + v_2'(xe^x) &= 0 \\ v_1'(e^x) + v_2'(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini elde ederiz. Burada v_1' ve v_2' bilinmeyenlerini bulmak için Cramer metodu uygulanırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -e^{2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

$\Rightarrow \quad v_1' = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \quad$ ve $\quad v_2' = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad v_1 = \int v_1'\,dx = \int -1.\,dx = -x \quad$ ve

$\quad v_2 = \int v_2'\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

değerleri (*) 'da yerlerine yazılırsa özel çözüm

$y_p = -xe^x + xe^x \ln|x|$ ve genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x - xe^x + xe^x \ln|x|$$

bulunur.

ÖRNEK: $y''' + y' = \sec x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+1)=0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ homojen çözümü bulunur.

Özel çözüm ise

$$y_p = v_1 + v_2 \cos x + v_3 \sin x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

formundadır. Buna göre

$$\left.\begin{array}{l} v_1' \cdot (1) + v_2'(\cos x) + v_3'(\sin x) = 0 \\ v_1' \cdot (0) + v_2'(-\sin x) + v_3'(\cos x) = 0 \\ v_1'\,(0) + v_2'(-\cos x) + v_3'(-\sin x) = \sec x \end{array}\right\}$$

denklem sistemi yazılabilir. Cramer metoduyla

$$v_1' = \sec x, \quad v_2' = -1 \quad \text{ve} \quad v_3' = -\tan x$$

elde edilir. İntegral alınırsa

$$v_1 = \int v_1' dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v_2 = \int v_2' dx = \int (-1) dx = -x$$

$$v_3 = \int v_3' dx = \int (-\tan x) dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

bilinmeyen fonksiyonları bulunur. Bu fonksiyonlar $(*)$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\cos x|$$

özel çözümü ve böylece

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\cos x|$$

genel çözümü bulunur.

4.5. CAUCHY – EULER DENKLEMLERİ

Her bir terimi $x^k y^{(k)}$ ifadesinin bir sabitle çarpımı şeklinde olan

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x) \quad \dots\dots (4.17)$$

tipindeki n. mertebeden değişken katsayılı diferensiyel denklemlere Cauchy-Euler denklemi denir. Burada $a_n \neq 0$ olmak üzere, $a_0, a_1, \dots, a_n$ 'ler sabitlerdir. Bu tip denklemler bir dönüşüm yardımıyla sabit katsayılı hale indirgenerek çözülür.

Metot : (4.17) ile verilen Cauchy-Euler denklemi $x>0$, $x=e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı bir lineer denkleme dönüşür.

Bu durumda $x=e^t \Rightarrow t=\ln x$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{I}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{II}\right) = \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}}_{I'}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{II} + \underbrace{\frac{d^2t}{dx^2}}_{II'}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{I}$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}$$ bulunur.

Benzer şekilde $$\boxed{x^3\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}}$$

elde edilir. Bu şekilde daha yüksek mert. türevler elde edilebilir. Bu türevler (4.17) denkleminde yerine yazılarak sabit katsayılı hale dönüştürülür.

__NOT:__ Yukarıdaki çözüm $x>0$ için verilmiştir. $x<0$ için çözümü bulabilmek için $-x=e^t$ dönüşümü yapılır.

ÖRNEK : $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ Cauchy-Euler denklemini çözünüz. (26)

Çözüm : $x = e^t$, $x>0 \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü yapılırsa

$xy' = \frac{dy}{dt}$ ve $x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$ olacağından verilen

denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \Rightarrow y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = +1 \text{ ve } \lambda_2 = +2$$

$\Rightarrow y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = Ae^{3t}$ kabul edilirse $y_p' = 3Ae^{3t}$ ve $y_p'' = 9Ae^{3t}$ old.

$$9Ae^{3t} - 3.3Ae^{3t} + 2Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{3t} = e^{3t} \Rightarrow A = 1/2$$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$ olup genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

ve $e^t = x$ olduğundan

$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$ bulunur.

ÖRNEK : $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü yapılırsa ve

$xy' = \frac{dy}{dt}$, $x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$, $x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$

türevleri verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 4\cdot\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 8\frac{dy}{dt} - 8y = 4t$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} - 7\frac{d^2y}{dt^2} + 14\frac{dy}{dt} - 8y = 4t$$

$$\Rightarrow \quad y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 4t \quad \ldots\ldots (*)$$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$ karakteristik denklemini $\lambda_1 = 1$ değeri sağladığı için polinom bölünerek

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 & \lambda - 1 \\ \quad \vdots & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

olacağından $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = \underbrace{(\lambda - 1)}_{\lambda_1 = 1}\underbrace{(\lambda^2 - 6\lambda + 8)}_{\lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4}$

$$\Rightarrow \quad y_h = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t}$$

homojen çözümü bulunur. Özel çözüm için

$$y_p = At + B$$

kabul edilirse

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0, \quad y_p''' = 0$$

olacağından bu türevler (*)'da yerine yazılırsa

$$0 - 7.0 + 14.A - 8(At + B) = 4t + 0$$

$$\Rightarrow -8At + 14A - 8B = 4t + 0$$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{7}{8}$$

$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$ özel çözümü ve

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{7}{8}$$

genel çözümü bulunur.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR
(Yüksek Mert. Lineer Dif. Denklemler)

(1) $y'' - 6y' + 25y = 64e^{-x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemi Belirsiz Katsayılar Metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = -64 < 0$ olup

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64i^2}}{2} = 3 \pm 4i$$

$$y_h = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$$

homojen çözümü bulunur. Özel çözüm için

$y_p = Ae^{-x}$

kabul edilirse $y_p' = -Ae^{-x}$ ve $y_p'' = Ae^{-x}$ olacağından

$$(Ae^{-x}) + 6Ae^{-x} + 25Ae^{-x} = 64e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 32Ae^{-x} = 64e^{-x} \Rightarrow A = 2$$

$\Rightarrow y_p = 2e^{-x}$ olup genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x}\cos 4x + c_2 e^{3x}\sin 4x$$

bulunur.

(2) $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Denklemi Belirsiz Katsayılar Metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 2$ bulunur.

Buradan $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ homojen çözümü elde edilir.

$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$ kabul edilirse

$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$ ve

$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

türevleri denklemde yerine yazılırsa

$(-4A\sin 2X - 4B\cos 2X) - (2A\cos 2X - 2B\sin 2X) - 2(A\sin 2X + B\cos 2X) = \sin 2X$

$\Rightarrow (-6A + 2B)\sin 2X + (-6B - 2A)\cos 2X = 1.\sin 2X + 0.\cos 2X$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6A + 2B = 1 \\ -6B - 2A = 0 \end{array}\right\}$ denklemlerinden $A = -3/20 \quad B = 1/20$ bulunur.

Böylece özel çözümü

$$y_p = -\frac{3}{20}\sin 2X + \frac{1}{20}\cos 2X$$

ve genel çözümü

$$y = c_1 e^{-X} + c_2 e^{2X} - \frac{3}{20}\sin 2X + \frac{1}{20}\cos 2X$$

bulunur.

(3) . $y'' - 4y' + 3y = 9X^2 + 4$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 3$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{X} + c_2 e^{3X}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = AX^2 + BX + C$ kabul edilirse

$y_p' = 2AX + B$ ve $y_p'' = 2A$ olacağından

$2A - 4(2AX + B) + 3(AX^2 + BX + C) = 9X^2 + 4$

$\Rightarrow 3AX^2 + (-8A + 3B)X + 2A - 4B + 3C = 9X^2 + 4$

$\Rightarrow 3A = 9 \ , \ -8A + 3B = 0 \ , \ 2A - 4B + 3C = 4$

$\Rightarrow A = 3 \ , \ B = 8 \ , \ C = 10$

$\Rightarrow y_p = 3X^2 + 8X + 10$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{X} + c_2 e^{3X} + 3X^2 + 8X + 10$

genel çözümü bulunur.

4) $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Belirsiz katsayılar metoduyla çözelim:

$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = -2$ olup homojen çözüm

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ dir.

$y_p = e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$ kabul edilirse

$$y_p' = 2e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + e^{2x}(2A\cos 2x - 2B\sin 2x)$$

$$y_p'' = 4e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + 2e^{2x}(2A\cos 2x - 2B\sin 2x)$$
$$+ 2e^{2x}(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + e^{2x}(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x)$$

$$\Rightarrow y_p' = (2Ae^{2x} - 2Be^{2x})\sin 2x + (2Be^{2x} + 2Ae^{2x})\cos 2x$$

$$\Rightarrow y_p'' = (-8Be^{2x})\sin 2x + 8Ae^{2x}\cos 2x$$

$\Rightarrow \quad y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$ denkleminde yazılırsa

$$(-8Be^{2x}\sin 2x + 8Ae^{2x}\cos 2x) - 4e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$$
$$= e^{2x}\sin 2x + 0 \cdot e^{2x}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-12B - 4A)}_{=1} e^{2x}\sin 2x + (\underbrace{12A - 4B}_{=0})\cos 2x = e^{2x}\sin 2x + 0$$

$$\left.\begin{aligned} -8B - 4A &= 1 \\ 8A - 4B &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = -\frac{1}{20}\,,\quad B = -\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow y_p = e^{2x}\left(-\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x\right)$$

özel çözümü ve

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{2x}\left(-\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x\right)$$

genel çözümü bulunur.

5) $y'' + 9y = 2x \sin 3x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Belirsiz katsayılar metodunu kullanalım:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ homojen çözümü bulunur.

Eğer özel çözüm olarak

$$y_p = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x$$

kabul edilirse y_h ile ortak terimler bulunduğundan dolayı

$$y_p = x\left[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x\right]$$

ifadesi özel çözüm olarak alınmalıdır.

Buradan türev alınarak y_p' ve daha sonra y_p'' türevi hesaplanıp $y''+9y = 2x\sin 3x$ denkleminde yerine yazılırsa ve düzenlenirse

$$(12Cx+2A+6D)\cos 3x + (-12Ax+2C-6B)\sin 3x \equiv 2x\sin 3x$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$12C = 0, \quad 2A+6D=0, \quad -12A = 2, \quad 2C-6B=0$$

bulunur ki bu eşitliklerden belirsiz katsayılar

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B=0, \quad C=0, \quad D = -\frac{1}{18}$$

olarak hesaplanır. Böylece özel çözüm

$$y_p = x\left[\left(-\frac{1}{6}x\right)\cdot\cos 3x - \frac{1}{18}\sin 3x\right]$$

ve genel çözüm

$$y = y_h + y_p = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x - x\left(\frac{1}{6}x\cos 3x + \frac{1}{18}\sin 3x\right)$$

bulunur.

6) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Parametrelerin değiştirilmesi metodunu kullanalım.

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda^2 = i^2 \Rightarrow \lambda = \pm i = 0 \pm i$$

old. homojen çözüm

$$y_h = c_1 e^{0x}\cos x + c_2 e^{0x}\sin x$$

$\Rightarrow \quad y_h = c_1\cos x + c_2 \sin x$ bulunur. Özel çözüm için

$y_p = v_1\cos x + v_2\sin x$ kabul edelim. Böylece

$$\left.\begin{aligned} v_1'(\cos x) + v_2'(\sin x) &= 0 \\ v_1'(-\sin x) + v_2'(\cos x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer metodu ile çözülürse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\tan x \quad , \quad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \int v_1'\,dx = \int -\tan x\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \int v_2'\,dx = \int 1\,dx = x$$

$$\Rightarrow \quad y_p = \ln|\cos x|\cdot\cos x + x\sin x$$

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + \ln|\cos x|\cdot\cos x + x\sin x$$

genel çözümü bulunur.

(7) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Parametrelerin değiştirilmesi metoduyla çözelim:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = v_1 e^{2x} + v_2 e^{x}$ özel çözüm olarak kabul edilirse

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^{2x} + v_2' e^{x} &= 0 \\ v_1' 2e^{2x} + v_2' e^{x} &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{3x} \quad , \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ \frac{1}{1+e^{-x}} & e^{x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \quad , \quad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \int v_1' dx = -\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = -\left[\int \left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx\right]$$

$$= -e^{-x} + \ln(1+e^{-x})$$

$$v_2 = \int v_2' dx = -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -(-\ln(1+e^{-x})) = \ln(1+e^{-x})$$

$$\Rightarrow y_p = \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})\right] \cdot e^{2x} + \ln(1+e^{-x}) \cdot e^{x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \left[-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})\right] \cdot e^{2x} + \ln(1+e^{-x}) \cdot e^{x}$$

genel çözümü bulunur.

(8) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Parametrelerin değiştirilmesi metoduyla çözelim:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -2.$$

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ homojen çözümü bulunur.

$y_p = v_1 e^{-2x} + v_2 x e^{-2x}$ kabul edilirse

$$\left.\begin{aligned} v_1' e^{-2x} + v_2' x e^{-2x} &= 0 \\ v_1'(-2e^{-2x}) + v_2'(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) &= \frac{e^{-2x}}{x^2} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemini Cramer metoduyla çözelim:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \dfrac{e^{-2x}}{x^2} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-4x}}{x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{-4x}}{x^2}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{x}, \qquad v_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \int v_1' \, dx = \int -\frac{1}{x} \, dx = -\ln x$$

$$\Rightarrow v_2 = \int v_2' \, dx = \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_p = (-\ln x) \cdot e^{-2x} - \frac{1}{x} \cdot xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \ln x - e^{-2x}$$

genel çözümü bulunur.

9) $x^3 y''' + x y' - y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem Cauchy-Euler denklemidir. $x = e^t$ olmak üz

$$x^3 y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \quad \text{ve}$$

$$x y' = \frac{dy}{dt}$$

türevleri denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad \text{bulunur.}$$

o halde homojen çözüm

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

$$y = c_1 x + c_2 (\ln x) \cdot x + c_3 (\ln x)^2 \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad y = x\left(c_1 + c_2 \ln x + c_3 (\ln x)^2\right)$$

şeklinde bulunur.

10) $x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -3$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Cauchy-Euler denklemidir. $x = e^t$ dön. yapalım: $\{x = e^t \Rightarrow t = \ln x\}$

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \quad \text{ve} \quad x y' = \frac{dy}{dt}$$

türevleri denklemde yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 \frac{1}{x} \cos(2\ln x) + c_2 \frac{1}{x} \sin(2\ln x)$$

homojen çözümü bulunur.

$y(1) = 1$ başlangıç şartına göre $x=1$ ve $y=1$ alınırsa

$$1 = c_1 \cdot \frac{1}{1} \cos(2\ln 1) + c_2 \frac{1}{1} \sin(2\ln 1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1 = +1} \quad \text{bulunur.}$$

$y'(1) = -3$ başlangıç şartı için y' türevini almalıyız.

$$y' = c_1 \cdot \left[-\frac{1}{x^2} \cdot \cos(2\ln x) - \frac{2}{x^2} \cdot \sin(2\ln x)\right]$$

$$+ c_2 \cdot \left[-\frac{1}{x^2} \sin(2\ln x) + \frac{2}{x^2} \cos(2\ln x)\right]$$

$\Rightarrow$ $x=1$ ve $y'=-3$ yazılırsa

$$-3 = c_1 \cdot \left[-\cos(2\ln 1) - 2 \cdot \sin(2\ln 1)\right]$$

$$+ c_2 \left[-\sin(2\ln 1) + 2\cos(2\ln 1)\right]$$

$$\Rightarrow \quad -3 = -c_1 + 2c_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = -1}$$

$c_1 = 0$ ve $c_2 = -1$ değerleri genel çözümde yerlerine yazılırsa

$$y = \frac{1}{x}\left[\cos(2\ln x) - \sin(2\ln x)\right], \quad x > 0$$

bulunur.