

Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра обчислювальної математики

Звіт

з курсу "Лінійні інтегральні рівняння"

на тему:

Чисельне розв'язування зовнішньої задачі

Діріхле для рівняння Гельмгольца

Виконали

студенти групи ПМп-41

Канафоцький Тарас

Качмар Ірина

Наукові консультанти:

проф. Халко Р.С.

ст. викл. Гарасим Я.С.

ас. Вавричук В.Г.

Львів - 2015

Зміст

Вступ	3
1 Дослідження задачі	5
1.1. Постановка зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца	5
1.2. Фундаментальний розв’язок	5
1.3. Єдиність класичного розв’язку	6
1.4. Зведення до системи ІР першого роду	9
1.5. Коректність системи ІР в банахових просторах	11
1.6. Параметризація і виділення особливості	13
1.7. Метод тригонометричних квадратур	15
2 Чисельні експерименти	18
2.1. Приклад 1	18
2.2. Приклад 2	20
2.3. Приклад 3	21
Висновок	23
Список літератури	24

Вступ

Впродовж останніх років все більшої популярності набувають наближені, чисельні та машинні методи розв'язування інтегральних рівнянь, оскільки їх застосування дозволяє отримати ефективні математичні описи багатьох задач. Наприклад, за допомогою інтегральних рівнянь аналізують процеси в динамічних системах, визначають імпульсну функцію лінійної системи, розв'язують задачі оптимальної фільтрації, задачі відновлення сигналу і тд.

Важливу роль у розв'язуванні ряду задач математичної фізики відіграє метод граничних інтегральних рівнянь, за допомогою якого зводять відповідну диференціальну задачу до еквівалентного інтегрального рівняння. Тому складає інтерес застосування ефективних методів для чисельного розв'язування отриманого інтегрального рівняння. Тому зазначимо, що метод граничних інтегральних рівнянь ефективніший за метод скінченних різниць, метод скінченних елементів та інші, оскільки володіє такими перевагами як :

- розмірність задачі зменшується на 1;
- метод застосовний для областей з границями довільної форми;
- застосовний у випадку необмежених областей.

Метою цієї роботи є чисельне розв'язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца методом граничних інтегральних рівнянь. Таким чином ми зведемо задачу, поставлену для необмеженої області, до задачі для обмеженої області на одиницю меншої розмірності. Проте у цьому випадку виникає недолік пов'язаний з тим, що безпосереднє застосування теорії потенціалів для виведення граничних інтегральних рівнянь класичних крайових задач теорії дифракції призводить до рівнянь, які не мають єдиного розв'язку на власних значеннях внутрішніх крайових задач.

Розділ 1

Дослідження задачі

1.1. Постановка зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена область з границею $\Gamma \in C^2$. Потрібно знайти функцію $u : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, яка задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \quad (1.1)$$

і граничну умову Діріхле

$$u = f \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (1.2)$$

де $k > 0$ - константа, f - задана функція.

1.2. Фундаментальний розв'язок

Фундаментальний розв'язок для рівняння (1.1) записується таким чином [3]

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y,$$

де $H_0^{(1)}(z)$ - функція Ханкеля першого роду нульового порядку має такий вигляд [1]:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z),$$

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} - \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \dots,$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] J_0(z) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{z^2/4}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} - \dots \right],$$

тут $\gamma = 0,57721566490153$.

З цих рядів маємо таку асимптотичну поведінку для фундаментального розв'язку:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{k}{2} + \gamma \right) + O\left(|x - y|^2 \ln \frac{1}{|x - y|}\right), \quad |x - y| \rightarrow 0.$$

Отже, фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца має ті ж властивості, що й фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа.

1.3. Єдиність класичного розв'язку

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ довільна область з границею $\Gamma \in C^2$. Введемо лінійний простір $\mathfrak{R}(D)$ комплекснозначних функцій $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, для яких нормальна похідна на границі існує в тому сенсі, що границя:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (\nu(x), \text{grad } u(x - h\nu(x))), \quad x \in \Gamma,$$

існує рівномірно на Γ . Тут ν - зовнішня нормаль до області D .

Умова випромінювання Зоммерфельда повністю характеризує поведінку розв'язків рівняння Гельмгольца на нескінченості.

Теорема 1.1 *Нехай $u \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ - розв'язок рівняння Гельмгольца*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},$$

і задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \operatorname{grad} u(x) \right) - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|} \right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

рівномірно за всіма напрямками $\frac{x}{|x|}$. Тоді

$$\int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) \right\} ds(y) = \begin{cases} 0, & x \in D \\ u(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \end{cases} \quad (1.3)$$

З цієї теореми випливає, що розв'язок рівняння Гельмгольца є аналітичною функцією двох незалежних змінних.

Результати, пов'язані з єдиністю розв'язку зовнішніх задач, засновані на лемі Релліха [2], яка наведена нижче.

Лема 1.2 Нехай $k > 0$, $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ - розв'язок рівняння Гельмгольца, що задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда і такий, що

$$\int_{|x|=R} |u|^2 ds = o(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Тоді $u = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Теорема 1.3 Нехай $u \in \Re(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ - розв'язок рівняння Гельмгольца, що задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда і такий, що

$$\operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y) \right) \geq 0.$$

Тоді $u = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

З останньої теореми безпосередньо випливає єдиність розв'язку зовнішньої задачі.

Теорема 1.4 *Зовнішня задача Діріхле розв'язна, при чому єдиним чином.*

Доведення сформульованих вище теорем наведено в книзі [3].

1.4. Зведення до системи ІР першого роду

Означення 1.5 Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ - деяка область, $\varphi \in C(\Gamma)$, де $\partial D = \Gamma$.

Тоді функції:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.4)$$

$$v(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\Phi(x, y)}{\nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1.5)$$

називаються відповідно потенціалом простого та подвійного шару з густиною φ . Тут ν – зовнішня нормаль до Γ .

На границі потенціали мають особливість, яку потрібно досліджувати при розв’язуванні крайових задач.

Теорема 1.6 Нехай $\Gamma \in C^2$, $\varphi \in C(\Gamma)$. Потенціал простого шару (1.4) з густиною φ є неперервним в \mathbb{R}^m і на границі Γ справджується :

$$u(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

де інтеграл існує як невласний.

Теорема 1.7 Потенціал простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \quad (1.6)$$

є розв’язком задачі (1.1)-(1.2), якщо густина φ задовольняє таке ІР першого роду:

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma.$$

Оскільки фундаментальний розв'язок $\Phi(x, y)$ є комплекснозначною функцією, запишемо функції φ та f у вигляді:

$$\varphi(y) = \varphi_1(y) + i\varphi_2(y),$$

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x).$$

Виділимо з $\Phi(x, y)$ дійсну та уявну частини:

$$\Phi_1(x, y) = \operatorname{Re}(\Phi(x, y)) = -\frac{1}{4}Y_0(k|x - y|),$$

$$\Phi_2(x, y) = \operatorname{Im}(\Phi(x, y)) = \frac{1}{4}J_0(k|x - y|),$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Після здійснення деяких елементарних перетворень, прирівняємо дійсну та уявну частини в (1.6) і отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \varphi_1(y)\Phi_1(x, y)ds(y) - \int_{\Gamma} \varphi_2(y)\Phi_2(x, y)ds(y) = f_1(x) \\ \int_{\Gamma} \varphi_1(y)\Phi_2(x, y)ds(y) + \int_{\Gamma} \varphi_2(y)\Phi_1(x, y)ds(y) = f_2(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

1.5. Коректність системи ІР в банахових просторах

Відомо, що розв'язування ІР першого роду є некоректною задачею в просторі $C(\Gamma)$. Оператор ІР першого роду з неперервним або слабо-сингулярним ядром є компактним в $C(\Gamma)$, якщо $\Gamma \in C^1$. Однак для коректності рівняння важливими є і простори в яких діє оператор. Виявляється, що при вдалому виборі цих просторів отримані ІР першого роду є коректними.

Означення 1.8 Дійсна або комплекснозначна функція f , визначена на множині $G \subset \mathbb{R}^n$, називається рівномірно неперервною за Гьольдером з показником $0 < \alpha \leq 1$, якщо існує константа $C > 0$, така що

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in G.$$

Позначимо через $C^{0,\alpha}(G)$ - лінійний простір обмежених та рівномірно неперервних за Гьольдером з показником α функцій, визначених в G . Такий простір називають простором Гьольдера. Відомо [5], що при нормі визначеній таким чином:

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in G} |f(x)| + \sup_{x, y \in G} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad x \neq y$$

простір Гьольдера є банаховим.

Теорема 1.9

$$(S\varphi)(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma;$$
$$(T\varphi)(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma.$$

Оператори $T : C^{1,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\Gamma)$ і $S : C^{0,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma)$ є обмеженими і самоспряженими відносно відповідних дуальних систем. Крім того:

$$ST = K^2 - I,$$

$$TS = (K')^2 - I.$$

Теорема 1.10 Для функції f такої, що

$$f = f_1 + if_2, \quad f_1 \in C^{1,\alpha}(\Gamma), \quad f_2 \in C^{1,\alpha}(\Gamma),$$

існує єдиний розв'язок IP першого роду задачі Діріхле φ такий, що

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \varphi_1 \in C^{0,\alpha}(\Gamma), \quad \varphi_2 \in C^{0,\alpha}(\Gamma).$$

1.6. Параметризація і виділення особливості

Нехай задана крива Γ у загальному параметричному вигляді:

$$\Gamma = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad t \in [0, 2\pi]\},$$

де функція $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — ін'єктивна, 2π -періодична і така, що $|x'(t)| > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi], x \in C^2[0, 2\pi]$.

Нескінченний ряд у визначенні $Y_0(z)$ позначимо як $L(z)$ і запишемо систему (1.7) у такому вигляді:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) H_1(t, \tau) d\tau - \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) H_2(t, \tau) d\tau = g_1(t), \\ \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) H_2(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) H_1(t, \tau) d\tau = g_2(t), \end{cases} \quad (1.8)$$

де

$$H_1(t, \tau) = -\frac{1}{4} \left[\frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right\} J_0(z) + L(z) \right], \quad \tau \neq t;$$

$$H_2(t, \tau) = \frac{1}{4} J_0(z);$$

$$\mu_i(\tau) = \varphi_i(x(\tau)) \cdot |x'(\tau)|, \quad i = 1, 2;$$

$$g_i(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, 2;$$

$$z = k|x(t) - x(\tau)|.$$

Бачимо, що ядро $H_1(t, \tau)$ має логарифмічну особливість. Для того, щоб виділити її здійснимо деякі елементарні перетворення і запишемо $H_1(t, \tau)$ таким чином:

$$H_1(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \left[J_0(z) \ln \left(\frac{1}{z} \right) + S(z) \right],$$

де

$$S(z) = J_0(z)(\ln 2 - \gamma) - \frac{\pi}{2} L(z).$$

$$\begin{aligned}
H_1(t, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} J_0(z) \ln \frac{1}{k^2 |x(t) - x(\tau)|^2} + S(z) \pm \frac{1}{2} J_0(z) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} J_0(z) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) + S(z) + \frac{1}{2} J_0(z) \ln \frac{4 \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right)}{ek^2 |x(t) - x(\tau)|^2} \right].
\end{aligned}$$

Ядро $H_1(t, \tau)$ можна подати у вигляді

$$H_1(t, \tau) = H_1^{(1)}(t, \tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) + H_1^{(2)}(t, \tau),$$

де

$$\begin{aligned}
H_1^{(1)}(t, \tau) &= -\frac{1}{4\pi} J_0(z), \\
H_1^{(2)}(t, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} J_0(z) \ln \frac{4 \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right)}{ek^2 |x(t) - x(\tau)|^2} + S(z) \right].
\end{aligned}$$

Знайдемо границю

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \ln \frac{4 \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right)}{ek^2 |x(t) - x(\tau)|^2} = \ln \frac{1}{ek^2 |x'(t)|^2},$$

звідси отримаємо

$$H_1^{(2)}(t, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} J_0(0) \ln \frac{1}{ek^2 |x'(t)|^2} + S(0) \right].$$

Отже, система (1.8) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \left[H_1^{(1)}(t, \tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) + H_1^{(2)}(t, \tau) \right] d\tau - \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) H_2(t, \tau) d\tau = g_1(t), \\ \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) H_2(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) \left[H_1^{(1)}(t, \tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) \right) + H_1^{(2)}(t, \tau) \right] d\tau = g_2(t). \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(1.9)

1.7. Метод тригонометричних квадратур

Чисельне розв'язування системи (1.9) здійснимо методом квадратур [4]. Для цього на розбитті $t_i := \frac{i\pi}{n}$, $i = \overline{0, 2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ розглянемо такі квадратурні формули:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j), \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) R_j^n(t), \quad (1.11)$$

з ваговими функціями

$$R_j^n(t) := -\frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_j) + \frac{\cos n(t - t_j)}{n} \right\},$$

Ці формули отримані з використанням тригонометричної інтерполяції для гладкої частини f підінтегральної функції і подальшого точного інтегрування [5].

Введемо простір T_n тригонометричних поліномів $q(t)$:

$$q(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cos(it) + \sum_{i=1}^n b_i \sin(it) \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}.$$

Застосуємо наведені квадратурні формули для апроксимації інтегралів у системі і отримаємо систему розмірності $4n \times 4n$ з невідомими значеннями $\tilde{\mu}_{1i} \approx \mu_1(t_i)$, $\tilde{\mu}_{2i} \approx \mu_2(t_i)$, $i = \overline{0, 2n-1}$:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{1j} \left[2\pi R_j^n(t_i) H_1^{(1)}(t_i, t_j) + \frac{\pi}{n} H_1^{(2)}(t_i, t_j) \right] - \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{2j} H_2(t_i, t_j) = g_1(t_i), \\ \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{1j} H_2(t_i, t_j) + \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{2j} \left[2\pi R_j^n(t_i) H_1^{(1)}(t_i, t_j) + \frac{\pi}{n} H_1^{(2)}(t_i, t_j) \right] = g_2(t_i). \end{cases} \quad (1.12)$$

У праці [4] на підставі теорії колективно компактних операторів досліджено збіжність і похибку пропонованого методу. Зокрема, якщо

$\Gamma \in C^\infty$ і $g_1, g_2 \in C^{p+1}$, то має місце оцінка $\|\tilde{\mu}_{1n} - \mu_1\|_{0,\alpha} \leq Cn^{-p}$ і $\|\tilde{\mu}_{2n} - \mu_2\|_{0,\alpha} \leq Cn^{-p}$, де $\tilde{\mu}_{1n}, \tilde{\mu}_{2n}$ - тригонометричні поліноми побудовані за допомогою значень μ_{1j}, μ_{2j} , знайдених з системи (1.12). Тому цей метод належить до алгоритмів без насичення, тобто його точність пов'язана з гладкістю вхідних даних. Якщо ж g_1, g_2 і Γ аналітичні, то отримуємо експоненційну збіжність:

$$\|\tilde{\mu}_{1n} - \mu_1\|_{0,\alpha} \leq Ce^{-n\sigma},$$

$$\|\tilde{\mu}_{2n} - \mu_2\|_{0,\alpha} \leq Ce^{-n\sigma}, \sigma > 0.$$

Наближений розв'язок задачі (1.1)-(1.2) шукатимемо у вигляді

$$u_1(x) = Re[u(x)] = \int_{\Gamma} \varphi_1(y) \Phi_1(x, y) ds(y) - \int_{\Gamma} \varphi_2(y) \Phi_2(x, y) ds(y),$$

$$u_2(x) = Im[u(x)] = \int_{\Gamma} \varphi_1(y) \Phi_2(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma} \varphi_2(y) \Phi_1(x, y) ds(y),$$

де $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, а ядра мають вигляд

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{4} \left[\frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right\} J_0(z) + L(z) \right], \quad \tau \neq t,$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{4} J_0(z),$$

$$z = k|x - y|.$$

Тепер, знову застосувавши відповідну квадратуру, отримаємо зображення розв'язку

$$u_1(x) \approx \frac{\pi}{n} \left[\sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{1j} H_1(x, t_j) - \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{2j} H_2(x, t_j) \right],$$

$$u_2(x) \approx \frac{\pi}{n} \left[\sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{1j} H_2(x, t_j) + \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\mu}_{2j} H_1(x, t_j) \right],$$

$$\text{де } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},$$

$$H_1(x, \tau) = -\frac{1}{4} \left[\frac{2}{\pi} \left\{ \ln \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right\} J_0(z) + L(z) \right], \quad x(\tau) \neq x,$$

$$H_2(x, \tau) = \frac{1}{4} J_0(z),$$

$$z = k|x - x(\tau)|.$$

Розділ 2

Чисельні експерименти

Для чисельної перевірки розглянутого методу для розв'язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца використаємо наступні тестові приклади.

2.1. Приклад 1

У якості точного розв'язку задачі (1.1)-(1.2) при $k = 0.1$ в області $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ візьмемо звуження фундаментального розв'язку

$$u_1(x) = \Phi_1(x, y^*), \quad u_2(x) = \Phi_2(x, y^*), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},$$

де

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{4}Y_0(k|x - y|),$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{4}J_0(k|x - y|),$$

$$y^* \in D.$$

Тоді крайова умова матиме вигляд

$$f_1(x) = \Phi_1(x, y^*), \quad f_2(x) = \Phi_2(x, y^*) \text{ на } \Gamma.$$

Нехай границя Γ є колом з радіусом $R = 1$:

$$\Gamma = \{x(t) = (R \cos t, R \sin t), t \in [0, 2\pi]\}, \quad \text{а} \quad y^* = (0.5, 0).$$

Тоді розв'язок шукатимемо на кривій Γ_0 , що є колом з радіусом $r = 4$:

$$\Gamma_0 = \{x(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in [0, 2\pi]\}.$$

Табл. 2.1: Абсолютні похибки дійсної та уявної частини розв'язку

n	$\ Re[u - u_n]\ _{\infty, \Gamma_0}$	$\ Im[u - u_n]\ _{\infty, \Gamma_0}$
4	$1,63 \times 10^{-4}$	$2,62 \times 10^{-5}$
8	$2,94 \times 10^{-7}$	$5,07 \times 10^{-8}$
16	$2,15 \times 10^{-12}$	$3,85 \times 10^{-13}$
32	$1,38 \times 10^{-16}$	$1,67 \times 10^{-16}$

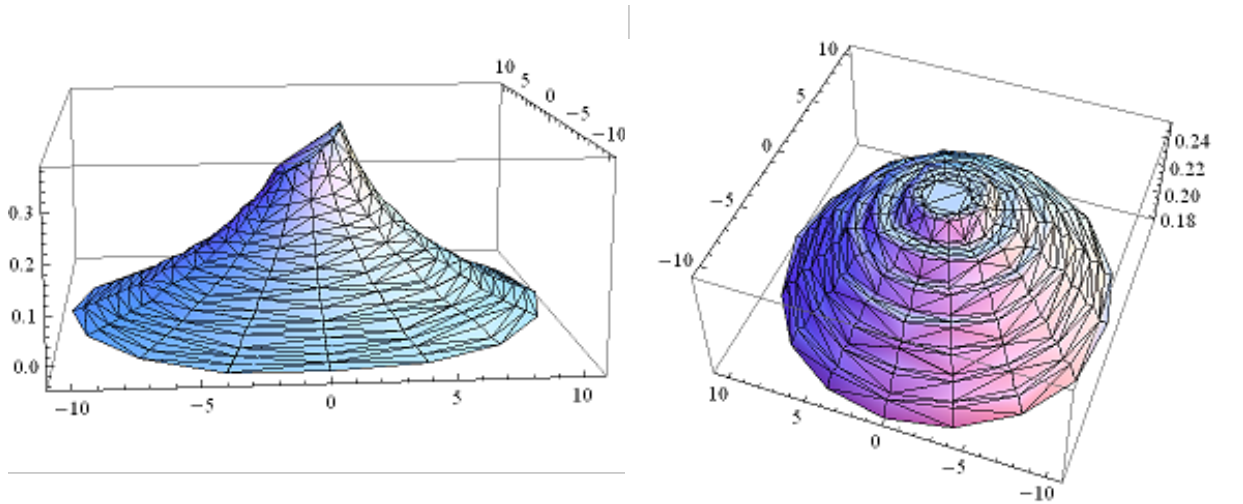


Рис. 2.1: Дійсна і уявна частини наближеного розв'язку

2.2. Приклад 2

Нехай Γ задана наступним чином:

$$\Gamma = \{x(t) = (3 + 2 \sin t)(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]\},$$

$y^* = (0, 0)$, параметр $k = 0.1$. Тоді розв'язок задачі (1.1)-(1.2) шукатимемо на кривій Γ_0 , що є колом з радіусом $R = 8$.

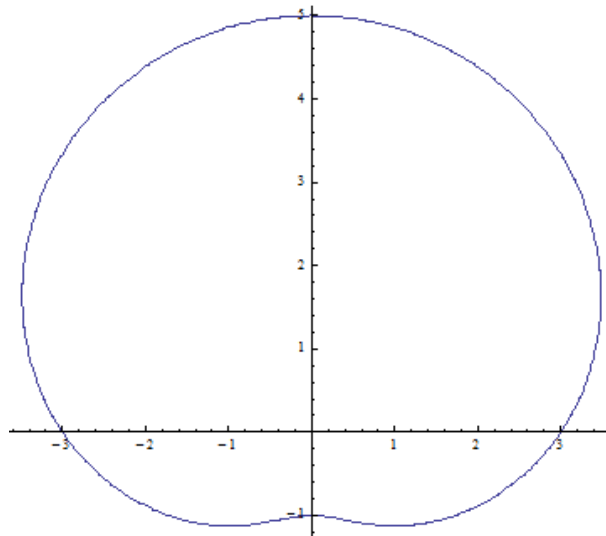


Рис. 2.2: Гранична крива Γ

Табл. 2.2: Абсолютні похибки дійсної та уявної частини розв'язку

n	$\ Re[u - u_n]\ _{\infty, \Gamma_0}$	$\ Im[u - u_n]\ _{\infty, \Gamma_0}$
4	$3,06 \times 10^{-4}$	$1,51 \times 10^{-5}$
8	$4,39 \times 10^{-6}$	$1,87 \times 10^{-9}$
16	$2,15 \times 10^{-9}$	$1,54 \times 10^{-15}$
32	$1,07 \times 10^{-15}$	$1,94 \times 10^{-16}$

2.3. Приклад 3

Нехай границя Γ є колом з радіусом $R = 1$:

$$\Gamma = \{x(t) = (R \cos t, R \sin t), t \in [0, 2\pi]\},$$

$f_1 = 5$, $f_2 = 0$ на Γ , а $k = 0.1$.

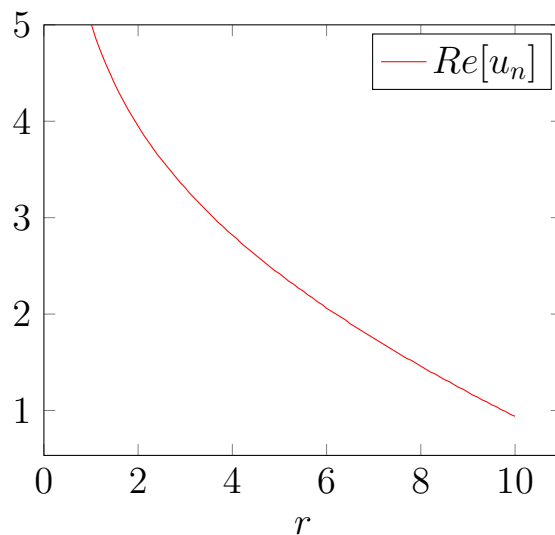
Розв'язок шукатимемо у точках, що лежать на прямій Γ_0 :

$$\Gamma_0 = \{x(r) = r(1, 0), r > 1\}.$$

Табл. 2.3: Дійсна та уявна частина розв'язку в точках на прямій Γ_0

	n=8		n=16		n=32	
r	$Re[u_n]$	$Im[u_n]$	$Re[u_n]$	$Im[u_n]$	$Re[u_n]$	$Im[u_n]$
1.01	5.160280	-0.104271	5.044565	-0.029128	5.002398	-0.001723
2	3.950891	0.657723	3.950889	0.657724	3.950889	0.657724
10	0.937440	1.884250	0.937440	1.884250	0.937440	1.884250
100	-0.493795	-0.480444	-0.493795	-0.480444	-0.493795	-0.480444

Графік дійсної частини розв'язку на прямій Γ_0



Графік уявної частини розв'язку на прямій Γ_0

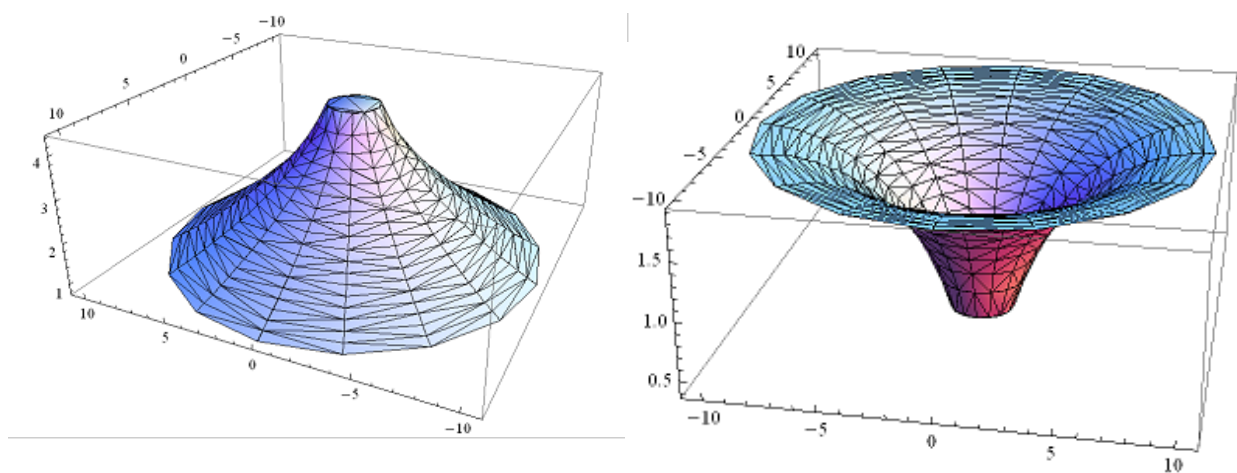
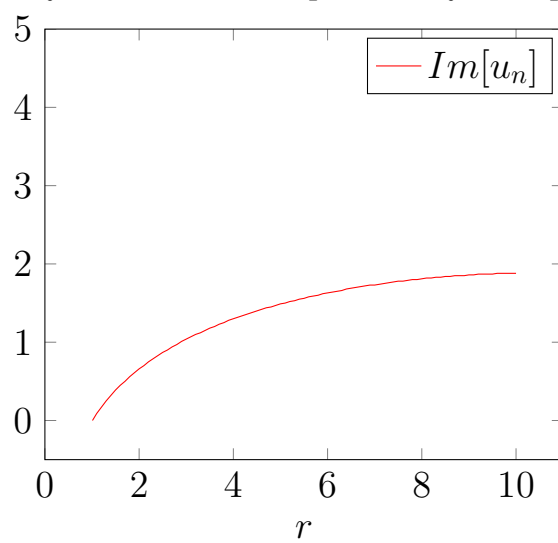


Рис. 2.3: Дійсна і уявна частини наближеного розв'язку

Висновок

У даній роботі розглянуто метод граничних інтегральних рівнянь для наближеного розв'язування зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца. Визначено фундаментальний розв'язок для цієї задачі. Показано її коректність. З використанням властивостей потенціалів простого шару отримано систему ІР першого роду з гладкими і сингулярними підінтегральними функціями. Далі задачу Діріхле перетворено у систему лінійних алгебричних рівнянь, шляхом параметризації та наближеного обчислення інтегралів за допомогою відповідних тригонометричних квадратурних формул.

Проведено чисельне розв'язування задачі у необмежених областях з границями, що задаються зірковими функціями, та підтверджено правильність отриманих результатів чисельними експериментами.

Список літератури

- [1] *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М.Абрамовиц, И.Стиган. - М.:Наука, 1979. - 830 с.
- [2] *Захаров Е.* О единственности и существовании решений интегральных уравнений электродинамики неоднородных сред./ Захаров Е. - М.:Издательство МГУ, 1975, - С.37 -49.
- [3] *Колтон Д.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р.Крес. - М.:Мир, 1987. - 311 с.
- [4] *Chapko R.,Kress R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind// World of Scientific Series in Applicable Analysis -Vol.2 Contributions in Numerical Mathematics (Agarwal, ed.) World Scientific, Singapore, 1993. P.127-140.
- [5] *Kress R.* Linear Integral Equations, 2nd. ed. /R. Kress - New York: Springer-Verlag ,Heidelberg, 1999. - 367 p.