32. Bundeswettbewerb Informatik, Runde 2

Ausarbeitungen zu den Aufgaben „Buschfeuer“ und „Lebenslinien“

Philip Wellnitz

Vorwort

Diese Welt ist voller Rätsel und Probleme.

Zwei von ihnen habe ich auf den folgenden Seiten versucht zu lösen,
wobei sich mir durchaus neue Probleme in den Weg stellten.

Keine sollten dagegen beim Starten meiner Programme aus einem Linux-artigen Terminal auftreten.
Es sollte jedoch speziell bei meinen Programm zur Lösung von Aufgabe 1 darauf geachtet werden, dass das Terminal ASCII-Escape-Sequenzen unterstützt, damit die ausgegebenen Kunstwerke aka. Lösungen auch richtig dargestellt werden können.

Diese Welt ist voller Rätsel und Probleme. Viele[1] sind lösbar.

Inhaltsverzeichnis

[1] Von Zeit zu Zeit könnte ich an dieser Stelle auch ein *Wenige* vertreten...

1 Aufgabe 1 - Buschfeuer

1.1 Lösungsidee

Ein *Feld* ist ein quadratisches Stück Land, welches genau einen folgender Zustände inne haben kann: Feld

BRENNBAR Das Stück Land ist ind der Lage, zu brennen.

BRENNEND Ein brennendes Stück Land.

GELÖSCHT Ein Stück Land, welches nie wieder brennen wird.

LEER Ein leeres Stück Land.

Alle Felder haben die selbe Fläche.

Ein *Wald* ist nun die rechteckig-gitterförmige Anordnung von $n \times m$ Feldern. Die *Umgebung* $U(f)$ eines Feldes f in einem Wald W ist dabei die Menge an Feldern, welche in W eine gemeinsame Kante mit f haben. Wald Umgebung

Der Wald wird nun diskret beobachtet. Es ist dabei sichergestellt, dass nur sofern ein Feld bei einer Beobachtung brennend ist, dieses und jedes brennbare Feld seiner Umgebung bei der nächsten Beobachtung brennen werden, sofern diese nicht schon brennen. Diese Eigenschaft des Waldes sei mit *Feuerausbreitung* bezeichnet.

Ab der 2. Beobachtung kann pro Beobachtung genau 1 (brennendes) Feld gelöscht werden. Wird ein brennendes Feld gelöscht, so fängt seine Umgebung bis zur nächsten Beobachtung nicht an zu brennen.
Die erste Beobachtung, ab der ein Feld f brennt, heiße *Entflammung* von f.

Ziel ist es nun, eine Folge von zu löschenden Feldern anzugeben, sodass bei deren Einhaltung die Anzahl der brennenden Felder minimiert wird.

Im Folgenden seinen diejenigen Felder, welche bei mindestens 2 Beobachtungen brennend waren, als *verkohlt* bezeichnet.
Nach der Feuerausbreiteung muss jedes Feld der Umgebung eines verkohlten Feldes c brennend sein oder gewesen sein oder seit der Entflammung von c nicht brennbar gewesen sein.

Sei nun zunächst der Fall betrachtet, dass nur brennende Feler gelöscht werden können.

Es ist leicht zu erkennen, dass es die Lösung nicht verschlechtert, wenn ab der 2. Beobachtung bei jeder Beobachtung 1 brennendes Feld gelöscht wird. Daher wird im Folgenden davon ausgegangen, dass bei jeder Beobachtung (ab der 2.) 1 brennendes Feld gelöscht wird. Es gilt nun also für jede dieser Beobachtungen dasjenige brennende Feld zu finden, durch dessen Löschung die Anzahl der im Folgenden (nicht unbedingt umittelbar folgend) zu brennen anfangenden Felder minimiert.

Sei nun eine Beobachtung fixiert.
Nun soll für ein brennendes Feld F ein Maß $\mu(F)$ dafür gefunden werden, mit dem bestimmt werden kann, welches Feld zum Löschen in obigem Sinne am Besten ist. Sei $\mu(F)$ daher die Anzahl der brennbaren Felder, zu denen F das brennende Feld mit dem *kleinster Abstand* ist. Dieser kürzeste Abstand ist dabei die minimale Anzahl an Beobachtungen, bis das Feld anfängt zu brennen. (Unter der Annahme, dass keine weiteren Felder gelöscht

werden.)
Löscht man nun F, so wird der kleinste Abstand aller Felder höchstens größer; bei allen Feldern, bei deren kürzestem Abstand F jedoch keine Rolle spielte (bei denen der Abstand zu einem anderen brennenden Feld also kleiner oder gleich dem Abstand zu F ist), tritt keine Veränderung auf.
Für 2 Werte $\mu(F_1)$ und $\mu(F_2)$ gilt nun: ist $\mu(F_1) < \mu(F_2)$, so erzeugte F_2 bei mehr Feldern eine Vergrößerung des kleinster Abstands als F_1.
Die *minimale Lebenszeit* eines Feldes sei nun eben der kleinste Abstand zu einem brennenden Feld. Es ist leicht zu erkennen, dass nach mindesten so vielen Beobachtungen, wie die minimale Lebenszeit eines Feldes ist, das Feld zu brennen beginnt.
$\mu(F)$ gibt also auch die Anzahl der Felder an, deren minimale Lebenszeit allein durch F besitmmt ist. Löscht man F, so wird, wie schon gesehen, die minimale Lebenszeit all dieser Felder höchstens größer, es ist also am Besten, dasjenige Feld $F^\star$ zum Löschen auszuwählen, welches $\mu(\cdot)$ für alle aktuell brennenden Felder maximiert.

Es gilt nun noch μ effizient zu bestimmen. Da ein Wald eine rechteckige Gitterform besitzt, ist der kürzeste Abstand zwischen 2 Feldern 1, ganau dann, wenn diese Felder eine gemeinsame Kante haben.
Fasse man das Gitter nun als Graphen auf, wobei die Felder die Knoten sind und zwischen 2 Knoten eine Kante ist, genau dann, wenn zwischen diesen Feldern eine Kante ist. Es nun offensichtlich, dass dieser Graph ungewichtet und ungerichtet ist. Somit ist das Finden von kleinsten Abständen mittels einer *Breitensuche* möglich.
Dabei sind die Startfelder der Breitensuche die brennenden Felder. Dabei muss für jedes dieser brennenden Felder eine eigene Breitensuche gestartet werden; wobei für alle Breitensuchen gemeinsam die ermittelten kleinsten Abstände gespeichert werden müssen. Zusätzlich zu den kleinsten Abständen müssen auch die dazugehörigen brennenden Felder gespeichert werden, von denen pro Feld eventuell mehr als 1 existiert. Weiterhin muss die Breitensuche nur brennbare Felder besuchen.
Sind die kleinsten Abstände gefunden, so kann μ ermittelt werden, mithilfe simplem durchiterieren über alle Felder und gleichzeitigem Zählen der Felder, für die nur 1 brennendes Feld gespeichert wurde.

In Pseudocode:

```
1  Wald    ; //Der Wald; ein 2D-Container
2
3  AnfangsBrennendeFelder()        { //Ermittelt die von Anfang
       brennenden Felder
4    brennendeFelder := null; //1D-Container für Positionen
         brennender Felder
5    for (i = 0..Wald.Höhe())
6      for (j = 0..Wald.Breite())
7        if (Wald[i,j] == BRENNEND)
8          brennendeFelder.Add((i;j)); //Gefundene Position
             hinzufügen
9
10   return brennendeFelder; //Alle gefundenen Positionen
       zurückgeben
11 }
12
13 NächsteBeobachtung(aktBrennendeFelder) { //Ermittelt die bei der
       nächsten Beonachtung brennenden Felder, aus den Feldern, die
       aktuell brennen
```

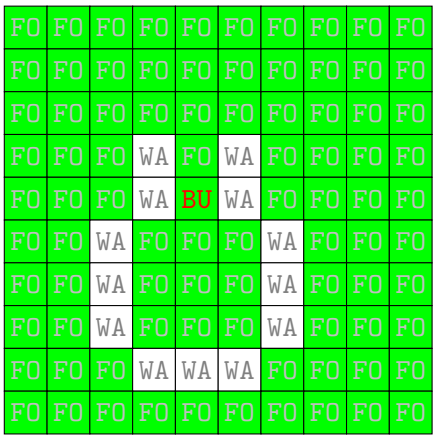
```
14    neuBrennendeFelder := null;
15    for all((x;y) from aktBrennendeFelder)
16      if(Wald[x,y] == GELÖSCHT)
17        continue; //Feld kann kein Feuer verteilen
18
19      Wald[x,y] := VERKOHLT; //2 mal brennende Felder sind verkohlt
20      for all((x';y') from Umgebung((x;y)))
21        if(Wald[x',y'] == BRENNBAR)
22          neuBrennendeFelder.Add((x';y')); //Gefundene Position
              hinzufügen
23          Wald[x',y'] := BRENNEND; //Wald beginnt zu brennen
24
25    return neuBrennendeFelder;
26  }
27
28  GetOptBewässerungspunkt(aktBrennendeFelder) { //Ermittelt den
      besten Bewässerungspunkt
29    kleinsterAbstand := null; //Speichert für alle Felder des
        Waldes den kleinsten Abstand zu jedem Feld aus
        aktBrennendeFelder
30
31    for(i = 0..kleinsterAbstand.Size())
32          Fülle kleinsterAbstand[i] mithilfe einer Breitensuche
33
34    anzEindeutigKleinstAbstände := null;
35
36    for (i = 0..Wald.Höhe())
37      for (j = 0..Wald.Breite())
38        if(Es ex. k mit kleinsterAbstand[k][i,j] eindeutiges
            Minimum für alle mögliche k)
39          anzEindeutigKleinstAbstände[k]++;
40
41    return aktBrennendeFelder[k, sodass
        anzEindeutigKleinstAbstände[k] maximal];
42  }
43
44  SimuliereFeuer() { //Die eigentliche Berechnung
45    aktBrennendeFelder := AnfangsBrennendeFelder(); //Anfangs
        interessante Felder; Kann brennende, von Feuer umschlossene
        Felder beinhalten
46    while(!aktBrennendeFelder.Empty()) //Solange es brennende
        Felder gibt
47      aktBrennendeFelder := NächsteBeobachtung(
          aktBrennendeFelder) //Ermittle die bei nächster
          Beobachtung brennenden Felder
48          if(aktBrennendeFelder.Empty())
49            break;          //Keine Felder brennen mehr
50
51    Wald[GetOptBewässerungspunkt(aktBrennendeFelder)] := GELÖSCHT;
        //Lösche das aktuell beste Feld
52  }
```

1.1.1 Korrektheit

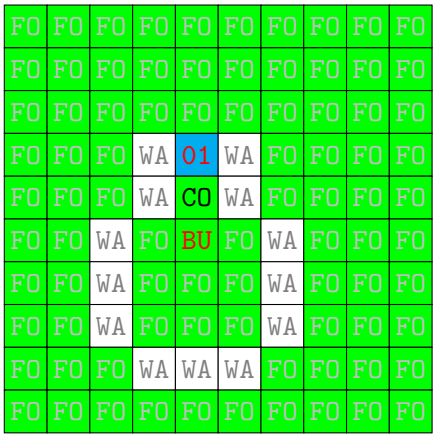
Wie schon beschrieben, wird bei jeder Beobachtung das für diese Beobachtung nach μ beste Feld zum Löschen ausgewählt.
Es gilt also zu zeigen, dass insgesamt nicht weniger Felder abbrennen, sollte bei einer Beobachtung nicht das für diese Beobachtung nach μ optimalste Feld gelöscht werden.

Es lässt sich jedoch ein einfaches Beispiel konstruieren, indem eben dies der Fall ist; eine bessere Lösung also gefunden werden kann, wird nicht das nach μ optimalste Feld gelöscht:

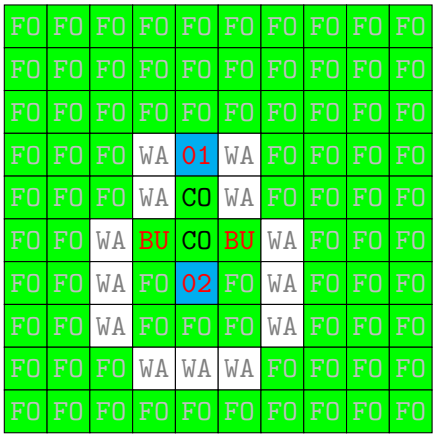
Die Löschung nach dem Algorithmus:



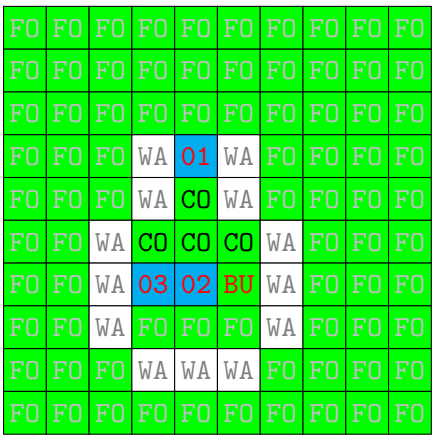

```
--- At time 1: Water spot (4|3)
```



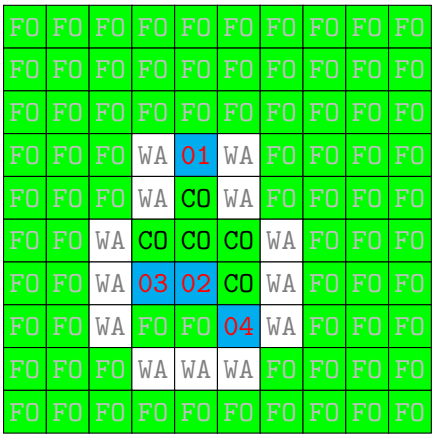

```
--- At time 2: Water spot (4|6)
```



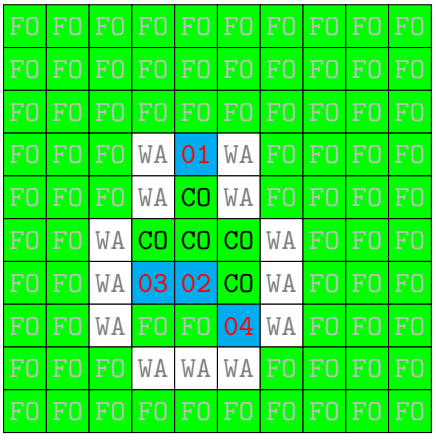

```
--- At time 3: Water spot (3|6)
```




```
--- At time 4: Water spot (5|7)
```



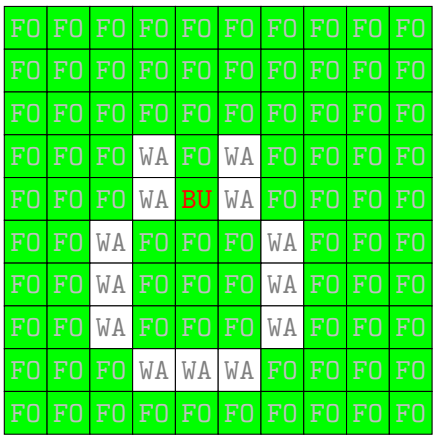

```
--- And you'll find 5 pieces of coal
and 4 pieces of watered coal
```



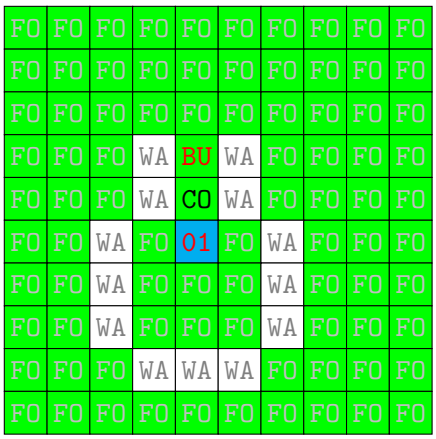

```
Explanation:
```

```
WA  --- EMPTY
FO  --- BURNABLE
BU  --- BURNED
CO  --- COAL (doubly burned)
##  --- WATERED at time ##
Fields can have more than 1 state.
```

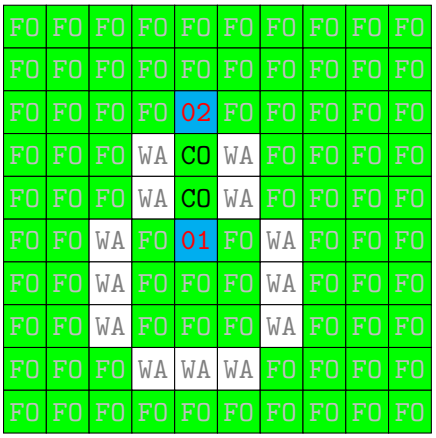
Eine bessere Löschung:



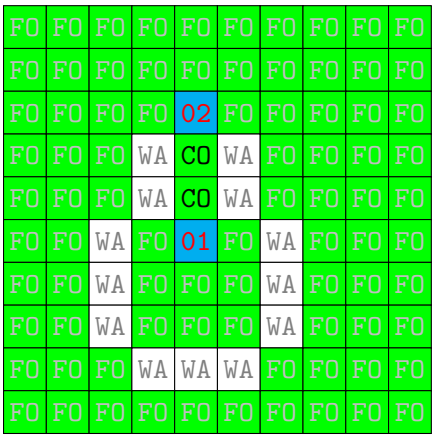

```
--- At time 1: Water spot (4|5)
```




```
--- At time 2: Water spot (4|2)
```




```
--- And you'll find 2 pieces of coal
and 2 pieces of watered coal
```




```
Explanation:
WA  --- EMPTY
FO  --- BURNABLE
BU  --- BURNED
CO  --- COAL (doubly burned)
##  --- WATERED at time ##
Fields can have more than 1 state.
```

Der Algorithmus ist also nicht optimal, es handelt sich um eine Heuristik. Dabei liefert sie bei vielen Eingaben *ziemlich* gute Ergebnisse[2]. Zum Vergleich habe ich den Brute-Force-Ansatz implementiert, der garantiert optimale Löschungen liefert.

1.1.2 Laufzeitanalyse

Der Brute-Force-Ansatz probiert alle Möglichkeiten an verschiedenen Löschungen und wählt die optimalste. Grob überschlagen gibt es für jede Löschung 4 Möglichkeiten, somit ergibt sich eine grobe obere Schranke für den Worst-Case von $\mathcal{O}(4^b)$, mit b der Anzahl der Löschungen der Lösung[3]. Dieser Ansatz hat also eine exponenzielle Laufzeit, im Gegensatz zu der Heuristik wie im Folgenden gezeigt wird.

[2] Siehe dazu Sektion Beispiele

[3] Es gibt wohl Pfade im Suchbaum, die länger als b sind; durch geschicktes Pruning ist diese Schranke jedoch einhaltbar

Eine Breitensuche hat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(V + E)$ in einem Graphen mit E Kanten und V Knoten. Speziell hat der Graph bei dieser Aufgabe $n \cdot m$ Knoten und $(n-1) \cdot (m-1)$ Kanten.
Eine Breitensuche wird nach obigem Algorithmus bei jeder der insgesamt b Beobachtungen $f(b_i)$-mal benötigt, wobei $f(b_i)$ die Anzahl der zu betrachtenden brennenden Felder bei Beobachtung b_i sei.
Eine Breitensuche besucht nach obigem Algorithmus höchstens $n \cdot m - f(b_i)$ Felder; die Breitensuchen haben also eine Laufzeit von $\mathcal{O}(f(b_i) \cdot (2 \cdot n \cdot m - f(b_i)))$. Es ist leicht zu erkennen, dass die Funktion $F(x) = x(a-x)$ das Maximum an der Stelle $x_{max} = \frac{a}{2}$ hat. Somit gilt $\mathcal{O}(f(b_i) \cdot (2 \cdot n \cdot m - f(b_i))) = \mathcal{O}(\frac{nm}{2}(2nm - \frac{nm}{2}) = \mathcal{O}(\frac{3n^2m^2}{4}) = \mathcal{O}(n^2m^2)$ Es ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(n^2 \cdot m^2 \cdot b)$. Mit $b = \mathcal{O}(n \cdot m)$ ergibt sich eine (wohl sehr grobe) obere Schranke der Laufzeit von $\mathcal{O}(n^3 \cdot m^3)$.
Mit diesem Algorithmus lassen sich also Lösungen für Wälder gut berechnen, deren Dimensionen 200 nicht überschreiten, bei denen also $\max n, m \leq 200$.

1.1.3 Eine andere Lösungsidee

Aus jeder Beobachtung kann nur eine bestimmte Anzahl an anderen Beobachtungen entstehen. Dabei gibt es eine *Startbeobachtung*, nämlich die erste Beobachtung überhaupt. Auch gibt es letzte Beobachtungen, nach denen sich das Feuer nicht mehr ändert.
Es entsteht ein *Zustandsgraph* $Z = (B, E)$, welcher die Beobachtungen als Knoten hat und bei dem zwischen 2 Knoten eine Kante ist, genau dann, wenn es möglich ist von einer Beobachtung zu einer anderen gelangen kann; da sich das Feuer immer weiter ausbreitet ist der Graph also ein gerichteter, azyklischer Graph.

Ist der kürzeste Pfad von einer letzten Beobachtung zur Startbeobachtung kürzer, als der kürzeste Pfad von einer anderen letzten Beobachtung zur Startbeobachtung, so ist auch die Gesamtanzahl der brennenden Felder der ersten Lösung geringer als die der zweiten. Nur unter den Lösungen, die gleich weit von der Startbeobachtung entfernt sind muss die Güte explizit verglichen werden.

Daraus lässt sich direkt ein Algorithmus ableiten. Von der Startbeobachtung wird eine BFS auf dem Zustandsgraphen gestartet. Dabei wird anstatt der Queue eine Priority Queue verwendet, welche die Elemente zuerst nach Entfernung von der Startbeobachtung und dann nach der Anzahl der brennenden Felder sortiert. Diese Verwendung der Breitensuche wird oft auch *State-Space-Search* genannt.

Wird das Problem auf diese Weise gelöst, so lässt sich auch überprüfen, ob es besser sein kann, nicht brennende Felder zu löschen. Dazu wird zusätzlich zu jeder Beobachtung noch eine weitere Zahl gespeichert. Diese Zahl gibt die Anzahl der Beobachtungen an, bei welchen keine Löschung durchgeführt wurde. Ist bei einer Beobachtung diese Zahl nun größer oder gleich als die verbleibende Anzahl an brennenden Feldern, so kann das gesamte Feuer gelöscht werden. Die Löschungen werden sozusagen "nach hinten verschoben". In der Realität würde dann keine Löschung ausgelassen sondern ein nicht brennendes Feld gelöscht werden.

Mit dieser Änderung wird der Zustandsgraph etwas größer, der eigentliche Algorithmus funktioniert jedoch weiterhin.

1.1.4 Laufzeitanalyse

Die Berechnung der Nachbarknoten einer Beobachtung im Zustandsgraphen benötigt schlimmstenfalls $\mathcal{O}(nm)$. Die State-Space-Search besucht wie eine normale Breitensuche schlimmstenfalls jeden Knoten im Zustandsgraphen 1 mal, bricht jedoch nach der ersten gefundenen Lösung ab. Somit werden maximal $\mathcal{O}((nm)^k)$ Berechnungen durchgeführt, wenn k die Anzahl der Löschungen in der Lösung ist. Somit ist dieser Algorithmus im Worst-Case-Szenario nicht besser als ein Brute-Force-Algorithmus; allerdings wird die Lösungssuche in der Regel stark geprunt.

Auch benötigt dieser Algorithmus schlimmsten exponentiell viel Speicherplatz.

1.2 Umsetzung

Für die Umsetzung habe ich die Sprache `C++` verwendet. Dabei habe ich sowohl den Brute-Force-Ansatz als auch die Heuristik implementiert.
Zunächst habe ich mir für Wälder eine Klasse `Woods` geschrieben. Deren Deklaration findet sich in der Datei `Woods.h`, die Implementierung in der Datei `Woods.cpp`. Jeder Wald hat dabei eine Breite (`Width`) und eine Höhe (`Height`).

Dabei benutzen Wälder für die Representierung eines Feldes einen `FIELDSTATE`, welcher als `char` definiert ist. [4] Dabei kann ein `FIELDSTATE` einen oder mehrere, ebenfalls definierter, Zustände annehmen. Dabei handelt es sich um die in der Lösungsidee beschriebenen Zustände eines Feldes, `EMPTY`, `BURNABLE`, `BURNED`, `WATERED` und `COAL`.

Ein Wald hält sich nun ein 2-dimensional, variabel großes Feld von FIELDSTATEs, der eigentliche Wald.
Durch geschickte Operatorenüberladung und geeigntete Akzessormethoden können diese Attribute vollständig gekapselt werden.

Der eigentliche Algorithmus findet sich in der Datei `Buschfeuer.cpp`; die Ein- und Ausgabe steht in der Datei `Buschfeuer.h`
Das Lesen der Eingabe übernimmt die Prozedur `parseInput`, welche die Daten in eine globale Instanz der Klasse `Woods Forest` einliest.
Ist die Eingabe gelesen, werden aus dieser die zu Beginn brennenden Felder mithilfe der Funktion `getInitialBurningFields` ermittelt und dann gleich an die Prozedur `simulateFire` weitergereicht. Diese Prozedur `simulateFire` simuliert nun das Feuer und ermittelt die zu löschenden Felder unter Zuhilfenahme der Funktion `getOptimalWaterSpot`.
Dabei wird nach jedem Löschvorgang eine Ausgabe getätigt, welche die zu löschende Position (oben links mit (0—0) beginnend) ausgibt. Auch wird unter Verwendung von ASCII-Escape-Sequenzen ein Bild in der Konsole angezeigt, welches den Wald darstellt.
Ist das Feuer gelöscht (kann es sich also nicht weiter ausbreiten), wird dem NUtzer eine Meldung ausgegeben, wie viele Felder verbrannten und wie viele Felder verbrannt und gelöscht wurden. (Diese beiden Zahlen beschreiben disjunkte Mengen.) Auch hier wird wieder ein Bild erzeugt und ausgegeben.

Die Implementierung der State-Space-Search kann in der Datei `Buschfeuer.cpp` nachgelesen werden, dabei wird der Zustandsgraph nicht komplett vorberechnet, sonder erst just-in-time berechnet. Die Ein- und Ausgabe ist dabei die selbe wie bei dem anderen Algorithmus.

[4] Das Wort „definiert“ ist durchaus ernst zu nehmen, da es hier beschreiben soll, dass etwas mittels `#define` „gelöst“ wurde.

1.2.1 Eingabeformat

Wird mein Programm über ein Terminal gestartet, so können ihm bis zu 2 Kommandozeilenparameter übergeben werden:

Arg. 1 Pfad zu einer Daei mit einer Eingabe

Arg. 2 Pfad zu einer Datei für eine Ausgabe; existierende Dateien werden überschrieben. Dabei gibt die Dateiendung dieser Datei das Verhalten meines Programmes an:

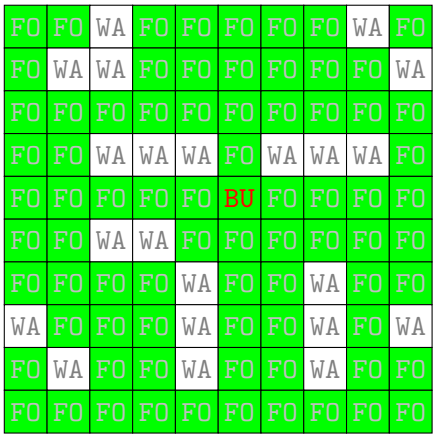
1.3 Beispiele

1.3.1 Beispiel 0

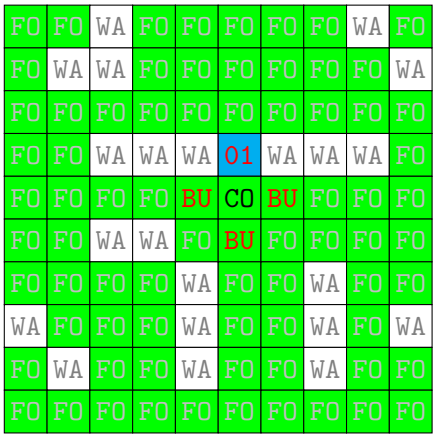
Die ist das Beispiel aus der Aufgabenstellung. Umgewandelt für mein Programm sieht diese Eingabe folgendermaßen aus[5]:

```
1  10 10
2  1101111101
3  1001111110
4  1111111111
5  1100010001
6  1111131111
7  1100111111
8  1111011011
9  0111011010
10 1011011011
11 1111111111
```

Die Heuristik produziert folgende Ausgabe[6][7]:




```
--- At time 1: Water spot (5|3)
```

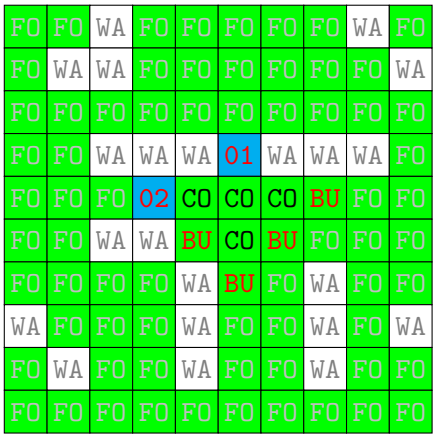



```
--- At time 2: Water spot (3|4)
```

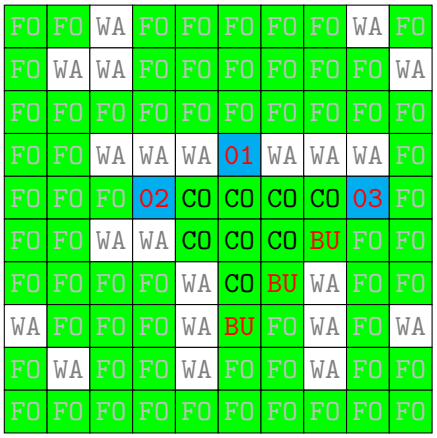
[5] Diese Eingabe finden Sie auch in der Datei `0.in`

[6] Diese Ausgabe finden Sie auch in der Datei `0.out.tex`; Eine Datei `0.out` mit den ASCII-Escape-Sequenzen exisitert ebenfalls.

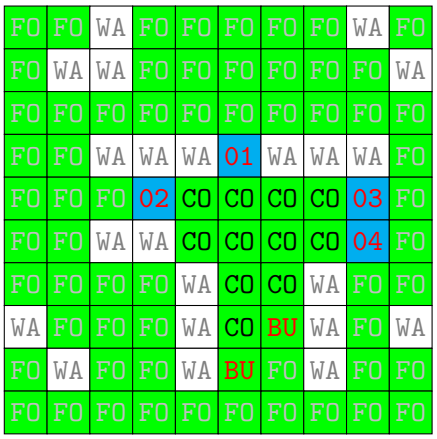
[7] Um die ASCII-Escape-Sequenzen in TEX korrekt darzustellen, habe ich spezielle Ausgabemethoden geschrieben. Diese produzieren anstatt der ASCII-Sequenzen TEX-Befehle, welche optisch zu ähnlichen Ergebnissen führen.



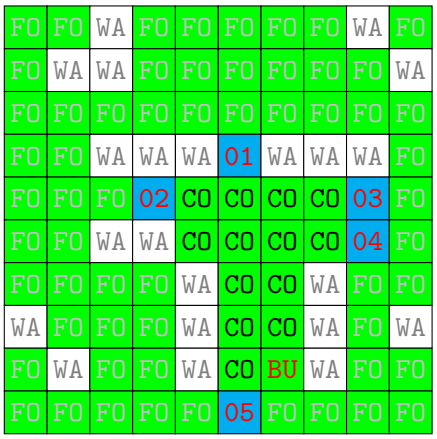
--- At time 3: Water spot (8|4)



--- At time 4: Water spot (8|5)



--- At time 5: Water spot (5|9)



```
--- At time 6: Water spot (6|9)
```

FO	FO	WA	FO	FO	FO	FO	FO	WA	FO
FO	WA	WA	FO	FO	FO	FO	FO	FO	WA
FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	FO	WA	WA	WA	01	WA	WA	WA	FO
FO	FO	FO	02	CO	CO	CO	CO	03	FO
FO	FO	WA	WA	CO	CO	CO	CO	04	FO
FO	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	FO
WA	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	WA
FO	WA	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	FO
FO	FO	FO	FO	FO	05	06	FO	FO	FO

```
--- And you'll find 14 pieces of coal and 6 pieces of watered coal
```

FO	FO	WA	FO	FO	FO	FO	FO	WA	FO
FO	WA	WA	FO	FO	FO	FO	FO	FO	WA
FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	FO	WA	WA	WA	01	WA	WA	WA	FO
FO	FO	FO	02	CO	CO	CO	CO	03	FO
FO	FO	WA	WA	CO	CO	CO	CO	04	FO
FO	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	FO
WA	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	WA
FO	WA	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	FO
FO	FO	FO	FO	FO	05	06	FO	FO	FO

```
Explanation:
 WA  --- EMPTY
 FO  --- BURNABLE
 BU  --- BURNED
 CO  --- COAL (doubly burned)
 ##  --- WATERED at time ##
Fields can have more than 1 state.
```

Diese Ausgabe deckt sich auch mit der des Brute-Force-Ansatzes, weshalb ich dessen Ausgabe hier weglasse.

1.3.2 Beispiel 1

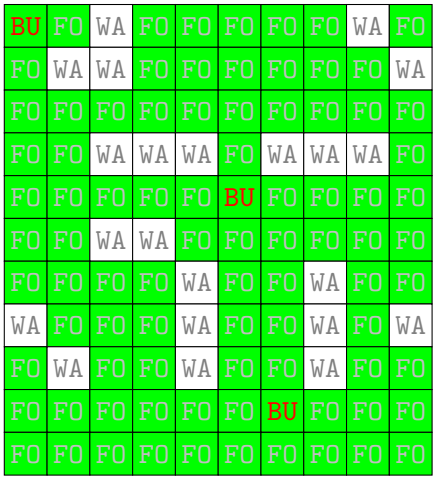
Eine Situation mit mehr als einem Feuer bei der ersten Beobachtung[8]:

```
1  10 11
2  3101111101
3  1001111110
4  1111111111
5  1100010001
6  1111131111
7  1100111111
8  1111011011
```

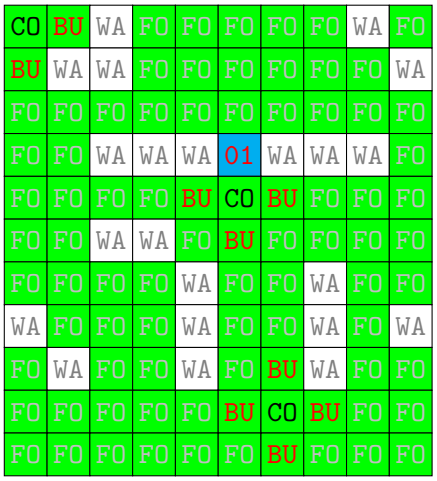
[8] Diese Eingabe finden Sie auch in der Datei `1.in`

```
 9  0111011010
10  1011011011
11  1111113111
12  1111111111
```

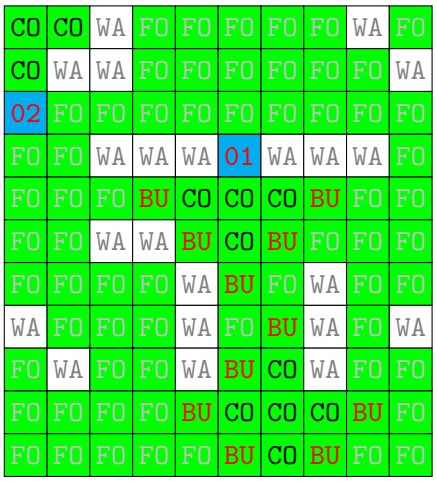
Mein Programm produziert folgende Ausgabe[9]:




```
--- At time 1: Water spot (5|3)
```




```
--- At time 2: Water spot (0|2)
```




```
--- At time 3: Water spot (2|4)
```

[9] Diese Ausgabe finden Sie auch in der Datei `1.out.tex`; Eine Datei `1.out` mit den ASCII-Escape-Sequenzen exisitert ebenfalls.

CO	CO	WA	FO	FO	FO	FO	FO	WA	FO
CO	WA	WA	FO	FO	FO	FO	FO	FO	WA
02	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	FO	WA	WA	WA	01	WA	WA	WA	FO
FO	FO	03	CO	CO	CO	CO	CO	BU	FO
FO	FO	WA	WA	CO	CO	CO	BU	FO	FO
FO	FO	FO	FO	WA	CO	BU	WA	FO	FO
WA	FO	FO	FO	WA	BU	CO	WA	FO	WA
FO	WA	FO	FO	WA	CO	CO	WA	BU	FO
FO	FO	FO	BU	CO	CO	CO	CO	CO	BU
FO	FO	FO	FO	BU	CO	CO	CO	BU	FO

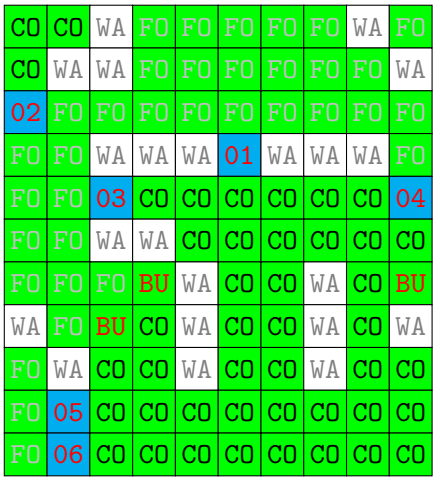
--- At time 4: Water spot (9|4)

CO	CO	WA	FO	FO	FO	FO	FO	WA	FO
CO	WA	WA	FO	FO	FO	FO	FO	FO	WA
02	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	FO	WA	WA	WA	01	WA	WA	WA	FO
FO	FO	03	CO	CO	CO	CO	CO	CO	04
FO	FO	WA	WA	CO	CO	CO	CO	BU	FO
FO	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	FO	FO
WA	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	BU	WA
FO	WA	FO	BU	WA	CO	CO	WA	CO	BU
FO	FO	BU	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO
FO	FO	FO	BU	CO	CO	CO	CO	CO	BU

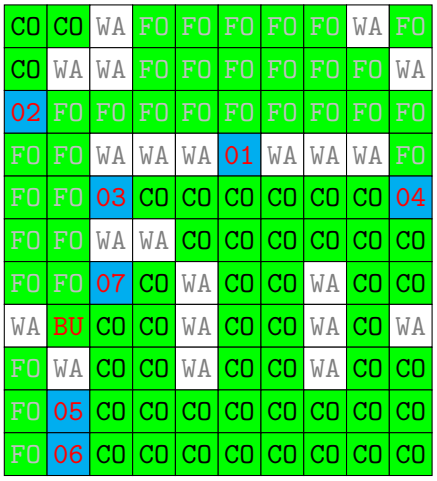
--- At time 5: Water spot (1|9)

CO	CO	WA	FO	FO	FO	FO	FO	WA	FO
CO	WA	WA	FO	FO	FO	FO	FO	FO	WA
02	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	FO	WA	WA	WA	01	WA	WA	WA	FO
FO	FO	03	CO	CO	CO	CO	CO	CO	04
FO	FO	WA	WA	CO	CO	CO	CO	CO	BU
FO	FO	FO	FO	WA	CO	CO	WA	BU	FO
WA	FO	FO	BU	WA	CO	CO	WA	CO	WA
FO	WA	BU	CO	WA	CO	CO	WA	CO	CO
FO	05	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO
FO	FO	BU	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO

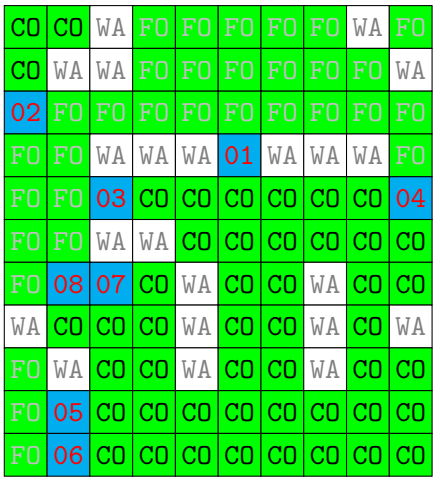
--- At time 6: Water spot (1|10)




```
--- At time 7: Water spot (2|6)
```




```
--- At time 8: Water spot (1|6)
```




```
--- And you'll find 48 pieces of coal and 8 pieces of watered coal
```

CO	CO	WA	FO	FO	FO	FO	FO	WA	FO
CO	WA	WA	FO	FO	FO	FO	FO	FO	WA
02	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	FO	WA	WA	WA	01	WA	WA	WA	FO
FO	FO	03	CO	CO	CO	CO	CO	CO	04
FO	FO	WA	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO
FO	08	07	CO	WA	CO	CO	WA	CO	CO
WA	CO	CO	CO	WA	CO	CO	WA	CO	WA
FO	WA	CO	CO	WA	CO	CO	WA	CO	CO
FO	05	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO
FO	06	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO

```
Explanation:
 WA  --- EMPTY
 FO  --- BURNABLE
 BU  --- BURNED
 CO  --- COAL (doubly burned)
 ##  --- WATERED at time ##
Fields can have more than 1 state.
```

1.3.3 Beispiel 2

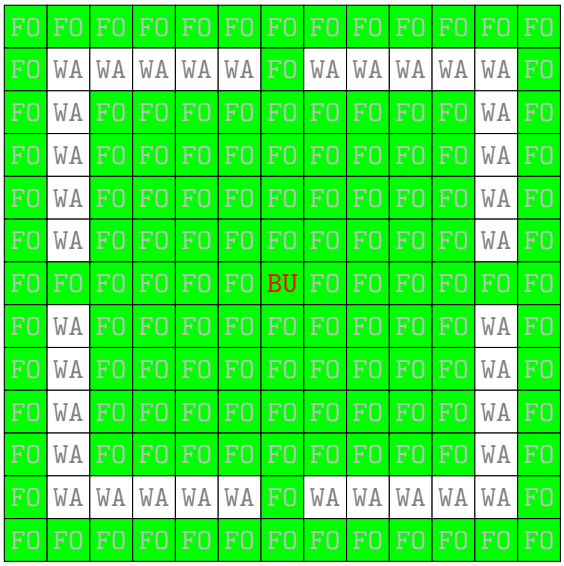
[10]:

```
1  13 13
2  1111111111111
3  1000001000001
4  1011111111101
5  1011111111101
6  1011111111101
7  1011111111101
8  1111113111111
9  1011111111101
10 1011111111101
11 1011111111101
12 1011111111101
13 1000001000001
14 1111111111111
```

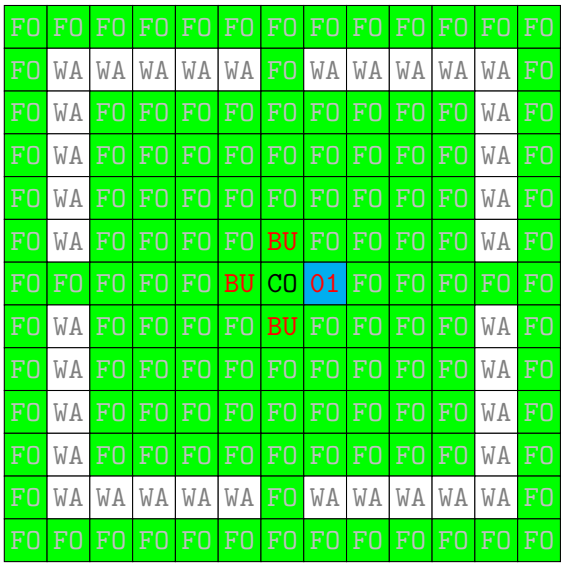
Mein Programm produziert folgende Ausgabe[11]:

[10] Diese Eingabe finden Sie auch in der Datei `2.in`

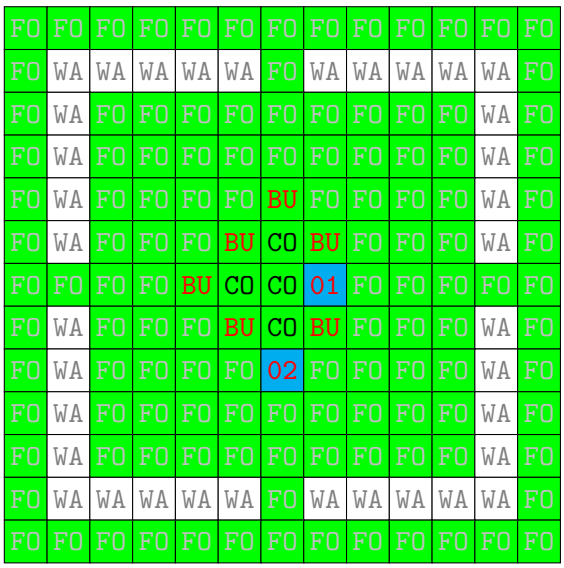
[11] Diese Ausgabe finden Sie auch in der Datei `2.out.tex`; Eine Datei `2.out` mit den ASCII-Escape-Sequenzen exisitert ebenfalls.



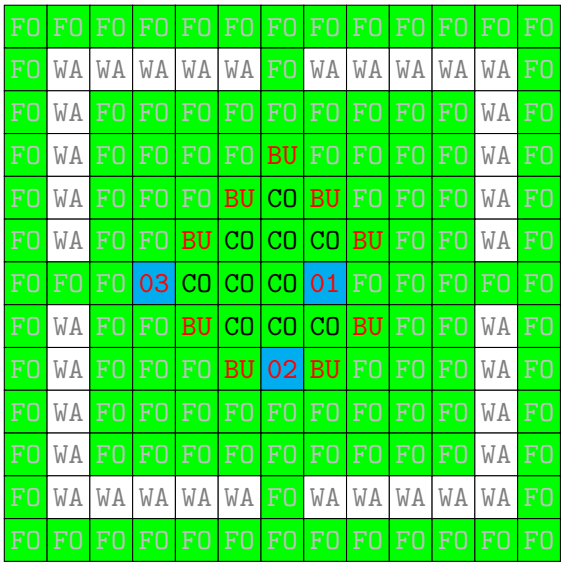
--- At time 1: Water spot (7|6)



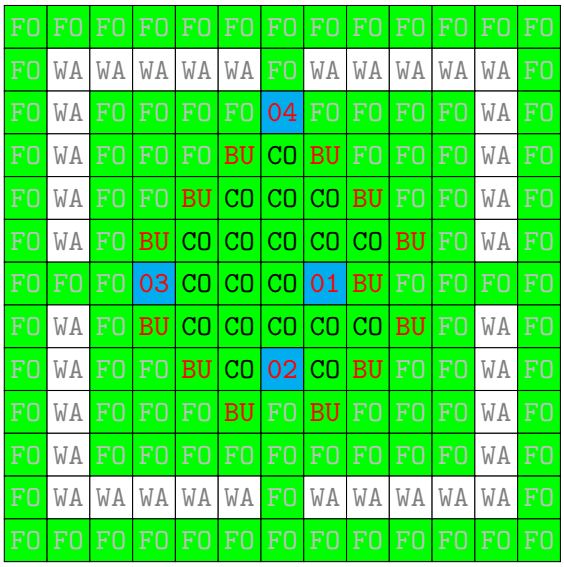
--- At time 2: Water spot (6|8)



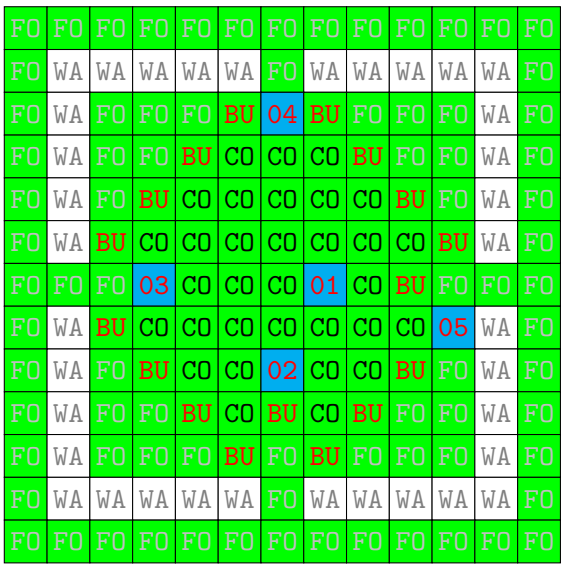
--- At time 3: Water spot (3|6)



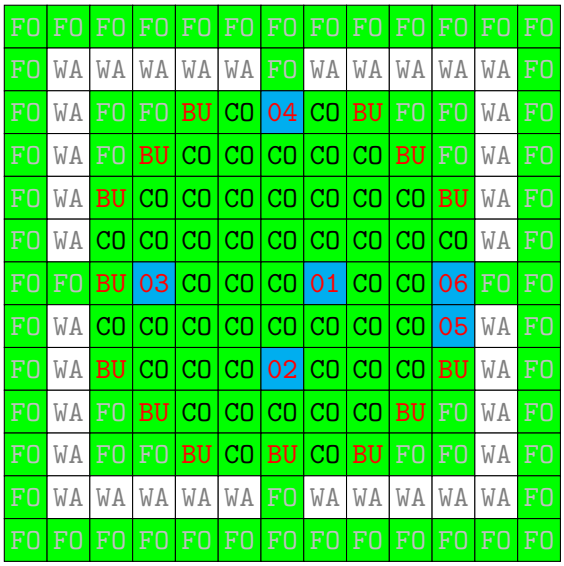
--- At time 4: Water spot (6|2)



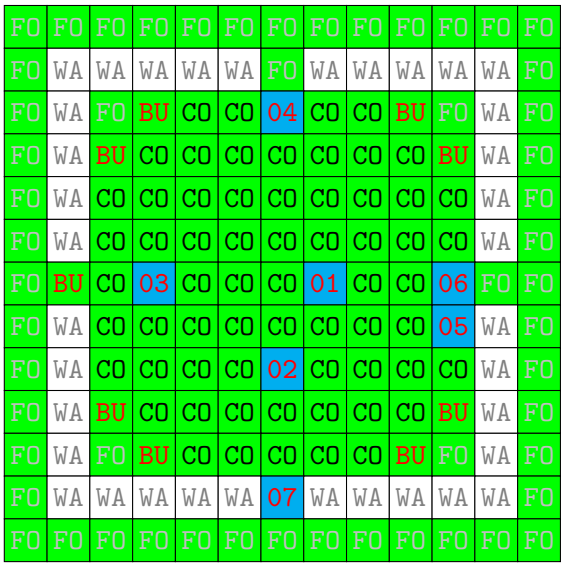
--- At time 5: Water spot (10|7)



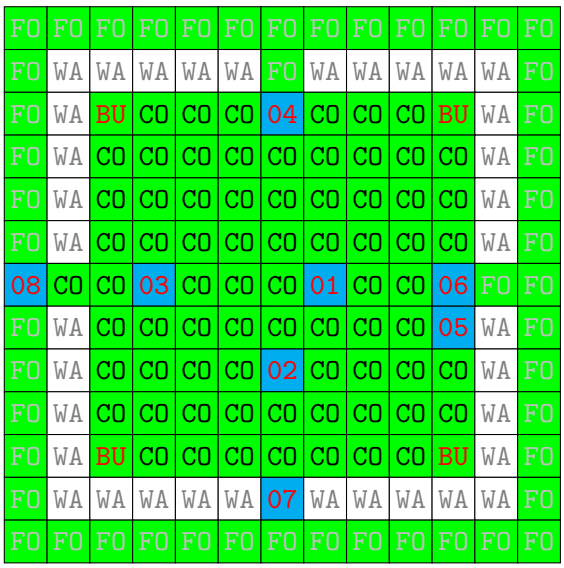
--- At time 6: Water spot (10|6)



--- At time 7: Water spot (6|11)



--- At time 8: Water spot (0|6)



--- And you'll find 76 pieces of coal and 8 pieces of watered coal

FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO
FO	WA	WA	WA	WA	WA	FO	WA	WA	WA	WA	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	04	CO	CO	CO	CO	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	WA	FO
08	CO	CO	03	CO	CO	CO	01	CO	CO	06	FO	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	05	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	02	CO	CO	CO	CO	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	WA	FO
FO	WA	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	CO	WA	FO
FO	WA	WA	WA	WA	WA	07	WA	WA	WA	WA	WA	FO
FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO	FO

```
Explanation:
 WA  --- EMPTY
 FO  --- BURNABLE
 BU  --- BURNED
 CO  --- COAL (doubly burned)
 ##  --- WATERED at time ##
Fields can have more than 1 state.
```

1.3.4 Beispiel 3

Ein (etwas) größeres Beispiel.[12]:

```
1  100 100
2  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
3  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
4  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
5  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
6  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
7  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
8  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
9  1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
10 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
12 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
13 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
14 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
15 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
16 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
17 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
18 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
19 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
20 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
21 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
22 1111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
```

[12] Diese Eingabe finden Sie auch in der Datei `3.in`

```
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111311111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
```

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Mein Programm produziert folgende Ausgabe[13] Dabei hat die Berechnung wenige Sekunden in Anspruch genommen, sofern nicht die Ausgabe der ASCII-Escape-Sequenzen gefordert wird. Dies erhöhte die Laufzeit auf ca. 30s.:

```
At time 1: Water spot (45|51)

At time 2: Water spot (45|52)

At time 3: Water spot (46|50)

At time 4: Water spot (46|53)

At time 5: Water spot (47|49)

At time 6: Water spot (47|54)

At time 7: Water spot (48|48)

At time 8: Water spot (48|55)

At time 9: Water spot (49|47)

At time 10: Water spot (49|56)

At time 11: Water spot (50|46)

At time 12: Water spot (50|57)

At time 13: Water spot (51|45)

At time 14: Water spot (51|58)

At time 15: Water spot (52|44)
```

[13] Diese Ausgabe finden Sie auch in der Datei `3.out.tex2`;

```
At time 16: Water spot (52|59)
At time 17: Water spot (53|43)
At time 18: Water spot (53|60)
At time 19: Water spot (54|42)
At time 20: Water spot (54|61)
At time 21: Water spot (55|41)
At time 22: Water spot (55|62)
At time 23: Water spot (56|40)
At time 24: Water spot (56|63)
At time 25: Water spot (57|39)
At time 26: Water spot (57|64)
At time 27: Water spot (58|38)
At time 28: Water spot (58|65)
At time 29: Water spot (59|37)
At time 30: Water spot (59|66)
At time 31: Water spot (60|36)
At time 32: Water spot (60|67)
At time 33: Water spot (61|35)
At time 34: Water spot (61|68)
At time 35: Water spot (62|34)
At time 36: Water spot (62|69)
At time 37: Water spot (63|33)
At time 38: Water spot (63|70)
At time 39: Water spot (64|32)
At time 40: Water spot (64|71)
At time 41: Water spot (65|31)
At time 42: Water spot (65|72)
At time 43: Water spot (66|30)
At time 44: Water spot (66|73)
At time 45: Water spot (67|29)
At time 46: Water spot (67|74)
At time 47: Water spot (68|28)
At time 48: Water spot (68|75)
At time 49: Water spot (69|27)
At time 50: Water spot (69|76)
At time 51: Water spot (70|26)
At time 52: Water spot (70|77)
At time 53: Water spot (71|25)
```

```
At time 54: Water spot (71|78)
At time 55: Water spot (72|24)
At time 56: Water spot (72|79)
At time 57: Water spot (73|23)
At time 58: Water spot (73|80)
At time 59: Water spot (74|22)
At time 60: Water spot (74|81)
At time 61: Water spot (75|21)
At time 62: Water spot (75|82)
At time 63: Water spot (76|20)
At time 64: Water spot (76|83)
At time 65: Water spot (77|19)
At time 66: Water spot (77|84)
At time 67: Water spot (78|18)
At time 68: Water spot (78|85)
At time 69: Water spot (79|17)
At time 70: Water spot (79|86)
At time 71: Water spot (80|16)
At time 72: Water spot (80|87)
At time 73: Water spot (81|15)
At time 74: Water spot (81|88)
At time 75: Water spot (82|14)
At time 76: Water spot (82|89)
At time 77: Water spot (83|13)
At time 78: Water spot (83|90)
At time 79: Water spot (84|12)
At time 80: Water spot (84|91)
At time 81: Water spot (85|11)
At time 82: Water spot (85|92)
At time 83: Water spot (86|10)
At time 84: Water spot (86|93)
At time 85: Water spot (87|9)
At time 86: Water spot (87|94)
At time 87: Water spot (88|8)
At time 88: Water spot (88|95)
At time 89: Water spot (89|7)
At time 90: Water spot (89|96)
At time 91: Water spot (90|6)
```

```
At time 92: Water spot (90|97)
At time 93: Water spot (91|5)
At time 94: Water spot (91|98)
At time 95: Water spot (92|4)
At time 96: Water spot (92|99)
At time 97: Water spot (93|3)
At time 98: Water spot (93|2)
At time 99: Water spot (93|1)
At time 100: Water spot (93|0)
And you'll find 6948 pieces of coal and 100 pieces of watered coal
```

1.4 Quelltext

Woods.h

```
1  #include <vector>
2
3  #define FIELDSTATE      char
4  #define EMPTY           0
5  #define BURNABLE        1
6  #define BURNED          2
7  #define WATERED         4
8  #define COAL            8
9
10 class Woods{
11   private:
12   int Width, Height;
13   std::vector<std::vector<FIELDSTATE> > Fields;
14
15 public:
16   Woods(int width, int height);
17
18   int width() const;
19   int height() const;
20
21   FIELDSTATE& operator() (int x, int y);
22   FIELDSTATE operator() (int x,  int y) const;
23
24   bool operator==(const Woods& o) const;
25 };
```

Woods.cpp

```
1  #include <vector>
2  #include <cstdio>
3
4  #include "Woods.h"
5
6  FIELDSTATE ERROR = -1;
```

```
7
8  Woods::Woods(int width, int height) : Width(width),
       Height(height) {
9    Fields.assign(height, std::vector<FIELDSTATE>(width, 0));
10 }
11
12 int Woods::width() const { return this->Width; }
13 int Woods::height() const { return this->Height; }
14
15 FIELDSTATE& Woods::operator() (int x, int y) {
16   if (x < 0 || y < 0 || x >= width() || y >= height()){
17     printf("OUT OF BOUNDS 1");
18     return ERROR;
19   }
20   return this->Fields[y][x];
21 }
22 FIELDSTATE Woods::operator() (int x,  int y) const {
23   if (x < 0 || y < 0 || x >= width() || y >= height()){
24     printf("OUT OF BOUNDS 2");
25     return ERROR;
26   }
27   return this->Fields[y][x];
28 }
29
30 bool Woods::operator==(const Woods& o) const{
31   if(o.width() != width() || o.height() != height())
32     return false;
33
34   for(int i = 0; i< width(); ++i)
35     for(int j = 0; j < height(); ++j)
36       if(o(i,j) != Fields[i][j])
37         return false;
38   return true;
39 }
```

Buschfeuer.h Dies ist die Ein- und Ausgabe; sowie einige Definitionen.

```
1  #include <cstdio>
2  #include <vector>
3
4  #include "Woods.h"
5
6  typedef std::pair<int,int> PII;
7
8  const int oo = (1 << 29);                                    //
       The infinity
9  Woods Forest(0, 0);
10
11 struct Point {
12 public:
13   int x, y;
14   Point(int _x,int _y) : x(_x), y(_y) { }
15   };
```

```
16 int dir[4][2] = {{1,0},{0,1},{-1,0},{0,-1}};
17
18 std::vector<Point> Solution;
19 std::FILE* OUT;
     // The file to mirror the output to
20 void (*printSolution)(std::FILE*, bool);
21
22 //BEGIN OF INPUT
23 void parseInput(std::FILE* f) {
24   int acFieldWidth, acFieldHeight;
25   std::fscanf(f, "%i %i\n",&acFieldWidth, &acFieldHeight);
26
27   Forest = Woods(acFieldWidth, acFieldHeight);
28
29   for(int i = 0; i < acFieldHeight; ++i){
30     for(int j= 0; j < acFieldWidth; ++j){
31       char c;
32       std::fscanf(f, "%c",&c);
33       c -= '0';
34       Forest(j, i) = (FIELDSTATE) c;
35     }
36     if(i < acFieldHeight-1)
37       std::fscanf(f, "\n");
38   }
39 }
40 //END OF INPUT
41 //BEGIN OF OUTPUT
42 void printSolution_TEX(std::FILE* f, bool finalOut) {
43   std::fprintf(f, "\\\\\\n");
44
45   std::fprintf(f, "\\begin{tikzpicture}\n");
46   std::fprintf(f, "\\tikzset{square matrix/.style={\n");
47   std::fprintf(f, "matrix of nodes,\n");
48   std::fprintf(f, "column sep=-\\pgflinewidth, row
       sep=-\\pgflinewidth,\n");
49   std::fprintf(f, "nodes={draw,\n");
50   std::fprintf(f, "minimum height=#1,\n");
51   std::fprintf(f, "anchor=center,\n");
52   std::fprintf(f, "text width=#1,\n");
53   std::fprintf(f, "align=center,\n");
54   std::fprintf(f, "inner sep=0pt\n");
55   std::fprintf(f, "},\n");
56   std::fprintf(f, "},\n");
57   std::fprintf(f, "square matrix/.default=1.2cm\n");
58   std::fprintf(f, "}\n");
59
60   std::fprintf(f, "\\matrix[square matrix=1.4em] {\n");
61   for(int j= 0; j < Forest.height(); ++j) {
62     for(int i= 0; i < Forest.width(); ++i) {
63       if(i)
64         std::fprintf(f," &");
65
66         FIELDSTATE acField = Forest(i, j);
```

```
67          if(acField == EMPTY)
68            std::fprintf(f, "|[fill=white]|");
69          else if(acField & WATERED)
70            std::fprintf(f, "|[fill=cyan]|");
71          else if(acField & BURNABLE)
72            std::fprintf(f, "|[fill=green]|");
73
74          if(acField & COAL)
75            std::fprintf(f, "\\color[rgb]{0,0,0}");
76          else if(acField & BURNED)
77            std::fprintf(f, "\\color[rgb]{1,0,0}");
78          else if(acField == EMPTY)
79            std::fprintf(f, "\\color[gray]{0.5}");
80          else if(acField & BURNABLE)
81            std::fprintf(f, "\\color[gray]{0.75}");
82
83          if(acField & WATERED){
84            for (int t = 0; t < Solution.size(); ++t)
85              if (Solution[t].x == i && Solution[t].y == j) {
86                std::fprintf(f, "\\textbf{\\texttt{%02d}}",t+1);
87                break;
88              }
89          }
90          else if(acField & COAL)
91            std::fprintf(f, "\\textbf{\\texttt{CO}}");
92          else if(acField & BURNED)
93            std::fprintf(f, "\\textbf{\\texttt{BU}}");
94          else if(acField == EMPTY)
95            std::fprintf(f, "\\texttt{WA}");
96          else if(acField & BURNABLE)
97            std::fprintf(f, "\\texttt{FO}");
98          else
99            std::fprintf(f, "\\phantom{AA}");
100       std::fprintf(f, "%%\n");
101     }
102
103     std::fprintf(f, "\\\\\n");
104   }
105
106   std::fprintf(f, "};\n\\end{tikzpicture}\\\\\n");
107
108   if(finalOut){
109     std::fprintf(f, "\\\\\nExplanation:");
110     std::fprintf(f,
          "\\\\\n\\colorbox{white}{\\color[gray]{0.5}WA}  ---
          EMPTY");
111     std::fprintf(f,
          "\\\\\n\\colorbox{green}{\\color[gray]{0.5}FO}  ---
          BURNABLE");
112     std::fprintf(f,
          "\\\\\n\\colorbox{white}{\\color[rgb]{1,0,0}\\textbf{BU}}
          ---  BURNED");
```

```
113     std::fprintf(f,
           "\\\\\n\\colorbox{white}{\\color[rgb]{0,0,0}\\textbf{CO}}
           ---  COAL (doubly burned)");
114     std::fprintf(f, "\\\\\n\\colorbox{cyan}{\\#\\#}  ---
           WATERED at time \\#\\#");
115     std::fprintf(f, "\\\\\nFields can have more than 1 state.");
116   }
117 }
118
119 void printSolution_TERMINAL(std::FILE* f, bool finalOut) {
120   fprintf(f, "\n");
121   //The ASCII-magic starts here:
122   for(int j= 0; j < Forest.height(); ++j) {
123     for(int i= 0; i < Forest.width(); ++i) {
124       FIELDSTATE acField = Forest(i, j);
125       int waterval = 0;
126
127       fprintf(f, "\x1b[s  ");
128       if (acField == EMPTY)
129         std::fprintf(f, "\x1b[u\x1b[37;47mWA");
130       if (acField & BURNABLE)
131         std::fprintf(f, "\x1b[u\x1b[32;42mFO");
132       if (acField & BURNED)
133         std::fprintf(f, "\x1b[u\x1b[1;5;31m/\\");
134       if (acField & COAL)
135         std::fprintf(f, "\x1b[u\x1b[1;4;5;30m/\\");
136       if (acField & WATERED)
137         for (int t = 0; t < Solution.size(); ++t)
138           if (Solution[t].x == i && Solution[t].y == j) {
139             std::fprintf(f, "\x1b[u\x1b[46m%02d", t+1);
140             break;
141           }
142       std::fprintf(f, "\x1b[0;39;49m");
143     }
144
145     std::fprintf(f, "\n");
146   }
147
148   if (finalOut) {// An Explanation shall be printed
149     std::fprintf(f, "\nExplanation:");
150     std::fprintf(f, "\n\x1b[37;47mWA\x1b[39;49m  ---  EMPTY");
151     std::fprintf(f, "\n\x1b[32;42mFO\x1b[39;49m  ---  BURNABLE");
152     std::fprintf(f, "\n\x1b[1;5;31m/\\\x1b[0;39m  ---  BURNED");
153     std::fprintf(f, "\n\x1b[1;4;5;30m/\\\x1b[0;39m  ---  COAL
           (doubly burned)");
154     std::fprintf(f, "\n\x1b[46m##\x1b[0;39m  ---  WATERED at
           time ##");
155     std::fprintf(f, "\nFields can have more than 1 state.");
156   }
157   std::fprintf(f, "\n");
158 }
159
160 void dontPrintSolution(std::FILE* f,bool finalOut) { return; }
```

```
161 //END OF OUTPUT
```

Buschfeuer.cpp Dies ist die Implementierung der Heuristik.

```
1  #include <cstdio>
2  #include <vector>
3  #include <queue>
4  #include <set>
5  #include <string>
6  #include <cstring>
7  #include <algorithm>
8
9  #include "Buschfeuer.h"
10
11 Point getOptimalWaterSpot(std::vector<Point>& candidates){
12   std::queue<std::pair<PII,Point> > q;
                                    // ((distance | color) |
       Location)
13   for(int i= 0; i < candidates.size(); ++i)
14     q.push(std::pair<PII,Point>(PII(0,i),candidates[i]));
         // insert all the candidates as start points for the BFS
15
16   std::vector<std::vector<std::set<int> > >
        visited(Forest.width(),       // remember all nearest points
        first
17     std::vector<std::set<int> >(Forest.height()));
18   std::vector<std::vector<int> > shortDis(Forest.width(),
                 // shortest distant to any burning field
19     std::vector<int>(Forest.height(),oo));
20
21   //BFS to calculate shortest paths
22   while(!q.empty()){
23     std::pair<PII,Point> ac = q.front();
24     Point acPoint = ac.second;
25     int acDistance = ac.first.first;
26     int acColor = ac.first.second;
27
28     q.pop();
29     if(visited[acPoint.x][acPoint.y].count(acColor))
30       continue;
31     visited[acPoint.x][acPoint.y].insert(acColor);
32     shortDis[acPoint.x][acPoint.y] =
          std::min(acDistance,shortDis[acPoint.x][acPoint.y]);
33
34     for(int i= 0; i < 4; ++i){
35       int newx = acPoint.x + dir[i][0];
36       int newy = acPoint.y + dir[i][1];                    //
            calculate new field's indexes
37
38       if(newx < 0 || newy < 0 || newy >= Forest.height() || newx
            >= Forest.width())
39         continue;                                          //
              new field is outside the woods
```

```
40        if (Forest(newx, newy) != BURNABLE)
41          continue;                                          //
              Field is not of interest
42
43        if(visited[newx][newy].count(acColor) == 0)          //
             Don't compute things twice
44          if(acDistance + 1 <= shortDis[newx][newy]){
45            shortDis[newx][newy] = acDistance + 1;
46            q.push(std::pair<PII,Point>(PII(acDistance +
                 1,acColor),Point(newx,newy)));
47          }
48      }
49    }
50
51    //determine the field to be watered
52    std::vector<PII> waterval(candidates.size(),PII(0,0));
53    std::vector<std::vector<int> > farthDist(candidates.size(),
        std::vector<int>(2*(Forest.width()+Forest.height()),0));
54
55    //Count the number of fields that have an unique fire spot
        a.k.a. waterval
56    //Reckon the farthest field
57    for(int i= 0; i< Forest.width(); ++i)
58      for(int j= 0; j < Forest.height(); ++j)
59        if(visited[i][j].size() == 1){
60          waterval[*visited[i][j].begin()].first++;
61          farthDist[*visited[i][j].begin()][shortDis[i][j]]++;
62        }
63    for(int i = 0; i < waterval.size(); ++i)
64      waterval[i].second = i;
65
66    std::sort(waterval.begin(),waterval.end(),std::greater<PII>());
67
68    //BEGIN HOTFIX
69    for(int i = 0; i < waterval.size(); ++i)
70      for(int j = 1; j < candidates.size(); ++j)
71        if(farthDist[waterval[i].second][j] > 1)
72          return candidates[waterval[i].second];
73    //END HOTFIX
74
75    return candidates[waterval[0].second];
76  }
77
78  std::vector<Point>& getInitialBurningFields() {
79    static std::vector<Point> burnedFields;
80
81    for(int i = 0; i < Forest.height(); ++i)
82      for(int j= 0; j < Forest.width(); ++j)
83        if(Forest(j, i) & BURNED){
84          burnedFields.push_back(Point(j, i));
85  //        printf("Initially burning: (%i|%i)\n",j, i);
86        }
87    return burnedFields;
```

```
88 }
89
90 void simulateFire(const std::vector<Point>&
      initiallyBurningFields) {
91   std::vector<Point> burnedFields = initiallyBurningFields;
92   if(printSolution != dontPrintSolution)
93     printSolution_TERMINAL(stdout, false);
94   if (OUT != 0)
95     printSolution(OUT, false);
96
97   int time = 0;
98   while(!burnedFields.empty()) {                              //
        Simulate as long as there's still fire in the world
99     std::vector<Point> newBurnedFields;
         // The burning fields at the next point of time
100
101    //Calculate the new burning fields
102    for(size_t i = 0; i < burnedFields.size(); ++i){
103      int acx = burnedFields[i].x;
104      int acy = burnedFields[i].y;
105
106      if(Forest(acx, acy) & WATERED)
107        continue;                                             //
             The field got watered and does not spread fire
108      Forest(acx, acy) |= COAL;                               //
           Field burned down to coal...
109
110      for(int j = 0; j < 4; ++j) {
111        int newx = acx + dir[j][0];
112        int newy = acy + dir[j][1];
113
114        if(newx < 0 || newy < 0 || newy >= Forest.height() ||
             newx >= Forest.width())
115          continue;                                           //
               new field is outside the woods
116        if(Forest(newx, newy) == BURNABLE){
117          Forest(newx, newy) |= BURNED;                       //
               Field starts burning
118          newBurnedFields.push_back(Point(newx,newy));
119
120 //         printf("  From now on burning: (%i|%i)\n",newx,newy);
          // log the happenings
121        }
122      }
123    }
124    if(newBurnedFields.empty())                               //
         Nothing to water, all plants happy...
125      break;
126
127    burnedFields = newBurnedFields;
128
129    Point toWater = getOptimalWaterSpot(newBurnedFields); //
         Determine the field to water
```

```
130     Forest(toWater.x, toWater.y) |= WATERED;                // ...
           and water it
131     Solution.push_back(toWater);
132
133
134     //Output / mirror the partial solution
135
136     std::printf("---\nAt time %i: Water spot
           (%i|%i)\n",++time,toWater.x,toWater.y);
137     if(printSolution != dontPrintSolution)
138       printSolution_TERMINAL(stdout, false);
139
140     if (OUT) {
141       std::fprintf(OUT, "---\nAt time %i: Water spot
             (%i|%i)\n",time,toWater.x,toWater.y);
142       printSolution(OUT, false);
143     }
144
145   }
146 //   printf("Fire died.\n");
147
148   //Count the total number of burned or coaled
149   int wcnt = 0, ccnt = 0;
150   for(int i= 0; i < Forest.width(); ++i)
151     for(int j= 0; j < Forest.height(); ++j)
152       if(Forest(i, j) & WATERED)
153         wcnt++;
154       else if(Forest(i, j) & COAL)
155         ccnt++;
156
157   //Output / Mirror the solution
158   std::printf("---\nAnd you'll find %i pieces of coal and %i
        pieces of watered coal\n",ccnt,wcnt);
159   if(printSolution != dontPrintSolution)
160     printSolution_TERMINAL(stdout, true);
161   if (OUT) {
162     std::fprintf(OUT, "---\nAnd you'll find %i pieces of coal
          and %i pieces of watered coal\n",ccnt,wcnt);
163     printSolution(OUT, true);
164   }
165 }
166
167 int main(int argc, char** argv){
168   if (argc > 1) {
169     std::freopen(argv[1],"r",stdin);
170     std::printf("Using %s as input.\n", argv[1]);
171   }
172   if (argc > 2){
173     printf("Mirroring output to %s.\n", argv[2]);
174     if (strstr(argv[2], ".tex2")) {
175       std::printf("I reckon you want me to produce some
            graphicless TeX stuff...\n");
176       printSolution = dontPrintSolution;
```

```
177     }
178     else if (strstr(argv[2], ".tex")) {
179       std::printf("I reckon you want me to produce some TeX
            stuff...\n");
180       printSolution = printSolution_TEX;
181     }
182     else if (strstr(argv[2], ".raw")) {
183       std::printf("I reckon you want me to surpress
            graphics...\n");
184       printSolution = dontPrintSolution;
185     }
186     else
187       printSolution = printSolution_TERMINAL;
188     OUT = std::fopen(argv[2],"w");
189   }
190   else{
191     OUT = 0;
192     printSolution = printSolution_TERMINAL;
193   }
194
195   parseInput(stdin);
196   simulateFire(getInitialBurningFields());
197 }
```

Buschfeuer2.cpp Dies ist die Implementierung des Brute-Force-Ansatzes.

```
1  #include <cstdio>
2  #include <vector>
3  #include <queue>
4  #include <set>
5  #include <string>
6  #include <cstring>
7  #include <algorithm>
8  #include <map>
9
10 #include "Buschfeuer.h"
11
12 typedef std::tuple<int,int,Woods> sssType; //State-Space-Search:
     distance from source; #of skipped waterings, acForest
13
14 pair<Woods,vector<Point>> getNextState(const Woods& w){
15   Woods ret(w.width(),w.height());
16   vector<Point> pnts;
17
18   for(int i = 0; i < w.width; ++i)
19     for(int j = 0; j < w.height; ++j){
20       ret(i,j) = w(i,j);
21       if(w(i,j) == BURNABLE){
22         bool startsBurning = false;
23         for(int k = 0; k < 4; ++k){
24           int x = i + dir[k][0];
25           int y = j + dir[k][1];
26           if(x < 0 || y < 0 || x >= w.width() || y >= w.height())
```

```
27              continue;
28            if(w(x,y) & BURNED)
29              startsBurning = true;
30          }
31          if(startsBurning){
32            ret(i,j) |= BURNED;
33            pnts.push_back(Point(i,j));
34          }
35        }
36      }
37    return pair<Woods,vector<Point>>(ret, pnts);
38  }
39
40  int main(){
41    if (argc > 1) {
42      std::freopen(argv[1],"r",stdin);
43      std::printf("Using %s as input.\n", argv[1]);
44    }
45    if (argc > 2){
46      printf("Mirroring output to %s.\n", argv[2]);
47      if (strstr(argv[2], ".tex2")) {
48        std::printf("I reckon you want me to produce some
             graphicless TeX stuff...\n");
49        printSolution = dontPrintSolution;
50      }
51      else if (strstr(argv[2], ".tex")) {
52        std::printf("I reckon you want me to produce some TeX
             stuff...\n");
53        printSolution = printSolution_TEX;
54      }
55      else if (strstr(argv[2], ".raw")) {
56        std::printf("I reckon you want me to surpress
             graphics...\n");
57        printSolution = dontPrintSolution;
58      }
59      else
60        printSolution = printSolution_TERMINAL;
61      OUT = std::fopen(argv[2],"w");
62    }
63    else{
64      OUT = 0;
65      printSolution = printSolution_TERMINAL;
66    }
67
68    parseInput(stdin);
69
70    std::queue<sssType> q;
71    q.push(sssType(0,0,Forest));
72    set<Woods> visited;
73
74    while(!q.empty()){
75      sssType ac = q.front(); q.pop();
76      if(visited.count(get<2>(ac))) //case already calculated
```

```
77        continue;
78      visited.insert(get<2>(ac));
79
80      auto next = getNextState(get<2>(ac));
81      if(next.second.size() <= get<1>(ac) + 1){ //Fire can be dead
           by this state
82        //Reconstruct Solution Here
83        Forest = get<2>(ac);
84        break;
85      }
86
87      q.push(sssType(get<0>(ac) + 1,get<1>(ac) + 1, next.first));
88      for(auto i : next.second){
89        next.first(i.first,i.second) |= WATERED;
90        q.push(sssType(get<0>(ac) + 1,get<1>(ac), next.first));
91        next.first(i.first,i.second) &= ~WATERED;
92      }
93    }
94
95  }
```

2 Aufgabe 2 - Lebenslinien

2.1 Lösungsidee

Die *Lebenszeit* eines Menschen ist ein abgeschlossenes Intervall $L = [a, b]$ zwischen 2 Zeitpunkten a, b. Da es eine Bijektion J gibt, welche jeder Zeit eine reelle Zahl zuordnet, lässt sich die Lebenszeit eines Menschen auch als Intervall $L' = [J(a), J(b)]$ von reellen Zahlen auffassen. Dies wird im Folgenden getan. Lebenszeit

Ein *Lebensgraph* ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, auf dem eine Funktion $f : V \mapsto P(\mathbb{R})$ [14] definiert ist, welche jedem Knoten eine Lebenszeit eines Menschen, also ein Intervall reeller Zahlen zuordnet und zusätzlich $\forall u, v \in V : (u, v) \in E \Leftrightarrow f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$ gilt. Es gibt also genau dann eine Kante zwischen 2 Knoten, wenn der Schnitt der beiden Lebenszeiten der Knoten nicht leer ist, es also einen Zeitpunkt gibt, zudem beide Menschen gelebt haben. Lebensgraph

Aufgabe ist es nun, für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ zu prüfen, ob es eine Funktion $f : V \mapsto P(\mathbb{R})$ gibt, sodass G Lebensgraph wird.
Dabei soll, sofern es ein solches f gibt, $f(v)$ für alle Knoten $v \in V$ ausgegeben werden, andernfalls soll der minimale Subgraph von G ausgegeben werden, für welchen allein es kein solches f geben kann.

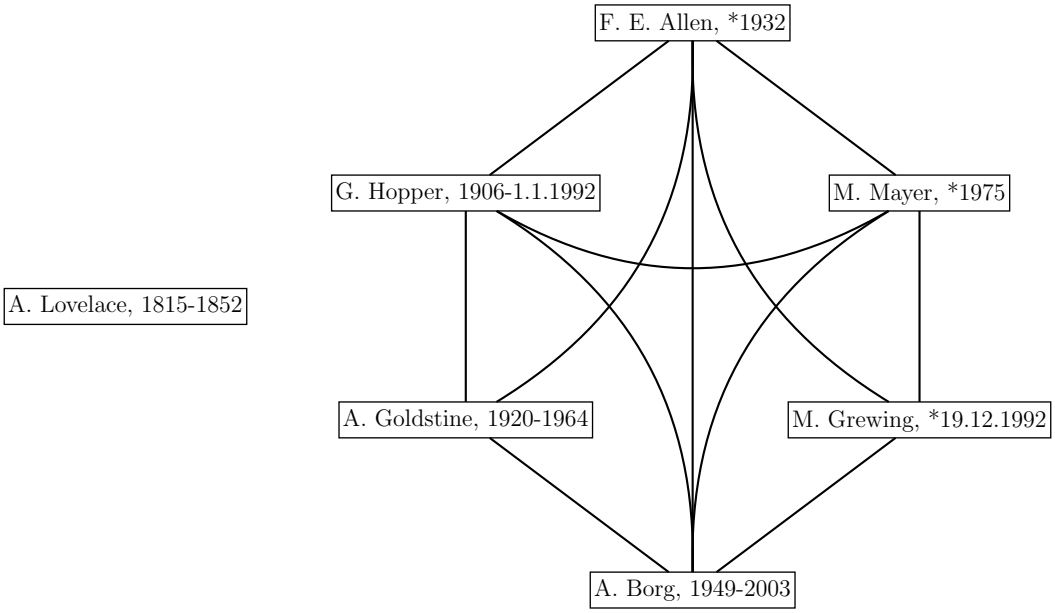


Abbildung 1: Der Lebensgraph aus der Aufgabenstellung

Im Folgenden wird nur von zusammenhängenden Graphen ausgegangen. Für aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehende Graphen lässt sich die Berechnung für jede dieser einzeln durchführen, eventuell muss allen einer Komponente zugewiesenen Intervalle eine reelle Konstante addiert werden, dies ändert jedoch nichts an der eigentlichen Lösung.

2.1.1 Eigenschaften von Lebensgraphen

Es ist leicht ersichtlich, dass ein naiver Algorithmus zur Prüfung eines Graphen auf Lebensgrapheneigenschaft, also ein Algorithmus der alle möglichen zeitlichen Anordnungen der Knoten

[14] $P(\mathbb{R})$ beschreibt die Potenzmenge von $\mathbb{R}$, also die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$

zueinander durchprobiert, nicht zum Ziel führt, da dieser mit einer grob approximierten Laufzeit von $\mathcal{O}(\mathcal{V}!)$ wohl zu langsam ist.

Zur Überprüfung eines Graphen, ob dieser ein Lebensgraphen ist, ist es daher zunächst hilfreich sich Lebensgraphen etwas genauer zu betrachten. Es fällt zunächst auf, dass ein Graph, in dem ein *Loch*[15] auftritt niemals Lebensgraph sein kann: Loch

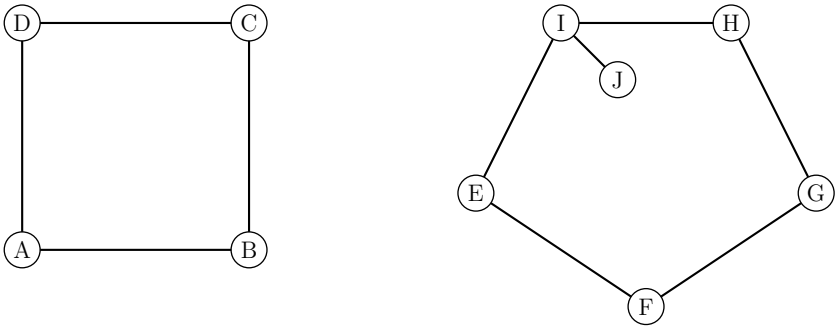


Abbildung 2: Graphen mit Löchern können niemals Lebensgraph sein *(im 2. Graphen ist J* ***nicht*** *Teil des Loches)*

Der Grund hierfür ist offensichtlich: Sei $Z = (v_i, v_k, ..., v_i)$ ein Zyklus der Länge größer 3 eines Graphen $G = (V, E)$, und gelte für G: zwischen 2 Knoten aus Z existiert nur genau dann eine Kante in G, sofern diese beiden Knoten im Zyklus nacheinander durchlaufen werden; bei Z handelt es sich also um ein Loch von G.

Weise man einem Knoten $v_i \in Z$ nun ein Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ zu. Nun muss dem Nachfolger v_{i_1} von v_i im Zyklus Z ein Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ zugewiesen werden, wobei entweder $a_0 < a_1 \leq b_0 < b_1$ oder $a_1 < a_0 \leq b_1 < b_0]$ gelten muss, da in G zwischen v_i und v_{i_1} eine Kante existiert. Hat man sich jedoch für einen dieser beiden Fälle entschieden, so muss man sich bei der Zuweisung von Intervallen zu den nächsten Knoten in Z immer für diesen Fall entscheiden. Sonst würde man Intervalle erhalten, welche einen nichtleeren Schnitt besitzen, deren Knoten in G jedoch nicht durch eine Kante verbunden sind. Dies wäre ein Widerspruch zur Definition eines Lebensgraphen.
Setzt man diese Zuweisungen jedoch bis zum Ende des Zyklus fort, so erhält man zwangsläufig ein Problem mit der Kante zwischen dem Knoten v_i und seinem Vorgänger im Zyklus Z. In jedem Fall muss der Schnitt der diesen beiden Knoten zugewiesenen Intervalle nach Konstruktion leer sein, da man ansonsten bei einem vorangegangenen Schritt einen Widerspruch zur Definition eines Lebensgraphen erhalten hatte. Dies an sich stellt jedoch auch einen Widerspruch dar, da diese beiden Konten in G mit einer Kante verbunden sind.

Somit hat ein Lebensgraph kein Loch.
Graphen ohne Löcher werden in der Literatur *Chordalgraph* oder *Triangulierter Graph*[16] genannt, es gibt effiziente Algorithmen zur Erkennung solcher Graphen. Chordalgraph

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass ein Lebensgraph sehr wohl *Dreiecke*, also Zyklen der Länge 3 haben darf. Dies liegt insbesondere daran, dass ein Dreieck eine *Clique* der Größe 3 bildet, jeder der 3 Knoten also mit jedem anderen der 3 Knoten verbunden ist. Speziell bei Dreiecken muss es also einen Zeitpunkt geben, an dem alle 3 entsprechenden Menschen gelebt haben. Dreiecke Clique

[15] Ein Loch ist dabei ein Zyklus mit einer Länge größer 3, zwischen dessen einzelnen Knoten nur eine Kante existiert, wenn diese auch im Zyklus existiert.

[16] Der englischsprachige Wikipediaartikel ist in diesem Fall (mal wieder) deutlich informativer: `https://en.wikipedia.org/wiki/Chordal_graph`

Weiterhin ist es für einen Lebensgraphen nur *notwendig* Chordalgraph zu sein. Betrachte man folgenden Graphen, der Chordalgraph ist, jedoch nicht Lebensgraph sein kann:

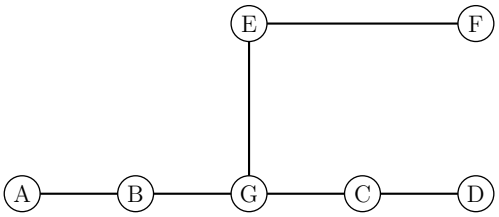


Abbildung 3: Chordalgraph, der **kein** Lebensgraph ist

Es gilt nun also ein *hinreichendes Kriterium* für Lebensgraphen zu finden.

Sei dazu der *Komplementärgraph* $\overline{G}$[17] eines Lebensgraphen G betrachtet. Ist zwischen 2 Knoten v_i, v_j in $\overline{G}$ nun eine Kante, so bedeutet dies für den Schnitt der diesen Knoten zugeordneten Lebenszeiten I_{v_i}, I_{v_j}, dass dieser leer ist, $I_{v_i} \cap I_{v_j} = \emptyset$. Somit muss sich also eines dieser beiden Lebenszeiten I_{v_i}, I_{v_j} auf der reellen Zahlengeraden vor dem anderen befinden. Dabei sei durch $I_{v_i} <_I I_{v_j}$ beschrieben, dass sich das Intervall I_{v_j} nach dem Intervall I_{v_i} auf der reellen Zahlengeraden befindet.
Für den Graphen $\overline{G} = (V, \overline{E})$ ist also eine Halbordnung $<_I$ definiert, mit $\forall v_i, v_j \in V : (v_i, v_j) \in \overline{E} \Leftrightarrow (I_{v_i} <_I I_{v_j} \vee I_{v_j} <_I I_{v_i})$.

Bei dem Graphen $\overline{G}$ zusammen mit der Halbordnung $<_I$ spricht man in der Literatur[18] von *Vergleichbarkeitsgraph*.

Vergleichbarkeitsgraph

Es ist nun möglich zu zeigen, dass ein Lebensgraph genau derjenige Graph ist, der ein Chordalgraph ist, und dessen Komplementärgraph ein Vergleichbarkeitsgraph mit obiger Halbordnung ist. Auf den Beweis sei an dieser Stelle verzichtet, dieser kann in der Literatur[19] nachgelesen werden.

2.1.2 Algorithmische Erkennung von Lebensgraphen

Der vorangegangene Abschnitt liefert nun einen direkten Algorithmus zur Überprüfung, ob ein Graph ein Lebensgraph ist. Zunächst wird überprüft, ob der gegebene Graph ein Chordalgraph ist, dann wird überprüft, ob der Komplementärgraph ein Vergleichbarkeitsgraph ist.
Idealerweise sollte bei der Überprüfung gleich eine mögliche Zuordnung von Lebenszeiten bzw. Intervallen zu Knoten abfallen, auch wenn dies noch nicht direkt ersichtlich ist.

Die Überprüfung, ob ein gegebener Graph ein Chordalgraph ist, kann mithilfe einer *lexikografischen Breitensuche* (im Folgenden Lex-BFS) geschehen. Dabei ist eine Lex-BFS ähnlich einer normalen Breitensuche. Anstatt einer Warteschlange (Queue) verwendet die Lex-BFS jedoch eine geordnete Folge von Knotenmengen. Die Lex-BFS wird speziell dazu benutzt, eine spezielle *Abfolge* der Knoten zu erhalten, mit welcher im Folgenden dann weiter operiert werden kann.

Lex-BFS

[17] $\overline{G}$ besitzt die selben Knoten wie G, $\overline{G}$ hat jedoch nur genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn zwischen diesen Knoten in G keine Kante ist.

[18] `https://de.wikipedia.org/wiki/Vergleichbarkeitsgraph`

[19] Gilmore, P. C.; Hoffman, A. J. (1964), " A characterization of comparability graphs and of interval graphs", Canadian Journal of Mathematics 16: 539–548, `http://cms.math.ca/cjm/v16/cjm1964v16.0539-0548.pdf`. (Der Beweis ist eine direkte Schlussfolgerung aus Theorem 2, zusammen mit Theorem 1 und der definierenden Eigenschaft von Chordalgraphen; Lebensgraphen heißen dort *Intervallgraphen*)

```
1  //Lex-BFS
2  //Eingabe: Graph G = (V,E), Knoten seien durchnummeriert 0..|V|-1
3  //Ausgabe: Reihenfolge der Knoten
4
5  begin
6    int[] ausgabe := int[|V|];
7
8    Liste<int> L  := V; //Initiale Anordnung der Knoten (L[i] = i)
9
10   Liste<int>[] S := {L};//Klassen
11
12   int cnt = |V| - 1;  //Zähler für Ausgabe
13   while S != { } do begin
14     int x := letztes Element der letzten Klasse in S;
15     entferne x aus der letzten Klasse in S,
16        wird diese Klasse dadurch leer, entferne diese aus S;
17
18     ausgabe[x] := cnt; cnt := cnt - 1;
19
20     //Klassen werden in 2 Teilklassen aufgespalten:
21     //diejenigen Knoten, die Nachbar von x sind,
22     //und die, die es nicht sind
23
24     foreach Liste<int> i in S do begin
25       nachbarn := { Knoten in i, die benachbart zu x };
26       nicht_nachbarn := i \ nachbarn;
27
28       //Ordne Nachbarn vor Nicht-Nachbarn in S
29       ersetzte { i } durch { nachbarn , nicht_nachbarn } in S;
30             //Ignoriere leere Mengen
31     end;
32   end;
33   return ausgabe;
34 end.
```

2.2 Laufzeitanalyse

2.3 Erweiterungen

2.4 Umsetzung

2.5 Beispiele

2.6 Quelltext