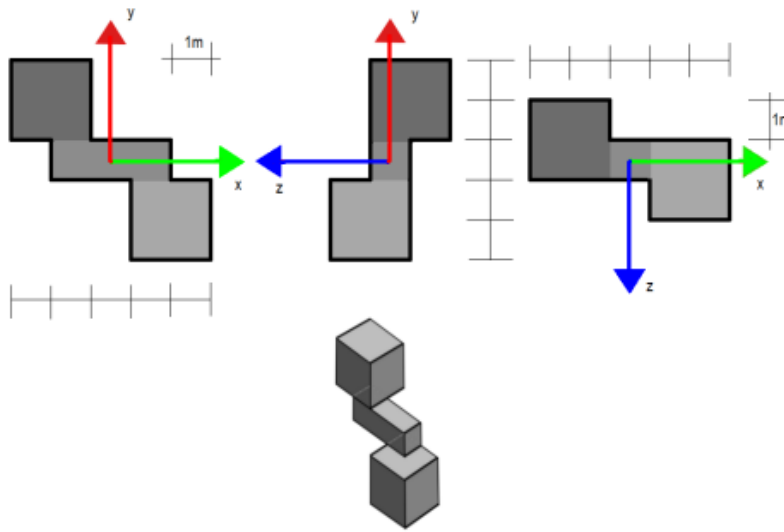


PHYSICAL BASED ANIMATIONS AND MATHEMATICAL MODELING HW 2

MATICA HYBNOSTI

Autor: Marián Kravec

Našou úlohou je vypočítať hmotnosť, tensor zotrvačnosti a ťažisko nasledujúceho telesa:



Prvá vec čo si môžeme všimnúť je, že aj napriek tomu, že naše teleso vyzerá pomerne komplikovane vieme ho rozdeliť na trojicu hranolov z ktorých dve hranoly sú dokonca kocky.

To nám úlohu zjednodušuje keďže vieme, že pre hranol sa matica zotrvačnosti vypočíta nasledovne:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(w^2 + d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$$

Kde (w, h, d) sú rozmery hranolu a m je jeho hmotnosť. Avšak tento vzorec platí iba ak os otáčania prechádza ťažiskom daného hranolu. Ak je tento hranol posunutý v súradnicovej sústave o vektor \mathbf{r} tak jeho maticu hybnosti vieme vypočítať nasledovne:

$$J = J_0 + m(\mathbf{r}^T \mathbf{r} I - \mathbf{r} \mathbf{r}^T)$$

Podme si teraz vypočítať rozmery jednotlivých našich rozmerov. Ak sa nemýlim v zadaní nie je ich poloha a rozmery určené presnejšie ako z pohľadu na ich vizualizáciu čiže pôdorysy. Z pôdorysov vidíme, že všetky 3 hranoly majú všetky hrany rovnobežné s niektorou zo štandardných osí čo uľahčuje určovanie ich rozmerov.

Začnime s kockou ktorá je na pôdorysoch zobrazená ako najtmavšia, označíme si ju ako kváder k_1 . Vidíme, že tento hranol má všetky rozmery 2 metre, ak budeme považovať meter za základnú jednotku nášho priestoru tak rozmery vieme zapísať ako $(w_1, h_1, d_1) = (2, 2, 2)$.

Ak sa pozrieme na kocku na opačnej strane telesa (najsvetlejšia)(označíme ako kváder k_2) vidíme, že jej rozmery sú totožné čiže takisto ju vieme zapísať $(w_2, h_2, d_2) = (2, 2, 2)$.

Nakoniec nám zostal hranol v strede ktorý označíme ako kváder k_3 . Tu si z prvého pôdorysu môžeme všimnúť, že v smere osi x má náš kváder šírku 3. Zároveň v smere osi y vidíme, že má výšku 1, hodnotu hĺbky z vidíme na druhom a treťom pôdoryse a je to hodnota 1. Takže náš kváder vieme zapísať ako $(w_3, h_3, d_3) = (3, 1, 1)$.

Predtým, než sa pustíme do ďalších výpočtov ešte si zadefinujeme hustotu tohto objektu. Keďže som sa narodil 18.9. tak v mojom prípade $x = 1$ a $y = 8$, čiže ak hustota je $\rho = 1.8xy \frac{kg}{m^3}$ tak v mojom prípade je to $\rho = 1.18 \frac{kg}{m^3}$.

a)

Ako prvé vypočítame hmotnosť celého telesa. Vieme, že celková hmotnosť telesa m je súčet hmotností jeho častí. Preto ju vieme zapísať ako $M = \sum_{i=1}^3 m_i$ kde m_i je hmotnosť kvádra k_i .

O hmotnosti kvádra vieme, že ju vieme vypočítať ako objem kvádra V vynásobený hustotou ρ ($m = V \cdot \rho$).

Objem kvádra vieme vypočítať ako súčin jeho rozmerov, čiže $V = w \cdot h \cdot d$

Takže ďalším krokom bude výpočet objemu V_i našich kvádrov (rozmary kvádrov sme počítali v metroch takže je to priamočiare).

$$V_1 = w_1 \cdot h_1 \cdot d_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8m^3$$

$$V_2 = w_2 \cdot h_2 \cdot d_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8m^3$$

$$V_3 = w_3 \cdot h_3 \cdot d_3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3m^3$$

Ako ďalšie vypočítame hmotnosti jednotlivých kvádrov

(všetky kvádre majú rovnakú hustotu ρ)

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = 8 \cdot 1.18 = 9.44kg$$

$$m_2 = V_2 \cdot \rho = 8 \cdot 1.18 = 9.44kg$$

$$m_3 = V_3 \cdot \rho = 3 \cdot 1.18 = 3.54kg$$

Teraz môžeme vypočítať celkovú hmotnosť objektu

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 9.44 + 9.44 + 3.54 = 22.42kg$$

Takže celková hmotnosť telesa je $M = 22.42kg$.

b)

Ďalej chceme vypočítať tenzor zotrvačnosti J pre os prechádzajúci ťažiskom telesa, tento tenzor vieme vypočítať ako súčet tenzorov jednotlivých častí objektu $J = \sum_{i=1}^3 J_i$.

Takže teraz potrebujeme vypočítať tenzory hybnosti jednotlivých častí objektu. Vypočítať J_0 týchto kvádrov už vieme ale keďže naše kvádre môžu mať posunuté ťažisko oproti ťažisku celého objektu a naša os otáčania prechádza ťažiskom objektu tak na výpočet potrebujeme vypočítať ich ťažiská a aj ťažisko celého objektu aby sme mohli vypočítať vektory r . (Tieto výpočty sú v časti c) ďalej v tejto časti úlohy už s nimi budeme pracovať preto je čitateľovi odporúčané si najskôr prečítať časť c))

Avšak skôr ako sa pustíme do výpočtov tenzorov J našich kvádrov vypočítame maticu hybnosti J_0 pre os otáčania prechádzajúcu ich ťažiskom:

$$\begin{aligned} J_{10} &= \begin{bmatrix} \frac{m_1}{12}(h_1^2 + d_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{12}(w_1^2 + d_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{12}(w_1^2 + h_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.78667 \cdot (4 + 4) & 0 & 0 \\ 0 & 0.78667 \cdot (4 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0.78667 \cdot (4 + 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} \\ J_{20} &= \begin{bmatrix} \frac{m_2}{12}(h_2^2 + d_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{12}(w_2^2 + d_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{12}(w_2^2 + h_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3.54}{12}(1^2 + 1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3.54}{12}(3^2 + 1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3.54}{12}(3^2 + 1^2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.295 \cdot (1 + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0.295 \cdot (9 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0.295 \cdot (9 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix} \\ J_{30} &= \begin{bmatrix} \frac{m_3}{12}(h_3^2 + d_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3}{12}(w_3^2 + d_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3}{12}(w_3^2 + h_3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.78667 \cdot (4 + 4) & 0 & 0 \\ 0 & 0.78667 \cdot (4 + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 0.78667 \cdot (4 + 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

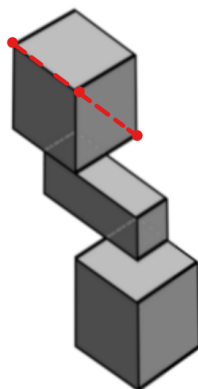
Ako sme vypočítali v časti c) ťažisko nášho telesa je bod $c = (0, 0, 0)$, zároveň sme vypočítali, ťažiská našich jednotlivých kvádrov. Teraz potrebujeme použitím týchto informácií vypočítať vektory r čiže posuny hranolov v súradnicovej sústave od ťažiska.

c)

Ako ďalšie potrebujeme vypočítať ťažisko telesa, vieme, že toto ťažisko vieme vypočítať ako vážený priemer ťažísk jednotlivých častí telesa v našom prípade kvádrov kde váhy ťažísk sú hmotnosti k nim prislúchajúcich telies, čiže $c = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot c_i}{M}$.

Takže ako prvé potrebujeme vypočítať ťažiská našich kvádrov tvoriacich teleso. Keďže ide o kvádre s rovnomernou hustotou ich ťažisko je v strede čiže jedným z spôsobov výpočtu tohto bodu je vypočítať priemer pozícií dvoch protiľahlých vrcholov.

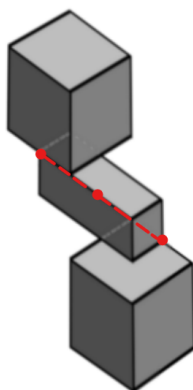
Podme sa pozrieť na prípad kvádra k_1 :



Z pôdorysov vieme vyčítať, že pozície dvoch protiľahlých vrcholov zvýraznených na našom obrázku sú $v_{11} = (-2.5, 2.5, 0.5)$ a $v_{12} = (-0.5, 0.5, -1.5)$, čiže ak z nich teraz vypočítame priemer dostaneme:

$$c_1 = \frac{v_{11} + v_{12}}{2} = \frac{(-2.5, 2.5, 0.5) + (-0.5, 0.5, -1.5)}{2} = \frac{(-3, 3, -1)}{2} = (-1.5, 1.5, -0.5)$$

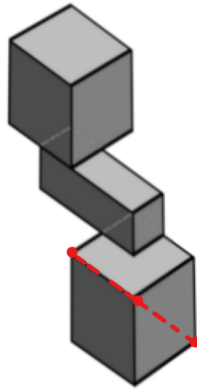
Podobne môžeme pokračovať pre kváder k_2 :



Takisto pomocou pôdorysov určíme označené vrcholy $v_{21} = (-1.5, 0.5, 0.5)$ a $v_{22} = (1.5, -0.5, -0.5)$. A takisto vypočítame ťažisko:

$$c_2 = \frac{v_{21} + v_{22}}{2} = \frac{(-1.5, 0.5, 0.5) + (1.5, -0.5, -0.5)}{2} = \frac{(0, 0, 0)}{2} = (0, 0, 0)$$

Nakoniec postup zopakujeme pre kváder k_3 :



Znovu z pôdorysov zistíme pozície vrcholov: $v_{31} = (0.5, -0.5, 1.5)$ a $v_{32} = (2.5, -2.5, -0.5)$. A vypočítame ťažisko:

$$c_3 = \frac{v_{31} + v_{32}}{2} = \frac{(0.5, -0.5, 1.5) + (2.5, -2.5, -0.5)}{2} = \frac{(3, -3, 1)}{2} = (1.5, -1.5, 0.5)$$

Teraz máme ťažiská jednotlivých kvádrov a z časti a) poznáme ich hmotnosti takže môžeme vypočítať ťažisko celého telesa:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \cdot c_i}{M} = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + m_3 \cdot c_3}{M} = \\ &= \frac{9.44 \cdot (-1.5, 1.5, -0.5) + 3.54 \cdot (0, 0, 0) + 9.44 \cdot (1.5, -1.5, 0.5)}{22.42} = \\ &= \frac{(-14.16, 14.16, -4.72) + (0, 0, 0) + (14.16, -14.16, 4.72)}{22.42} = \\ &= \frac{(0, 0, 0)}{22.42} = (0, 0, 0) \end{aligned}$$