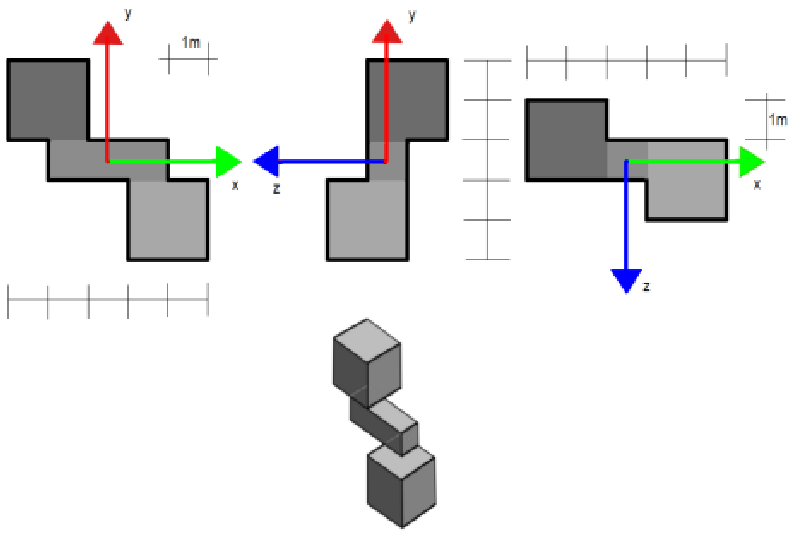
PHYSICAL BASED ANIMATIONS AND MATHEMATICAL MODELING HW 2

Matica hybnosti

Autor: Marián Kravec

Našou úlohou je vypočítať hmotnosť, tensor zotrvačnosti a ťažisko nasledujúceho telesa:



Prvá vec čo si môžeme všimnúť je, že aj napriek tomu, že naše teleso vyzerá pomerne komplikovane vieme ho rozdeliť na trojicu hranolov z ktorých dve hranoly sú dokonca kocky.

To nám úlohu zjednodušuje keďže vieme, že pre hranol sa matica zotrvačnosti vypočíta následovne:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2+d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(w^2+d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(w^2+h^2) \end{bmatrix}$$

Kde (w, h, d) sú rozmery hranolu a m je jeho hmotnosť. Avšak tento vzorec platí iba ak os otáčania prechádza ťažiskom daného hranolu. Ak je tento hranol posunutý v súradnicovej sústave o vektor $\boldsymbol{r}$ tak jeho maticu hybnosti vieme vypočítať následovne:

$$J = J_0 + m(r^T r I - r r^T)$$

Poďme si teraz vypočítať rozmery jednotlivých našich rozmerov. Ak sa nemýlim v zadaní nie je ich poloha a rozmery určené presnejšie ako z pohľadu na ich vizualizáciu čiže pôdorysy. Z pôdorysov vidíme, že všetky 3 hranoly majú všetky hrany rovnobežné s niektorou zo štandardných osí čo uľahčuje určovanie ich rozmerov.

Začnime s kockou ktorá je na pôdorysoch zobrazená ako najtmavšia, označíme si ju ako kváder k_1. Vidíme, že tento hranol má všetky rozmery 2 metre, ak budeme považovať meter za základnú jednotku nášho priestoru tak rozmery vieme zapísať ako $(w_1, h_1, d_1) = (2, 2, 2)$.

Ak sa pozrieme na kocku na opačnej strana telesa (najsvetlejšia)(označíme ako kváder k_2) vidíme, že jej rozmery sú totožné čiže takisto ju vieme zapísať $(w_2, h_2, d_2) = (2, 2, 2)$.

Nakoniec nám zostal hranol v strede ktorý označíme ako kváder k_3. Tu si z prvého pôdorysu môžeme všimnúť, že v smere osi x má náš kváder šírku 3. Zároveň v smere osi y vidíme, že má výšku 1, hodnotu hĺbky z vidíme na druhom a treťom pôdoryse a je to hodnota 1. Takže náš kváder vieme zapísať ako $(w_3, h_3, d_3) = (3, 1, 1)$.

Predtým, než sa pustíme do ďalších výpočtov ešte si zadefinujme hustotu tohto objektu. Keďže som sa narodil 18.9. tak v mojom prípade $x = 1$ a $y = 8$, čiže ak hustota je $\rho = 1.xy\frac{kg}{m^3}$ tak v mojom prípade je to $\rho = 1.18\frac{kg}{m^3}$.

a)

Ako prvé vypočítame hmotnosť celého telesa. Vieme, že celková hmotnosť telesa m je súčet hmotností jeho častí. Preto ju vieme zapísať ako $M = \sum_{i=1}^{3} m_i$ kde m_i je hmotnosť kvádra k_i.
O hmotnosti kvádra vieme, že ju vieme vypočítať ako objem kvádra V vynásobený hustotou ρ ($m = V \cdot \rho$).
Objem kvádra vieme vypočítať ako súčin jeho rozmerov, čiže $V = w \cdot h \cdot d$
Takže ďalším krokom bude výpočet objemu V_i našich kvádrov (rozmery kvádrov sme počítali v metroch takže je to priamočiare).

$$V_1 = w_1 \cdot h_1 \cdot d_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8m^3$$
$$V_2 = w_2 \cdot h_2 \cdot d_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8m^3$$
$$V_3 = w_3 \cdot h_3 \cdot d_3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3m^3$$

Ako ďalšie vypočítame hmotnosti jednotlivých kvádrov
(všetky kvádre majú rovnakú hustotu ρ)

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = 8 \cdot 1.18 = 9.44kg$$
$$m_2 = V_2 \cdot \rho = 8 \cdot 1.18 = 9.44kg$$
$$m_3 = V_3 \cdot \rho = 3 \cdot 1.18 = 3.54kg$$

Teraz môžeme vypočítať celkovú hmotnosť objektu

$$M = \sum_{i=1}^{3} m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 9.44 + 9.44 + 3.54 = 22.42kg$$

Takže celková hmotnosť telesa je $M = 22.42kg$.

b)

Ďalej chcem vypočítať tenzor zotrvačnosti J pre os prechádzajúci ťažiskom telese, tento tenzor vieme vypočítať ako súčet tenzorov jednotlivých častí objektu $J = \sum_{i=1}^{3} J_i$.
Takže teraz potrebujeme vypočítať tenzory hybnosti jednotlivých častí objektu. Vypočítať J_0 týchto kvádrov už vieme ale keďže naše kvádre môžu mať posunuté ťažisko oproti ťažisku celého objektu a naša os otáčania prechádza ťažiskom objektu tak na výpočet potrebujeme vypočítať ich ťažiská a aj ťažisko celého objektu aby sme mohli vypočítať vektory r. (Tieto výpočtu sú v časti c) ďalej v tejto časti úlohy už s nimi budeme pracovať preto je čitateľovi odporúčané si najskôr prečítať časť c))

Avšak skôr ako sa pustíme do výpočtov tenzorov J našich kvádrov vypočítame maticu hybnosti J_0 pre os otáčania prechádzajúcu ich ťažiskom:

$$J_{10} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{12}(h_1^2 + d_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{12}(w_1^2 + d_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{12}(w_1^2 + h_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.78667 \cdot (4+4) & 0 & 0 \\ 0 & 0.78667 \cdot (4+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0.78667 \cdot (4+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix}$$
$$J_{20} = \begin{bmatrix} \frac{m_2}{12}(h_2^2 + d_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{12}(w_2^2 + d_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{12}(w_2^2 + h_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3.54}{12}(1^2 + 1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3.54}{12}(3^2 + 1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3.54}{12}(3^2 + 1^2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.295 \cdot (1+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0.295 \cdot (9+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0.295 \cdot (9+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix}$$
$$J_{30} = \begin{bmatrix} \frac{m_3}{12}(h_3^2 + d_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3}{12}(w_3^2 + d_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3}{12}(w_3^2 + h_3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9.44}{12}(2^2 + 2^2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.78667 \cdot (4+4) & 0 & 0 \\ 0 & 0.78667 \cdot (4+4) & 0 \\ 0 & 0 & 0.78667 \cdot (4+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix}$$

Ako sme vypočítali v časti c) ťažisko nášho telesa je bod $c = (0,0,0)$, zároveň sme vypočítali, ťažiská našich jednotlivých kvádrov. Teraz potrebujeme použitím týchto informácii vypočítať vektory r čiže posuny hranolov v súradnicovej sústave od ťažiska.

$$\begin{aligned} r_1 = c_1 - c = (-1.5, 1.5, -0.5) - (0,0,0) = (-1.5, 1.5, -0.5) \\ r_2 = c_2 - c = (1.5, -1.5, 0.5) - (0,0,0) = (1.5, -1.5, 0.5) \\ r_3 = c_3 - c = (0,0,0) - (0,0,0) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Ako predposledný krok teraz vypočítame tenzory zotrvačnosti našich kvádrov s ohľadom na os otáčania prechádzajúcu ťažiskom pomocou rovnice ktorú sme si na začiatku úlohy zadefinovali:

$$\begin{aligned} J_1 &= J_{10} + m_1(r_1^T r_1 I - r_1 r_1^T) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \left((-1.5, 1.5, -0.5) \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} (-1.5, 1.5, -0.5) \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \left((2.25 + 2.25 + 0.25) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.25 & -2.25 & 0.75 \\ -2.25 & 2.25 & -0.75 \\ 0.75 & -0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \left(\begin{pmatrix} 4.75 & 0 & 0 \\ 0 & 4.75 & 0 \\ 0 & 0 & 4.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.25 & -2.25 & 0.75 \\ -2.25 & 2.25 & -0.75 \\ 0.75 & -0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \begin{pmatrix} 2.5 & 2.25 & -0.75 \\ 2.25 & 2.5 & 0.75 \\ -0.75 & 0.75 & 4.5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 23.6 & 21.24 & -7.08 \\ 21.24 & 23.6 & 7.08 \\ -7.08 & 7.08 & 42.48 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 29.89333 & 21.24 & -7.08 \\ 21.24 & 29.89333 & 7.08 \\ -7.08 & 7.08 & 48.77333 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= J_{20} + m_2(r_2^T r_2 I - r_2 r_2^T) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \left((1.5, -1.5, 0.5) \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} (1.5, -1.5, 0.5) \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \left((2.25 + 2.25 + 0.25) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.25 & -2.25 & 0.75 \\ -2.25 & 2.25 & -0.75 \\ 0.75 & -0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \left(\begin{pmatrix} 4.75 & 0 & 0 \\ 0 & 4.75 & 0 \\ 0 & 0 & 4.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.25 & -2.25 & 0.75 \\ -2.25 & 2.25 & -0.75 \\ 0.75 & -0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + 9.44 \begin{pmatrix} 2.5 & 2.25 & -0.75 \\ 2.25 & 2.5 & 0.75 \\ -0.75 & 0.75 & 4.5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6.29333 & 0 & 0 \\ 0 & 6.29333 & 0 \\ 0 & 0 & 6.29333 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 23.6 & 21.24 & -7.08 \\ 21.24 & 23.6 & 7.08 \\ -7.08 & 7.08 & 42.48 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 29.89333 & 21.24 & -7.08 \\ 21.24 & 29.89333 & 7.08 \\ -7.08 & 7.08 & 48.77333 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &= J_{30} + m_3(r_3^T r_3 I - r_3 r_3^T) = \\
&= \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix} + 3.54 \left((0,0,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0,0,0) \right) = \\
&= \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix} + 3.54 \left(0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Teraz môžeme vypočítať tenzor zotrvačnosti celého telesa ako súčet tenzorov jednotlivých častí:

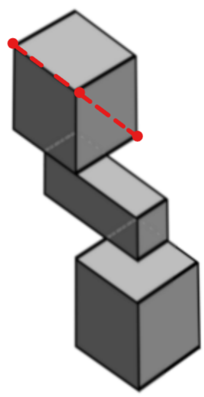
$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{i=1}^{3} = J_1 + J_2 + J_3 = \\
&= \begin{bmatrix} 29.89333 & 21.24 & -7.08 \\ 21.24 & 29.89333 & 7.08 \\ -7.08 & 7.08 & 48.77333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29.89333 & 21.24 & -7.08 \\ 21.24 & 29.89333 & 7.08 \\ -7.08 & 7.08 & 48.77333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & 2.95 & 0 \\ 0 & 0 & 2.95 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 60.37666 & 42.48 & -14.16 \\ 42.48 & 62.73666 & 14.16 \\ -14.16 & 14.16 & 100.49666 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

c)

Ako ďalšie potrebujeme vypočítať ťažisko telesa, vieme, že toto ťažisko vieme vypočítať ako vážený priemer ťažísk jednotlivých častí telesa v našom prípade kvádrov kde váhy ťažísk sú hmotnosti k nim prislúchajúcich telies, čiže $c = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot c_i}{M}$.

Takže ako prvé potrebujeme vypočítať ťažiská našich kvádrov tvoriacich teleso. Keďže ide o kvádre s rovnomernou hustotou ich ťažisko je v strede čiže jedným z spôsobov výpočtu tohto bodu je vypočítať priemer pozícii dvoch protiľahlých vrcholov.

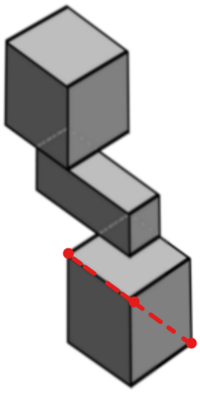
Poďme sa pozrieť na prípad kvádra k_1:



Z pôdorysov vieme vyčítať, že pozície dvoch protiľahlých vrcholov zvýraznených na našom obrázku sú $v_{11} = (-2.5, 2.5, 0.5)$ a $v_{12} = (-0.5, 0.5, -1.5)$, čiže ak z nich teraz vypočítame priemer dostaneme:

$$
c_1 = \frac{v_{11} + v_{12}}{2} = \frac{(-2.5, 2.5, 0.5) + (-0.5, 0.5, -1.5)}{2} = \frac{(-3, 3, -1)}{2} = (-1.5, 1.5, -0.5)
$$

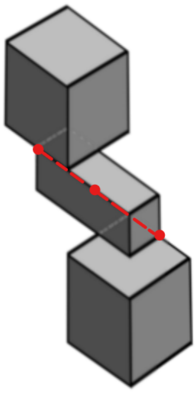
Podobne môžeme pokračovať pre kváder k_2:



Znovu z pôdorysov zistíme pozície vrcholov: $v_{21} = (0.5, -0.5, 1.5)$ a $v_{22} = (2.5, -2.5, -0.5)$. A vypočítame ťažisko:

$$c_2 = \frac{v_{21} + v_{22}}{2} = \frac{(0.5, -0.5, 1.5) + (2.5, -2.5, -0.5)}{2} = \frac{(3, -3, 1)}{2} = (1.5, -1.5, 0.5)$$

Nakoniec postup zopakujeme pre kváder k_3:



Takisto pomocou pôdorysov určíme označené vrcholy $v_{31} = (-1.5, 0.5, 0.5)$ a $v_{32} = (1.5, -0.5, -0.5)$. A takisto vypočítame ťažisko:

$$c_3 = \frac{v_{31} + v_{32}}{2} = \frac{(-1.5, 0.5, 0.5) + (1.5, -0.5, -0.5)}{2} = \frac{(0, 0, 0)}{2} = (0, 0, 0)$$

Teraz máme ťažiská jednotlivých kvádrov a z časti a) poznáme ich hmotnosti takže môžeme vypočítať ťažisko celého telesa:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot c_i}{M} = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + m_3 \cdot c_3}{M} = \\ &= \frac{9.44 \cdot (-1.5, 1.5, -0.5) + 9.44 \cdot (1.5, -1.5, 0.5) + 3.54 \cdot (0, 0, 0)}{22.42} = \\ &= \frac{(-14.16, 14.16, -4.72) + (14.16, -14.16, 4.72) + (0, 0, 0)}{22.42} = \\ &= \frac{(0, 0, 0)}{22.42} = (0, 0, 0) \end{aligned}$$