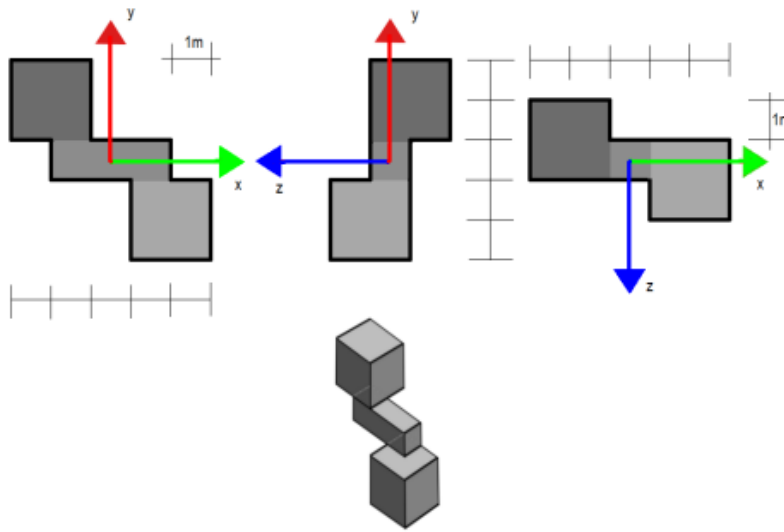


PHYSICAL BASED ANIMATIONS AND MATHEMATICAL MODELING HW 2

MATICA HYBNOSTI

Autor: Marián Kravec

Našou úlohou je vypočítať hmotnosť, tensor zotrvačnosti a ťažisko nasledujúceho telesa:



Prvá vec čo si môžeme všimnúť je, že aj napriek tomu, že naše teleso vyzerá pomerne komplikovane vieme ho rozdeliť na trojicu hranolov z ktorých dve hranoly sú dokonca kocky.

To nám úlohu zjednodušuje keďže vieme, že pre hranol sa matica zotrvačnosti vypočíta nasledovne:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(w^2 + d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$$

Kde (w, h, d) sú rozmery hranolu a m je jeho hmotnosť. Avšak tento vzorec platí iba ak os otáčania prechádza ťažiskom daného hranolu. Ak je tento hranol posunutý v súradnicovej sústave o vektor \mathbf{r} tak jeho maticu hybnosti vieme vypočítať nasledovne:

$$J = J_0 + m(\mathbf{r}^T \mathbf{r} I - \mathbf{r} \mathbf{r}^T)$$

Podme si teraz vypočítať rozmery jednotlivých našich rozmerov. Ak sa nemýlim v zadaní nie je ich poloha a rozmery určené presnejšie ako z pohľadu na ich vizualizáciu čiže pôdorysy. Z pôdorysov vidíme, že všetky 3 hranoly majú všetky hrany rovnobežné s niektorou zo štandardných osí čo uľahčuje určovanie ich rozmerov.

Začnime s kockou ktorá je na pôdorysoch zobrazená ako najtmavšia, označíme si ju ako kváder k_1 . Vidíme, že tento hranol má všetky rozmery 2 metre, ak budeme považovať meter za základnú jednotku nášho priestoru tak rozmery vieme zapísať ako $(w_1, h_1, d_1) = (2, 2, 2)$.

Ak sa pozrieme na kocku na opačnej strane telesa (najsvetlejšia)(označíme ako kváder k_2) vidíme, že jej rozmery sú totožné čiže takisto ju vieme zapísať $(w_2, h_2, d_2) = (2, 2, 2)$.

Nakoniec nám zostal hranol v strede ktorý označíme ako kváder k_3 . Tu si z prvého pôdorysu môžeme všimnúť, že v smere osi x má náš kváder šírku 3. Zároveň v smere osi y vidíme, že má výšku 1, hodnotu hĺbky z vidíme na druhom a treťom pôdoryse a je to hodnota 1. Takže náš kváder vieme zapísať ako $(w_3, h_3, d_3) = (3, 1, 1)$.

Predtým, než sa pustíme do ďalších výpočtov ešte si zadefinujeme hustotu tohto objektu. Keďže som sa narodil 18.9. tak v mojom prípade $x = 1$ a $y = 8$, čiže ak hustota je $\rho = 1.8xy \frac{kg}{m^3}$ tak v mojom prípade je to $\rho = 1.18 \frac{kg}{m^3}$.

a)

Ako prvé vypočítame hmotnosť celého telesa. Vieme, že celková hmotnosť telesa m je súčet hmotností jeho častí. Preto ju vieme zapísať ako $m = \sum_{i=1}^3 m_i$ kde m_i je hmotnosť kvádra k_i .

O hmotnosti kvádra vieme, že ju vieme vypočítať ako objem kvádra V vynásobený hustotou ρ ($m = V \cdot \rho$).

Objem kvádra vieme vypočítať ako súčin jeho rozmerov, čiže $V = w \cdot h \cdot d$

Takže ďalším krokom bude výpočet objemu V_i našich kvádrov (rozмеры kvádrov sme počítali v metroch takže je to priamočiare).

$$V_1 = w_1 \cdot h_1 \cdot d_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8m^3$$

$$V_2 = w_2 \cdot h_2 \cdot d_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8m^3$$

$$V_3 = w_3 \cdot h_3 \cdot d_3 = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3m^3$$

Ako ďalšie vypočítame hmotnosti jednotlivých kvádrov

(všetky kvádre majú rovnakú hustotu ρ)

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = 8 \cdot 1.18 = 9.44kg$$

$$m_2 = V_2 \cdot \rho = 8 \cdot 1.18 = 9.44kg$$

$$m_3 = V_3 \cdot \rho = 3 \cdot 1.18 = 3.54kg$$

Teraz môžeme vypočítať celkovú hmotnosť objektu

$$m = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 9.44 + 9.44 + 3.54 = 22.42kg$$

Takže celková hmotnosť telesa je $m = 22.42kg$.

b)

Ďalej chceme vypočítať tenzor zotrvačnosti J ktorý vieme vypočítať ako súčet tenzorov jednotlivých častí objektu $J = \sum_{i=1}^3 J_i$.