Algoritmické riešenia ťažkých problémov
Domáca úloha 3

Autor: Marián Kravec

Úloha 2 - A random walk on a tree

Chceme dokázať, že pre náš algoritmus platí $E(ALG(n)) \leq log_2(n+1)$.

Budeme to dokazovať pomocou matematickej indukcie.
Začnime bázovým príkladom, máme $n = 3$ vrcholy (jeden vnútorný a jeho dva listy). Pre tento strom platí, že do každého listu sa dostane na jeden krok z koreňu takže $E(ALG(3)) = 1 \leq 2 = log_2(3+1)$. (triviálny prípad by mohol byť aj strom s jedným vrcholom kde by platilo, že algoritmus spraví 0 krokov čiže takisto spĺňa $E(ALG(1)) = 0 = log_2(0+1)$, pre $n = 2$ neexistuje strom ktorý by spĺňal, že všetky vnútorné vrcholy majú dvoch potomkov preto túto hodnotu neriešime)
Ako indukčný predpoklad uvažujme, že toto tvrdenie platí, pre všetky k menšie ako n.
Teraz chceme ukázať indukčný krok čiže, že to platí aj pre n. Keďže začíname v koreni čo je vnútorný vrchol, existujú z neho cesty do dvoch podstromov. Pričom prvý krok algoritmu prejde do jedného z týchto podstromov. Uvažujme, že ľavý podstrom má n_1 vrcholov a pravý má n_2 vrcholov, z toho vieme vyvodiť rovnice $n = n_1 + n_2 + 1$ (celkový počet vrcholov je súčet vrcholov podstromov plus koreň), $n_1 < n$, $n_2 < n$ (podstromy musia mať manej vrcholov ako celý strom keďže minimálne neobsahujú koreň). Keďže vieme, že pravdepodobnosť kroku do každého z podstromov je rovnaká a zvyšný počet krokov je závislý od veľkosti podstromu platí takáto rovnica:
$E(ALG(n)) = \frac{1}{2}E(ALG(n_1)) + \frac{1}{2}E(ALG(n_2)) + 1$ (čiže pravdepodobnosť, že pôjdem do daného podstromu vynásobená očakávyným počtom krokov v danom podstrome plus nakoniec ten jeden krok do podstromu)
Keďže platí $n_1 < n$, $n_2 < n$ a vieme, že naše tvrdenie platí pre všetky k menšie ako n tak platí $E(ALG(n_1)) \leq log_2(n_1 + 1)$, $E(ALG(n_2)) \leq log_2(n_2 + 1)$.
Ak toto dosadíme do predchádzajúcej rovnice dostaneme:
$E(ALG(n)) = \frac{1}{2}E(ALG(n_1)) + \frac{1}{2}E(ALG(n_2)) + 1 \leq \frac{1}{2}log_2(n_1 + 1) + \frac{1}{2}log_2(n_2 + 1) + 1$
$E(ALG(n)) \leq \frac{1}{2}(log_2(n_1 + 1) + log_2(n_2 + 1)) + 1$
Vieme, že súčet logaritmov je logaritmus súčinu:
$E(ALG(n)) \leq \frac{1}{2}log_2((n_1 + 1)(n_2 + 1)) + 1$
Takisto vieme, že platí $n * log(x) = log(x^n)$:
$E(ALG(n)) \leq log_2(((n_1 + 1)(n_2 + 1))^{\frac{1}{2}}) + 1$
Ďalej vieme, že $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$:
$E(ALG(n)) \leq log_2(\sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}) + 1$
Teraz využijeme vlastnosť, že logaritmus je monotónne rastúca funkcia (čiže platí, že $a \leq b$ tak $log(a) \leq log(b)$) a platí AG nerovnosť $\sqrt[n]{x_1 * x_2 * ... * x_n} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$. Ak toto substituujeme v našej rovnici dostaneme:
$E(ALG(n)) \leq log_2(\sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}) + 1 \leq log_2(\frac{(n_1+1)+(n_2+1)}{2}) + 1$
Teraz si rozpíšme sumu v menovateli:
$E(ALG(n)) \leq log_2(\frac{(n_1+n_2+1+1)}{2}) + 1$
Vieme, že platí $n = n_1 + n_2 + 1$:
$E(ALG(n)) \leq log_2(\frac{(n+1)}{2}) + 1$
Ďalej vieme, že logaritmus podielu je rozdiel logaritmov:
$E(ALG(n)) \leq log_2(n + 1) - log_2(2) + 1$
Vieme, že $log_2(2) = 1$
$E(ALG(n)) \leq log_2(n + 1) - 1 + 1 = log_2(n + 1)$
Takže sme dostali výsledok:
$E(ALG(n)) \leq log_2(n + 1)$
Čo je to čo sme chceli dokázať. $\square$