Algoritmické riešenia ťažkých problémov
Domáca úloha 3

Autor: Marián Kravec

Úloha 1 - Random permutations

a)

Ukážeme to induktívne.

Najprv ako bázu indukcie budeme mať zoznam dĺžky 1. Pre takýto zoznam existuje iba jedna permutácia čo je samotný pôvodný zoznam a keďže náš algoritmus začína prehadzovať od druhej pozície na tomto zozname nikdy nič nezmení, takže spĺňa, že vytvorí všetky permutácie (jednu) s rovnakou pravdepodobnosťou (keďže obe pozície s ktorými vymenil).
Pre istotu ešte ako bázu použime zoznam dĺžky 2. V tomto zozname spraví náš algoritmus iba jednu zmenu a to, že druhý člen zoznamu vymení s buď sám sebou alebo prvým (obe s rovnakou pravdepodobnosťou) čím vytvorí 2 permutácie čo je 2! čím spĺňa, že vytvorí všetky permutácie s rovnakou pravdepodobnosťou.

Teraz uvažujme, že náš vlastnosti nášho algoritmu platia pre všetky zoznamy dĺžky $k < n$.

Chceme ukázať, že platia aj pre zoznam dĺžka n. Vieme, že po $n-1$ krokoch náš algoritmus vytvorí jednu z $(n-1)!$ permutácii s rovnakou pravdepodobnosťou (indukčný predpoklad) ktorú označíme $p_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$. V poslednom kroku vymení posledný člen s niektorým z n členov (všetky výmeny majú rovnakú pravdepodobnosťou). Čiže nakoniec dostaneme jeden z $n!$ zoznamov kde každý vznikol s pravdepodobnosťou $p_{n-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$ (keďže doterajšie pravdepodobnosti boli všetky rovnaké a pravdepodobnosť poslednej výmeny je rovnomerná). Teraz už iba potrebujeme ukázať, že tento posledný krok nemôže vytvoriť dva rovnaké zoznamy. To dokážeme sporom.

Uvažujem, že po poslednom kroku máme 2 zoznamy $A = [a_1, ...a_n]$ a $B = [b_1, ...b_n]$ ktoré sú rovnaké, čiže platí $\forall 1 \leq i \leq n, a_i = b_i$, ale pred týmto krokom to boli dve rôzne permutácie $(n-1)$ prvkov.
Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že v poslednom kroku vymenil algoritmus a_i s a_n a b_j s b_n, keďže na konci bola na n-tej pozícii tá istá hodnota muselo pred výmenou platiť $a_i = b_j$ a keďže na konci bola hodnota n na rovnakej pozícii (vždy je inicializovaná na n-tej pozícii a predchádzajúce kroky ju nevedia posunúť) tak musí platiť $i = j$, takže pred poslednou výmenou platilo $a_i = b_i$ a keďže okrem tejto pozície posledný krok nezmenil žiadnu inú a na konci platilo $\forall 1 \leq k \leq n, a_k = b_k$. Tak pred týmto krokom muselo platiť $\forall 1 \leq k \leq n-1, k \neq i, a_k = b_k$ a keďže platí aj $a_i = b_i$ tak pred posledným krokom boli zoznamy A a B rovnaké čo je v spore s predpokladom, že ide o dve rôzne permutácie.

Čiže sme ukázali, že po poslednom kroku budeme mať jednu z $n!$ rôznych permutácii každú s rovnakou pravdepodobnosťou, čo je to čo sme chceli ukázať. $\square$