

ALGORITMICKÉ RIEŠENIA ŤAŽKÝCH PROBLÉMOV
DOMÁCA ÚLOHA 3

Autor: Marián Kravec

Úloha 2 - From Monte Carlo to Las Vegas

Začnime tým, že si definujeme nový algoritmus ktorý bude fungovať tak, že vykoná obojstranný Monte Carlo algoritmus, následne skontroluje správnosť výsledku a ak tento výsledok je správny tak ho vráti inak zopakuje celý postup odznovu.

Jeden krok tohto algoritmu má časovú zložitosť $T''_{\text{one step}}(n) = T(n) + T'(n)$ (keďže jediné čo spraví je, že iba spustí 2 algoritmu zo známou zložitosťou).

Teraz potrebujeme zistiť aký je očakávaný počet krokov (opakovaní) nášho algoritmu. Počet krokov algoritmu označme $STEP$. Poďme postupne, pravdepodobnosť, že algoritmus skončí hneď v prvom kroku je $P(STEP = 1) = 1 - p$ keďže to je pravdepodobnosť, že Monte Carlo algoritmus vráti správny výsledok, pravdepodobnosť, že skončí po dvoch krokoch je $P(STEP = 2) = p(1 - p)$ čiže v prvom kroku Monte Carlo algoritmus vráti nesprávny výsledok (p) a v druhom kroku správny ($1 - p$). Takto by sme mohli pokračovať ďalej, vo všeobecnosti vieme povedať, že na to aby algoritmus skončil po práve n krokoch musí najprv $n - 1$ -krát vygenerovať nesprávne riešenie a nakoniec správne čo má pravdepodobnosť $P(STEP = n) = p^{n-1}(1 - p)$.

Teraz chceme vypočítať stredný počet krokov:

$$\begin{aligned} E(STEP) &= \sum_{i=1}^{\infty} iP(STEP = i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1 - p) = \\ &= (1 - p) \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1} = \end{aligned}$$

Teraz si pomôžeme trochu internetom: ZDROJ

$$\begin{aligned} &= (1 - p) \frac{1}{(1 - p)^2} = \\ &= \frac{1}{1 - p} \end{aligned}$$

Vieme, že očakávaný čas algoritmu bude očakávaný počet krokov algoritmu vynásobený časovou zložitosťou jedného kroku čiže:

$$\begin{aligned} E(T''(n)) &= E(STEP)T''_{\text{one step}}(n) = \\ &= \frac{1}{1 - p}(T(n) + T'(n)) = \\ &= \frac{T(n) + T'(n)}{1 - p} \end{aligned}$$

Čiže očakávaná čas tohto algoritmu je $\frac{T(n) + T'(n)}{1 - p}$. Keďže tento algoritmu vždy vráti správnu hodnotu a jeho čas zaleží od náhodných čísel (použitých v Monte Carlo podalgoritme) ide o Las Vegas s požadovaným očakávaným časom. \square