Algoritmické riešenia ťažkých problémov
Skúška

Úloha 1 - Výber správnej odpovede

a) Určite správnu odpoveď o pravdivosti tvrdení:
-> Las Vegas algoritmus nikdy nebude trvať nekonečne dlho.
-> Pravdepodobnosť, že Las Vegas algoritmus bude trvať nekonečne dlho je nulová
Výber: prvé platí, druhé platí, ani jedno neplatí

b) Máme minimalizačný problém v podobe ILP ktorý má optimálne riešenie $OPT(X)$, ak tento problém relaxujeme do podoby LP (nazvime RLP), nájdeme optimum LP a vypočítame riešenie pôvodného problému metódou zaokrúhľovania, čo vieme povedať o výsledku $RLP(X)$:
Výber: $RLP(X) \leq OPT(X)$, $RLP(X) \geq OPT(X)$, $RLP(X) = OPT(X)$, nevieme určiť

c)

d) Máme štandardný random walk, chceme sa dostač na pozíciu 100, začíname na pozícii 34, aký je očakávaný počet krokov? (zdôvodnite)
Výber: 0, 128, 8844, iná hodnota

e)

Úloha 2 - Z LV do MC

Máme Las Vegas algoritmus s očakávaným časom $E(LV) = n$. Chceme vytvoriť Monte Carlo algoritmus pomocou tohto algoritmu.

a) Aká je pravdepodobnosť, že Las Vegas algoritmus skončí za menej ako $10n$ krokov?

b) Napíšte pseudokód Monte Carlo algoritmu využívajúceho Las Vegas algorimus.

c) Čo musíme spraviť aby chyba Monte Carlo algoritmu bola menšia ako 1%?

Úloha 3 - Medianové slovo

Máme množinu m slov dĺžky n, slovo je postupnosť znakov z množiny $\{a, b\}$ (príklad: $\{abba, baba, bbbb\}$). Vzdialenosť dvoch slov definujeme ako počet pozícii na ktorých sa slová nezhodujú (príklady: $d(aba, aaa) = 1$, $d(aba, bab) = 3$). Hľadáme medianové slovo, čiže slovo s najmenšou vzdialenosťou od najvzdialenejšieho slova $x_{med} = \min_y(\max(\forall x_i, d(y, x_i)))$. Profesor Premúdretý tvrdí, že medianové slovo musí patriť do množiny slov, takže stačí skontrolovať vzájomné vzdialenosti všetkých slov z množiny a nájsť najlepšie.

a) Ukážte, že algoritmus prof. Premúdretého nedá vždy optimálne riešenie.

b) Dokážte, že platí trojuholníkové pravidlo $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

c) Dokážte, že algoritmus prof. Premúdretého je 2-APX (môžte využiť pravidlo z b) aj keď ste ho nedokázali).

Úloha 4 - Parametrizovaný IS

Chceme riešiť problém nezávislej množiny, pričom poznáme k čo je veľkosť nezávislej množiny a Δ čo je maximálny stupeň vrchola.

a) Dokážte, že platí tvrdenie: $\forall v \in V, v \in IS \vee \exists neig(v) \in IS$, pre každý vrchol v grafe platí, že buď vrchol patrí do nezávislej množiny alebo aspoň jeden jeho sused tam patrí.

b) Vymyslite polynomialny algoritmus parametrizovaný k a Δ ktorý rieši problém nezávislej množina (môžte využiť tvrdenie z a) aj keď ste ho nedokázali).

c) Aká je časová zložitosť tohto algoritmu?

d) Ak máme určené iba k (nemáme vopred dané Δ) bude tento algoritmus stále polynomialny? (svoje tvrdenie dokážte)

Úloha 5 - BONUS - Fibonacci random walk

Máme random walk kde pozície i sa posunieme s pravdepodobnosťou s rovnakou na pozíciu $i - 1$ a $i + 2$ (okrem pozícii n a $n - 1$ kde vieme ísť iba na pozície $i - 1$), chceme sa dostať na pozíciu 0, vypočítajte očakávaný počet krokov (a ukážte, že rastie exponenciálne).