Algoritmické riešenia ťažkých problémov
Domáca úloha 2

Autor: Marián Kravec

Úloha 2 - Vertex cover, independent set, and clique

a)

Ako prvé si ukážme, že vieme v polynomiálnom čase vytvoriť komplementárny graf. Keďže komplementárny graf má rovnakú množinu vrcholov ako pôvodný graf stačí nám pre každú dvojicu vrcholov skontrolovať či medzi nimi existuje hrana ak v novom grafe vytvoriť opak, aj keby sme kontrolovali existenciu hrany triviálne prejdením všetkých hrán zložitosť by bola $O(mn^2)$ (m ako počet hrán a n^2 ako počet dvojíc vrcholov) čiže to vieme zhora ohraničiť na $O(n^4)$ (keďže kompletný graf má nanajvýš $\frac{n(n-1)}{2}$ hrán čiže približne $O(n^2)$).

Čiže vidíme, že polynomiálna transformácia grafu je možná, takže vieme v polynomiálnom čase nájsť najväčšiu nezávislú množinu komplementu grafu, teraz potrebujeme dokázať, že najväčšia nezávislá množina na komplemente grafu je najväčší clique v pôvodnom grafe. Keďže vieme, že každá nezávislá množina v komplemente je clique v pôvodnom grafe (tvrdenie zo zadania úlohy) stačí nám dokázať, že tento clique je najväčší. Toto dokážeme sporom.

Uvažujme, že náš algoritmus nám vrátil nezávislú množinu v komplemente o veľkosti k, z toho vyplýva, že v pôvodnom grafe je to clique o veľkosti k, keďže tvrdíme, že tento clique nie je najväčší tak tvrdíme, že v grafe existuje clique o veľkosti l pričom $l > k$. Keďže každý clique je kompletný graf tak clique veľkosti l obsahuje aj clique všetkých veľkostí od 1 po l, preto bez ujmy na všeobecnosti môžeme tvrdiť, že v grafe existuje clique veľkosti $k+1$. Týchto $k+1$ vrcholov tvorí kompletný podgraf (keďže clique musí byť plne prepojený) preto v komplementárnom grafe medzi tými vrcholmi nemôže existovať žiadna hrana (ak by existovala nemohla by existovať v pôvodnom grafe a podgraf by nemohol byť kompletný). Keďže v komplementárnom grafe neexistuje žiadne hrana medzi týmito vrcholmi tvoria nezávislú množiny, keďže ich je $k+1$ tak aj veľkosť tejto množiny je $k+1$ čo je však SPOR s tým, že najväčšia nezávislá množina v komplemente je k keďže $k+1 > k$.
Z toho vyplýva, že najväčšia nezávislá množina komplementu je najväčší clique v pôvodnom grafe.
□

Takže vieme, že ak algoritmus hľadajúci najväčšiu nezávislú množinu spustíme, na komplemente grafu dostaneme najväčší clique v pôvodnom grafe. □

b)

Túto úlohu budeme riešiť podobne ako predchádzajúcu. Znovu vieme, že ak množina U je nezávislá množina tak množina $V - U$ je vrcholové pokrytie (tvrdenie zo zadania). Takže zase potrebujeme dokázať iba to, že ak U ($|U| = k$) je najväčšia nezávislá množina tak $V - U$ ($|V - U| = n - k$) je najmenšie vrcholové pokrytie, a znova to dokážeme sporom.

Takže tvrdíme, ak U je najväčšia nezávislá množina veľkosti $|U| = k$ tak existuje vrcholové pokrytie W ktorého veľkosť je $|W| < n - k$ menšia ako počet vrcholov ktoré nepatria do U.