Algoritmické riešenia ťažkých problémov
Domáca úloha 4

Autor: Marián Kravec

Úloha 2 - From Monte Carlo to Las Vegas

Začnime tým, že si definujeme nový algoritmus ktorý bude fungovať tak, že vykoná obojstranný Monte Carlo algoritmus, následne skontroluje správnosť výsledku a ak tento výsledok je správny tak ho vráti inak zopakuje celý postup odznovu.

Jeden krok tohto algoritmu má časovú zložitosť $T''_{\text{one step}}(n) = T(n) + T'(n)$ (keďže jediné čo spraví je, že iba spustí 2 algoritmu zo známou zložitosťou).

Teraz potrebujeme zistiť aký je očakávaný počet krokov (opakovaní) nášho algoritmu. Počet krokov algoritmu označme $STEP$. Poďme postupne, pravdepodobnosť, že algoritmus skončí hneď v prvom kroku je $P(STEP = 1) = 1 - p$ keďže to je pravdepodobnosť, že Monte Carlo algoritmus vráti správny výsledok, pravdepodobnosť, že skončí po dvoch krokoch je $P(STEP = 1) = p(1-p)$ čiže v prvom kroku Monte Carlo algoritmus vráti nesprávny výsledok (p) a v druhom kroku správny $(1 - p)$. Takto by sme mohli pokračovať ďalej, vo všeobecnosti vieme povedať, že na to aby algoritmus skončil po práve n krokoch musí najprv $n - 1$-krát vygenerovať nesprávne riešenie a nakoniec správne čo má pravdepodobnosť $P(STEP = n) = p^{n-1}(p - 1)$.

Teraz chceme vypočítať stredný počet krokov:

$$
\begin{aligned}
E(STEP) &= \sum_{i=1}^{\inf} iP(STEP = i) = \\
&= \sum_{i=1}^{\inf} ip^{i-1}(p-1) = \\
&= (1-p)\sum_{i=1}^{\inf} ip^{i-1} = \\
&\text{Teraz si pomôžeme trochu internetom: ZDROJ} \\
&= (1-p)\frac{1}{(1-p)^2} = \\
&= \frac{1}{1-p}
\end{aligned}
$$

Vieme, že očakávaný čas algoritmu bude očakávaný počet krokov algoritmu vynásobený časovou zložitosťou jedného kroku čiže:

$$
\begin{aligned}
E(T''(n)) &= E(STEP)T''_{\text{one step}}(n) = \\
&= \frac{1}{1-p}(T(n) + T'(n)) = \\
&= \frac{T(n) + T'(n)}{1-p}
\end{aligned}
$$

Čiže očakávaný čas tohto algoritmu je $\frac{T(n)+T'(n)}{1-p}$. Keďže tento algoritmu vždy vráti správnu hodnotu a jeho čas zaleží od náhodných čísel (použitých v Monte Carlo podalgoritme) ide o Las Vegas algoritmus s požadovaným očakávaným časom. □