Introdução ao Cálculo Numérico

Enumeração e localização de raízes de polinômios

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

Prof. Rudnei Dias da Cunha

- Seja $p(z)$ uma função polinomial

$$p: \quad \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto p(z)$$

i.e. um polinômio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

de grau n, com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

- Deseja-se determinar ξ tal que $|p(\xi)| < \varepsilon \ll 1$, i.e., determinar uma aproximação **numérica** $\xi \cong x$ para $p(z) = 0$.

- Preliminarmente, observe que um polinômio de grau n tem exatamente n raízes (aí consideradas também as raízes múltiplas, se houver).
- Note, ainda, que algumas das raízes podem ser complexas e, nesse caso, elas ocorrem sempre em pares conjugados (i.e., as raízes são números complexos $a+bi$ e $a-bi$).

- Além do Teorema de Bolzano, visto anteriormente e que pode também ser aplicado quando a função é um polinômio, existem três regras que nos permitem determinar o número e existência de raízes reais e/ou complexas:
  - *regra de Descartes;*
  - *regra de Du Gua;*
  - *regra da lacuna.*

- Regra de Descartes:
  - Se $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \neq 0$ e T é o número de trocas de sinal de seus coeficientes não nulos, na seqüência $a_0, a_1, \dots, a_n$, e r é o número de suas raízes reais positivas, então
$$T - r$$
é um número par e não negativo.
  - Em outras palavras, já que $T - r$ é um número par, então $T - r = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

- Regra de Descartes
  - Com essa regra, podemos contar quantas raízes reais positivas o polinômio $p(z)$ poderá apresentar, **no máximo**!
  - A mesma regra pode ser usada para se determinar quantas raízes reais *negativas* o polinômio $p(z)$ poderá apresentar, **no máximo**, bastando aplicar a regra sobre o polinômio $p(-z)$.

- Regra de Descartes
  - Exemplo: considere o polinômio $p(z) = 1 + z + z^2 - 2z^3 - 3z^4 + z^5$.
  - A seqüência de sinais de seus coeficientes é

k	0	1	2	3	4	5
sinal	+	+	+	-	-	+

  - Há, portanto, duas trocas: do coeficiente 2 para o 3, e do 4 para o 5, de onde $T = 2$.
  - Logo, como $r = T - 2k$, e $T - r \geq 0$, existem no máximo duas raízes reais positivas.

- Regra de Descartes
  - Para as raízes reais negativas, escrevemos

$$p(-z) = 1 + (-z) + (-z)^2 - 2(-z)^3 - 3(-z)^4 + (-z)^5$$

  - A seqüência de sinais dos coeficientes de $p(-z)$ é

k	0	1	2	3	4	5
sinal	+	-	+	+	-	-

  - Há, portanto, três trocas: do coeficiente 0 para o 1, do 1 para o 2 e do 3 para o 4, de onde $T = 3$.
  - Logo, como $r = T - 2k$, e $T - r \geq 0$, existem no máximo três raízes reais negativas.

- Regra de Descartes
  - Como o polinômio é de grau 5, sabemos que ele tem então 5 raízes e, então, podemos construir a tabela a seguir, que indica quantas raízes reais e complexas podem existir:

Enumeração das raízes de $p(z) = 1 + z + z^2 - 2z^3 - 3z^4 + z^5$		
Reais positivas	Reais negativas	Complexas
2	3	0
2	1	2
0	3	2
0	1	4

- Regra de Du Gua
  - Se $p(z)$ não apresenta raízes nulas e, para algum coeficiente $1 \leq k < n$, tem-se ${a_k}^2 \leq a_{k+1}a_{k-1}$, então $p(z)$ apresenta raízes complexas.
  - Caso a desigualdade acima seja falsa para todos os valores possíveis de k, então **nada se pode afirmar** a respeito da existência ou não de raízes complexas de $p(z)$.

- Regra de Du Gua
  - No exemplo anterior,

$$p(z) = 1 + z + z^2 - 2z^3 - 3z^4 + z^5;$$

observe que $p(0) \neq 0$, logo, podemos aplicar a regra de Du Gua:

- Para $k = 4$: $(-3)^2 \leq (1)(-2)\ ? \rightarrow$ **FALSO**
- Para $k = 3$: $(-2)^2 \leq (1)(-3)\ ? \rightarrow$ **FALSO**
- Para $k = 2$: $1^2 \leq (-2)(1)\ ? \rightarrow$ **FALSO**
- Para $k = 1$: $1^2 \leq (1)(1)\ ? \rightarrow$ **VERDADEIRO**

- Logo, $p(z)$ apresenta raízes complexas.

- Regra da lacuna
  1. Se os coeficientes de $p(z)$ são todos reais e, para algum $1 \leq k < n$, $a_k = 0$ e $a_{k-1}a_{k+1} > 0$, então $p(z)$ apresenta raízes complexas.
  2. Se os coeficientes de $p(z)$ são todos reais e existem dois ou mais coeficientes nulos sucessivos, então $p(z)$ apresenta raízes complexas.
  - Se nenhuma dessas condições forem satisfeitas, então **nada se pode afirmar** a respeito da existência de raízes complexas.

- Localização das raízes
  - Uma vez *enumeradas* as raízes de um polinômio, podemos estabelecer uma região (no plano x-y) dentro da qual elas se encontram.
  - Essa região é um disco centrado na origem do plano cartesiano, e o seu raio é dependente da *cota* utilizada.
  - Existem várias cotas, como as de **Laguerre-Thibault**, **Fujiwara**, **Kojima** e **Cauchy**.

- Localização das raízes
  - Vamos aqui considerar a *cota de Kojima*:

  Dado o polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, toda raiz z (real ou complexa) satisfaz a relação $|z| \leq q_1 + q_2$, onde q_1 e q_2 são os dois maiores valores do conjunto

$$R = \left\{ \left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{\frac{1}{n-i}} \right\}, 0 \leq i \leq n-1.$$

Localização das raízes

- No exemplo anterior,

$$p(z) = 1 + z + z^2 - 2z^3 - 3z^4 + z^5;$$

note que $a_5 = 1$, de onde o conjunto R é

$$R = \left\{ \left|\frac{1}{1}\right|^{\frac{1}{5-0}}; \left|\frac{1}{1}\right|^{\frac{1}{5-1}}; \left|\frac{1}{1}\right|^{\frac{1}{5-2}}; \left|\frac{-2}{1}\right|^{\frac{1}{5-3}}; \left|\frac{-3}{1}\right|^{\frac{1}{5-4}} \right\} =$$

$$= \left\{ 1^{\frac{1}{5}}; 1^{\frac{1}{4}}; 1^{\frac{1}{3}}; 2^{\frac{1}{2}}; 3 \right\} = \{1; 1; 1; \sqrt{2}; 3\}$$

- Localização das raízes
  - Como os dois maiores valores do conjunto são, por inspeção, $q_1 = 3$ e $q_2 \cong 1{,}4142$, podemos dizer que todas as raízes do polinômio encontram-se num disco de raio $q_1 + q_2 \leq 4{,}4142$.
  - Se calculássemos as raízes do polinômio
$$p(z) = 1 + z + z^2 - 2z^3 - 3z^4 + z^5,$$
teríamos o seguinte conjunto de raízes:
$$\{3{,}4631;\ 0{,}8828;\ -0{,}8675;\ -0{,}2391 \pm 0{,}5667i\}$$
o que corresponde à segunda linha na tabela de enumeração de raízes pela regra de Descartes.

- Localização das raízes
  - Além disso, se calcularmos o módulo de cada uma das raízes, e compararmos com a cota de Kojima, teremos:

$$|3{,}4631| < 4{,}4142$$
$$|0{,}8828| < 4{,}4142$$
$$|-0{,}8675| < 4{,}4142$$
$$|-0{,}2391 \pm 0{,}5667| = 0{,}6151 < 4{,}4142$$

o que confirma a afirmação de que todas as raízes estão distantes da origem não mais do que $q_1 + q_2$.