---

Um **Problema de Valor Inicial** (PVI) é o nome dado a um problema especificado usando-se uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) na forma $y' = f(t, y)$, onde a solução $y$ é uma função de $t$, $y = y(t)$, e cujo valor é conhecido num certo $t = t_0$, i.e. $y(t_0) = y_0$. Um PVI pode, portanto, ser expresso como

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

onde $t$ é uma variável livre, e deseja-se calcular o valor de $y(t)$ num $t$ qualquer[1].

A resolução de um PVI de forma analítica depende da EDO que descreve o problema. Note que, dada uma EDO, a sua solução analítica implica em se buscar obter, através de técnicas de integração e de manipulação algébrica da EDO, uma **família de funções** que satisfaça o problema. Essa família de funções é o resultado do processo de solução da EDO, onde as **constantes de integração arbitrárias** que surgem desse processo caracterizam a **solução geral** da EDO; valores específicos atribuídos a uma ou mais dessas constantes dão origem a uma **solução particular**.

Um dos exemplos mais simples de EDOs é aquela que se apresenta na forma de *variáveis separáveis*. Por exemplo, se $y = y(t)$ e

$$y' = ty$$

é a equação diferencial que se deseja resolver, procede-se da seguinte forma:

$$\frac{y'}{y} = t \text{ ; como } y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \text{vem}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t \, ,$$

de onde podemos escrever

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = t \, \mathrm{d}t$$

Essa equação, agora, tem as variáveis $y$ e $t$ separadas. Integrando dos dois lados da igualdade, obtemos

$$\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \int t \, \mathrm{d}t$$

$$\ln|y| = \frac{t^2}{2} + C_1$$

---

[1] Um PVI também pode ser expresso na forma **autônoma**, na qual a variável $t$ passa a ser considerada como uma das incógnitas do problema. Nesse caso, o PVI será expresso como um sistema de EDOs, na qual uma das equações será $t' = 1$.

onde $C_1$ é a soma das constantes de integração. Isolando $y$ do lado esquerdo da igualdade, escrevemos

$$|y| = e^{\frac{t^2}{2}+C_1} = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{C_1} = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

onde $C = e^{C_1}$. Como $C$ pode ser tomada arbitrariamente, podemos finalmente escrever

$$y = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

que é a solução de $y' = ty$ para $-\infty < t < \infty$, uma vez que a solução é contínua em $\mathbb{R}$.

No caso de um PVI, busca-se determinar uma solução **particular** de uma EDO, especificada pelo valor de $y$ num certo valor $t = t_0$, i.e. $y(t_0) = y_0$. De posse dessa solução particular, podemos determinar o valor de $y$ em qualquer valor de $t$.

Por exemplo, considere o PVI a seguir: determine o valor de $x(2)$ para

$$\begin{cases} x' = 2tx - \dfrac{x}{2} \\ x(0) = 4 \end{cases}$$

onde a EDO é descrita em termos da variável $x = x(t)$. Nesse problema, está especificado que o valor de $x(t_0)$ em $t_0 = 0$ é $x_0 = 4$. Como a EDO é também a variáveis separáveis, procedemos de forma similar ao desenvolvido anteriormente:

$$x' = 2tx - \frac{x}{2}$$

$$2x' = 4tx - x$$

$$\frac{2x' + x}{x} = 4t$$

$$\frac{2x'}{x} = 4t - 1$$

$$\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = (4t - 1)\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (4t - 1)\,\mathrm{d}t$$

$$2\ln|x| = 2t^2 - t + C_1$$

$$\ln|x| = t^2 - \frac{t}{2} + C_2$$

de onde obtemos a solução geral como

---

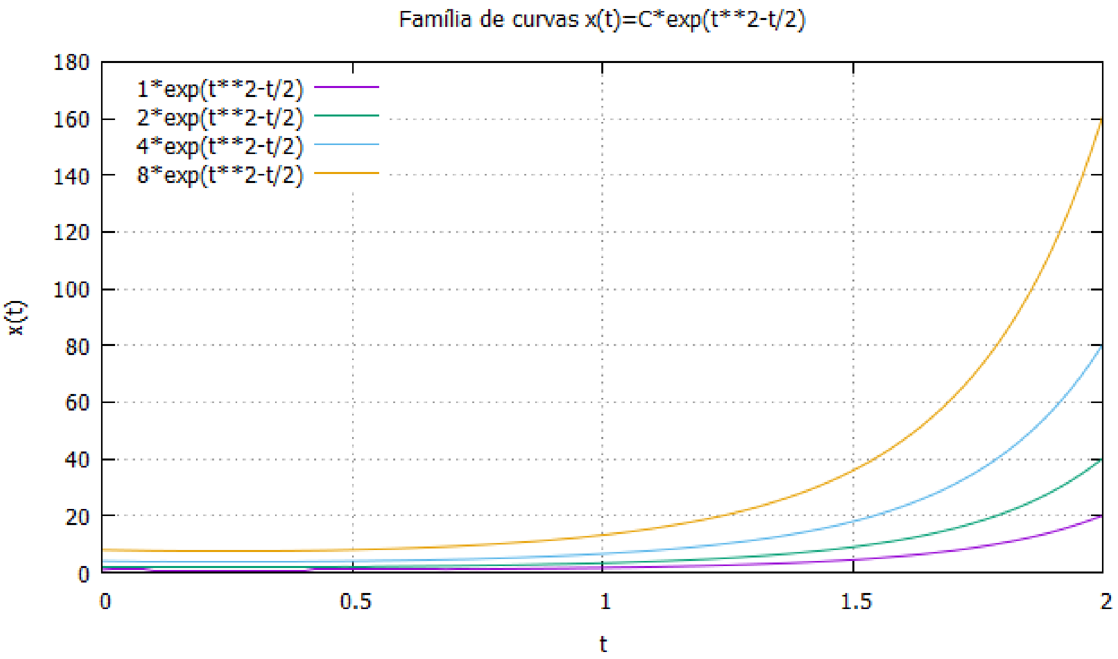
$$x = Ce^{t^2-\frac{t}{2}}$$

Como $x(0) = 4$ (o valor inicial especificado), substituindo $t = 0$ na equação acima e igualando-a a $4$, obtemos $C = 4$. Após, substituindo $t = 2$ em

$$x(t) = 4e^{t^2-\frac{t}{2}}$$

obtemos $x(2) = 80{,}342\ 147\ 692\ 750$.

Observe que a solução geral é uma família de curvas, como mostra o gráfico a seguir, no intervalo $0 \leq t \leq 2$, para $C = 1, 2, 4$ e $8$; em particular, na curva correspondente a $C = 4$, $x(2)$ é o valor calculado acima.

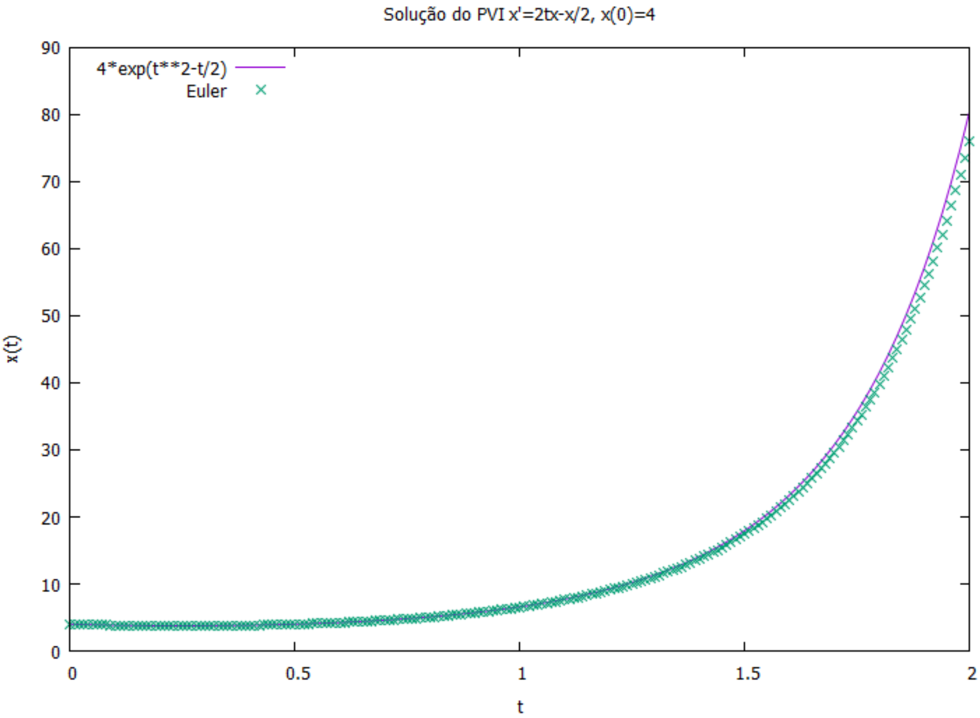



Já na solução numérica de um PVI, o que se obtém é um conjunto *discreto* de pontos $(t_0; x(t_0)), (t_0 + h; x(t_0 + h)), (t_0 + 2h; x(t_0 + 2h)), \ldots$, a partir da substituição da EDO por uma aproximação em séries de Taylor e/ou expressões baseadas nessas séries.

Esse conjunto discreto de pontos *aproximará* a curva da solução particular da EDO, mas, dependendo de quão boa (ou ruim) é a aproximação utilizada para substituir a EDO e do valor usado para $h$, esses pontos afastar-se-ão da curva à medida que $t_0 + kh$ (onde $k \in \mathbb{N}$) se distancia de $t_0$.

No gráfico a seguir, vê-se claramente esse efeito, no qual se mostra a solução analítica do exemplo anterior, juntamente com um conjunto de pontos discretos, obtidos através da solução numérica do mesmo exemplo através do método de Euler (um dos métodos numéricos utilizados para resolver um PVI), usado com $h = 0{,}01$. Observe que próximo a $t =$

$0$, os pontos discretos estão sobrepostos à curva da solução analítica, mas os pontos da solução numérica se afastam da curva, próximo a $t = 4$.




Os métodos numéricos para resolução de PVI com uma ou mais equações serão apresentados no documento "Solução Numérica de PVI".