Introdução ao Cálculo Numérico

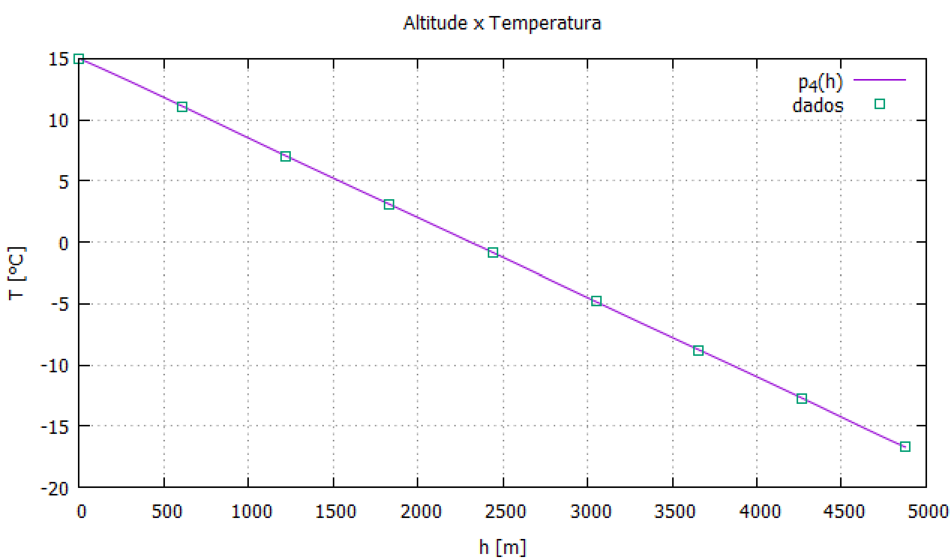
Interpolação polinomial

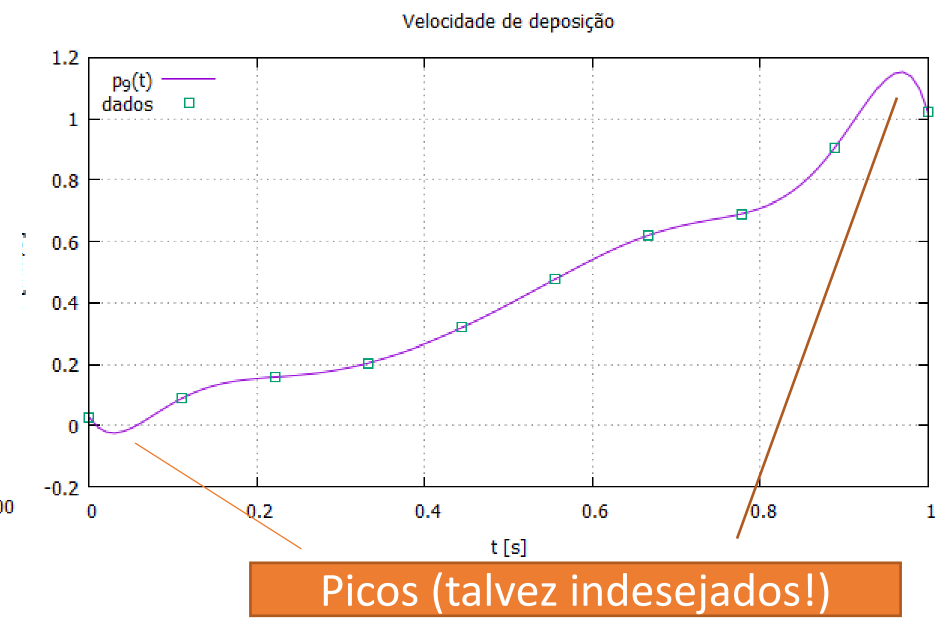
Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

Prof. Rudnei Dias da Cunha

- Interpolação polinomial
  - Abordaremos os seguintes tópicos:
    - Polinômio na forma de Newton
    - Polinômio na forma de Lagrange
    - Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
    - Interpolação polinomial por partes
    - Interpolação inversa

- Interpolação polinomial
  - Dado um conjunto de pontos (por exemplo, obtidos como resultado de algum experimento físico), o problema de **interpolação polinomial** consiste em se determinar os coeficientes de um polinômio $p_n(x)$, de grau n, tal que esse polinômio passa por **todos os pontos**:





- Interpolação polinomial
  - Formalmente, dado um conjunto de $m = n + 1$ pontos $(x_i; y_i), 0 \leq i \leq n$, para **nós** x_i **distintos entre si**, deseja-se obter um polinômio

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

onde a_i são os coeficientes de $p_n(x)$, tal que a **condição de interpolação**

$$\boxed{p_n(x_i) = y_i}$$

seja satisfeita.
  - Note que o grau do polinômio $p_n(x)$ **depende** da quantidade de pontos a serem interpolados.

- Interpolação polinomial
  - Poderíamos, evidentemente, escrever

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

e resolver o problema obtendo os coeficientes a_i como a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_n {x_0}^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_n {x_n}^n = y_n \end{cases}$$

- Interpolação polinomial
  - Escrevendo em forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde pode-se identificar que a matriz de coeficientes do sistema é uma matriz de Vandermonde, a qual pode trazer problemas numéricos na resolução desse sistema, por ser mal condicionada.

- Interpolação polinomial
  - Por exemplo, considere dez pontos cujas coordenadas são dadas por

$$(x_i; y_i) = \left(\frac{i+1}{10}; 0{,}2 + {x_i}^2\right), 0 \leq i \leq 9$$

  - É evidente que o polinômio interpolador é justamente

$$p_9(x) = 0{,}2 + {x_i}^2$$

e, portanto, a resolução do sistema de equações lineares (1) deve ser:

$$a_0 = 0{,}2;\ a_1 = 0;\ a_2 = 1; a_{3\leq i\leq 9} = 0.$$

Interpolação polinomial

- Ao resolvermos o sistema (1), obtemos os seguintes coeficientes:

Coeficientes do polinômio
$a_0 = 0{,}2$
$a_1 = 7{,}59035 \times 10^{-14}$
$a_2 = 1{,}0$
$a_3 = 4{,}95869 \times 10^{-12}$
$a_4 = -1{,}73300 \times 10^{-11}$
$a_5 = 3{,}75184 \times 10^{-11}$
$a_6 = -5{,}07146 \times 10^{-11}$
$a_7 = 4{,}15824 \times 10^{-11}$
$a_8 = -1{,}88961 \times 10^{-11}$
$a_9 = 3{,}64843 \times 10^{-12}$

- Pode-se, por inspeção, descartar os coeficientes que sejam suficientemente pequenos, numericamente, restando assim os coeficientes a_0 e a_2.
- O polinômio interpolador é

$$p_2(x) = 0{,}2 + x^2.$$

- Interpolação polinomial
  - Apesar disso, para polinômios de grau pequeno, pode-se usar a formulação anterior.
  - Por exemplo, um problema típico é o de determinar um polinômio quadrático que passa por dois pontos (para, posteriormente, determinar o ponto de mínimo desse polinômio – essa técnica surge em conexão com problemas de otimização de funções não-lineares).
  - Para tal, escreve-se o polinômio na forma

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

e, como ele deve interpolar os pontos $(a; y_a)$ e $(b; y_b)$, escrevemos

• Interpolação polinomial

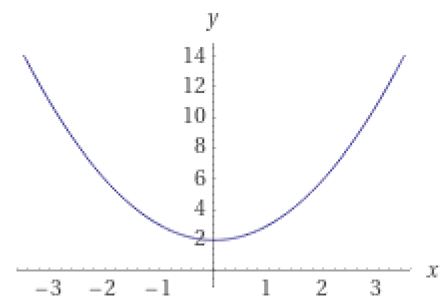
(cont.:)

$$\begin{cases} y_a = a^2 + a\alpha + \beta \\ y_b = b^2 + b\alpha + \beta \end{cases}$$

de onde os coeficientes são calculados resolvendo-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a - a^2 \\ y_b - b^2 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, se $(a; y_a) = (3; 11)$ e $(b; y_b) = (2; 6)$, os coeficientes são $\alpha = 0$, $\beta = 2$; o gráfico de $p(x) = x^2 + 2$ encontra-se o lado:



- Interpolação polinomial
  - Como observado, a matriz de Vandermonde é uma matriz completa e necessita ser fatorada adequadamente, possivelmente com troca de linhas na fatoração LU.
  - Além disso, devido ao mal condicionamento inerente à matriz de Vandermonde, é possível que a solução não seja adequada.
  - Essa dificuldade com o trato do problema de interpolação pode ser evitado ao se utilizar **formas alternativas de expressar o polinômio interpolador**, de onde os seus coeficientes podem ser calculados adequadamente, como veremos a seguir.
  - Observe, no entanto, que há um teorema que garante a **unicidade do polinômio interpolador**!

- Interpolação na forma de Newton
  - A determinação dos coeficientes do polinômio interpolador pode ser obtida sem dificuldades se escrevermos o polinômio interpolador na **forma de Newton**:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left[c_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right) \right]$$

- Interpolação na forma de Newton
  - Os primeiros três polinômios interpoladores de Newton são

$$p_0(x) = c_0$$
$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$
$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

  - Note que os termos que multiplicam um coeficiente c_i envolvem apenas os nós x_j, para $0 \leq j < i$.

- Interpolação na forma de Newton
  - Impondo a condição de interpolação $p_n(x_i) = y_i$, escrevemos (para $n = 2$),

$$
\begin{aligned}
p_2(x_0) &= c_0 = y_0 \\
p_2(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\
p_2(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2
\end{aligned}
$$

ou, em forma matricial,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.
$$

- Interpolação na forma de Newton
  - Esse sistema é triangular inferior e de fácil resolução (através do processo de substituição direta) e sempre admite inversa pois, por hipótese, todos os nós x_i são distintos entre si (logo, todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero).
  - Logo, ao utilizarmos uma outra **formulação** para o polinômio interpolador, removemos o problema de possível mal condicionamento numérico salientado anteriormente.

- Interpolação na forma de Newton
  - Por exemplo, dados dois pontos $(x_0; y_0)$ e $(x_1; y_1)$, o polinômio interpolador na forma de Newton é

$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \rightarrow c_0 = y_0, c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}}_{\substack{\text{equação da reta} \\ \text{entre } (x_0, y_0) \text{ e } (x_1, y_1)}} \end{aligned}$$

- Interpolação na forma de Newton
  - Uma vez obtidos os coeficientes c_i do polinômio interpolador na forma de Newton, resolvendo-se o sistema triangular inferior mostrado anteriormente, deve-se permitir a avaliação de $p_n(x)$.
  - A maneira mais indicada de se avaliar numericamente um polinômio é usando *multiplicações aninhadas*, também conhecidas como *multiplicações de Horner* (cf. mostrado no capítulo sobre extração de raízes de polinômios).

- Interpolação na forma de Newton
  - Ao reescrevermos um polinômio usando *multiplicações aninhadas*, evitamos o uso explícito de potências de x as quais, para certos valores de x, podem tornar-se tão pequenas (ou tão grandes) que o valor obtido tenha um erro relativo grande.
  - Por exemplo, para

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

podemos reescrevê-lo como

$$p_3(x) = \big((c_3(x - x_2) + c_2)(x - x_1) + c_1\big)(x - x_0) + c_0$$

- Interpolação na forma de Newton
  - Generalizando, podemos avaliar o polinômio $p_n(x)$ usando multiplicações aninhadas através do seguinte algoritmo:

```
proc horner(x,c,nos) retorna (p)
 p:= c(n)
 para i:=n-1, n-2, ..., 0, faça
      p:= (x-nos(i))*p+c(i)
 fim
fim proc
```

- Interpolação na forma de Newton
  - Retomando o exemplo anterior, i.e. considere dez pontos cujas coordenadas são dadas por

$$(x_i; y_i) = \left(\frac{i+1}{10}; 0{,}2x_i + {x_i}^2\right), 0 \le i \le 9$$

e, sabendo que o polinômio interpolador é

$$p_9(x) = 0{,}2x_i + {x_i}^2$$

podemos calcular o polinômio na forma de Newton, obtendo os coeficientes c_i como:

Interpolação na forma de Newton

- (cont.):

Coeficientes do polinômio
$c_0 = 0{,}21$
$c_1 = 0{,}3$
$c_2 = 1{,}0$
$c_3 = -3{,}23815 \times 10^{-15}$
$c_4 = 6{,}93889 \times 10^{-15}$
$c_5 = 9{,}48316 \times 10^{-14}$
$c_6 = -7{,}47859 \times 10^{-13}$
$c_7 = 2{,}61585 \times 10^{-12}$
$c_8 = -5{,}01142 \times 10^{-12}$
$c_9 = 2{,}27166 \times 10^{-12}$

Analisando a tabela, podemos desconsiderar os coeficientes de c_3 em diante, obtendo, assim,

$$p_2(x) = 0{,}21 + 0{,}3(x - 0{,}1) + 1{,}0(x - 0{,}1)(x - 0{,}2) = 0{,}2 + x^2.$$

- Interpolação na forma de Lagrange
  - O polinômio interpolador também pode ser escrito na *forma de Lagrange:*

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

onde os polinômios $l_i(x)$ são chamados de *funções cardinais.*

- Interpolação na forma de Lagrange
  - Por exemplo, dados dois pontos $(x_0; y_0)$ e $(x_1; y_1)$, o polinômio interpolador na forma de Lagrange é

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 - (x - x_0)y_1}{x_1 - x_0} =$$

$$\underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}}_{\substack{\text{equação da reta} \\ \text{entre } (x_0,y_0) \text{ e } (x_1,y_1)}}$$

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

- Interpolação na forma de Lagrange
  - Observe que, apesar dos polinômios nas formas de Newton e de Lagrange serem aparentemente diferentes, eles representam o mesmo polinômio:

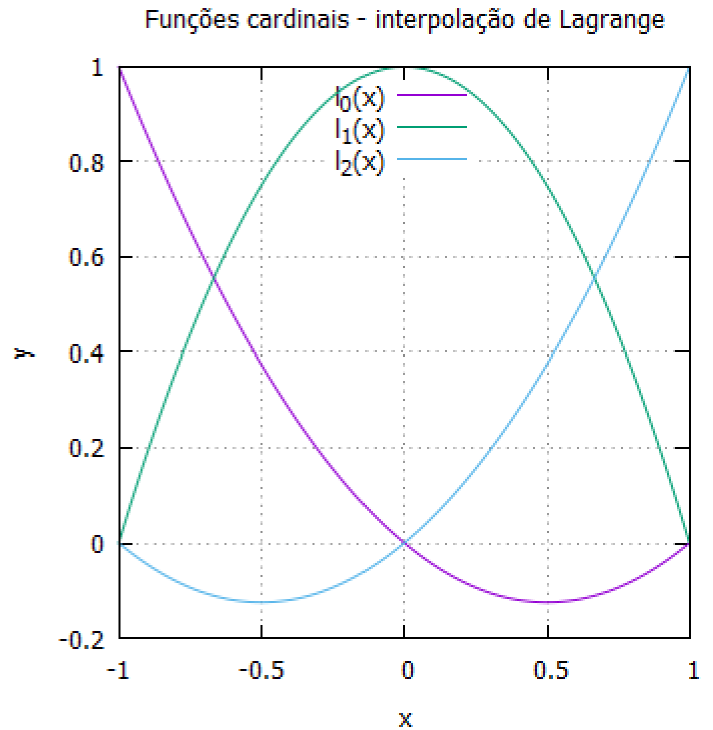
$$\left.\begin{aligned}&\text{Newton:} \quad p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)\\ &\text{Lagrange:} \quad p_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 - (x - x_0)y_1}{x_1 - x_0}\end{aligned}\right\} = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}}_{\substack{\text{equação da reta entre} \\ (x_0,y_0) \text{ e } (x_1,y_1)}}$$

- Interpolação na forma de Lagrange
  - As funções cardinais são combinadas linearmente através das ordenadas y_i.
  - Por exemplo, para os pontos $(x_0; y_0) = (-1; 1{,}2)$, $(x_1; y_1) = (0; 0{,}2)$ e $(x_2; y_2) = (1; 1{,}2)$, essas funções são:

$$l_0(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$l_1(x) = 1 - x^2$$

$$l_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$



- Interpolação na forma de Lagrange
  - Recentemente, Berrut e Trefethen (2004) mostraram que a forma de Lagrange pode ser reescrita de forma a propiciar sua utilização em interpolação numérica de forma tão eficiente como o polinômio na forma de Newton, denominada de *1ª fórmula baricêntrica* do polinômio interpolador de Lagrange:

$$p_n(x) = l(x) \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{w_j}{x - x_j} y_j \right)$$

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$w_j = \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i) \right)^{-1}, 0 \leq j \leq n$$

- Interpolação na forma de Lagrange
  - Essa formulação (se devidamente implementada) tem um custo computacional proporcional a n^2, tornando-a equivalente à da interpolação de Newton.
  - Além disso, o termo w_j, o qual exige n^2 multiplicações para ser calculado, é independente de y_j (ao passo que na interpolação de Newton, os coeficientes c_j são dependentes de y_j).
  - A 1ª fórmula baricêntrica do polinômio interpolador de Lagrange é a que se está implementada na biblioteca NUMERICO.

- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - Quando se necessita de um polinômio de grau adequado para representar uma função num intervalo $[a; b]$, cabe se perguntar:
    - “Quantos nós devo usar?”
    - “Quais nós devo usar?”
  - Mais ainda, se desejarmos aproximar uma função por um polinômio, é natural que procuremos utilizar um grande número de nós, pois há um teorema que poderia induzir tal escolha, que é o *Teorema de aproximação de Weierstrass.*

- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - O *Teorema de aproximação de Weierstrass* diz que para uma função contínua $f(x)$ definida num intervalo $[a; b]$, existe um conjunto de funções polinomiais $p_n(x), n = 0,1,2, \ldots$, cada uma de grau n, que aproxima $f(x)$ com convergência uniforme em $[a; b]$ à medida que n tende a infinito, i.e.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{a \le x \le b} |f(x) - p_n(x)| \right) = 0$$

- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - Note que esse teorema nada afirma sobre *quem são os polinômios* $p_n(x)$, apenas que eles existem.
  - Por exemplo, uma escolha natural para os nós é um conjunto de $n+1$ nós **espaçados igualmente** em $[a; b]$, i.e. $a = x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$, onde $x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n$, e $h = \frac{b-a}{n}$ é o espaçamento entre os nós.
  - Se, para esses nós, calcularmos $y_i = f(x_i)$ e sobre os pontos $(x_i; y_i)$ aplicarmos a condição de interpolação $p_n(x_i) = y_i$, onde p_n é um polinômio cujos coeficientes são calculados como visto anteriormente, então é bastante possível que esse polinômio apresente um comportamento **oscilatório**, que se **acentua** nos extremos do intervalo $[a; b]$.

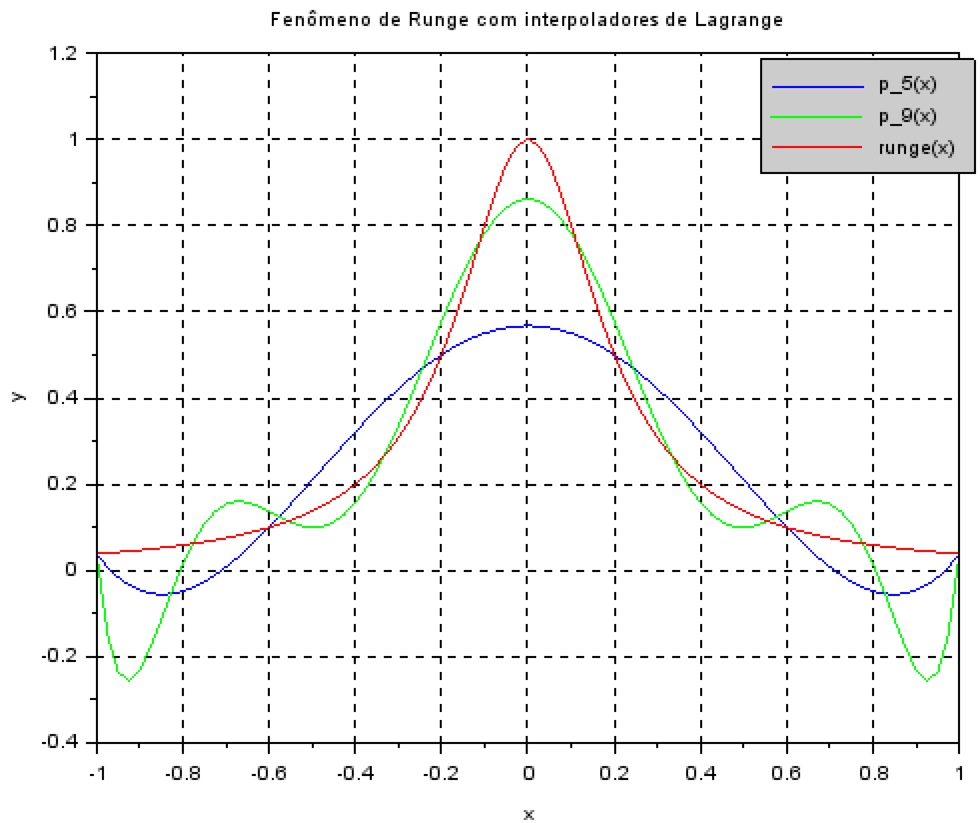
- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - Em 1901, Runge constatou tal problema ao tentar aproximar certas funções através de polinômios.
  - Se interpolarmos por Lagrange a chamada *função de Runge*,

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

em um conjunto de nós $x_i = \frac{2i}{n} - 1, 0 \leq i \leq n$, obteremos o seguinte resultado:

• Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge

- Foram usados os polinômios interpoladores de Lagrange para $n = 5$ e $n = 9$.
- Observe como os polinômios oscilam e, à medida que n cresce, essa oscilação se acentua.
- Além disso, $p_5(0) \neq p_9(0) \neq f(0)$!
- Obviamente, esses fenômenos também ocorreriam se tivéssemos usado polinômios interpoladores na forma de Newton.



- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - Esse fenômeno ocorre por duas razões:
    - As derivadas de ordem n dessa função, em particular, aumentam rapidamente à medida que n cresce;
    - O espaçamento homogêneo entre os nós leva a uma constante de Lebesgue que também cresce rapidamente com n: calculando-se o erro entre a função e a aproximação polinomial, observa-se que

$$\max_{-1\leq x\leq 1} f^{(n)}(x) \leq M_n$$

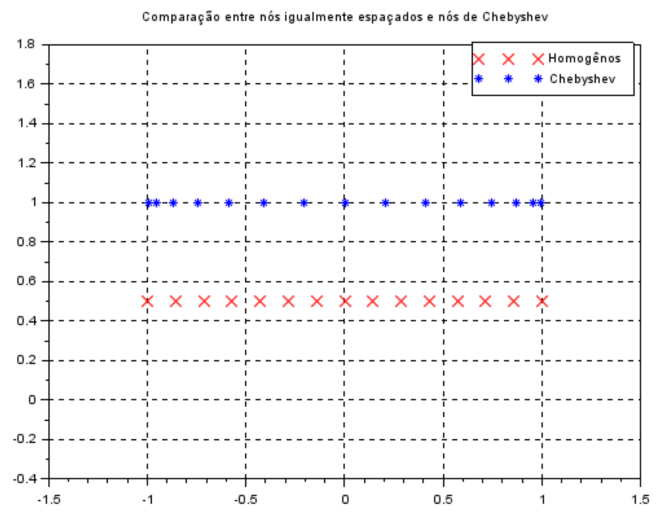
$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq M_n \frac{h^n}{4n}$$

cf. mostrado na tabela abaixo:

n	5	10	20
$M_n \frac{h^n}{4n}$	$1{,}612 \times 10^2$	$7{,}680 \times 10^4$	$3{,}750 \times 10^{10}$

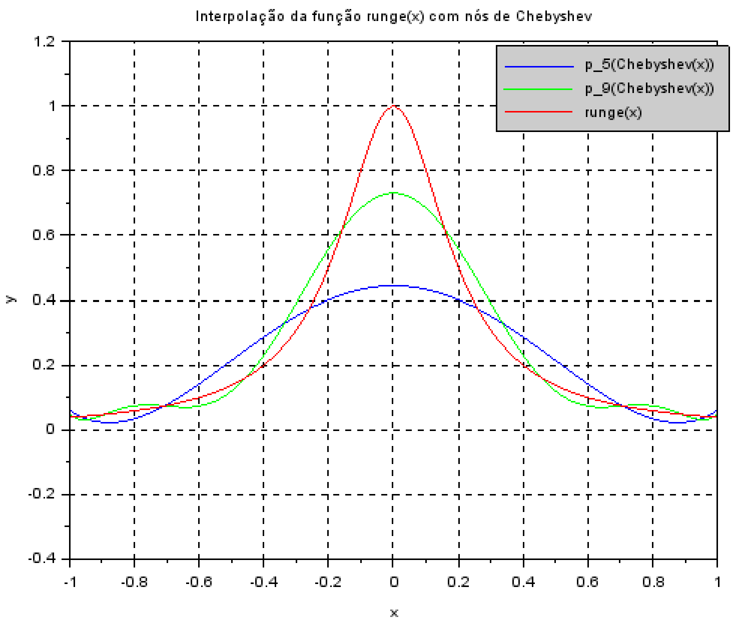
- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - Como mitigar esse problema?
    1. Usando uma distribuição não-uniforme de nós, como por exemplo a exibida pelos **nós de Chebyshev** num intervalo $[a;b]$,

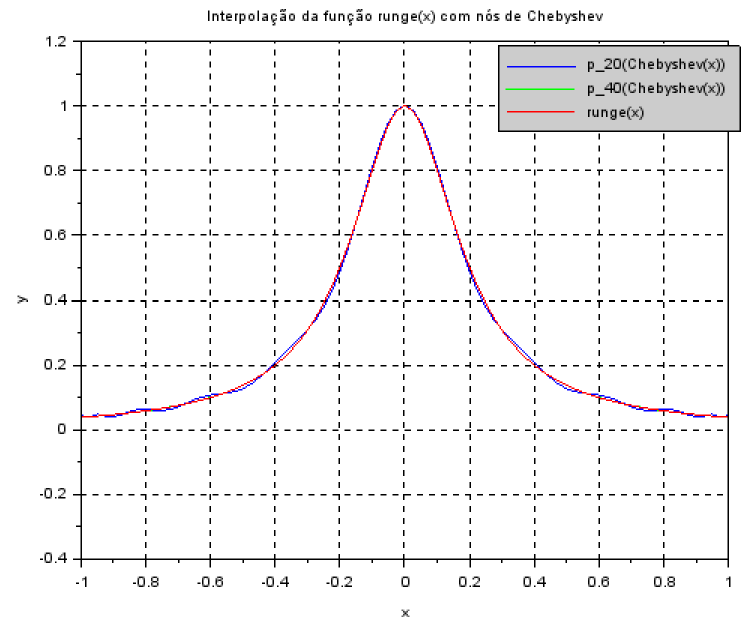
$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), 1 \leq i \leq n+1:$$



Interpolação polinomial

• Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge





Usando os nós de Chebyshev, à medida que n cresce, o polinômio de Lagrange aproxima cada vez melhor a função de Runge, ao ponto da curva do polinômio $p_{40}(x)$ confundir-se com a da função, no gráfico à direita.

- Interpolação polinomial – o fenômeno de Runge
  - Como mitigar esse problema?
    2. Obter um polinômio de grau n menor do que m, o número de pontos equidistantes entre si, usando a técnica de **mínimos quadrados**; em geral, se escolhermos $n < 2\sqrt{m}$, o polinômio $p_n(x)$ é bem condicionado (vide **Ajuste de curvas**);
    3. Uso de **interpolação polinomial por partes**, onde polinômios de grau n pequeno (em geral, $n \leq 4$) agem sobre subconjuntos de nós, e condições de continuidade das derivadas de ordem 1 a $n-1$ são impostas sobre todos esses polinômios.

Interpolação polinomial por partes

"Spline" cúbica

- Interpolação polinomial por partes
  - Um polinômio por partes é denominado *spline*, o qual pode ser definido como segue.
  - Suponha que $n + 1$ nós $x_0, x_1, \dots, x_n$ tenham sido especificados, tais que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ e que sejam conhecidos $y_i = f(x_i)$ (por exemplo, através de medição num experimento), tais que $(x_i; y_i)$ sejam os pontos a serem interpolados e que k seja um número inteiro (o grau da *spline*).
  - Assim, uma função *spline* de grau k, com nós $x_0, x_1, \dots, x_n$é uma função C tal que:
    - Em cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i), i \geq 1$, C é um polinômio de grau menor ou igual a k;
    - As primeiras $k - 1$ derivadas da função C são contínuas no intervalo $[x_0; x_n]$.

- Interpolação polinomial por partes
  - Por exemplo, uma *spline* de grau 1 é um conjunto de retas unindo os nós:

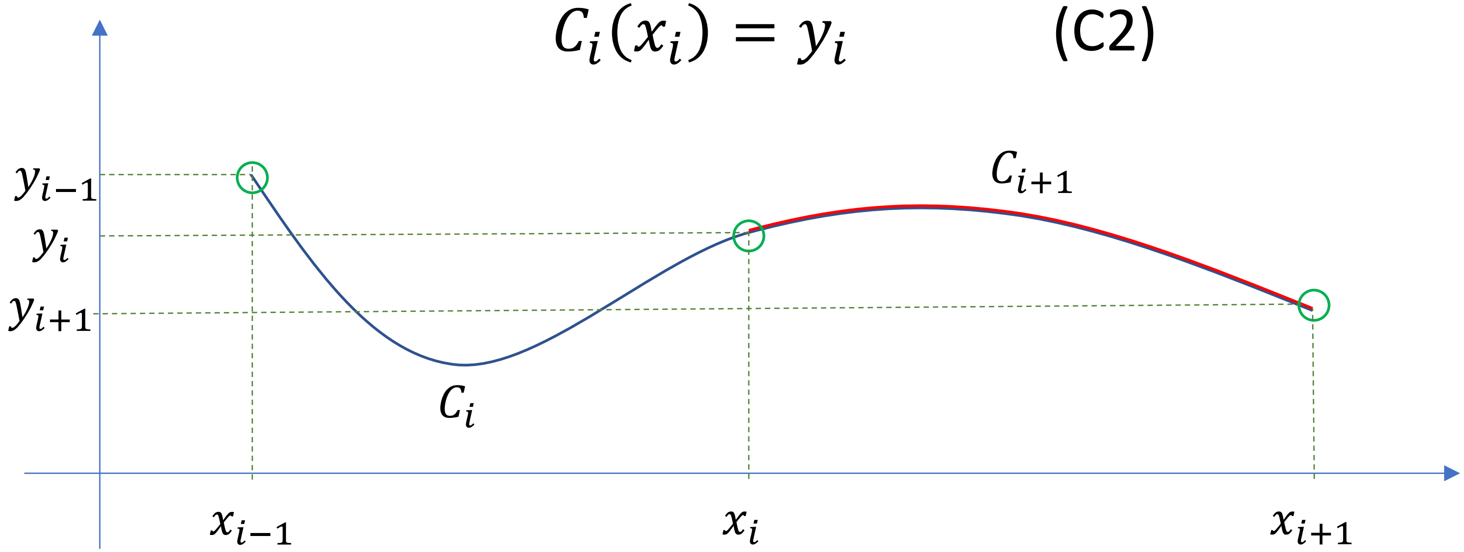
$$S(x) = \begin{cases} C_1(x) = a_0 x + b_0, & x_0 \le x \le x_1 \\ C_2(x) = a_1 x + b_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ C_n(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

  - Normalmente se utilizam *splines* cúbicas, já que um polinômio de grau 3 é a curva de menor grau que permite especificar a curvatura de uma curva (a curvatura depende da derivada segunda), que é importante em projeto/manufatura assistidos por computador.

- Interpolação polinomial por partes
  - Na *spline* cúbica, cada polinômio C_i pode ser escrito como
$$C_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
  - Como C_i é definido num intervalo $[x_{i-1}; x_i]$, as seguintes **condições de interpolação** são impostas:

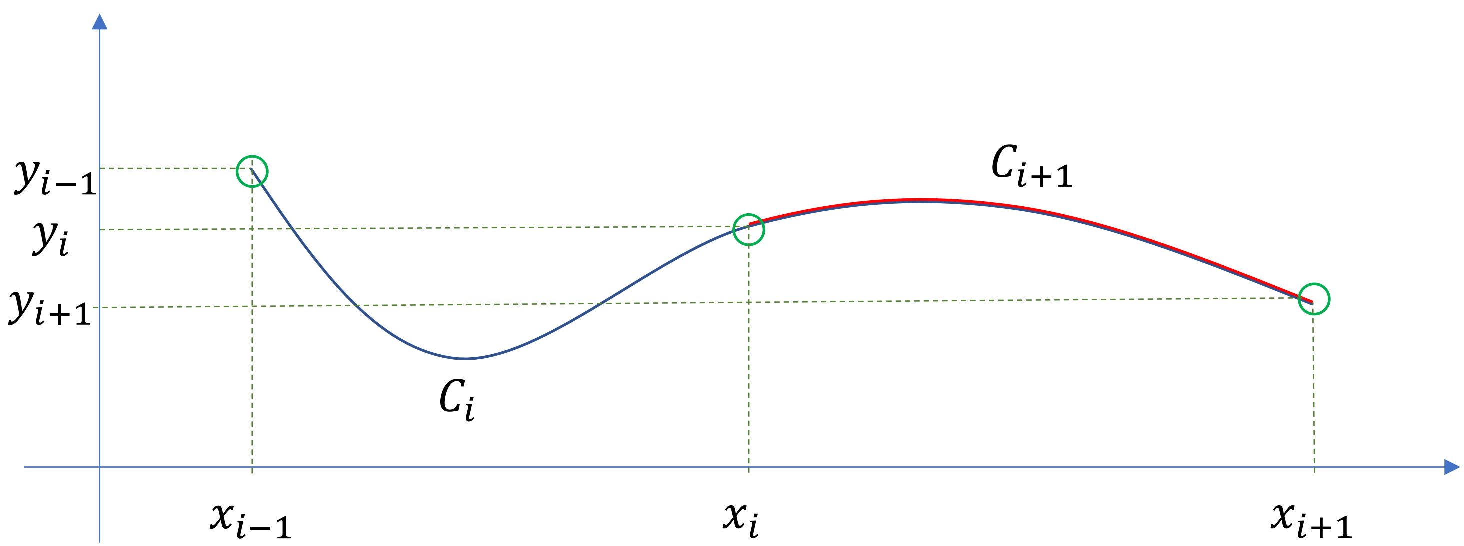
$$C_{i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1} \qquad \text{(C1)}$$

$$C_i(x_i) = y_i \qquad \text{(C2)}$$



- Interpolação polinomial por partes
  - Como dois segmentos vizinhos, C_i e C_{i+1}, têm em comum o nó x_i então devemos impor a **condição de continuidade**:

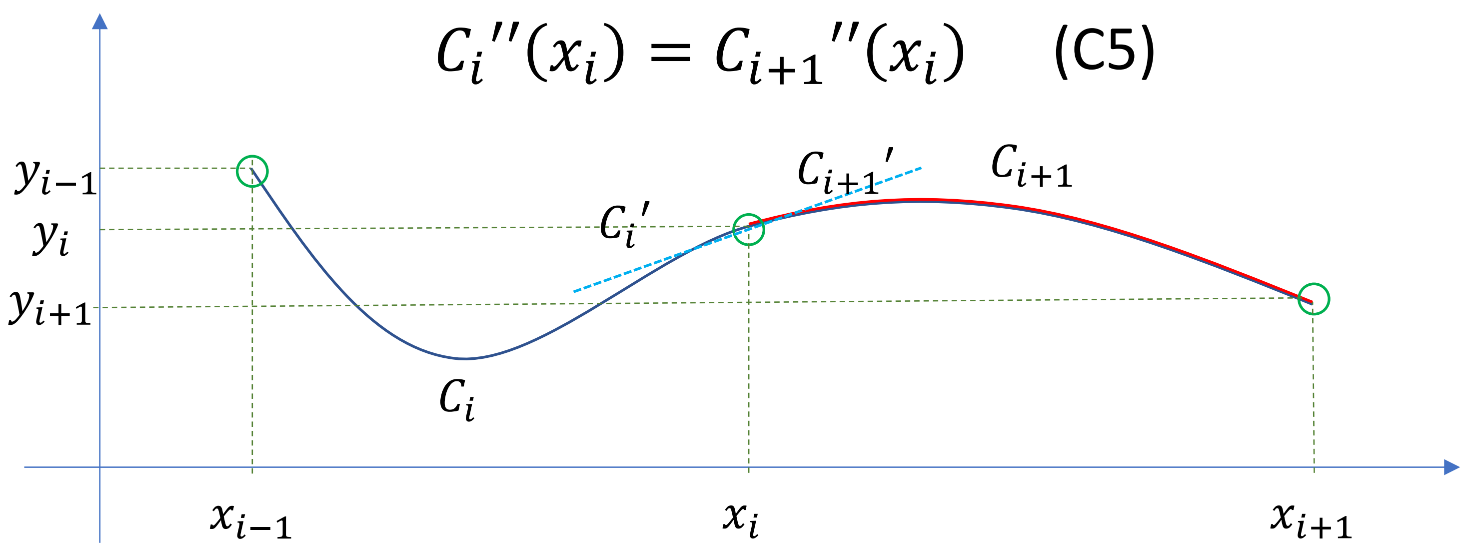
$$C_i(x_i) = y_i = C_{i+1}(x_i) \qquad \text{(C3)}$$



- Interpolação polinomial por partes
  - Além disso, deseja-se que a curva da função $C(x)$ seja a mais **suave** possível, i.e., sem pontos de descontinuidade nas suas **derivadas**; como cada segmento é cúbico, impomos a **condição de continuidade** nas derivadas de 1ª e 2ª ordens entre dois segmentos vizinhos:

$$C_i'(x_i) = C_{i+1}'(x_i) \qquad \text{(C4)}$$

$$C_i''(x_i) = C_{i+1}''(x_i) \qquad \text{(C5)}$$



- Interpolação polinomial por partes
  - Como cada segmento precisa de quatro coeficientes para ser definido e temos n segmentos, precisamos determinar $4n$ coeficientes.
  - A condição C5 estabelece a condição de continuidade para a derivada 2ª de dois segmentos vizinhos. Ora, como um segmento $C_i(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, então

$$C_i''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$$

a qual é a expressão para uma reta que passa por

$$y_{i-1}'' = M_{i-1} \text{ e } y_i'' = M_i.$$

- Interpolação polinomial por partes
  - Observe que uma reta que passa por dois pontos $(x_{i-1}; y_{i-1})$ e $(x_i; y_i)$ pode ser escrita como $y = ax + b$ de onde, uma vez calculados a e b, vem

$$y = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i$$

  - Por analogia, a reta que passa por $(x_{i-1}; M_{i-1})$ e $(x_i; M_i)$ é

$$C_i''(x) = \frac{x_i - x}{h_i} M_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} M_i$$

onde $h_i = x_i - x_{i-1}$.

- Interpolação polinomial por partes
  - Integrando a equação para $C_i''(x)$ em relação a x duas vezes,

$$C_i(x) = \int \left(\int C_i''(x)\ dx \right) dx$$

obtemos

$$C_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + c_i x + d_i$$

onde c_i e d_i são coeficientes a determinar, surgidos das integrações.

- Interpolação polinomial por partes
  - Usando as condições de continuidade C1 e C2, escrevemos

$$C_i(x_{i-1}) = \frac{{h_i}^2}{6} M_{i-1} + c_i x_{i-1} + d_i = y_{i-1}$$

$$C_i(x_i) = \frac{{h_i}^2}{6} M_i + c_i x_i + d_i = y_i$$

as quais formam um sistema de equações a duas variáveis de onde podemos determinar c_i e d_i:

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

$$d_i = \frac{x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(x_i M_{i-1} - x_{i-1} M_i)$$

- Interpolação polinomial por partes
  - Substituindo os valores de c_i e d_i na equação para $C_i(x)$, obtemos

$$C_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_{i-1}h_i}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}\right)(x - x_{i-1})$$

  - Resta-nos ainda determinar os valores de M_i, que são as derivadas de 2ª ordem calculadas em cada nó x_i.

- Interpolação polinomial por partes
  - As derivadas de 2ª ordem M_i são calculadas derivando a equação anterior em relação a x:

$$C_i'(x) = -\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} M_i +$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}).$$

  - Pela condição de continuidade C4, $C_i{}'(x_i) = C_{i+1}{}'(x_i)$:

$$C_i'(x_i) = \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i-1}) + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$C_{i+1}'(x_i) = -\frac{h_i}{6}(2M_{i-1} - M_i) + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

- Interpolação polinomial por partes
  - Igualando as equações para $C_i'(x_i)$ e $C_{i+1}'(x_i)$ e rearranjando os termos adequadamente, obtemos

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i+1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)$$

para $1 \leq i \leq n-1$, onde

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_{i+1}+h_i} \text{ e } \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}$$

o qual é um sistema tridiagonal de $n-1$ equações lineares a $n+1$ variáveis.

  - É necessário especificar mais duas condições!

- Interpolação polinomial por partes
  - Por exemplo, as derivadas $f'(x_0)$ e $f'(x_n)$ podem ser conhecidas. Nesse caso, o sistema a ser resolvido é

$$
\begin{bmatrix}
2 & 0 & & & \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
 & & & 0 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\dfrac{6}{x_1 - x_0}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) - f'(x_0) \\
\dfrac{6}{h_2 + h_1}\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\
\vdots \\
\dfrac{6}{h_n + h_{n-1}}\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right) \\
f'(x_n) - \dfrac{6}{x_n - x_{n-1}}\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)
\end{bmatrix}
$$

  - Em particular, quando $f'(x_0) = f'(x_n) = 0$, temos as condições de fronteira denominadas de “presas”.

- Interpolação polinomial por partes
  - Outra possibilidade é especificar

$$f''(x_0) = f''(x_n) = 0$$

(denominada de **condição de fronteira natural**), de onde obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{6}{h_2 + h_1}\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\ \vdots \\ \dfrac{6}{h_n + h_{n-1}}\left(\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

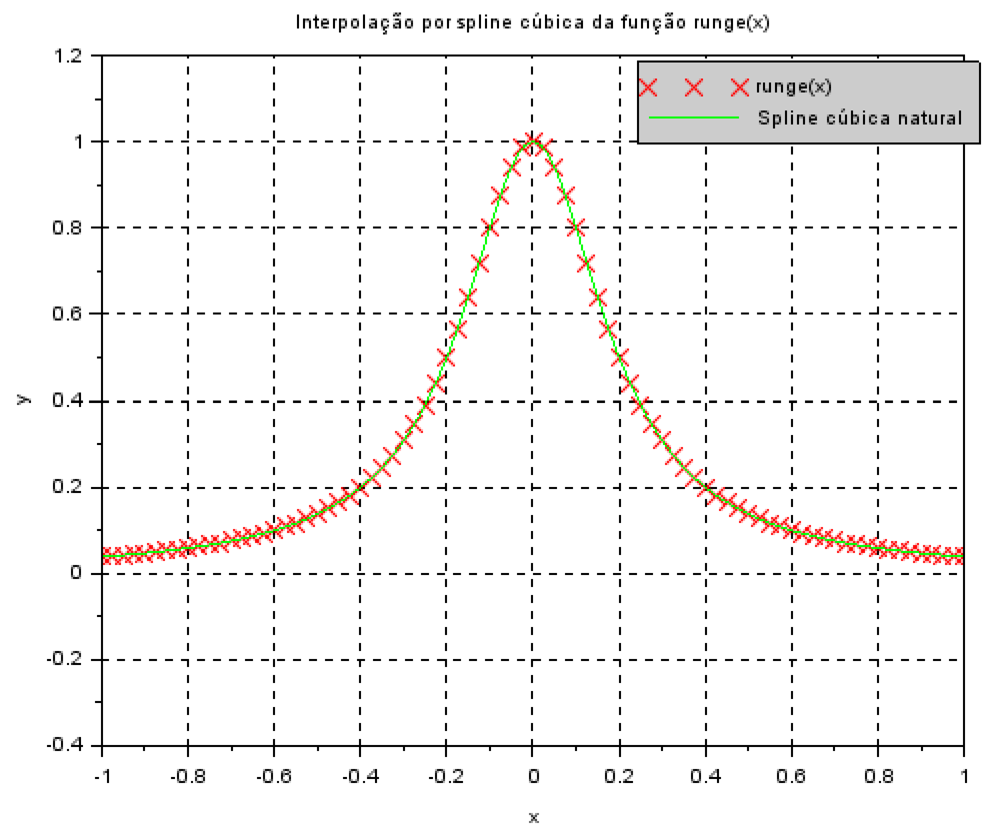
- Interpolação polinomial por partes
  - Uma vez determinadas as derivadas de 2ª ordem M_i e os espaçamentos h_i, pode-se avaliar a "spline" cúbica $C(x)$, localizando adequadamente qual segmento $C_i(x)$ deve ser utilizado, de acordo com a posição relativa de x aos nós x_i:

$$C(x) = \begin{cases} C_1(x), & x \le x_0 \\ C_i(x), & x_{i-1} \le x \le x_i\,, 1 \le i \le n \\ C_n(x), & x \ge x_n \end{cases}$$

  - Vejamos a seguir o uso da "spline" cúbica para interpolar a função de Runge:

• Interpolação polinomial por partes

- O gráfico ao lado mostra a curva da spline cúbica interpolando os pontos da função de Runge; observe a sobreposição das mesmas, evidenciando a qualidade da interpolação por splines.
- Além disso, $C(0) = f(0)$.



- Interpolação polinomial inversa
  - Dado $y \in [f(x_0); f(x_1)]$, busca-se determinar x tal que $f(x) = y$.
  - Se f for **invertível** no intervalo, i.e., não há valores y repetidos, pode-se determinar um polinômio p_n impondo-se as condições de interpolação
$$p_n(y_i) = x_i$$
para os pontos $(x_i; y_i)$.
  - Ou seja: basta inverter a ordem dos dados, i.e. considerar os pares de valores $(y_i; x_i)$ para o cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador.
  - Observe o exemplo a seguir:

- Interpolação polinomial inversa
  - Exemplo: considere a tabela abaixo, que mostra as temperaturas máximas, medidas ao meio-dia, durante uma certa semana.

d	S	T	Q	Q	S	S	D
T [°C]	12	10	7	4	3	6	5

  - Como determinar qual o dia da semana para o qual a temperatura era de 3°C?
  - Calculando o polinômio interpolador de Lagrange sobre os pares de pontos $(T; d)$, onde os dias foram numerados de 0 a 6, obtemos o gráfico a seguir:

Interpolação polinomial inversa

- Note que, uma vez que as temperaturas estão espaçadas igualmente (a 1°C), o polinômio interpolador de Lagrange sofre do efeito de oscilação, surgindo inclusive dias negativos no eixo vertical.
- No entanto, calculando o valor do polinômio interpolador em T=3, obtemos o valor 4, que corresponde à sexta-feira, dia da semana no qual a temperatura era de 3°C.