UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MAT01169 – CÁLCULO NUMÉRICO
PROF. RESPONSÁVEL: RUDNEI DIAS DA CUNHA

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 4 – INTERPOLAÇÃO E AJUSTE DE CURVAS

1. A tabela abaixo fornece a demanda diária máxima de energia elétrica em uma cidade. Encontre a data do pico máximo e o valor deste pico.

x (data)	*5 de outubro*	*15 de outubro*	*25 de outubro*	*4 de novembro*
y (demanda)	*10*	*15*	*20*	*13*

Observe que as demandas são medidas a cada 10 dias. Portanto, podemos considerar x como o vetor (0, 10, 20, 30). Com isso, os coeficientes do polinômio interpolador na forma de Newton são: $c_0=10{,}0000$, $c_1=0{,}5000$, $c_2=0$, $c_3=-0{,}0020$, *e o polinômio é* $p_3(x)=10+0{,}5x-0{,}002x(x-10)(x-20)=10+0{,}1x+0{,}06x^2-0{,}0020x^3$.

Derivando $p_3(x)$ *e igualando a zero, podemos obter as raízes da equação de segundo grau como -0,8012344974 e 20,80123450. Descartando a raiz negativa, vemos que o valor máximo alcançado por* $p_3(x)$ *nesse intervalo é 20,04057610 e a data correspondente é 25 de outubro.*

2. Considere a tabela abaixo:

x(°)	*26*	*28*	*30*	*32*	*34*	*36*	*38*	*40*	*42*
sin x	*0,4383*	*0,4694*	*0,5000*	*0,5299*	*0,5591*	*0,5877*	*0,6156*	*0,6427*	*0,6691*

Determine o valor de sin(32,2567°) usando a) um polinômio interpolador de grau 3 e b) um polinômio interpolador de grau 6. Compare os resultados obtidos entre si e com o valor obtido com uma calculadora científica.

Para o item a), podemos escolher os valores tabelados para os ângulos de 30°, 32°, 34° e 36°. O polinômio interpolador é $p_3(x)= 0{,}5+0{,}01495960000x-0{,}0000875(x-30)(x-32)-0{,}000002083(x-30)(x-32)(x-34)$ *e o valor interpolado é* $p_3(32{,}2567)=0{,}5336849$.

Para o item b), escolhemos os valores tabelados para os ângulos de 26°, 28°, 30°, 32°, 34°, 36° e 38°. O polinômio interpolador é

$$p_6(x)=0{,}4383+0{,}01555(x-26)-0{,}0000625(x-26)(x-28)-0{,}000004167(x-26)(x-28)(x-30)$$
$$+0{,}000000521(x-26)(x-28)(x-30)(x-32)-0{,}000000026(x-26)(x-28)(x-30)(x-32)(x-34)-$$
$$0.000000004(x-26)(x-28)(x-30)(x-32)(x-34)(x-36)$$

e o valor interpolado é $p_6(32{,}2567)=0{,}533685001$.

O erro relativo entre ambas aproximações é da ordem de 0,000000189.

O valor obtido com uma calculadora HP-48SX é sin(32,2567°)=0,533713409192 e os erros relativos entre esse e os valores obtidos com os polinômios p_3 *e* p_6 *são, respectivamente, 0,00005342 e 0,00005323. Observe que o erro relativo para a aproximação por* p_6 *é menor, apesar de ambos indicarem que as aproximações são aceitáveis.*

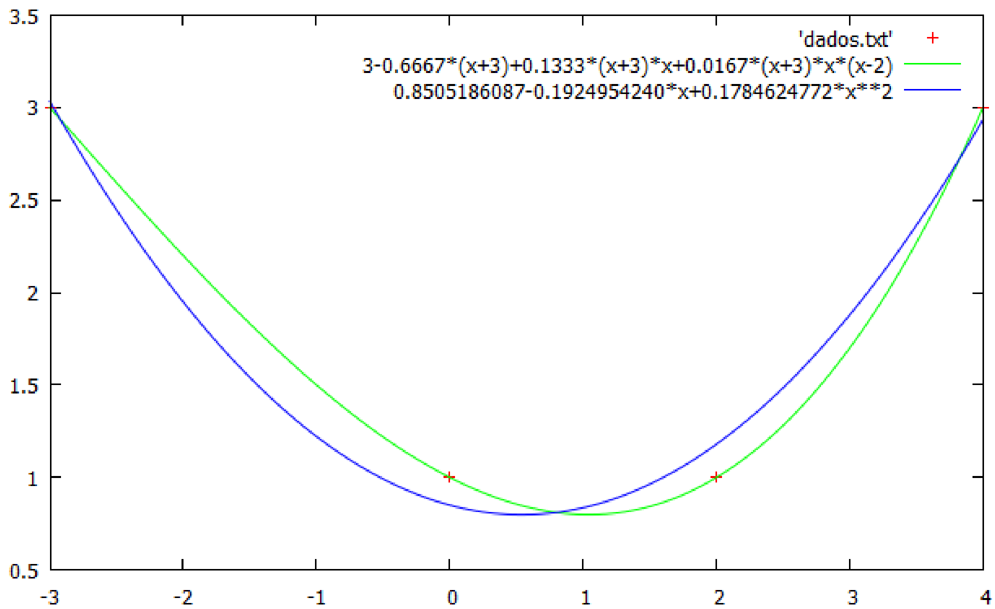
3. Dada a tabela abaixo para a função $f(x)=e^x$, calcule $f(1{,}05)$ e delimite o erro para o valor interpolado, utilizando aritmética de ponto-flutuante com quatro algarismos significativos.

x	1	1,1	1,2
e^x	2,718	3,004	3,320

O polinômio interpolador é $p_2(x)=2{,}718+2{,}86(x-1)+1{,}5(x-1)(x-1{,}1)$. Uma aproximação para $f(1{,}05)$ é dada por $p_2(1{,}05)=2{,}8572$ (usando arredondamento por corte), e o erro relativo entre o valor exato para $e^{1{,}05}=2{,}85761118$ e $p_2(1{,}05)$ é $\left|\dfrac{2{,}85761118-2{,}8572}{2{,}85761118}\right|=0{,}000157863$.

4. Determine a parábola que melhor se ajusta aos pontos (-3;3), (0;1), (2;1) e (4;3). Compare com o polinômio que interpola esses pontos.

O polinômio interpolador é $p_3(x)=3-0{,}6667(x+3)+0{,}1333(x+3)x+0{,}0167(x+3)x(x-2)$ e a função de ajuste quadrática é $p_2(x)=0{,}8505186087-0{,}1924954240x+0{,}1784624772x^2$. O gráfico abaixo mostra as duas curvas; qual delas é a "melhor" depende do uso a que se destinaria cada curva.

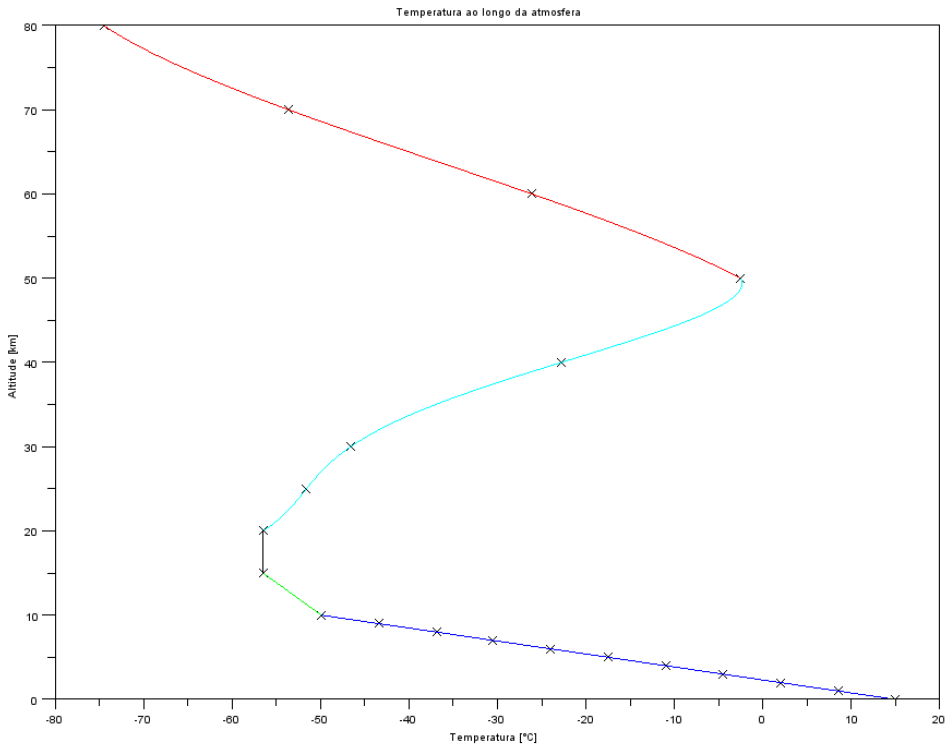


5. A temperatura da atmosfera varia de forma não linear ao longo da altitude, dependendo das camadas da mesma. A tabela abaixo mostra valores típicos da temperatura T, em °C, em função da altitude h (em km):

camada	***h*** **(km)**	***T*** **(°C)**	camada	***h*** **(km)**	***T*** **(°C)**
Troposfera	0	15,0	Troposfera	10	-49,9
Troposfera	1	8,5	Tropopausa	15	-56,5
Troposfera	2	2,0	Estratosfera	20	-56,5
Troposfera	3	-4,5	Estratosfera	25	-51,6
Troposfera	4	-11,0	Estratosfera	30	-46,6
Troposfera	5	-17,5	Estratosfera	40	-22,8
Troposfera	6	-24,0	Mesosfera	50	-2,5
Troposfera	7	-30,5	Mesosfera	60	-26,1
Troposfera	8	-36,9	Mesosfera	70	-53,6
Troposfera	9	-43,4	Mesosfera	80	-74,5

Determine um ou mais polinômios (de ajuste ou de interpolação) que permitam avaliar a temperatura em função da altitude, dentro de cada camada da atmosfera.

Exibindo os pontos (h,T) da tabela num gráfico, observa-se que a curva tem um formato semelhante ao de uma curva cúbica, apresentando, porém, três regiões de comportamento linear (h=0 km até h=10 km; h=10 km a h=15 km; e h=15 km a h=20 km). Dessa forma, pode-se calcular a curva de ajuste linear para a primeira região, e



interpolar linearmente os pontos correspondentes às demais regiões. A partir de h=20, temos outras duas regiões a considerar: h=20 km a h=50 km e h=50 km a h= 80 km. Nessas duas, escolhemos a interpolação de Newton.

O gráfico a seguir exibe as cinco regiões consideradas acima, exibidas nas cores azul, verde, preto, ciano e vermelho, respectivamente.

6. O coeficiente de arrasto, C_D, de um objeto em movimento na atmosfera apresenta um comportamento altamente não linear, pois depende de vários fatores como a sua forma, altitude, velocidade, pressão e densidade atmosféricas, dentre outros. A tabela abaixo mostra os valores de C_D para o foguete balístico alemão V2, desenvolvido na 2ª Guerra Mundial, em função da sua velocidade:

Velocidade (Mach)	C_D	**Velocidade (Mach)**	C_D
0,0	0,25	2,5	0,15
0,5	0,18	3,0	0,14
1,0	0,28	3,5	0,12
1,2	0,36	4,0	0,11
1,5	0,26	5,0	0,10
2,0	0,17		

Suponha que se deseja calcular o C_D a uma velocidade de 1,25 Mach. Para tal, compare o valor obtido com um polinômio interpolador e com um polinômio de ajuste de graus adequados. Explique.

Para se calcular o C_D desejado, pode-se utilizar os pontos (1,0; 0,28); (1,2; 0,36); (1,5; 0,26). *Calculando-se o polinômio interpolador de Newton, obtemos como coeficientes: c_0=0,28; c_1=0,4; c_2=-1,41667, resultando no polinômio $N_2(v)$=0,28+0,4v-1,41667(v-1,0)(v-1,2). Já o polinômio de ajuste de grau 2 tem, como seus coeficientes, a_0=-1,88; a_1=3,62667; a_2=-1,41667, e o polinômio de ajuste é $p_2(v)$=-1,88+3,62667v-1,41667v^2.*

Avaliando ambos os polinômios em v=1,25, verificamos que N_2(1,25)= p_2(1,25)=0,361667. Com efeito, se expandirmos e recombinarmos os termos do polinômio $N_2(v)$, veremos que ele é idêntico a $p_2(v)$.

7. A tabela abaixo mostra os valores da densidade do ar, ρ e da altitude de referência, H, em função da altitude, h, de acordo com o modelo atmosférico norte-americano de 1976 (NOAA):

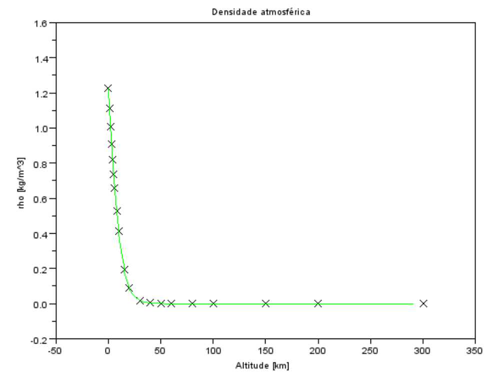
h **(km)**	***ρ*** **(kg/m³)**	***H*** **(km)**	***h*** **(km)**	***ρ*** **(kg/m³)**	***H*** **(km)**
0	1,225	10,42	20	0,0889	7,62
1	1,112	10,30	30	0,0184	7,15
2	1,007	10,19	40	0,00400	6,99
3	0,909	10,06	50	0,00103	7,06
4	0,819	9,95	60	$3{,}1\times10^{-4}$	7,24
5	0,736	9,82	80	$1{,}85\times10^{-5}$	7,20
6	0,660	9,70	100	$5{,}60\times10^{-7}$	6,85
8	0,526	9,46	150	$2{,}08\times10^{-9}$	7,43
10	0,414	9,21	200	$2{,}54\times10^{-10}$	8,97
15	0,195	8,16	300	$1{,}92\times10^{-11}$	12,06

A função recomendada para obter-se a densidade em função de uma altitude não listada na tabela é $\rho(h)= \rho(0)e^{(-h/H_m)}$, onde H_m é o valor médio de H para as duas altitudes tabeladas que são menor e maior do que a altitude não listada.

Calcule $\rho(12)$ e $\rho(175)$, utilizando uma curva de ajuste adequada, e compare os resultados obtidos com aqueles dados pela função recomendada.

Exibindo-se os pontos tabulados, confirma-se que os mesmos seguem uma distribuição exponencial. Naturalmente, portanto, uma curva de ajuste exponencial é a mais indicada para se aproximar tais pontos. No entanto, se calcularmos os coeficientes c *e* k *da curva de ajuste exponencial com base apenas nos pares de pontos* (h; ρ), *e sobrepusermos o gráfico da curva correspondente aos pontos tabelados, veremos que essa curva não aproxima adequadamente os pontos.*

No entanto, como já indicado pela curva sugerida no enunciado da questão, devemos normalizar a altitude pela altitude de referência. Calculando então os coeficientes da curva de ajuste exponencial sobre os valores de h, divididos pela altitude de referência correspondente, obtemos c= 1,2259251 *e* k= -1,0000667*, correspondendo à curva de ajuste* $g(h)=c\ e^{(k\ h/H)}$*, a qual é exibida no gráfico a seguir:*



Como foi solicitado calcular a densidade em altitudes não tabuladas, utiliza-se como H o valor médio das duas altitudes tabuladas que englobam uma dada altitude. A tabela a seguir mostra os valores obtidos com a função recomendada e a função de ajuste exponencial:

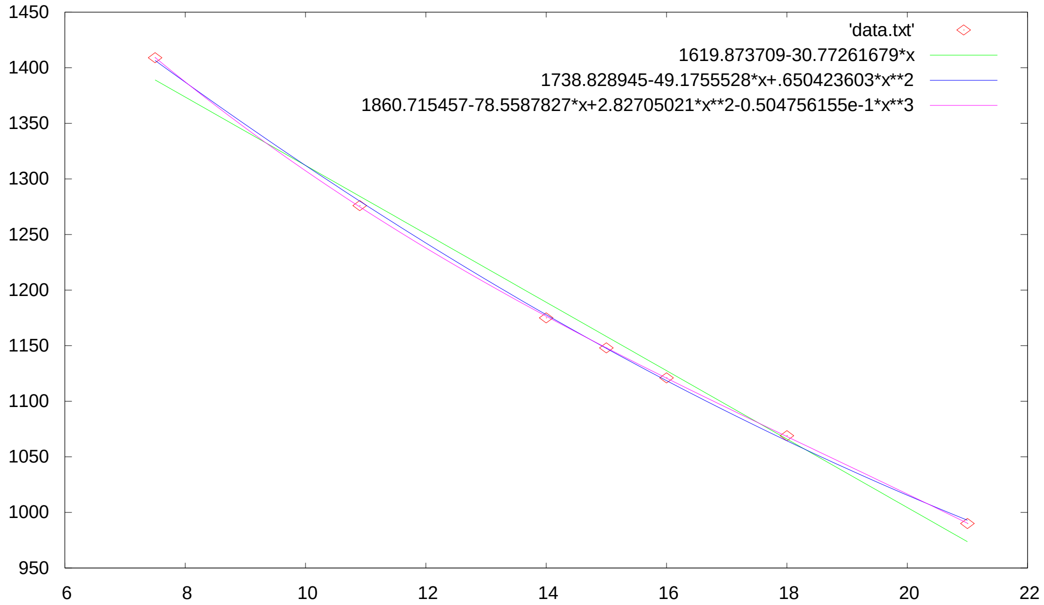
h	H_m	ρ **(NOAA)**	ρ **(ajuste)**	**Erro relativo**
12	8,685	0,307663	0,307867	$6{,}62976\times10^{-4}$
175	8,2	$6{,}60171\times10^{-10}$	$6{,}59729\times10^{-10}$	$6{,}68684\times10^{-4}$

8. Considere a variação da viscosidade η em função da temperatura:

T(°C)	*7,5*	*10,9*	*14,0*	*15,0*	*16,0*	*18,0*	*21,0*
η	*1409*	*1276*	*1175*	*1148*	*1121*	*1069*	*990*

Encontre a melhor função de ajustamento e a) determine a viscosidade para $T=4°C$ e $T=25°C$; b) determine o valor de T para η igual a 1200.

O gráfico abaixo mostra que podemos aproximar os pontos por uma função de ajuste linear ou, talvez, uma função quadrática ou cúbica:



Escolhendo a função cúbica, $p_3(T)=1860{,}715457-78{,}5587827T+2{,}82705021T^2-0{,}0504756155T^3$*, obtemos os seguintes valores, para o item a)* $p_3(4)=1588{,}482690$ *e* $p_3(25)=874{,}9707778$.

Para responder o item b), podemos proceder de duas formas:

1. *a primeira é resolvendo o problema inverso, η×T, de tal sorte que, usando um polinômio interpolador cúbico, como no item a), obtemos* $T(\eta)= 47{,}08311107+0{,}0097122189\eta-0{,}00005901780780\eta^2+0{,}00000002284677761\eta^3$*, de onde* $T(1200)=13{,}23136223$ *(verifique no gráfico que tal valor é admissível);*

2. *a segunda forma consiste em se utilizar um processo de busca de uma raiz para a função* $p_3(T)-1200=0$*; usando o método de Newton-Raphson com* $T_0=12$

(obtido por inspeção no gráfico), $\varepsilon=10^{-6}$*,* $\delta=10^{-7}$*,* $k_{max}=20$*, obtemos a aproximação em 3 iterações,* T_3*= 13,20767099386105. Observe a diferença entre os dois resultados obtidos, causada pelos erros de arredondamento nos dois processos numéricos usados; no entanto, calculando DIGSE entre T(1200) e* T_3*, vemos que há pelo menos dois dígitos significativos exatos.*