Normas, estabilidade e condicionamento de sistemas de equações lineares

Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

- Normas de vetores
  - Uma *norma* num espaço vetorial é o equivalente ao módulo no reta dos reais: ela provê uma medida do *comprimento* de um vetor.
  - Mais precisamente, um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e uma norma em $\mathbb{R}^n$ definem um espaço métrico.
  - **Def.**: uma norma vetorial em $\mathbb{R}^n$ é uma função

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0 \mid x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \; \forall \; x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\alpha x) = |\alpha| f(x) \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

- Normas de vetores
  - Uma função que satisfaça essas propriedades é denominada de **norma** e é indicada por

$$f(x) = \|x\|_k$$

onde o índice indica uma norma específica, a saber:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad (1)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}, \quad (2)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|\,. \quad (3)$$

  - Do ponto de vista computacional, a norma $\|x\|_\infty$ é a mais facilmente calculada e a que preserva a informação numérica presente nos elementos de x, já que nenhuma operação aritmética é efetuada (logo, não há erros de arredondamento).

- Normas de vetores
  - Já o cálculo da norma $\|x\|_2$ deve ser feito com extremo cuidado, pois dependendo das magnitudes dos elementos de x, é possível que haja uma acumulação catastrófica de erros de arredondamento.
  - Na biblioteca BLAS, a FUNCTION _NRM2 efetua o cálculo dessa norma efetuando multiplicações, por fatores de escala adequados, dos termos no somatório dos elementos de x ao quadrado.

- Normas de vetores
  - A função norma_2, escrita em SciLab, implementa o algoritmo presente na BLAS DNRM2:

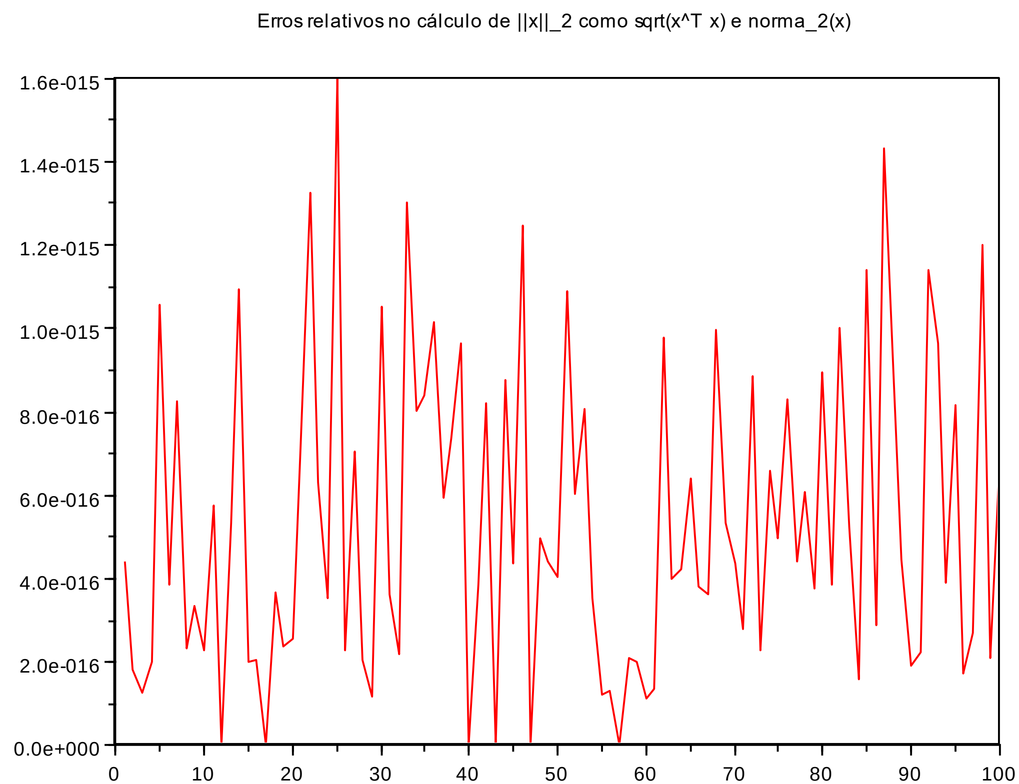
```
function v=norma_2(x)
   n=max(size(x))
   if n==1
      v=abs(x(1))
   else
      scale = 0.0
      ssq = 1.0
      for i=1:n
         if x(i)~=0.0
            absxi = abs(x(i))
            if scale<absxi
               ssq = 1.0+ssq*(scale/absxi)^2
               scale = absxi
            else
               ssq = ssq+(absxi/scale)^2
            end
         end
      end
      v = scale*sqrt(ssq)
   end
endfunction
```

- Normas de vetores
  - Para verificarmos a diferença entre o cálculo dessa norma usando a Eq. (2) e usando a rotina *norma_2,* calculamos 100 vezes essa norma das duas formas acima, sobre vetores cujos elementos foram gerados aleatoriamente e com magnitudes diferentes:

```
for i=1:100
        x=rand(1000,1,'normal');
        x(20:120,1)=x(20:120,1)/rand(1,1,'normal');
        x(500:599,1)=rand(1,1,'normal')*x(500:599,1);
        ingenua=sqrt(x'*x);
        cuidadosa=norma_2(x);
        erro_relativo(i)=abs(cuidadosa-ingenua)/cuidadosa;
end
plot(1:1:100,erro_relativo,'r-')
```

• Normas de vetores

Observe que um erro relativo da ordem de 10^{-15} pode causar diferenças em cálculos posteriores!



- Normas de vetores
  - Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, i.e. existem duas constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha \mid x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

  - Por exemplo,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \tag{5}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \tag{6}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \tag{7}$$

- Normas de vetores
  - Com as normas, podemos definir os *erros absoluto* e *relativo* entre dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ como

$$e_a = \|x - y\| \tag{8}$$

$$e_r = \frac{\|x - y\|}{\|x\|}, x \neq 0 \tag{9}$$

  - Para o caso particular da norma $\|x\|_\infty$, o erro relativo nos permite estimar o número de dígitos significativos exatos entre dois vetores, sujeitos a uma tolerância $\tau \ll 1$:

$$-\log_{10} \frac{\|x - y\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq -\log_{10} \tau \tag{10}$$

- Normas de vetores
  - O lado esquerdo da desigualdade é conhecido pela sigla DIGSE (Dígitos Significativos Exatos):

$$DIGSE = -\log_{10} \frac{\|x-y\|_\infty}{\|x\|_\infty}. \tag{11}$$

o qual nos permite estimar quantos dígitos significativos exatos há em y (observe que deve-se considerar apenas a parte inteira do valor calculado).

  - Nota: uma expressão equivalente permite calcular a quantidade de dígitos significativos exatos entre $x, y \in \mathbb{R}$:

$$DIGSE = -\log_{10} \frac{|x-y|}{|x|} \tag{12}$$

- Normas de vetores
  - Por exemplo, se x e y são dois vetores em $\mathbb{R}^2$, com pequenas diferenças entre os valores dos seus elementos,

$$x = \begin{bmatrix} 1,23500 \\ 0,05128 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1,23400 \\ 0,05674 \end{bmatrix}$$

e se calcularmos

$$x - y = \begin{bmatrix} 0,00100 \\ -0,00546 \end{bmatrix}$$

então

$$DIGSE = -\log_{10} \frac{\|x - y\|_\infty}{\|x\|_\infty} = -\log_{10} \frac{0,00546}{1,23500} = 2,35$$

o que indica que y tem 2 dígitos significativos exatos.

- Normas de vetores
  - As normas de matrizes são definidas em termos das normas de vetores.
  - As normas de matrizes nos permitem dizer, por exemplo, quando uma matriz é “quase-singular”.
  - **Def**.: uma norma matricial em $\mathbb{R}^{m\times n}$ é uma função

$$f: \mathbb{R}^{m\times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$f(\boldsymbol{A}) \geq 0 \mid \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$f(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq f(\boldsymbol{A}) + f(\boldsymbol{B}) \; \forall \; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$f(\alpha\boldsymbol{A}) = |\alpha| f(\boldsymbol{A}) \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

- Normas de matrizes
  - As mais utilizadas são a **norma de Frobenius**,

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{i,j}}^2} \qquad (13)$$

  e a **norma-$\boldsymbol{p}$**:

$$\|\boldsymbol{A}\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}x\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|\boldsymbol{A}x\|_p \,, x \in \mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

  - É importante considerar que as duas normas acima definem, na verdade, *famílias* de normas, já que a norma-2 em $\mathbb{R}^{m\times n}$ é uma função *diferente* da norma-2 em $\mathbb{R}^{p\times q}$.

- Normas de matrizes
  - Observe que nem todas as normas matriciais satisfazem a *propriedade submultiplicativa:* $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$
  - Algumas propriedades importantes:

$$\|\boldsymbol{A}x\|_p \leq \|\boldsymbol{A}\|_p \cdot \|x\|_p, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n \tag{15}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_F \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_2 \tag{16}$$

$$\max_{i,j}|a_{i,j}| \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{i,j}| \tag{17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{m}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \tag{18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1 \tag{19}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{i,j}| \tag{20}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \tag{21}$$

- Normas de matrizes
  - Para a norma-p com $p = 2$, um teorema nos diz que existe um vetor z, tal que $\|z\|_2 = 1$, para o qual
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}z = \|\boldsymbol{A}\|_2^2 z \qquad (22)$$
  - Observe que se escrevermos esse resultado na forma
$$\boldsymbol{B}v = \lambda v$$
  o teorema está nos dizendo que o quadrado da norma-2 de $\boldsymbol{A}$ é uma das raízes do polinômio característico,
$$\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}).$$
  - Um corolário desse teorema nos permite estimar a norma-2 de $\boldsymbol{A}$ através das normas $p = 1$ e $p = \infty$:
$$\|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{\|\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{A}\|_\infty}. \qquad (23)$$

- Normas de matrizes
  - Vamos analisar dois problemas relativos à *perturbação* – causada pelos erros de arredondamento – dos elementos de uma matriz $\boldsymbol{A}$.
  - O primeiro é quantificar o quanto a sua inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$, muda, quando alguns elementos de $\boldsymbol{A}$ são alterados.
  - **Lema**: Suponha $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e que $\|\cdot\|$ é uma norma que satisfaz a propriedade submultiplicativa. Se $\|\boldsymbol{F}\| < 1$, então $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}$ **não é singular** e

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^k \,, \tag{24}$$

$$\|(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{F}\|} \,. \tag{25}$$

• Normas de matrizes

• *Prova:*

a) Suponha que $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$ é singular. Então, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})x=0$, para algum $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$. Porém, daí podemos escrever $\|x\|=\|\boldsymbol{F}x\|$, de onde $\|\boldsymbol{F}\|\geq 1$, o que é uma contradição. Logo, $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$ não é singular. ■

b) Para a inversa $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}$, considere a identidade

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{F}^k\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^{N+1}.$$

Como $\|\boldsymbol{F}\|<1\rightarrow\left\|\boldsymbol{F}^k\right\|<\|\boldsymbol{F}\|^k$, temos que $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{F}^k=\boldsymbol{0}$. Logo, $\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{F}^k\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})=\boldsymbol{I}$ e, portanto, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}=\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{F}^k\right)$.

• Normas de matrizes

- *Prova:*

b) (cont.) Tomando normas dos dois lados da igualdade, podemos escrever

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^{k} = 1 + \|\boldsymbol{F}\| + \|\boldsymbol{F}\|^{2} + \cdots$$

E, chamando de S o lado direito da igualdade,

$$S = 1 + \|\boldsymbol{F}\| + \|\boldsymbol{F}\|^{2} + \cdots$$
$$S\|\boldsymbol{F}\| = \|\boldsymbol{F}\|^{2} + \|\boldsymbol{F}\|^{3} \ldots$$
$$S - S\|\boldsymbol{F}\| = 1 \rightarrow S = \frac{1}{1-\|\boldsymbol{F}\|}$$

Logo,

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^{k} = \frac{1}{1-\|\boldsymbol{F}\|}. \blacksquare$$

• Normas de matrizes

- Observe que, como consequência do lema, podemos escrever

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}-\boldsymbol{I}\| \le \frac{\|\boldsymbol{F}\|}{1-\|\boldsymbol{F}\|}. \tag{26}$$

- Esse resultado nos diz que, se $\boldsymbol{I}$ for perturbada, então perturbações de mesma ordem ocorrerão na inversa $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}$.

- Normas de matrizes
  - **Teorema**: se $\boldsymbol{A}$ não é singular e $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}\| = r < 1$, então $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ também não é singular e
$$\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^2}{1-r}. \qquad (27)$$
  - *Prova*: como $\boldsymbol{A}$ não é singular, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})$, onde $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}$. Como, por hipótese, $\|\boldsymbol{F}\| = r < 1$, então $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$ não é singular e $\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\| = (1-r)^{-1}$, pelo lema anterior. Agora, como $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, podemos escrever
$$\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}{1-r}$$

  e, usando a identidade $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$, podemos escrever $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$, de onde
$$\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{E}\|\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^2}{1-r}. \blacksquare$$

- Normas de matrizes
  - O segundo problema é quantificar os erros induzidos na solução de um sistema de equações lineares, quando $\boldsymbol{A}$ é perturbada.
  - Suponha que se deseja resolver o sistema $\boldsymbol{A}x = b$, com $\boldsymbol{A}$ uma matriz não singular e que, ao armazenar o vetor b no computador, ocorreram erros de arredondamento, e o vetor armazenado é $\tilde{b}$.
  - Podemos então comparar os erros relativos entre a solução x de $\boldsymbol{A}x = b$ e a solução $\tilde{x}$ do sistema perturbado $\boldsymbol{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

- Normas de matrizes
  - O erro relativo $\|x-\tilde{x}\|\|x\|^{-1}$ pode ser medido escrevendo-se
    $$\|x-\tilde{x}\| = \left\|\boldsymbol{A}^{-1}b - \boldsymbol{A}^{-1}\tilde{b}\right\| = \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\left(b-\tilde{b}\right)\right\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\left\|b-\tilde{b}\right\|.$$
  - Como $\boldsymbol{A}x = b$, então tomando normas dos dois lados da igualdade, podemos escrever $\frac{\|\boldsymbol{A}x\|}{\|b\|} = 1$; se multiplicarmos o lado direito da desigualdade por essa razão, vem:
    $$\|x-\tilde{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\left\|b-\tilde{b}\right\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\|\boldsymbol{A}x\|\,\frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}$$

  Logo,
  $$\|x-\tilde{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\|x\|\,\frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}$$
  e
  $$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\,\frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}. \qquad (28)$$

- Normas de matrizes
  - A expressão $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$, na Eq. (28), é denominada de **número de condição** de $\boldsymbol{A}$,

$$\boxed{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|} \tag{29}$$

  - Observando a Equação (28), podemos notar que o *erro relativo* entre o vetor b e sua representação em ponto-flutuante, $\tilde{b}$, é **multiplicado** pelo **número de condição** de $\boldsymbol{A}$, ao se resolver o sistema perturbado $\boldsymbol{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.
  - Logo, se $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \gg 1$, então os erros de arredondamento presentes em $\tilde{b}$ poderão ser amplificados, de tal forma a tornar $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$ muito grande.

- Normas de matrizes
  - Por exemplo: seja a matriz $\boldsymbol{A}$ e a sua inversa,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & -1-\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a norma-∞, vem

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 2+\varepsilon, \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon^2}(2+\varepsilon)$$

de onde

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) = \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 > \frac{4}{\varepsilon^2}.$$

Se $\varepsilon \leq 10^{-2}$, então $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq 40000$; isso quer dizer que, se b sofrer uma perturbação da ordem de 10^{-8}, o erro relativo na solução do sistema poderá ser de até 4×10^{-4}, o que não pode ser desprezado!

- Normas de matrizes
  - Finalmente, apresentamos um lema e um teorema que permitem estabelecer uma cota para o erro relativo entre as soluções de um sistema de equações lineares e um outro, cuja matriz de coeficientes e o termo independente tenham sido perturbados:

- Normas de matrizes
  - **Lema**: Sejam os sistemas

$$\boldsymbol{A}x = b, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, 0 \neq b \in \mathbb{R}^n$$

e

$$(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})y = b + \Delta b, \Delta\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \Delta b \in \mathbb{R}^n,$$

tais que $\|\Delta\boldsymbol{A}\| \leq \delta\|\boldsymbol{A}\|$ e $\|\Delta b\| \leq \delta\|b\|$, com $\delta \in \mathbb{R}$. Se $\delta \times \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = r < 1$, então $\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}$ não é singular e

$$\frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \frac{1+r}{1-r}. \tag{30}$$

  - **Teorema**: Se as condições do lema anterior são atendidas, então

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \frac{2\delta}{1-r}\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}). \tag{31}$$