UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MAT01032 – CÁLCULO NUMÉRICO A – TURMA A
SEMESTRE 2013/2
PROF. RESPONSÁVEL: RUDNEI DIAS DA CUNHA

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 6 – EDOs - Problemas de Valor Inicial

1. Determine, experimentalmente, o valor de t para o qual a temperatura de um objeto, inicialmente a 80°C, seja menor do 0,001, resolvendo o PVI abaixo através do método de Runge-Kutta-Fehlberg, com valor inicial do passo de integração $h = 0{,}1$.

$$\begin{cases} y' & = & -\frac{y}{2} \\ y(0) & = & 80 \end{cases}$$

Sabe-se que a forma geral da solução da equação é uma exponencial com expoente negativo, logo a temperatura deve decair rapidamente, até certo valor de t, aproximando-se de um valor limite a partir de então. Usando o método RKF45 com $t_1 = 30$ e $\delta = 10^{-3}$ e analisando os resultados obtidos, verifica-se que $y(22{,}9) \cong 0{,}00083127 < 0{,}001$.

2. Calcule $x(1)$ resolvendo o PVI

$$\begin{cases} x' & = & x^2 \\ x(0) & = & 1 \end{cases}$$

através dos métodos de Euler, de Heum e de Runge-Kutta de quarta ordem. Utilize $h = 0{,}25$ e $h = 0{,}125$ para todos os métodos. O que se pode concluir quando se divide o passo de integração por dois?

A tabela a seguir mostra os resultados obtidos com os três métodos, para os dois passos de integração sugeridos:

h	Euler	Heum	RK4
0,25	3,651651652	9,795408406	32,82804613
0,125	5,360782190	18,12623264	65,60115854

A constatação imediata é que, dividindo-se o passo de integração por dois, o valor obtido por todos os métodos praticamente duplica. Observe que a solução exata é $x(t) = -\frac{1}{t-1}$ e, portanto, há uma descontinuidade em $t = 1$; apesar dos valores crescerem há medida que h diminui, eles ainda estão longe de capturar o comportamento assintótico em $t = 1$.

3. Determine $i(0{,}5)$ resolvendo o PVI

$$\begin{cases} 3i' + 15i & = & 110 \\ i(0) & = & 0 \end{cases}$$

tomando $h = 0{,}1$ e usando os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e de Adams-Moulton/Adams-Bashforth de quarta ordem. Compare as respostas com o valor da solução exata, $i(t) = {}^{22}/_{3} - {}^{22}/_{3}\, e^{-5t}$.

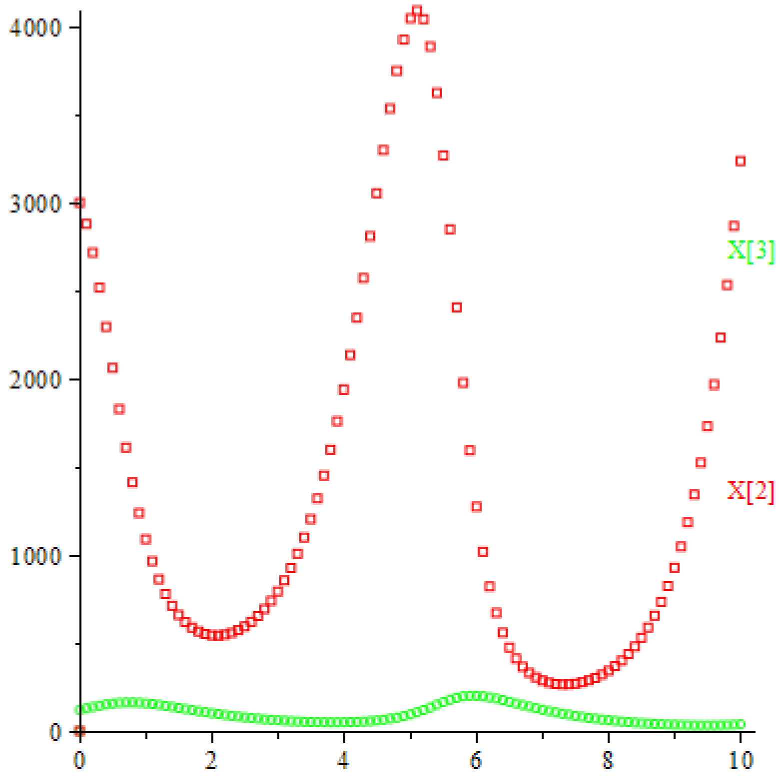
A solução exata nos fornece $i(0{,}5) = 6{,}73137668$*. O valor de* $i(0{,}5)$ *calculado através do método RK4 é* $6{,}730183921$ *e através do método AMAB4 é* $7{,}030960649$*. Os erros relativos das soluções fornecidas pelos métodos são, respectivamente,* $0{,}0001771936199$ *e* $0{,}04450560210$*, o que indica que a solução pelo método RK4 é mais adequada.*

4. Determine o tamanho das populações x (presa) e y (predador) em $t = 10$, resolvendo o PVI

$$\begin{cases} x' &= 2x - 0{,}02xy \\ y' &= 0{,}0005xy - 0{,}8y \\ x(0) &= 3000 \\ y(0) &= 120 \end{cases}$$

através do método de Euler com $h = 0{,}1$.

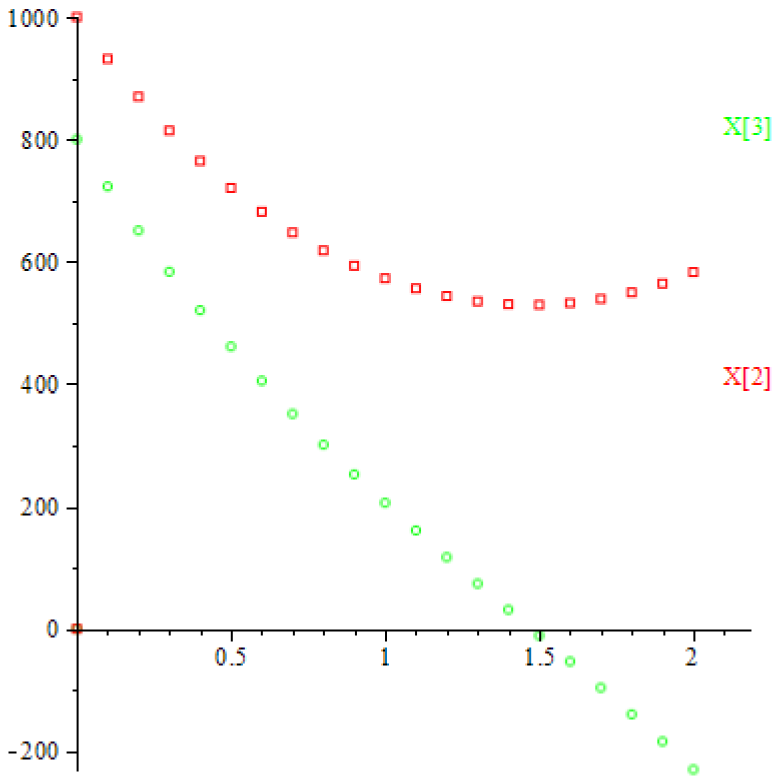
O método de Euler nos fornece os valores $x(10) = 3237{,}314176$ *e* $y(10) = 37{,}789898$*; é importante notar, no entanto, que as populações oscilam ao longo do intervalo* $0 \leq t \leq 10$*, como mostra o gráfico a seguir:*



5. Determine o valor de t para o qual $y(t) = 0$, resolvendo o PVI abaixo através do método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h = 0{,}1$.

$$\begin{cases} x' &= -0{,}9y \\ y' &= -0{,}8x \\ x(0) &= 1000 \\ y(0) &= 800 \end{cases}$$

Usando o método RK4 com $h = 0{,}1$ *com tempo final* $t = 2$ *e plotando-se os pontos obtidos, verifica-se que logo antes de* $t = 1{,}5$ *os valores de* y *(plotados em verde) passam a ser negativos:*



Para se determinar o valor de t para o qual y(t)=0, calcula-se a intersecção da reta entre os pontos $(1{,}4; y(1{,}4))$ *e* $(1{,}5; y(1{,}5))$ *com o eixo t, resultando em* $t = 1{,}470707831$.

6. A posição de um corpo em movimento é dada por

$$\begin{cases} x' &= v(t) \\ x(2) &= 4 \end{cases}$$

com $v(t) = \begin{cases} 2t, & 1 \leq t \leq 5 \\ 5t^2 + 3, & 5 < t \leq 14 \end{cases}$, onde t é dado em s e a velocidade em m/s. Calcule a posição do corpo em $t = 9$, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com $h = 0{,}025$. Compare com o resultado obtido com o exercício nº 5 da Lista de Exercícios nº 5 – Integração Numérica.

Utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $h = 0{,}025$*, obtemos* $x(9) = 1043{,}17501\ m$*, o que equivale a dizer que a distância percorrida foi de* $x(9) - x(2) = 1039{,}17501\ m$*.*

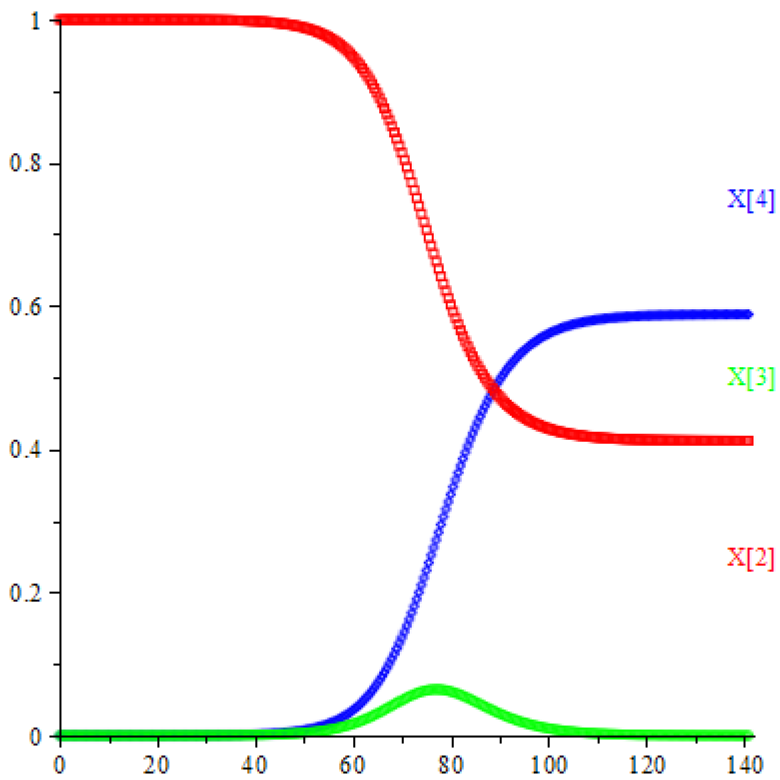
A distância obtida através da integração numérica por Simpson da função $v(t)$ *é* $1039{,}665387$ *m; o erro relativo entre ambas soluções é de* $4{,}71668 \times 10^{-4}$*, o que pode ser considerado aceitável. Uma maior exatidão pode ser obtida reduzindo-se o valor do passo de integração no método de Runge-Kutta (por exemplo, com* $h = 0{,}0015625$*, obtemos* $x(9) = 1043{,}635928$*).*

7. O espalhamento de uma doença causada por um vírus pode ser estudado através do modelo SIR, que combina equações para indivíduos *suscetíveis*, *infectados* e *removidos* (i.e, os que morreram, que se encontram em isolamento, ou que adquiriram imunidade). Para modelar a epidemia de influenza causada pelo vírus de Hong Kong em Nova Iorque, ao final dos anos 1960, o modelo SIR pode ser expresso como:

$$\begin{cases} S' &= -aSI \\ I' &= -bI + aSI \\ R' &= bI \\ S(0) &= 1 \\ I(0) &= 1{,}27 \times 10^{-6} \\ R(0) &= 0 \end{cases}$$

onde $a = {}^{1}\!/_{2}$ indica que o contágio se dava possivelmente a cada dois dias e $b = {}^{1}\!/_{3}$ indica que o período de infecciosidade é de três dias. As condições iniciais pressupõem que todos eram suscetíveis; que havia 10 indivíduos (dentro da população total de 7.900.000 pessoas) com algum traço de infecção; e que ninguém foi removido ainda, respectivamente. Determine, então os valores de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ após $t = 140$ dias, usando o método de Euler com um passo de integração apropriado e verifique para qual valor de t obtém-se o pico de infecção, calculando a quantidade correspondente de indivíduos infectados.

Escolhendo como tempo final $t = 141$ *e* $h = 0{,}5$ *no método de Euler, obtemos como valores finais:* $S(t) = 0{,}4120358831$*,* $I(t) = 0{,}00004869195344$ *e* $R(t) = 0{,}5879166946$*. O gráfico abaixo mostra as curvas para as funções* $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ *(em vermelho, verde e azul, respectivamente); observa-se o comportamento do pico da infecção em* $t = 74$*, para o qual* $I(t) = 0{,}0613049486$*; isso corresponde a* 484.309 *pessoas infectadas.*



8. A ativação das moléculas de um certo tipo depende da quantidade de colisões entre as moléculas. Seja $a(t)$ a quantidade de moléculas não-ativadas por unidade de volume, e $b(t)$ a de moléculas ativadas. A ativação depende da colisão entre moléculas não-ativadas, logo ela é proporcional a $a^2(t)$; a desativação envolve colisões entre moléculas ativadas e não-ativadas, sendo proporcional a $a(t)b(t)$. As equações abaixo representam tal modelagem:

$$\begin{cases} a' & = & -ka^2 + rab \\ b' & = & ka^2 - rab - db \end{cases}$$

Utilizando $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $k = 0{,}2$ e $r = 0{,}1$, investigue o que ocorre quando $d = 0$ e $d = 0{,}1$.

Utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com $h = 0{,}1$*, verifica-se que as quantidades* a *e* b *tendem a se estabilizar quando* $d = 0$*, com* $a(100) \cong 0{,}3333$ *e* $b(100) \cong 0{,}6666$*. Já quando* $d = 0{,}1$*, obtemos* $a(400) \cong 0{,}0133$ *e* $b(400) \cong 0{,}0004$*, sem que as mesmas se estabilizem.*

9. O movimento de um pêndulo simples, composto por uma esfera de massa m, pendendo de um fio de comprimento l, fixado numa das extremidades, é dado por

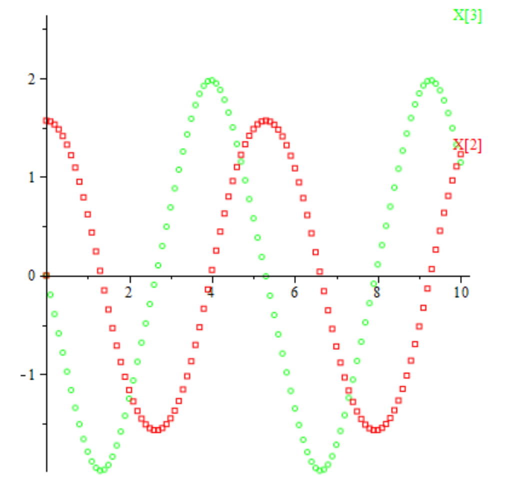
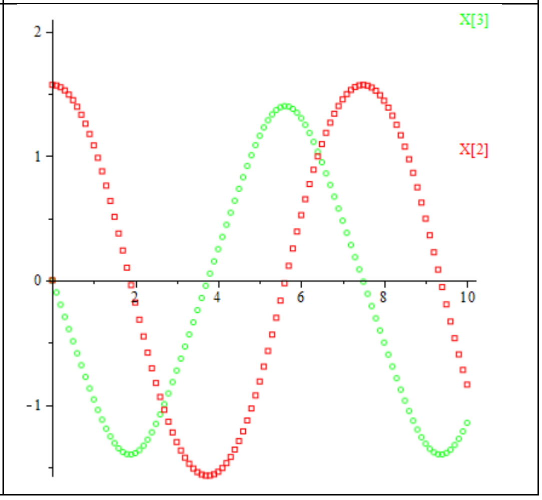
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

onde θ é o ângulo formado a qualquer momento t entre o fio e o eixo vertical que passa pelo ponto de fixação do mesmo e g é a aceleração da gravidade. Examine como θ se comporta em $0 \leq t \leq 10$ para dois pêndulos com $l = 5$ e $l = 10$; considere que inicialmente os mesmos estão esticados, com $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$.

Inicialmente, deve-se converter a EDO de segunda ordem num sistema de EDOs. Introduzindo as variáveis $y_1 = \theta, y_2 = y_1'$, vem:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\dfrac{g}{l}\sin y_1 \end{cases}$$

e, como se considera que inicialmente os pêndulos estão esticados, formando um ângulo de 90° com a vertical, as condições iniciais são: $y_1 = \frac{\pi}{2}, y_2 = 0$. Resolvendo esse sistema para $l = 5$ e $l = 10$, usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $h = 0{,}1$, obtemos os seguintes gráficos:

$l = 5$	$l = 10$
	

Observa-se, imediatamente, que tanto o ângulo como a sua derivada oscilam periodicamente ao longo do tempo e que, no segundo caso, o período é menor.

10. O movimento de uma bomba lançada de um avião com aceleração gravitacional constante e resistência do ar proporcional ao quadrado da sua velocidade, no plano $x - z$ (com o eixo z apontando verticalmente para cima), pode ser expresso pelo seguinte conjunto de equações:

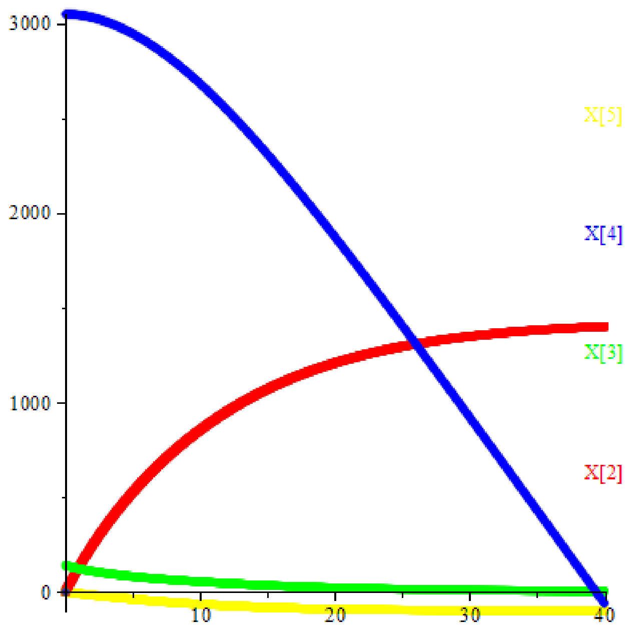
$$\begin{cases} v &= \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} &= -kv\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} &= -kv\dfrac{dz}{dt} - g \end{cases}$$

onde k é uma constante que mede a resistência do ar e $g = 9{,}80665\ {}^{m}/_{s^2}$. Calcule o valor de t para o qual $z(t) = 0$, determinando o alcance da bomba, i.e. o deslocamento $x(t)$. Utilize $k = 0{,}001$ e considere que o lançamento da bomba é feito em voo nivelado, a uma velocidade de $500\ km/h$ ($\cong 138{,}88\ m/s$) e altitude de 10.000 pés (3048 m).

Inicialmente, deve-se transformar esse sistema de EDOs de 2ª ordem para um sistema de EDOs de 1ª ordem. Introduzindo as variáveis $y_1 = x, y_2 = x', y_3 = z, y_4 = z'$, obtemos

$$\begin{cases} v & = & \sqrt{{y_2}^2 + {y_4}^2} \\ {y_1}' & = & y_2 \\ {y_2}' & = & -kvy_2 \\ {y_3}' & = & y_4 \\ {y_4}' & = & -kvy_4 - g \end{cases}$$

De acordo com o enunciado do problema, os valores iniciais para as variáveis do sistema acima são: $y_1 = 0, y_2 = 138{,}88, y_3 = 3048, y_4 = 0$. *Utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com h=0,025 e* $t_1 = 40$, *obtemos o seguinte gráfico:*



Inspecionando os resultados obtidos com a simulação, vemos que em $t = 39{,}35$, $y_3 = z = 1.0384542$ *e em* $t = 39{,}375$, *temos* $y_3 = z = -1.4202431$. *Calculando a equação da reta que passa pelos pontos* $(x, z) = (y_1, y_3)$ *nesses dois valores de* t, *podemos calcular a intersecção da reta com o eixo* $z = 0$, *obtendo o alcance* $x = 1398{,}574343\ m$. *Para se determinar o tempo de impacto com o solo, calcula-se o problema de interpolação linear com os pares* (t, z) *e, calculando-se a intersecção com o eixo* $z = 0$, *obtém-se* $t = 39{,}36051622$.

11. A altitude e a velocidade alcançadas por um foguete de um estágio podem ser modeladas pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} z'(t) & = & v(t) \\ v'(t) & = & c\dfrac{\Delta m}{m(t)} + g\dfrac{R^2}{\left(R + z(t)\right)^2} - \dfrac{C_D}{2}\dfrac{A\rho\left(z(t)\right)}{m(t)}v^2(t) \end{cases}$$

onde $c = I_{sp}g$, $\Delta m = -\frac{m_0 - m_{bo}}{t_{bo}}$, $m(t) = \left(1 - \frac{t}{t_{bo}}\right)m_0 + \frac{t}{t_{bo}}m_{bo}$ e $\rho(h) = 1{,}225e^{-0{,}1385h}$; I_{sp} é o impulso específico do motor do foguete (medido em segundos), g é a aceleração da gravidade, m_0 é a massa inicial do foguete (incluindo o propelente, em kg), m_{bo} é a massa do foguete (em kg) quando todo o propelente foi consumido (no tempo t_{bo}), $R = 6{,}378 \times 10^6 m$ é o raio da Terra, C_D é o coeficiente de arrasto, A é a área da seção transversal do foguete e $\rho(h)$ é a densidade do ar em função da altitude h (fórmula válida para $h < 100$ km).

Observe, pelas equações, que a velocidade deve aumentar ao longo do tempo, já que: a massa do foguete diminui, à medida que o propelente vai sendo queimado; o efeito da atração gravitacional da Terra diminui, à medida que o foguete se afasta da superfície da Terra; e, da mesma forma, a densidade do ar diminui.

Calcule a altitude e a velocidade após $t = t_{bo}$ segundos de voo de um foguete, alcançadas para os dois casos abaixo:

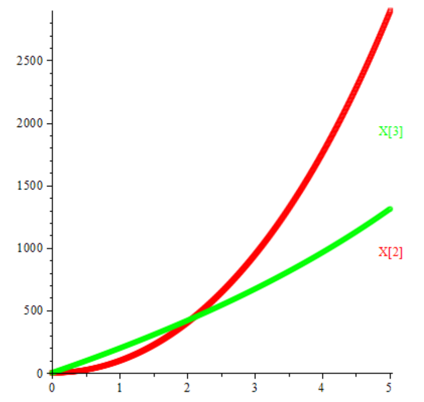
a) $m_0 = 500\ \text{kg}, m_{bo} = 250\ \text{kg}, t_{bo} = 5\ \text{s},\ I_{sp} = 50\ \text{s}, C_D = 1, A = 1\ \text{m}^2$
b) $m_0 = 500\ \text{kg}, m_{bo} = 125\ \text{kg}, t_{bo} = 5\ \text{s},\ I_{sp} = 50\ \text{s}, C_D = 1, A = 1\ \text{m}^2$

O que se pode concluir?

Usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com h=0,01, obtemos: a) $z(4{,}9999) = 2.897{,}7536\ \text{m}$ *e* $v(4{,}9999) = 1.310{,}6032\ \text{m/s}$ *; b)* $z(4{,}9999) = 5.176{,}6672\ \text{m}$ *e* $v(49{,}9999) = 2.671{,}3062\ \text{m/s}$*. Pode-se concluir que, diminuindo-se pela metade a massa do foguete após a queima do propelente, consegue-se alcançar aproximadamente o dobro de altitude e de velocidade até* $t = t_{bo}$*.*

Os gráficos abaixo ilustram as duas situações:

a)



b)