UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
CÁLCULO NUMÉRICO
PROF. RESPONSÁVEL: RUDNEI DIAS DA CUNHA

LISTA DE EXERCÍCIOS – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. Calcule $\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$ usando a aproximação $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1)\right]$. Compare o valor obtido com a solução exata, calculando o erro relativo.

   Pela aproximação, o valor da integral é 0,6931746032*. A solução exata da integral é* ln(t+1)+C*, e o valor da integral definida é* 0,6931471806*. O erro relativo é* $3{,}956244903\times10^{-5}$*.*

2. Dada a tabela abaixo para a função e^x, calcule $\int_1^2 xe^x dx$, utilizando o polinômio interpolador de Newton para aproximar e^x. Comente o resultado, comparando com o valor exato.

x	1	1,1	1,2
e^x	2,718	3,004	3,320

   O polinômio interpolador de Newton, com seus termos rearranjados, é $1{,}508 - 0{,}29x + 1{,}5x^2$*. A solução exata é* $\int_1^2 xe^x dx = 7{,}389056099$*.*

   Calculando a integral usando a regra do trapézio, obtemos como solução $\int_1^2 xe^x dx \approx 1{,}35900$*, e um erro relativo de* 0,8160793501*. Já a regra de Simpson nos dá como solução* $\int_1^2 xe^x dx \approx 7{,}210333333$ *e um erro relativo de* 0,02418749616.

3. Calcule $\int_1^{10} \frac{\ln x}{e^x} dx$ usando a regra simples de Simpson e a regra composta de Simpson com quatro nós.

   A regra simples de Simpson nos dá como resposta 0,04195830067 e a regra composta de Simpson com quatro nós, 0,1502791032; ambas as respostas não são boas aproximações para a integral acima, já que o valor exato da mesma é 0,2192752402. Os erros relativos são, respectivamente, 0,8086500753 e 0,3146553935. Note que tal situação pode ser remediada utilizando-se aproximações de maior ordem e subdividindo o intervalo de aplicação das mesmas, de forma a se capturar de forma mais precisa o perfil da área sob a curva, a qual apresenta um pico na porção inicial do intervalo de integração, decaindo exponencialmente após o mesmo.

4. Sabendo que a área da seção transversal de uma esfera de raio R é $A(x) = \pi(R^2 - x^2)$, calcule o volume $V = 2\int_0^R A(x)\,dx$, para $R = 10$, usando a regra de Simpson. Compare com a solução exata, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

   A regra de Simpson nos fornece o valor V=4188,790204, o qual é exato numericamente.

5. A velocidade de um corpo é dada por $v(t) = \begin{cases} 2t, & 1 \leq t \leq 5 \\ 5t^2 + 3, & 5 < t \leq 14 \end{cases}$, onde t é dado em s e a velocidade em m/s. Calcule a distância percorrida pelo corpo para $2 \leq t \leq 9$, utilizando a regra composta de Simpson com cinco nós.

Como $dx = v\,dt$, integrando dos dois lados da equação e particularizando para o problema em questão, temos $\int_2^9 dx = \int_2^5 2t\,dt + \int_{5+h}^9 (5t^2 + 3)\,dt$. O valor de h a ser utilizado deve ser suficientemente pequeno numericamente. Escolhendo h=10^{-5}, obtemos, com a regra de Simpson, $\int_{5+h}^9 (5t^2 + 3)\,dt$ =1018,665387, de onde a distância total percorrida é 21+1018,665387=1039,665387 m.

6. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ usando as regras compostas do trapézio e de Simpson, com cinco nós.

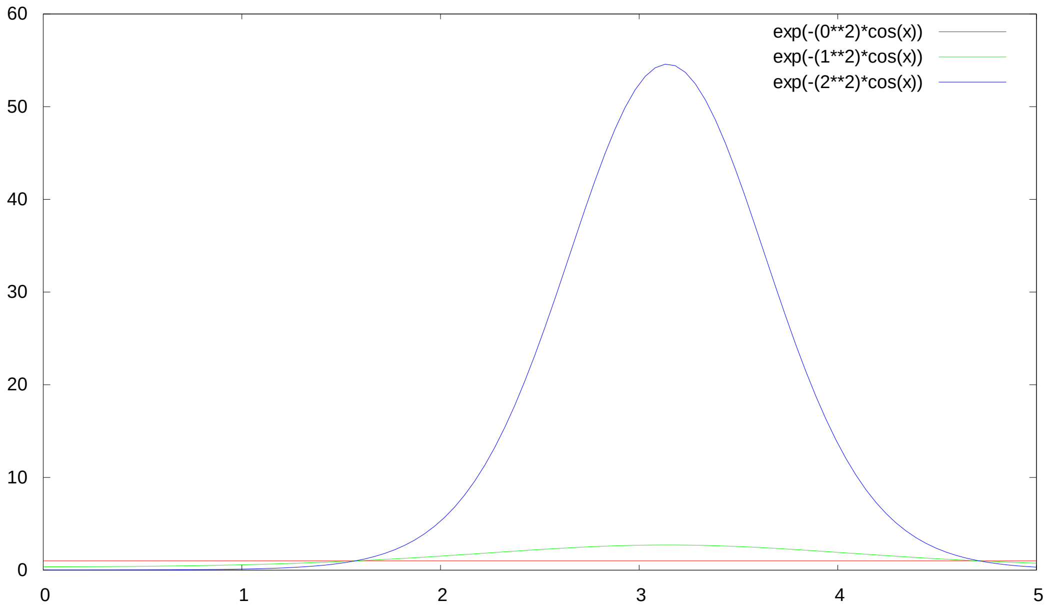
Para as regras compostas do trapézio e de Simpson, e usando os nós (0; 0,3141593; 0,3926991; 0,7853982; 1,570796), obtemos os valores 0,8307714 e 1,001285 para a integral, respectivamente.

Para as regras compostas uniformes do trapézio e de Simpson, com cinco nós, obtemos os valores 0,9917618 e 0,6961462 para a integral, respectivamente.

Observe que o último valor obtido apresenta um erro muito elevado em comparação ao valor exato da integral.

7. Calcule $F(b) = \int_0^5 e^{-b^2 \cos x}\,dx, 0 \leq b \leq 5$ usando a quadratura de Gauss-Legendre com n=4. Comente o resultado.

Observe que à medida que b cresce, a curva da função apresenta um pico bastante pronunciado:



Plotando os gráficos individualmente para cada valor de b, vemos que, para b>0, a regra composta de Simpson, com 10 nós, deverá apresentar um maior número de nós no intervalo [1;5].

Usando, por exemplo, os nós (0; 1,25; 1,75; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5) para a regra composta de Simpson, obtemos os seguintes valores para a integral:

b	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F(b)	*5,000000*	*7,332692*	*70,921390*	*6871,250000*	*5619771,000000*	$3{,}649575 \times 10^{10}$

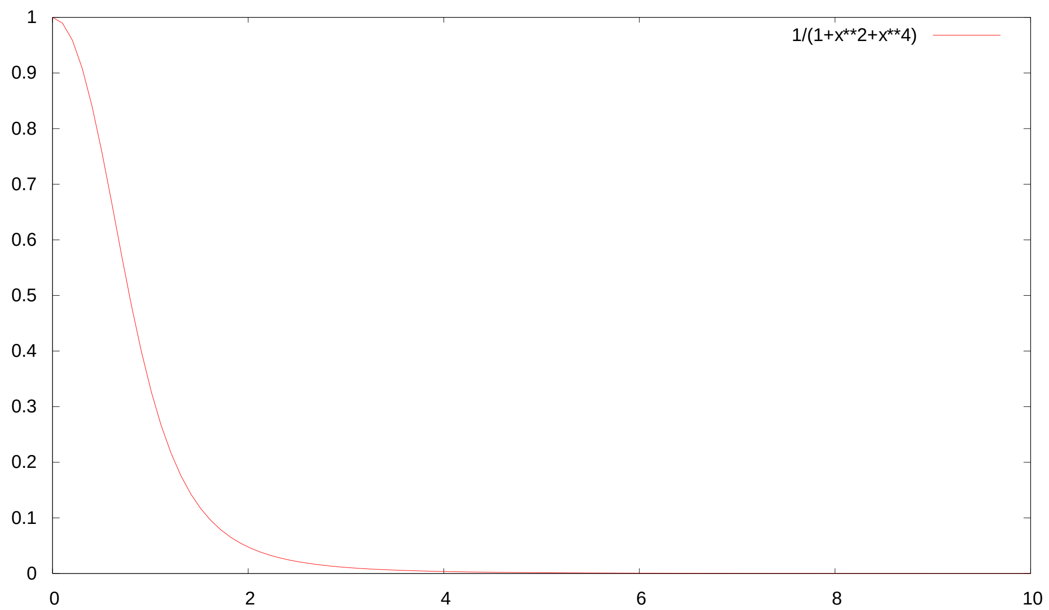
Usando a quadratura de Gauss-Legendre com n=4, obtemos os seguintes valores para a integral:

b	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
F(b)	*5,000000*	*7,364196*	*84,998840*	*10878,980000*	$1{,}024958 \times 10^{7}$	6.836244×10^{10}

Observe que apenas para b=0 e b=1 obtemos valores semelhantes para ambas as aproximações da integral, devido à essa escolha particular dos nós. A regra composta de Simpson poderá apresentar valores mais adequados se o número de nós for aumentado à medida que b cresce.

8. Calcule $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+x^4}$ com a quadratura de Gauss-Legendre (n=5).

Observe o gráfico abaixo e que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4} = 0$ *; logo, devemos determinar um valor de x para a partir do qual a integral possa ser aproximada por uma constante.*



Por exemplo, usando um programa em Fortran 90 com precisão simples, obtemos a seguinte tabela de valores:

x	*5,0*	*10,0*	*100,0*	*1000,0*
$(1+x^2+x^4)^{-1}$	$1{,}536098 \times 10^{-3}$	$9{,}900010 \times 10^{-5}$	$9{,}999000 \times 10^{-9}$	$9{,}999990 \times 10^{-13}$

Podemos, então, dizer que a área sob a curva, a partir de x=100, é praticamente nula, o que nos leva a supor que basta usar um limite superior de integração para o qual seja suficientemente grande o valor numérico do integrando. A tabela a seguir mostra os valores da integral substituindo o limite superior de integração por b:

b	5,0	10,0	100,0	1000,0
$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2+x^4}$	$8{,}883142\times10^{-1}$	1,008083	$2{,}344367\times10^{-2}$	$2{,}454222\times10^{-5}$

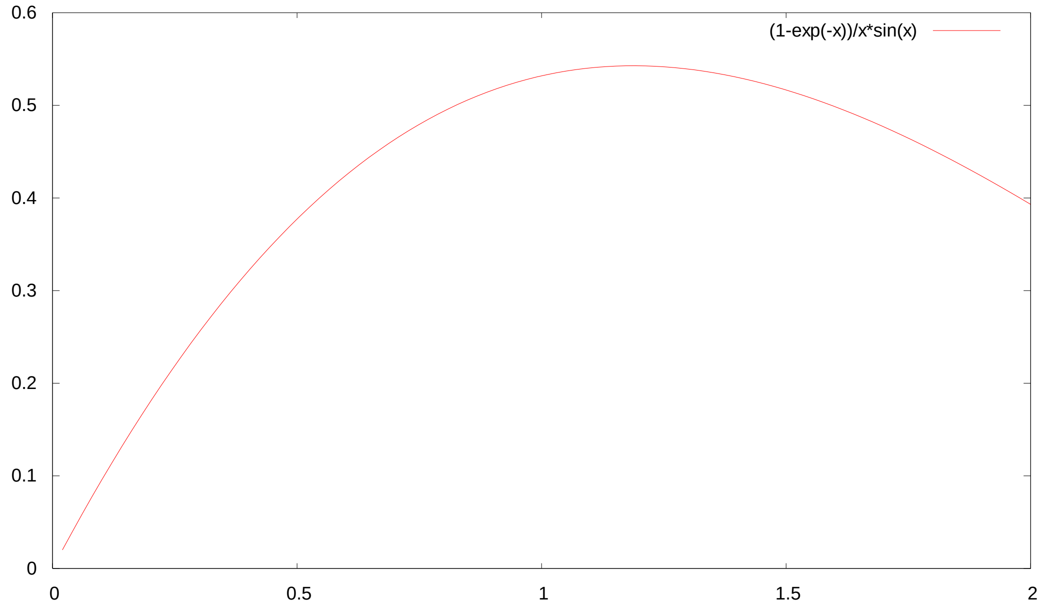
Os valores acima indicam que "alguma coisa" está errada! O valor da integral não pode diminuir, já que o integrando é estritamente positivo para x≥0. Por outro lado, a área deve ser um valor menor do que 1; logo, pela tabela acima, vemos que para x=10, o valor obtido com a quadratura de Gauss-Legendre, com 5 nós, não é adequado. Calculando o valor da quadratura para outros valores de b, menores do que 10, obtemos:

b	6,0	7,0	8,0	9,0
$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2+x^4}$	$8{,}950242\times10^{-1}$	9.160779×10^{-1}	9.459078×10^{-1}	9.782140×10^{-1}

O problema, agora, é que não sabemos qual valor considerar como uma boa aproximação! Infelizmente, o número de nós é que é insuficiente. Se usarmos n=32, obtemos o valor $9{,}065673\times10^{-1}$ como aproximação da integral, usando b=10; esse valor apresenta um erro relativo da ordem de 10^{-6} para o valor da integral. Valores maiores de n propiciarão um menor erro relativo – experimente!

9. Calcule $I = \int_0^x \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) \sin t \, dt$ para x=0,2; 0,3; 0,4; ...; 1,9; 2,0.

O gráfico da curva é



Veja que o integrando se anula em x=0 (apesar de haver uma indeterminação nesse ponto). Evidentemente que a função integranda deve ser codificada em Fortran 90 tomando-se cuidado para não haver divisão por zero. Os valores obtidos para a integral usando-se a quadratura de Gauss-Legendre com n=5 são:

```
x=   2.000000E-01 quadratura_gaussiana: I=   1.866922E-02
x=   3.000000E-01 quadratura_gaussiana: I=   4.051895E-02
x=   4.000000E-01 quadratura_gaussiana: I=   6.941141E-02
x=   5.000000E-01 quadratura_gaussiana: I=   1.043997E-01
x=   6.000000E-01 quadratura_gaussiana: I=   1.445671E-01
x=   7.000000E-01 quadratura_gaussiana: I=   1.890323E-01
x=   8.000001E-01 quadratura_gaussiana: I=   2.369530E-01
x=   9.000001E-01 quadratura_gaussiana: I=   2.875300E-01
x=       1.000000 quadratura_gaussiana: I=   3.400095E-01
x=       1.100000 quadratura_gaussiana: I=   3.936849E-01
x=       1.200000 quadratura_gaussiana: I=   4.478986E-01
x=       1.300000 quadratura_gaussiana: I=   5.020431E-01
x=       1.400000 quadratura_gaussiana: I=   5.555610E-01
x=       1.500000 quadratura_gaussiana: I=   6.079456E-01
x=       1.600000 quadratura_gaussiana: I=   6.587404E-01
x=       1.700000 quadratura_gaussiana: I=   7.075387E-01
x=       1.800000 quadratura_gaussiana: I=   7.539827E-01
x=       1.900000 quadratura_gaussiana: I=   7.977623E-01
x=       2.000000 quadratura_gaussiana: I=   8.386143E-01
```

10. Sugira uma mudança de variável adequada para o cálculo da integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e, após, obtenha o valor da integral usando a regra composta de Simpson com quatro nós.

Como $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}$*, podemos resolver por partes a integral acima, escrevendo* $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin x \arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos x \arcsin x\, dx$ *; com isso, removemos a indeterminação em x=0. Daí, podemos usar a regra composta de Simpson com 4 nós para a integral* $\int_0^1 \cos x \arcsin x\, dx$*, de onde* $\sin x \arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos x \arcsin x\, dx = 8{,}940674\times10^{-1}$*.*