



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2024/25)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G2

a104356 João d'Araújo Dias Lobo
a90817 Mariana Rocha Cristino
a104439 Rita da Cunha Camacho

Preâmbulo

Em [Cálculo de Programas](#) pretende-se ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em [Haskell](#) (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em [Haskell](#). Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo ?? onde encontrarão as instruções relativas ao *software* a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação '*H-index of a Histogram*' e que se formula facilmente:

O h-index de um histograma é o maior número n de barras do histograma cuja altura é maior ou igual a n .

Por exemplo, o histograma

$$h = [5, 2, 7, 1, 8, 6, 4, 9]$$

que se mostra na figura



tem *hindex* $h = 5$ pois há 5 colunas maiores que 5. (Não é 6 pois maiores ou iguais que seis só há quatro.)

Pretende-se definida como um catamorfismo, anamorfismo ou hilomorfismo uma função em Haskell

$$\text{hindex} :: [Int] \rightarrow (Int, [Int])$$

tal que, para $(i, x) = \text{hindex } h$, i é o H-index de h e x é a lista de colunas de h que para ele contribuem.

A proposta de *hindex* deverá vir acompanhada de um **diagrama** ilustrativo.

Problema 2

Pelo [teorema fundamental da aritmética](#), todo número inteiro positivo tem uma única factorização prima. Por exemplo,

```
primes 455
[5,7,13]
primes 433
[433]
primes 230
[2,5,23]
```

1. Implemente como anamorfismo de listas a função

$$\text{primes} :: \mathbb{Z} \rightarrow [\mathbb{Z}]$$

que deverá, recebendo um número inteiro positivo, devolver a respectiva lista de factores primos.

A proposta de *primes* deverá vir acompanhada de um **diagrama** ilustrativo.

2. A figura mostra a “*árvore dos primos*” dos números [455, 669, 6645, 34, 12, 2].



Com base na alínea anterior, implemente uma função em Haskell que faça a geração de uma tal árvore a partir de uma lista de inteiros:

$$\text{prime_tree} :: [\mathbb{Z}] \rightarrow \text{Exp } \mathbb{Z} \ \mathbb{Z}$$

Sugestão: escreva o mínimo de código possível em *prime_tree* investigando cuidadosamente que funções disponíveis nas bibliotecas que são dadas podem ser reutilizadas.¹

Problema 3

A convolução $a \star b$ de duas listas a e b — uma operação relevante em computação — está muito bem explicada [neste vídeo](#) do canal **3Blue1Brown** do YouTube, a partir de $t = 6 : 30$. Aí se mostra como, por exemplo:

¹ Pense sempre na sua produtividade quando está a programar — essa atitude será valorizada por qualquer empregador que vier a ter.

$$[1, 2, 3] \star [4, 5, 6] = [4, 13, 28, 27, 18]$$

A solução abaixo, proposta pelo chatGPT,

```
convolve :: Num a => [a] -> [a] -> [a]
convolve xs ys = [sum $ zipWith (*) (take n (drop i xs)) ys | i <- [0..(length xs - n)]]
  where n = length ys
```

está manifestamente errada, pois $\text{convolve } [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [32]$ (!).

Proponha, explicando-a devidamente, uma solução sua para *convolve*. Valorizar-se-á a economia de código e o recurso aos combinadores *pointfree* estudados na disciplina, em particular a triologia *ana-cata-hilo* de tipos disponíveis nas bibliotecas dadas ou a definir.

Problema 4

Considere-se a seguinte sintaxe (abstrata e simplificada) para **expressões numéricas** (em *b*) com variáveis (em *a*),

```
data Expr b a = V a | N b | T Op [Expr b a] deriving (Show, Eq)
data Op = ITE | Add | Mul | Suc deriving (Show, Eq)
```

possivelmente condicionais (cf. *ITE*, i.e. o operador condicional “if-then-else”). Por exemplo, a árvore mostrada a seguir



representa a expressão

$$\text{ite } (V \text{ "x"}) (N \ 0) (\text{multi } (V \text{ "y"}) (\text{soma } (N \ 3) (V \text{ "y"}))) \quad (1)$$

– i.e. **if** *x* **then** 0 **else** *y* * (3 + *y*) – assumindo as “helper functions”:

```
soma x y = T Add [x, y]
multi x y = T Mul [x, y]
ite x y z = T ITE [x, y, z]
```

No anexo ?? propõe-se uma base para o tipo *Expr* (*baseExpr*) e a correspondente algebra *inExpr* para construção do tipo *Expr*.

1. Complete as restantes definições da biblioteca *Expr* pedidas no anexo ??.
2. No mesmo anexo, declare *Expr b* como instância da classe *Monad*. **Sugestão:** relembre os exercícios da ficha 12.

3. Defina como um catamorfismo de *Expr* a sua versão monádica, que deverá ter o tipo:

$$mcataExpr :: Monad\ m \Rightarrow (a + (b + (Op, m\ [c])) \rightarrow m\ c) \rightarrow Expr\ b\ a \rightarrow m\ c$$

4. Para se avaliar uma expressão é preciso que todas as suas variáveis estejam instanciadas. Complete a definição da função

$$let_exp :: (Num\ c) \Rightarrow (a \rightarrow Expr\ c\ b) \rightarrow Expr\ c\ a \rightarrow Expr\ c\ b$$

que, dada uma expressão com variáveis em *a* e uma função que a cada uma dessas variáveis atribui uma expressão (*a* \rightarrow *Expr* *c* *b*), faz a correspondente substituição.² Por exemplo, dada

$$\begin{aligned} f\ "x" &= N\ 0 \\ f\ "y" &= N\ 5 \\ f\ _ &= N\ 99 \end{aligned}$$

ter-se-á

$$let_exp\ f\ e = T\ ITE\ [N\ 1, N\ 0, T\ Mul\ [N\ 5, T\ Add\ [N\ 3, N\ 1]]]$$

isto é, a árvore da figura a seguir:



5. Finalmente, defina a função de avaliação de uma expressão, com tipo

$$evaluate :: (Num\ a, Ord\ a) \Rightarrow Expr\ a\ b \rightarrow Maybe\ a$$

que deverá ter em conta as seguintes situações de erro:

- (a) *Variáveis* — para ser avaliada, *x* em *evaluate* *x* não pode conter variáveis. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} evaluate\ e &= Nothing \\ evaluate\ (let_exp\ f\ e) &= Just\ 40 \end{aligned}$$

para *f* e *e* dadas acima.

- (b) *Aridades* — todas as ocorrências dos operadores deverão ter o devido número de sub-expressões, por exemplo:

$$\begin{aligned} evaluate\ (T\ Add\ [N\ 2, N\ 3]) &= Just\ 5 \\ evaluate\ (T\ Mul\ [N\ 2]) &= Nothing \end{aligned}$$

² Cf. expressões **let ... in...**

Sugestão: de novo se insiste na escrita do mínimo de código possível, tirando partido da riqueza estrutural do tipo *Expr* que é assunto desta questão. Sugere-se também o recurso a diagramas para explicar as soluções propostas.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “[literária](#)” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2425t.pdf` que está a ler é já um exemplo de [programação literária](#): foi gerado a partir do texto fonte `cp2425t.lhs`³ que encontrará no [material pedagógico](#) desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2425t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código [Haskell](#) que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do [GHCi](#), serão necessários os executáveis [pdflatex](#) e [lhs2TeX](#). Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do [Docker](#) tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do [container](#) cuja imagem é gerada pelo [Docker](#) a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2425t.zip`. Este [container](#) deverá ser usado na execução do [GHCi](#) e dos comandos relativos ao [L^AT_EX](#). (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

³ O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Após [instalar o Docker](#) e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2425t .  
$ docker run -v ${PWD}:/cp2425t -it cp2425t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o [GHCi](#) e os comandos relativos ao [L^AT_EX](#). Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2425t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2425t` no [container](#) sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no [container](#), executando:

```
$ lhs2TeX cp2425t.lhs > cp2425t.tex  
$ pdflatex cp2425t
```

[lhs2TeX](#) é o pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em [L^AT_EX](#) e que faz parte já do [container](#). Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2425t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2425t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2425t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}  
...  
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo ?? com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [Bib_TE_X](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2425t.aux  
$ makeindex cp2425t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no [container](#).)

No anexo ?? disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da [programação literária](#) para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo ?? que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte ([lhs](#)) do que está a ler⁴ onde se obtém o efeito seguinte:⁵

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

E Código fornecido

Problema 1

$h :: [Int]$

Problema 4

Definição do tipo:

$inExpr = [V, [N, \widehat{T}]]$
 $baseExpr\ g\ h\ f = g + (h + id \times \text{map}\ f)$

Exemplos de expressões:

$e = ite\ (V\ "x")\ (N\ 0)\ (multi\ (V\ "y")\ (soma\ (N\ 3)\ (V\ "y")))$
 $i = ite\ (V\ "x")\ (N\ 1)\ (multi\ (V\ "y")\ (soma\ (N\ (3 / 5))\ (V\ "y")))$

Exemplo de teste:

$teste = evaluate\ (let_exp\ f\ i) \equiv Just\ (26 / 245)$
where $f\ "x" = N\ 0; f\ "y" = N\ (1 / 7)$

⁴ Procure e.g. por "sec:diagramas".

⁵ Exemplos tirados de [?].

F Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

```

hindex = hyloBTree [f1,f2] qsep
f1 = 0, []
f2 :: (Int, ((Int, [Int]), (Int, [Int]))) → (Int, [Int])
f2 (n, ((-, ll), (-, lr))) = (hIndex, contributors)
  where
    list = lr ++ [n] ++ ll
    hIndex = myfoldr process 0 (zip [1..] list)
    process :: (Ord a) ⇒ ((a, a), a) → a
    process = cond ((≥) · swap · π1) (max · swap · (π1 × id)) π2
    contributors = filter (≥ hIndex) list

```

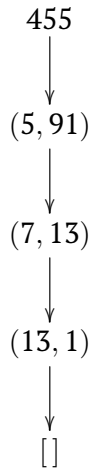
Problema 2

A função `primes` é responsável por criar a lista de fatores primos de um dado número. De modo que, esta função pode ser definida como um anamorfismo de listas (*List*). Assim, o diagrama que representa a operação é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & 1 + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\
 \llbracket g \rrbracket \downarrow & & \downarrow id + (id \times \llbracket g \rrbracket) \\
 \mathbb{Z}^* & \xrightleftharpoons[inList]{outList} & 1 + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*
 \end{array}$$

A implementação baseia-se em decompor o número repetidamente no seu menor fator primo, este processo repete-se até que o quociente resultante seja 1.

O processo pode ser representado graficamente como se segue para o número 455:



Assim, $\text{primes } 455 = [5, 7, 13]$.

A definição de *primes* como $\llbracket g \rrbracket$ tira partido de que um anamorfismo constrói uma estrutura recursiva ao aplicar sucessivamente o gene g a um valor inicial. O gene g determina como cada passo da construção ocorre, neste caso g divide o número n no seu menor fator primo (calculado pela função *smallestPrimeFactor*) e no quociente resultante após a divisão. O processo termina quando $n = 1$, porque não existem mais fatores primos para serem determinados.

A função *smallestPrimeFactor* é responsável por determinar o menor fator primo de um número n , e é definida como um catamorfismo de naturais (*catNat*). Esta função aplica sucessivamente a lógica de "testar se um divisor d divide n " para valores d crescentes, assim inicia com o menor número primo (2).

O ciclo-for contém uma estrutura recursiva que verifica duas condições:

1. **Teste de primalidade:** Se $d^2 > n$: Nesse caso, n é primo e o seu menor fator primo é ele mesmo (o processo termina).

2. **Encontrar o menor fator primo:** Se $n \bmod d = 0$: Nesse caso, d é o menor fator primo de n .

Caso contrário: Incrementámos d e continuámos o processo.

Fundamentação matemática: A implementação baseia-se no Teorema Fundamental da Aritmética, que garante que todo o número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto de forma única como um produto de fatores primos. O processo descrito no gene g utiliza esta propriedade para decompor iterativamente o n nos seus fatores primos, onde a divisibilidade é verificada e avançamos na procura do menor fator primo.

Primeira parte:

$$\begin{aligned}
 \text{smallestPrimeFactor } x &= \text{for } \lambda n \rightarrow \text{cond } ((\widehat{>}) \cdot ((\uparrow 2) \times \text{id})) \pi_2 \\
 &\quad (\text{cond } ((\equiv 0) \cdot \widehat{\text{mod}} \cdot \text{swap}) \pi_1 (\text{succ} \cdot \pi_1)) (n, x) \ 2 \ x \\
 g \ 1 &= i_1 \ () \\
 g \ n &= i_2 \ (\text{smallestPrimeFactor } n, n \div \text{smallestPrimeFactor } n) \\
 \text{primes} &= \llbracket g \rrbracket
 \end{aligned}$$

A função *prime_tree* é responsável por criar a árvore dos primos de uma lista de inteiros, como se encontra ilustrado no enunciado. De modo que, esta função pode ser definida da seguinte forma:

Segunda parte:

$$\text{prime_tree} = \text{Term } 1 \cdot \text{untar} \cdot \text{map } (\lambda n \rightarrow (\text{primes } n, n))$$

Inicialmente, adotamos uma abordagem extensiva para resolver o problema, com a definição de um hilomorfismo e todas as operações necessárias para construir a árvore. No entanto, durante este processo, reparámos na função *untar* da biblioteca *Exp.hs*, que efetua a operação necessária para transformar uma lista de pares numa estrutura do tipo $[Exp \ v \ o]$. Após compreendermos o comportamento e a definição da função *untar*, percebemos que era possível utilizá-la na construção da função *prime_tree*, o que simplificou a implementação.

Explicação da função *prime_tree*:

1. A função *primes* é aplicada a cada elemento da lista de inteiros e com o uso da expressão $\text{map } (\lambda n \rightarrow (\text{primes } n, n))$, obtemos uma lista de pares, onde o primeiro elemento é a lista de fatores primos de um número e o segundo elemento é o próprio número. Assim, no final da execução desta expressão, obtemos uma lista de pares do tipo $[[[Z], Z]]$.

2. Neste contexto, a função *untar* converte os fatores primos de um número e o próprio número numa representação de árvore onde os nós intermediários são os fatores e as folhas são os números originais, $[Exp \ Z \ Z]$. Esta conversão é realizada em três partes principais: a coalgebra, a base e a álgebra.

2.1. A coalgebra, representada pela função *c*, é responsável por decompor os dados, ou seja, separa os pares da lista inicial - $[[[Z], Z]]$ - e transforma cada elemento para o formato $Z + (Z, [[Z], Z])$.

2.1.1. O $\text{map } ((\pi_2 \text{ --!-- } \text{assocr}) \cdot \text{distl} \cdot (\text{outList} \times \text{id}))$ é aplicado a cada par da lista, onde:

- $\text{outList} \times \text{id}$ transforma a lista de fatores primos num tipo $\cdot + \cdot$ e retorna o número original. Permitindo tratar em separado os fatores primos e os números.
- *distl* distribui os elementos $(a, b) + \cdot$ para o tipo $(a + b, b)$, separa os dados para facilitar o processamento posterior.
- $\pi_2 \text{ --!-- } \text{assocr}$ reorganiza os pares para agrupar corretamente os fatores primos associados a um número.

2.1.2. *sep* percorre a lista de elementos $\cdot + \cdot$, e separa os elementos i_1 para o primeiro grupo e os i_2 para o segundo grupo.

2.1.3. $\text{id} \times \text{collect}$ aplica a função *id* ao primeiro valor do tuplo e *collect* ao segundo, de modo que a função *collect* é responsável por agrupar os fatores primos em listas separadas para cada número. Então, os números que partilham o mesmo fator primo são agrupados juntos.

2.1.4. *join* junta os valores numa lista única, recriando a estrutura necessária para representare os dados.

2.2. Após a coalgebra, avançamos para a base, esta aplica recursivamente a função *untar* a cada sublista e cria subárvores para cada conjunto de fatores. O tipo da função *base* é definido como:

$$\text{base} :: (Z \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow Z) \rightarrow ([([Z], Z)] \rightarrow [Exp \ Z \ Z]) \rightarrow [Z + (Z, [[Z], Z])] \rightarrow [Z + (Z, [Exp \ Z \ Z])].$$

2.3. Para finalizar, a álgebra *a* organiza os dados processados na estrutura final, a operação *sort* organiza os nós, enquanto que o *map inExp* converte os elementos numa estrutura do tipo $Exp \ Z \ Z$. O seu tipo, neste contexto, é definido como: $a :: [Z + (Z, [Exp \ Z \ Z])] \rightarrow [Exp \ Z \ Z]$.

3. Por fim, a função *Term 1* é aplicada para adicionar a raiz da árvore com o valor 1, isto conecta todas as subárvores criadas pela função *untar*, construindo uma única árvore que representa a decomposição de todos os números da lista.

Problema 3

$convolve :: Num\ a \Rightarrow [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$
 $convolve = \perp$

Problema 4

Definição do tipo:

$outExpr :: Expr\ b\ a \rightarrow a + (b + (Op, [Expr\ b\ a]))$
 $outExpr\ (V\ n) = i_1\ n$
 $outExpr\ (N\ n) = (i_2 \cdot i_1)\ n$
 $outExpr\ (T\ op\ exprs) = (i_2 \cdot i_2)\ (op, exprs)$
 $recExpr :: (a \rightarrow b1) \rightarrow b2 + (b3 + (b4, [a])) \rightarrow b2 + (b3 + (b4, [b1]))$
 $recExpr = baseExpr\ id\ id$

Ana + cata + hylo:

$cataExpr\ g = g \cdot recExpr\ (cataExpr\ g) \cdot outExpr$
 $anaExpr\ g = inExpr \cdot recExpr\ (anaExpr\ g) \cdot g$
 $hyloExpr\ h\ g = cataExpr\ h \cdot anaExpr\ g$

Monad:

Para declarar $Expr\ b$ como instância da classe *Monad*, foram implementadas as instâncias de *Functor*, *Applicative* e *Monad* do tipo $Expr\ b$. A abordagem utilizada foi guiada pelo exercício 4 da ficha 12, adaptando ao contexto específico de $Expr\ b$.

Começamos pelo *Functor*, onde a função *fmap* aplica uma transformação às variáveis da expressão, mantendo as restantes estruturas (*N* e *T*) inalteradas. Esta operação é realizada de forma recursiva usando o catamorfismo - *cataExpr* -, que reconstrói a expressão após aplicar a *f* às variáveis. A composição com a função *inExpr* e a base do catamorfismo (*baseExpr*) assegura que a estrutura é processada corretamente.

instance Functor (Expr b)
where $fmap\ f = cataExpr\ (inExpr \cdot baseExpr\ f\ id\ id)$

De seguida, definimos a instância *Applicative*, onde a função *pure* cria uma expressão com uma variável (*V*) com o valor fornecido, a função $\langle * \rangle$ considera três casos:

- se a expressão é uma variável ($V\ f$), aplica *fmap* para mapear função sobre a outra expressão;
- se a expressão é um número ($N\ b$), mantém o número inalterado;
- se a expressão é uma operação ($T\ op\ fs$), aplica a função a cada subexpressão da operação.

instance Applicative (Expr b) where
 $pure :: a \rightarrow Expr\ b\ a$
 $pure = V$
 $(V\ f) \langle * \rangle x = fmap\ f\ x$
 $(N\ b) \langle * \rangle _ = N\ b$
 $(T\ op\ fs) \langle * \rangle x = T\ op\ (map\ (\langle * \rangle x)\ fs)$

Por fim, a instância *Monad* foi definida, a definição *return* é equivalente a *pure*, cria uma variável. A operação \gg aplica a função *g* a cada variável da expressão, usando a função auxiliar *muExpr* para processar a expressão resultante.

```
instance Monad (Expr b) where
  return :: a → Expr b a
  return = pure
  (≫) :: Expr b a → (a → Expr b b1) → Expr b b1
  t ≫ g = muExpr (fmap g t)
  muExpr :: Expr b (Expr b a) → Expr b a
  muExpr = cataExpr [id, inExpr · i2]
  u :: a → Expr b a
  u = V
```

Provemos que *Expr b* é uma instância de *Monad*:

- $u = V$ e $V = \text{inExpr} \cdot i_1$, logo $u = \text{inExpr} \cdot i_1$;
- $\text{muExpr} = \text{cataExpr} [\text{id}, \text{inExpr} \cdot i_2]$.

Provar a lei monádica Unidade (63):

$$\begin{aligned}
& \text{mu} \cdot u = \text{mu} \cdot T u \\
\equiv & \quad \{ \text{definição de mu; definição de u} \} \\
& \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot \text{in} \cdot i_1 = \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot T u \\
\equiv & \quad \{ \text{absorção-cata} \} \\
& \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot \text{in} \cdot i_1 = \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \cdot B(u, \text{id}) \rrbracket \\
\equiv & \quad \{ B(f,g) = f + G g, \text{absorção-+}, \text{natural-id}, \text{functor-id-F} \} \\
& \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot \text{in} \cdot i_1 = \llbracket [u, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \\
\equiv & \quad \{ \text{definição de u, cancelamento-cata} \} \\
& [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \cdot F \text{mu} \cdot i_1 = \llbracket [\text{in} \cdot i_1, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \\
\equiv & \quad \{ \text{fusão-+}, \text{reflexão-+}, \text{reflexão-cata}, \text{base-cata}, B(\text{id}, \text{mu}) = \text{id} + G \text{mu} \} \\
& [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \cdot (\text{id} + G \text{mu}) \cdot i_1 = \text{id} \\
\equiv & \quad \{ \text{natural-i1}, \text{natural-id} \} \\
& [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \cdot i_1 = \text{id} \\
\equiv & \quad \{ \text{cancelamento-+} \} \\
& \text{id} = \text{id} \\
\equiv & \quad \{ \text{P.R.I.} \} \\
& \text{True} \\
& \square
\end{aligned}$$

Provar a lei monádica Multiplicação (62):

$$\begin{aligned}
& \text{mu} \cdot \text{mu} = \text{mu} \cdot T \text{mu} \\
\equiv & \quad \{ \text{definição de mu} \} \\
& \text{mu} \cdot \text{mu} = \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot T \llbracket [\text{id}, \text{in} \cdot i_2] \rrbracket
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{absorção-cata} \} \\
&\quad mu \cdot mu = \langle [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \cdot (\langle [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rangle + G id) \rangle \\
&\equiv \{ \text{Functor-id-F, natural-id, absorção-+} \} \\
&\quad mu \cdot mu = \langle \langle [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rangle, \mathbf{in} \cdot i_2 \rangle \\
&\equiv \{ \text{definição de mu} \} \\
&\quad mu \cdot \langle [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rangle = \langle \langle [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rangle, \mathbf{in} \cdot i_2 \rangle \\
&\Leftarrow \{ \text{fusão-cata} \} \\
&\quad mu \cdot [id, \mathbf{in} \cdot i_2] = \langle \langle [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rangle, \mathbf{in} \cdot i_2 \rangle \cdot (id + G mu) \\
&\equiv \{ \text{fusão-+, absorção-+, natural-id, eq-+} \} \\
&\quad [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \cdot i_1 = id \\
&\equiv \{ \text{cancelamento-+} \} \\
&\quad \begin{cases} mu = mu \\ mu \cdot \mathbf{in} \cdot i_2 = \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G mu \end{cases} \\
&\equiv \{ p \ \& \ \text{True} = \text{True}, \text{definição de mu}, \text{cancelamento-cata}, \text{base-cata} \} \\
&\quad [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \cdot (id + G mu) \cdot i_2 = \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G mu \\
&\equiv \{ \text{natural-i2}, \text{cancelamento-+} \} \\
&\quad \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G mu = \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G mu \\
&\equiv \{ \text{P.R.I} \} \\
&\quad \text{True} \\
&\quad \square
\end{aligned}$$

Maps: Monad: Let expressions:

$$\text{let_exp } f = \text{cataExpr } [f, [\widehat{N}, \widehat{T}]]$$

Catamorfismo monádico:

$$\begin{aligned}
\text{mcataExpr } g &= g \cdot ! (dl' \cdot \text{recExpr } (\text{mcataExpr } g) \cdot \text{outExpr}) \\
dl' &:: \text{Monad } m \Rightarrow a + (b + (\text{Op}, [m \ c])) \rightarrow m \ (a + (b + (\text{Op}, m \ [c]))) \\
dl' &= [\text{return} \cdot i_1, [\text{return} \cdot i_2 \cdot i_1, \text{aux}]] \\
&\quad \textbf{where } \text{aux } (op, ms) = \textbf{do } m \leftarrow \text{ lamb } ms; (\text{return} \cdot i_2 \cdot i_2) \ (op, \text{return } m)
\end{aligned}$$

Avaliação de expressões:

$$\begin{aligned}
\text{evaluate} &= \text{mcataExpr } \text{gene} \\
\text{gene} &:: (\text{Num } a, \text{Ord } a) \Rightarrow b + (a + (\text{Op}, \text{Maybe } [a])) \rightarrow \text{Maybe } a \\
\text{gene} &= [\text{Nothing}, [\text{Just}, \text{aux}]] \\
&\quad \textbf{where } \text{aux } (op, \text{args}) = \textbf{do } \text{argsR} \leftarrow \text{args}; \text{result } op \ \text{argsR} \\
\text{result} &:: (\text{Num } a, \text{Ord } a) \Rightarrow \text{Op} \rightarrow [a] \rightarrow \text{Maybe } a \\
\text{result Add} &= \text{Just} \cdot \text{sum} \\
\text{result Mul} &= \text{Just} \cdot \text{product} \\
\text{result Suc} &= \text{Just} \cdot (+1) \cdot \text{head} \\
\text{result ITE} &= \text{Just} \cdot \text{cond } (\widehat{(>)}) \cdot \langle \text{head}, \underline{0} \rangle) \ (\widehat{(!)}) \cdot \langle id, \underline{1} \rangle) \ (\widehat{(!)}) \cdot \langle id, \underline{2} \rangle) \\
\text{result } _ &= \text{Nothing}
\end{aligned}$$

Index

\LaTeX , [3](#), [4](#)

bibtex, [4](#)

lhs2TeX, [3–5](#)

makeindex, [4](#)

pdflatex, [3](#)

xymatrix, [5](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [3](#)

 Material Pedagógico, [3](#)

Combinador “pointfree”

cata

 Naturais, [5](#)

split, [5](#)

Docker, [3](#)

 container, [3](#), [4](#)

Função

π_1 , [5](#)

π_2 , [5](#)

Haskell, [1](#), [3](#), [4](#)

 interpretador

 GHCi, [3](#), [4](#)

 Literate Haskell, [3](#)

Números naturais (\mathbb{N}), [5](#)

Programação

 literária, [3](#), [4](#)

References

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] J.N. Oliveira. Program Design by Calculation, 2024. Draft of textbook in preparation. First version: 1998. Current version: Sep. 2024. Informatics Department, University of Minho ([pdf](#)).