



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2024/25)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G2

a104356 João d'Araújo Dias Lobo
a90817 Mariana Rocha Cristino
a104439 Rita da Cunha Camacho

Preâmbulo

Em [Cálculo de Programas](#) pretende-se ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em [Haskell](#) (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em [Haskell](#). Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo [A](#) onde encontrarão as instruções relativas ao *software* a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação '*H-index of a Histogram*' e que se formula facilmente:

O h-index de um histograma é o maior número n de barras do histograma cuja altura é maior ou igual a n .

Por exemplo, o histograma

$$h = [5, 2, 7, 1, 8, 6, 4, 9]$$

que se mostra na figura



tem *hindex* $h = 5$ pois há 5 colunas maiores que 5. (Não é 6 pois maiores ou iguais que seis só há quatro.)

Pretende-se definida como um catamorfismo, anamorfismo ou hilomorfismo uma função em Haskell

$$\text{hindex} :: [Int] \rightarrow (Int, [Int])$$

tal que, para $(i, x) = \text{hindex } h$, i é o H-index de h e x é a lista de colunas de h que para ele contribuem.

A proposta de *hindex* deverá vir acompanhada de um **diagrama** ilustrativo.

Problema 2

Pelo [teorema fundamental da aritmética](#), todo número inteiro positivo tem uma única factorização prima. Por exemplo,

```
primes 455
[5,7,13]
primes 433
[433]
primes 230
[2,5,23]
```

1. Implemente como anamorfismo de listas a função

$primes :: \mathbb{Z} \rightarrow [\mathbb{Z}]$

que deverá, recebendo um número inteiro positivo, devolver a respectiva lista de factores primos.

A proposta de *primes* deverá vir acompanhada de um **diagrama** ilustrativo.

2. A figura mostra a “*árvore dos primos*” dos números [455, 669, 6645, 34, 12, 2].



Com base na alínea anterior, implemente uma função em Haskell que faça a geração de uma tal árvore a partir de uma lista de inteiros:

$prime_tree :: [\mathbb{Z}] \rightarrow Exp\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Z}$

Sugestão: escreva o mínimo de código possível em *prime_tree* investigando cuidadosamente que funções disponíveis nas bibliotecas que são dadas podem ser reutilizadas.¹

Problema 3

A convolução $a \star b$ de duas listas a e b — uma operação relevante em computação — está muito bem explicada [neste vídeo](#) do canal **3Blue1Brown** do YouTube, a partir de $t = 6 : 30$. Aí se mostra como, por exemplo:

¹ Pense sempre na sua produtividade quando está a programar — essa atitude será valorizada por qualquer empregador que vier a ter.

$$[1, 2, 3] \star [4, 5, 6] = [4, 13, 28, 27, 18]$$

A solução abaixo, proposta pelo chatGPT,

```
convolve :: Num a => [a] -> [a] -> [a]
convolve xs ys = [sum $ zipWith (*) (take n (drop i xs)) ys | i <- [0..(length xs - n)]]
  where n = length ys
```

está manifestamente errada, pois $\text{convolve } [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [32]$ (!).

Proponha, explicando-a devidamente, uma solução sua para *convolve*. Valorizar-se-á a economia de código e o recurso aos combinadores *pointfree* estudados na disciplina, em particular a triologia *ana-cata-hilo* de tipos disponíveis nas bibliotecas dadas ou a definir.

Problema 4

Considere-se a seguinte sintaxe (abstrata e simplificada) para **expressões numéricas** (em *b*) com variáveis (em *a*),

```
data Expr b a = V a | N b | T Op [Expr b a] deriving (Show, Eq)
data Op = ITE | Add | Mul | Suc deriving (Show, Eq)
```

possivelmente condicionais (cf. *ITE*, i.e. o operador condicional “if-then-else”). Por exemplo, a árvore mostrada a seguir



representa a expressão

$$\text{ite } (V \text{ "x"}) (N \ 0) (\text{multi } (V \text{ "y"}) (\text{soma } (N \ 3) (V \text{ "y"}))) \quad (1)$$

– i.e. **if** *x* **then** 0 **else** *y* * (3 + *y*) – assumindo as “helper functions”:

```
soma x y = T Add [x, y]
multi x y = T Mul [x, y]
ite x y z = T ITE [x, y, z]
```

No anexo E propõe-se uma base para o tipo *Expr* (*baseExpr*) e a correspondente algebra *inExpr* para construção do tipo *Expr*.

1. Complete as restantes definições da biblioteca *Expr* pedidas no anexo F.
2. No mesmo anexo, declare *Expr b* como instância da classe *Monad*. **Sugestão:** relembre os exercícios da ficha 12.

3. Defina como um catamorfismo de *Expr* a sua versão monádica, que deverá ter o tipo:

$$mcataExpr :: Monad\ m \Rightarrow (a + (b + (Op, m\ [c]))) \rightarrow m\ c \rightarrow Expr\ b\ a \rightarrow m\ c$$

4. Para se avaliar uma expressão é preciso que todas as suas variáveis estejam instanciadas. Complete a definição da função

$$let_exp :: (Num\ c) \Rightarrow (a \rightarrow Expr\ c\ b) \rightarrow Expr\ c\ a \rightarrow Expr\ c\ b$$

que, dada uma expressão com variáveis em *a* e uma função que a cada uma dessas variáveis atribui uma expressão (*a* \rightarrow *Expr* *c* *b*), faz a correspondente substituição.¹ Por exemplo, dada

$$\begin{aligned} f\ "x" &= N\ 0 \\ f\ "y" &= N\ 5 \\ f\ _ &= N\ 99 \end{aligned}$$

ter-se-á

$$let_exp\ f\ e = T\ ITE\ [N\ 1, N\ 0, T\ Mul\ [N\ 5, T\ Add\ [N\ 3, N\ 1]]]$$

isto é, a árvore da figura a seguir:



5. Finalmente, defina a função de avaliação de uma expressão, com tipo

$$evaluate :: (Num\ a, Ord\ a) \Rightarrow Expr\ a\ b \rightarrow Maybe\ a$$

que deverá ter em conta as seguintes situações de erro:

- (a) *Variáveis* — para ser avaliada, *x* em *evaluate* *x* não pode conter variáveis. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} evaluate\ e &= Nothing \\ evaluate\ (let_exp\ f\ e) &= Just\ 40 \end{aligned}$$

para *f* e *e* dadas acima.

- (b) *Aridades* — todas as ocorrências dos operadores deverão ter o devido número de sub-expressões, por exemplo:

$$\begin{aligned} evaluate\ (T\ Add\ [N\ 2, N\ 3]) &= Just\ 5 \\ evaluate\ (T\ Mul\ [N\ 2]) &= Nothing \end{aligned}$$

¹ Cf. expressões **let ... in...**

Sugestão: de novo se insiste na escrita do mínimo de código possível, tirando partido da riqueza estrutural do tipo *Expr* que é assunto desta questão. Sugere-se também o recurso a diagramas para explicar as soluções propostas.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “[literária](#)” [1], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2425t.pdf` que está a ler é já um exemplo de [programação literária](#): foi gerado a partir do texto fonte `cp2425t.lhs`¹ que encontrará no [material pedagógico](#) desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2425t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código [Haskell](#) que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do [GHCi](#), serão necessários os executáveis [pdflatex](#) e [lhs2TeX](#). Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do [Docker](#) tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do [container](#) cuja imagem é gerada pelo [Docker](#) a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2425t.zip`. Este [container](#) deverá ser usado na execução do [GHCi](#) e dos comandos relativos ao [L^AT_EX](#). (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

¹ O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Após [instalar o Docker](#) e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2425t .  
$ docker run -v ${PWD}:/cp2425t -it cp2425t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o [GHCi](#) e os comandos relativos ao [L^AT_EX](#). Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2425t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2425t` no [container](#) sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no [container](#), executando:

```
$ lhs2TeX cp2425t.lhs > cp2425t.tex  
$ pdflatex cp2425t
```

[lhs2TeX](#) é o pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em [L^AT_EX](#) e que faz parte já do [container](#). Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2425t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2425t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2425t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}  
...  
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo [F](#) com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [Bib_TE_X](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2425t.aux  
$ makeindex cp2425t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no [container](#).)

No anexo [E](#) disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da [programação literária](#) para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo [D](#) que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte ([lhs](#)) do que está a ler¹ onde se obtém o efeito seguinte:²

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

E Código fornecido

Problema 1

$h :: [Int]$

Problema 4

Definição do tipo:

$inExpr = [V, [N, \widehat{T}]]$
 $baseExpr\ g\ h\ f = g + (h + id \times \text{map}\ f)$

Exemplos de expressões:

$e = ite\ (V\ "x")\ (N\ 0)\ (multi\ (V\ "y")\ (soma\ (N\ 3)\ (V\ "y")))$
 $i = ite\ (V\ "x")\ (N\ 1)\ (multi\ (V\ "y")\ (soma\ (N\ (3 / 5))\ (V\ "y")))$

Exemplo de teste:

$teste = evaluate\ (let_exp\ f\ i) \equiv Just\ (26 / 245)$
where $f\ "x" = N\ 0; f\ "y" = N\ (1 / 7)$

¹ Procure e.g. por "sec:diagramas".

² Exemplos tirados de [?].

F Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

A função *hindex* foi implementada como um hilomorfismo de *BTree* (*hyloBTree*), visto que o problema assemelha-se ao processo de ordenação *qsort*, que também utiliza um hilomorfismo. A ideia principal foi usar a partição de elementos como o *qSort* usa e adaptar o restante processo para calcular o h-index.

A função *hindex* é representada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}^* & \xrightarrow{qsep} & 1 + (\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}^*)) \\
 \downarrow \llbracket qsep \rrbracket & & \downarrow id + id \times (\llbracket qsep \rrbracket \times \llbracket qsep \rrbracket) \\
 BTree\ \mathbb{Z} & \xrightleftharpoons[in]{in} & 1 + (\mathbb{Z}, (BTree\ \mathbb{Z}, BTree\ \mathbb{Z})) \\
 \downarrow \llbracket f \rrbracket & & \downarrow id + id \times (\llbracket f \rrbracket \times \llbracket f \rrbracket) \\
 (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*) & \xleftarrow{f = [0, [], hI]} & 1 + (\mathbb{Z}, ((\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*), (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*)))
 \end{array}$$

Esta função é composta por um anamorfismo (*anaBTree qsep*) e por um catamorfismo (*cataBTree [0, [], hI]*).

1. Anamorfismo

A função *qsep* é responsável por dividir a lista de alturas do histograma e construir recursivamente a árvore binária. Assim, caso a lista esteja vazia, retorna $i_1()$.

Caso contrário, o primeiro elemento da lista é escolhido como pivô e os elementos restantes são divididos em dois subconjuntos: *s* contém os elementos menores que o pivô e *l* contém os elementos maiores ou iguais ao pivô. Esta divisão é realizada pela função *part* que percorre a lista e verifica, para cada elemento, se este satisfaz o predicado *p*, no caso da função *qsep*, se é menor que o pivô.

Então, o resultado da função *qsep* é uma árvore binária onde cada nodo contém um pivô e as suas subárvores representam os valores menores e maiores, respetivamente.

2. Catamorfismo

O catamorfismo *cataBTree [0, [], hI]* verifica se o nodo é vazio e retorna $(0, [])$. Caso contrário, aplica a função *hI* que calcula o h-index e os contribuidores para o nodo atual.

A função *hI* segue os seguintes passos:

2.1. Combinação dos valores das subárvores: junta os valores das subárvores esquerda e direita numa lista, adicionando o valor do nodo atual.

2.2. Cálculo do h-index: cada elemento da lista é emparelhado com a sua posição usando *zip [1..] list*, a função *myfoldr* percorre esses pares para calcular o maior índice *k* tal que o valor

associado seja maior ou igual a k . Ou seja, a lista *list* é transformada em pares $(k, height)$, onde k representa a posição e *height* é o valor da altura correspondente. A função *process* verifica:

- Se $height \geq k$, então o h-index é atualizado para o máximo entre o valor atual e k .
- Caso contrário, o h-index mantém-se inalterado.

A função *process*:

- verifica se a altura é maior ou igual ao índice: $(\widehat{\geq}) \cdot swap \cdot \pi_1$;
- se a condição for satisfeita, atualiza o h-index: $\widehat{max} \cdot swap \cdot (\pi_1 \times id)$;
- caso contrário, mantém o valor atual: π_2 .

2.3. Identificação dos contribuidores: a lista é filtrada para conter apenas os valores maiores ou iguais ao h-index ($filter (\geq hIndex) list$).

Segue a implementação da função *hindex*:

```
hindex = hyloBTree [0, [], hI] qsep
hI :: (Int, ((Int, [Int]), (Int, [Int]))) → (Int, [Int])
hI (n, ((-, ll), (-, lr))) = (hIndex, contributors)
  where
    list = lr ++ [n] ++ ll
    hIndex = myfoldr process 0 (zip [1..] list)
    process :: (Ord a) ⇒ ((a, a), a) → a
    process = cond ((\>=) · swap · π₁) (max · swap · (π₁ × id)) π₂
    contributors = filter (≥ hIndex) list
```

Problema 2

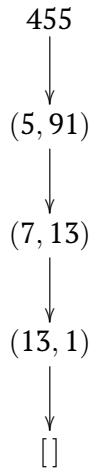
Primeira parte:

A função *primes* é responsável por criar a lista de fatores primos de um dado número. De modo que, esta função pode ser definida como um anamorfismo de listas (*List*). Assim, o diagrama que representa a operação é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & 1 + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\
 \llbracket g \rrbracket \downarrow & & \downarrow id + (id \times \llbracket g \rrbracket) \\
 \mathbb{Z}^* & \xrightleftharpoons[in_{List}]{out_{List}} & 1 + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*
 \end{array}$$

A implementação baseia-se em decompor o número repetidamente no seu menor fator primo, este processo repete-se até que o quociente resultante seja 1.

O processo pode ser representado graficamente como se segue para o número 455:



Assim, $\text{primes } 455 = [5, 7, 13]$.

A definição de *primes* como $\llbracket g \rrbracket$ tira partido de que um anamorfismo constrói uma estrutura recursiva ao aplicar sucessivamente o gene g a um valor inicial. O gene g determina como cada passo da construção ocorre, neste caso g divide o número n no seu menor fator primo (calculado pela função *smallestPrimeFactor*) e no quociente resultante após a divisão. O processo termina quando $n = 1$, porque não existem mais fatores primos para serem determinados.

A função *smallestPrimeFactor* é responsável por determinar o menor fator primo de um número n , e é definida como um catamorfismo de naturais (*catNat*). Esta função aplica sucessivamente a lógica de "testar se um divisor d divide n " para valores d crescentes, assim inicia com o menor número primo (2).

O ciclo-for contém uma estrutura recursiva que verifica duas condições:

1. **Teste de primalidade:** Se $d^2 > n$: Nesse caso, n é primo e o seu menor fator primo é ele mesmo (o processo termina).

2. **Encontrar o menor fator primo:** Se $n \bmod d = 0$: Nesse caso, d é o menor fator primo de n .

Caso contrário: Incrementámos d e continuámos o processo.

Fundamentação matemática: A implementação baseia-se no Teorema Fundamental da Aritmética, que garante que todo o número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto de forma única como um produto de fatores primos. O processo descrito no gene g utiliza esta propriedade para decompor iterativamente o n nos seus fatores primos, onde a divisibilidade é verificada e avançamos na procura do menor fator primo.

$$\begin{aligned}
 \text{smallestPrimeFactor } x &= \text{for } \lambda n \rightarrow \text{cond } ((\widehat{>}) \cdot ((\uparrow 2) \times \text{id})) \pi_2 \\
 &\quad (\text{cond } ((\equiv 0) \cdot \widehat{\text{mod}} \cdot \text{swap}) \pi_1 (\text{succ} \cdot \pi_1)) (n, x) 2 x \\
 g \ 1 &= i_1 \ () \\
 g \ n &= i_2 \ (\text{smallestPrimeFactor } n, n \div \text{smallestPrimeFactor } n) \\
 \text{primes} &= \llbracket g \rrbracket
 \end{aligned}$$

Segunda parte:

A função *prime_tree* é responsável por criar a árvore dos primos de uma lista de inteiros, como se encontra ilustrado no enunciado. De modo que, esta função pode ser definida da seguinte forma:

$$prime_tree = Term\ 1 \cdot untar \cdot map\ (\lambda n \rightarrow (primes\ n, n))$$

Inicialmente, adotamos uma abordagem extensiva para resolver o problema, com a definição de um hilomorfismo e todas as operações necessárias para construir a árvore. No entanto, durante este processo, reparámos na função *untar* da biblioteca *Exp.hs*, que efetua a operação necessária para transformar uma lista de pares numa estrutura do tipo $[Exp\ v\ o]$. Após compreendermos o comportamento e a definição da função *untar*, percebemos que era possível utilizá-la na construção da função *prime_tree*, o que simplificou a implementação.

Explicação da função *prime_tree*:

1. A função *primes* é aplicada a cada elemento da lista de inteiros e com o uso da expressão $map\ (\lambda n \rightarrow (primes\ n, n))$, obtemos uma lista de pares, onde o primeiro elemento é a lista de fatores primos de um número e o segundo elemento é o próprio número. Assim, no final da execução desta expressão, obtemos uma lista de pares do tipo $[[[Z], Z]]$.

2. Neste contexto, a função *untar* converte os fatores primos de um número e o próprio número numa representação de árvore onde os nodos intermediários são os fatores e as folhas são os números originais, $[Exp\ Z\ Z]$. Esta conversão é realizada em três partes principais: a coalgebra, a base e a álgebra.

2.1. A coalgebra, representada pela função *c*, é responsável por decompor os dados, ou seja, separa os pares da lista inicial - $[[[Z], Z]]$ - e transforma cada elemento para o formato $Z + (Z, [[Z], Z])$.

2.1.1. O $map\ ((\pi_2 + assocr) \cdot distl \cdot (outList \times id))$ é aplicado a cada par da lista, onde:

- $outList \times id$ transforma a lista de fatores primos num tipo $\cdot + \cdot$ e retorna o número original. Permitindo tratar em separado os fatores primos e os números.
- *distl* distribui os elementos $(a, b) + \cdot$ para o tipo $(a + b, b)$, separa os dados para facilitar o processamento posterior.
- $\pi_2 + assocr$ reorganiza os pares para agrupar corretamente os fatores primos associados a um número.

2.1.2. *sep* percorre a lista de elementos $\cdot + \cdot$, e separa os elementos i_1 para o primeiro grupo e os i_2 para o segundo grupo.

2.1.3. $id \times collect$ aplica a função *id* ao primeiro valor do tuplo e *collect* ao segundo, de modo que a função *collect* é responsável por agrupar os fatores primos em listas separadas para cada número. Então, os números que partilham o mesmo fator primo são agrupados juntos.

2.1.4. *join* junta os valores numa lista única, recriando a estrutura necessária para representare os dados.

2.2. Após a coalgebra, avançamos para a base, esta aplica recursivamente a função *untar* a cada sublista e cria subárvores para cada conjunto de fatores. O tipo da função *base* é definido como:

$$base :: (Z \rightarrow Z) \rightarrow (Z \rightarrow Z) \rightarrow ([([Z], Z)] \rightarrow [Exp\ Z\ Z]) \rightarrow [Z + (Z, [[Z], Z])] \rightarrow [Z + (Z, [Exp\ Z\ Z])].$$

2.3. Para finalizar, a álgebra *a* organiza os dados processados na estrutura final, a operação *sort* organiza os nodos, enquanto que o $map\ inExp$ converte os elementos numa estrutura do tipo $Exp\ Z\ Z$. O seu tipo, neste contexto, é definido como: $a :: [Z + (Z, [Exp\ Z\ Z])] \rightarrow [Exp\ Z\ Z]$.

3. Por fim, a função *Term 1* é aplicada para adicionar a raiz da árvore com o valor 1, isto conecta todas as subárvores criadas pela função *untar*, construindo uma única árvore que representa a decomposição de todos os números da lista.

Problema 3

```

convolve :: Num a => [a] -> [a] -> [a]
convolve l1 l2 = [ anaGene l1 l2 ] 0
anaGene :: Num a => [a] -> [a] -> Int -> () + (a, Int)
anaGene l1 l2 = cond (≥ m + n - 1) (· $ i_1 ())
  (λi → i_2 (sum $ zipWith (*) l1 (map (λj → access (l2, (i,j))) [0..(m-1)]), i + 1))
where
  m = length l1; n = length l2
  access = cond ((∨) ⟨$⟩ cond1 < * > cond2) 0 ((!!) · (id × (-)))
  cond1 = (⟨>) · (0 × (-))
  cond2 = (⟨≤⟩) · (length × (-))

```

Problema 4

1. Nesta pergunta, pretende-se definir por completo, a biblioteca *Expr*, à semelhança das outras bibliotecas de estruturas fornecidas.

Definição do tipo de *Expr*:

Para o cálculo de *outExpr*, partimos da afirmação $outExpr \cdot inExpr = id$,

$$\begin{aligned}
& outExpr \cdot inExpr = id \\
\equiv & \quad \{ \text{def } inExpr \} \\
& outExpr \cdot [V, [N, \widehat{T}]] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{fusão } + \} \\
& [outExpr \cdot V, [outExpr \cdot N, outExpr \cdot \widehat{T}]] = id \\
\equiv & \quad \{ \text{universal } +, \text{ natural id} \} \\
& \begin{cases} outExpr \cdot V = i_1 \\ [outExpr \cdot N, outExpr \cdot \widehat{T}] = i_2 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{universal } + \} \\
& \begin{cases} outExpr \cdot V = i_1 \\ outExpr \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ outExpr \cdot \widehat{T} = i_2 \cdot i_2 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{igualdade extensional, def-comp, uncurry} \} \\
& \begin{cases} outExpr (V n) = i_1 n \\ outExpr (N n) = (i_2 \cdot i_1) n \\ outExpr (T op exprs) = (i_2 \cdot i_2) (op, exprs) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ficando assim, em Haskell, com:

```

outExpr :: Expr b a -> a + (b + (Op, [Expr b a]))
outExpr (V n) = i_1 n
outExpr (N n) = (i_2 · i_1) n
outExpr (T op exprs) = (i_2 · i_2) (op, exprs)

```

Cálculo do functor de *Expr*:

Sabendo que $F f = B (id, f)$, temos que:

$$\begin{aligned} F f &= B (id, id, f) \\ &\equiv \{ \text{def B} \} \\ F f &= id + (id + id \times \text{map } f) \end{aligned}$$

Definindo, então, *recExpr* como:

$$\begin{aligned} \text{recExpr} &:: (a \rightarrow b1) \rightarrow b2 + (b3 + (b4, [a])) \rightarrow b2 + (b3 + (b4, [b1])) \\ \text{recExpr} &= \text{baseExpr } id \text{ } id \end{aligned}$$

Definição da triologia ana-cata-hylo:

Começando pelo catamorfismo de *Expr*, temos:

$$\begin{aligned} &\equiv \{ \text{cancelamento-cata} \} \\ \llbracket g \rrbracket \cdot \text{in} &= g \cdot F \llbracket g \rrbracket \\ &\equiv \{ \text{shunt-left} \} \\ \llbracket g \rrbracket &= g \cdot F \llbracket g \rrbracket \cdot \text{out} \end{aligned}$$

Representado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Expr } C \ A & \xleftarrow{\text{in}} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ A)^*)) \\ \llbracket g \rrbracket \downarrow & \xrightarrow{\text{out}} & \downarrow id + (id + (id \times \text{map } \llbracket g \rrbracket)) \\ \text{Expr } C \ B & \xleftarrow{g} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ B)^*)) \end{array}$$

Utilizando as funções previamente definidas, temos então:

$$\text{cataExpr } g = g \cdot \text{recExpr } (\text{cataExpr } g) \cdot \text{outExpr}$$

Para o anamorfismo de *Expr*, temos:

$$\begin{aligned} &\equiv \{ \text{cancelamento-ana} \} \\ \text{out} \cdot \llbracket g \rrbracket &= F \llbracket g \rrbracket \cdot g \\ &\equiv \{ \text{shunt-right} \} \\ \llbracket g \rrbracket &= \text{in} \cdot F \llbracket g \rrbracket \cdot g \end{aligned}$$

Representado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& \xleftarrow{\text{in}} & \\
\text{Expr } C \ A & \xleftrightarrow{\quad A + (C + (Op \times (Expr \ C \ A)^*)) \quad} & \\
\uparrow \llbracket g \rrbracket & \xleftarrow{\text{out}} & \uparrow id + (id + (id \times \text{map } \llbracket g \rrbracket)) \\
\text{Expr } C \ D & \xrightarrow{g} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ D)^*))
\end{array}$$

Utilizando as funções previamente definidas, temos então:

$$anaExpr \ g = inExpr \cdot recExpr \ (anaExpr \ g) \cdot g$$

Sendo o hilomorfismo, a composição do catamorfismo e do anamorfismo, representado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Expr } C \ D & \xrightarrow{g} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ D)^*)) \\
\downarrow \llbracket g \rrbracket & \xleftarrow{\text{in}} & \downarrow id + (id + (id \times \text{map } \llbracket g \rrbracket)) \\
\text{Expr } C \ A & \xleftrightarrow{\quad A + (C + (Op \times (Expr \ C \ A)^*)) \quad} & \\
\downarrow \llbracket h \rrbracket & \xleftarrow{\text{out}} & \downarrow id + (id + (id \times \text{map } \llbracket h \rrbracket)) \\
\text{Expr } C \ B & \xleftarrow{h} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ B)^*))
\end{array}$$

ou seja,

$$\llbracket h, g \rrbracket = \llbracket h \rrbracket \cdot \llbracket g \rrbracket$$

Este é definido em Haskell usando as funções *cataExpr* e *anaExpr* previamente definidas:

$$hyloExpr \ h \ g = cataExpr \ h \cdot anaExpr \ g$$

2. Monad:

Para declarar *Expr b* como instância da classe *Monad*, foram implementadas as instâncias de *Functor*, *Applicative* e *Monad* do tipo *Expr b*. A abordagem utilizada foi guiada pelo exercício 4 da ficha 12, adaptando ao contexto específico de *Expr b*.

Começamos pelo *Functor*, onde a função *fmap* aplica uma transformação às variáveis da expressão, mantendo as restantes estruturas (*N* e *T*) inalteradas. Esta operação é realizada de forma recursiva usando o catamorfismo - *cataExpr* -, que reconstrói a expressão após aplicar a *f* às variáveis. A composição com a função *inExpr* e a base do catamorfismo (*baseExpr*) assegura que a estrutura é processada corretamente.

```
instance Functor (Expr b)
  where fmap f = cataExpr (inExpr . baseExpr f id id)
```

De seguida, definimos a instância *Applicative*, onde a função *pure* cria uma expressão com uma variável (*V*) com o valor fornecido, a função *< * >* considera três casos:

- se a expressão é uma variável (*V f*), aplica *fmap* para mapear função sobre a outra expressão;

- se a expressão é um número ($N\ b$), mantém o número inalterado;
- se a expressão é uma operação ($T\ op\ fs$), aplica a função a cada subexpressão da operação.

instance *Applicative* (*Expr b*) **where**

pure :: $a \rightarrow Expr\ b\ a$

pure = *V*

$(V\ f) < * > x = fmap\ f\ x$

$(N\ b) < * > _ = N\ b$

$(T\ op\ fs) < * > x = T\ op\ (map\ (< * > x)\ fs)$

Por fim, a instância *Monad* foi definida, a definição *return* é equivalente a *pure*, cria uma variável. A operação $\gg=$ aplica a função *g* a cada variável da expressão, usando a função auxiliar *muExpr* para processar a expressão resultante.

instance *Monad* (*Expr b*) **where**

return :: $a \rightarrow Expr\ b\ a$

return = *pure*

$(\gg=) :: Expr\ b\ a \rightarrow (a \rightarrow Expr\ b\ b1) \rightarrow Expr\ b\ b1$

$t \gg= g = muExpr\ (fmap\ g\ t)$

muExpr :: $Expr\ b\ (Expr\ b\ a) \rightarrow Expr\ b\ a$

muExpr = *cataExpr* [*id*, *inExpr* · *i*₂]

u :: $a \rightarrow Expr\ b\ a$

u = *V*

Provemos que *Expr b* é uma instância de *Monad*:

- $u = V$ e $V = inExpr \cdot i_1$, logo $u = inExpr \cdot i_1$;
- $muExpr = cataExpr\ [id, inExpr \cdot i_2]$.

Provar a lei monádica Unidade (63):

$$\begin{aligned}
& mu \cdot u = mu \cdot T\ u \\
\equiv & \quad \{ \text{definição de mu; definição de u} \} \\
& \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot \mathbf{in} \cdot i_1 = \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot T\ u \\
\equiv & \quad \{ \text{absorção-cata} \} \\
& \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot \mathbf{in} \cdot i_1 = \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot B(u, id) \\
\equiv & \quad \{ B(f,g) = f + G\ g, \text{ absorção-+}, \text{ natural-id}, \text{ functor-id-F} \} \\
& \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot \mathbf{in} \cdot i_1 = \llbracket [u, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \\
\equiv & \quad \{ \text{definição de u, cancelamento-cata} \} \\
& \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot F\ mu \cdot i_1 = \llbracket [\mathbf{in} \cdot i_1, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \\
\equiv & \quad \{ \text{fusão-+}, \text{ reflexão-+}, \text{ reflexão-cata}, \text{ base-cata}, B(id, mu) = id + G\ mu \} \\
& \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot (id + G\ mu) \cdot i_1 = id \\
\equiv & \quad \{ \text{natural-i1}, \text{ natural-id} \} \\
& \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot i_1 = id \\
\equiv & \quad \{ \text{cancelamento-+} \} \\
& id = id
\end{aligned}$$

$$\equiv \{ \text{P.R.I.} \}$$

True

□

Provar a lei monádica Multiplicação (62):

$$\begin{aligned}
& mu \cdot mu = mu \cdot T \ mu \\
\equiv & \{ \text{definição de } mu \} \\
& mu \cdot mu = \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot T \ (\llbracket \cdot \rrbracket) \ [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \\
\equiv & \{ \text{absorção-cata} \} \\
& mu \cdot mu = \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket \cdot (\llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket + G \ id) \rrbracket \\
\equiv & \{ \text{Functor-id-F, natural-id, absorção-+} \} \\
& mu \cdot mu = \llbracket \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket, \mathbf{in} \cdot i_2 \rrbracket \\
\equiv & \{ \text{definição de } mu \} \\
& mu \cdot \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket = \llbracket \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket, \mathbf{in} \cdot i_2 \rrbracket \\
\Leftarrow & \{ \text{fusão-cata} \} \\
& mu \cdot [id, \mathbf{in} \cdot i_2] = \llbracket \llbracket [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \rrbracket, \mathbf{in} \cdot i_2 \rrbracket \cdot (id + G \ mu) \\
\equiv & \{ \text{fusão-+, absorção-+, natural-id, eq-+} \} \\
& [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \cdot i_1 = id \\
\equiv & \{ \text{cancelamento-+} \} \\
& \begin{cases} mu = mu \\ mu \cdot \mathbf{in} \cdot i_2 = \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G \ mu \end{cases} \\
\equiv & \{ p \ \& \ True = True, \text{definição de } mu, \text{cancelamento-cata, base-cata} \} \\
& [id, \mathbf{in} \cdot i_2] \cdot (id + G \ mu) \cdot i_2 = \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G \ mu \\
\equiv & \{ \text{natural-i2, cancelamento-+} \} \\
& \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G \ mu = \mathbf{in} \cdot i_2 \cdot G \ mu \\
\equiv & \{ \text{P.R.I.} \} \\
& \textit{True} \\
& \square
\end{aligned}$$

3. Catamorifismo monádico

$$\begin{array}{ccc}
Expr \ C \ A & \xleftarrow{\quad in \quad} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ A)^*)) \\
\downarrow \scriptstyle \langle g \rangle & \xleftarrow{\quad out \quad} & \downarrow \scriptstyle id + (id + (id \times map \ \langle g \rangle)) \\
Expr \ C \ B & \xleftarrow{\quad g \quad} & A + (C + (Op \times (Expr \ C \ B)^*)) \\
\downarrow \scriptstyle u & & \downarrow \scriptstyle id + (id + (id \times map \ u)) \\
m \ (Expr \ C \ B) & \xleftarrow{\quad h \quad} & A + (C + (Op \times (m \ (Expr \ C \ A))^*))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \xleftarrow{\text{in}} & \\
\text{Expr } C \ A & \xleftarrow{\quad} A + (C + (Op \times (Expr \ C \ A)^*)) & \\
\downarrow (g) & \xleftarrow{\text{out}} & \downarrow id + (id + (id \times \text{map } (g))) \\
m \ (Expr \ C \ B) & \xleftarrow{[h_1, h_2]} A + (C + (Op \times (m \ (Expr \ C \ A))^*)) &
\end{array}$$

Para definir o catamorfismo monádico de *Expr*, a função *mcataExpr*, começamos por definir a função *dl'*, que é responsável por transformar a estrutura de *Expr* para um contexto monádico.

4. Maps: Monad: Let expressions:

A função *let_exp* é responsável por substituir todas as variáveis numa expressão *Expr* pelas suas correspondentes expressões atribuídas por uma função fornecida como argumento.

A definição da função *let_exp* utiliza o catamorfismo *cataExpr*. No caso de encontrar uma variável (*V*), a função *f* é usada para substituir essa variável pela expressão correspondente. Para valores numéricos (*N*), a função mantém o valor inalterado. Para operadores (caso *T*), a função constrói uma nova expressão que combina os resultados das subexpressões recursivamente.

Em suma, *let_exp* avalia uma expressão ao substituir todas as variáveis pelas expressões correspondentes, garantindo que a estrutura da expressão original é mantida. De seguida, o diagrama mostra como a operação do catamorfismo percorre e transforma a expressão.

$$\begin{array}{ccc}
& \xleftarrow{\text{in}_{Expr}} & \\
\text{Expr } C \ A & \xleftarrow{\quad} A + (C + (Op \times (Expr \ C \ A)^*)) & \\
\downarrow \text{let_exp } f & \xleftarrow{\text{out}_{Expr}} & \downarrow id + (id + (id \times \text{map } (\text{let_exp } f))) \\
\text{Expr } C \ B & \xleftarrow{[f, [N, \hat{T}]]} A + (C + (Op \times (Expr \ C \ B)^*)) &
\end{array}$$

Segue a implementação da função *let_exp*:

$$\text{let_exp } f = \text{cataExpr } [f, [N, \hat{T}]]$$

Catamorfismo monádico:

$$\begin{aligned}
\text{mcataExpr } g &= g \ ! \ (\text{dl}' \cdot \text{recExpr } (\text{mcataExpr } g) \cdot \text{outExpr}) \\
\text{dl}' &:: \text{Monad } m \Rightarrow a + (b + (Op, [m \ c])) \rightarrow m \ (a + (b + (Op, m \ [c]))) \\
\text{dl}' &= [\text{return} \cdot i_1, [\text{return} \cdot i_2 \cdot i_1, \text{aux}]] \\
\text{where } \text{aux } (op, ms) &= \text{do } m \leftarrow \text{lamb } ms; (\text{return} \cdot i_2 \cdot i_1) \ (op, \text{return } m)
\end{aligned}$$

Avaliação de expressões:

A função *evaluate* avalia expressões do tipo *Expr* e retorna o resultado da avaliação com o tipo *Maybe*. Esta função tem em conta dois cenários de erro: variáveis não instanciadas e operadores aplicados a um número incorreto de argumentos.

A função *evaluate* utiliza o catamorfismo *mcataExpr* para avaliar a expressão. Este conceito generaliza o conceito de catamorfismo simples para permitir trabalhar em contextos monádicos. O ponto central deste conceito é que combina a lógica de transformação (*g*) com a recursão da estrutura, enquanto lida automaticamente com contextos monádicos. Assim, evitámos tratar manualmente de cada contexto monádico *Maybe* em cada passo.

No caso do *evaluate*, o gene *gene* define como é que se processa cada nodo da estrutura *Expr*. O gene *gene* lida com três casos principais:

- *V* : Para uma variável, retornámos *Nothing*, porque as variáveis não podem ser avaliadas.
- *N* : Para um número, retornámos o próprio número com *Just*.
- *T* : Para um operador, utilizámos a função auxiliar *aux* que:
 - avalia todos os argumentos no contexto *Maybe*, isto é, verifica se todos os argumentos são válidos;
 - aplica a função *result* para calcular o resultado final, caso todos os argumentos sejam válidos.

A função *result* define o comportamento esperado para cada operador e valida a aridade, assim garante que apenas os operadores com a aridade correta sejam avaliados. Caso contrário, a avaliação falha e retorna *Nothing*.

Segue a implementação da função *evaluate*:

```

evaluate = mcataExpr gene
gene :: (Num a, Ord a) => b + (Op, Maybe [a]) -> Maybe a
gene = [Nothing, Just, aux]
  where aux (op, args) = do argsR <- args; result op argsR
result :: (Num a, Ord a) => Op -> [a] -> Maybe a
result Add [x,y] = Just (x + y)
result Mul [x,y] = Just (x * y)
result Suc [x] = Just (x + 1)
result ITE [cond, t, f] = if cond /= 0 then Just t else Just f
result _ _ = Nothing

```

Index

\LaTeX , [3](#), [4](#)

bibtex, [4](#)

lhs2TeX, [3–5](#)

makeindex, [4](#)

pdflatex, [3](#)

xymatrix, [5](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [3](#)

 Material Pedagógico, [3](#)

Combinador “pointfree”

cata

 Naturais, [5](#)

split, [5](#)

Docker, [3](#)

 container, [3](#), [4](#)

Função

π_1 , [5](#)

π_2 , [5](#)

Haskell, [1](#), [3](#), [4](#)

 interpretador

 GHCi, [3](#), [4](#)

 Literate Haskell, [3](#)

Números naturais (\mathbb{N}), [5](#)

Programação

 literária, [3](#), [4](#)

References

- [1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [2] J.N. Oliveira. Program Design by Calculation, 2024. Draft of textbook in preparation. First version: 1998. Current version: Sep. 2024. Informatics Department, University of Minho ([pdf](#)).