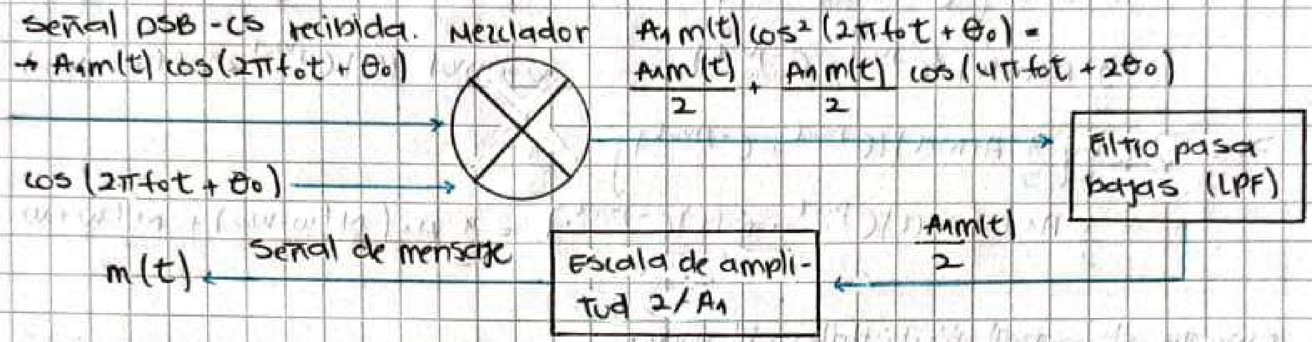
Nombre: Mariana Zuluaga Yepes CC: 1055751503 Fecha: 03 Dic 2025.

Parcial 2: Señales y Sistemas.

1. Sea el demodulador en amplitud presentado en la figura:



Asumiendo $\theta_0 = 0$ determine el espectro de Fourier (teórico) en cada una de las etapas del sistema. Luego, con base en la simulación de modulación en amplitud del Taller 2 y utilizando 5 segundos de una canción de YouTube como mensaje, grafique cada una de las etapas principales del proceso de modulación y demodulación en el tiempo y la frecuencia (reproduzca el segmento de la canción en cada etapa).
Nota: Para la etapa de filtrado pasa bajas, realice su implementación a partir de la Transformada rápida de Fourier.

Demodulador coherente de AM DSB - SC / DSB - CS.

Señal mensaje base $= m(t) \leftrightarrow M(w)$

Señal recibida $= s_{rec}(t) = A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$

$\rightarrow A_1 =$ Ganancia, $f_0 =$ frecuencia de la portadora

Segunda señal que entra al mixer $= \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \rightarrow w_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T$

Después del mixer:

$$y(t) = A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

se usa la propiedad

$$= A_1 m(t)\cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0), \quad w_0 = 2\pi f_0 \rightarrow \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{A_1}{2} m(t)(1 + \cos(2(2\pi f_0 t + \theta_0)))$$

$$= \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t)\cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0)$$

Filtro pasa-bajas (LPF):

Entrada $= y(t)$

Salida $= y_f(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \rightarrow Y_f(w) = \frac{A_1}{2} M(w)$

Escalador de amplitud:

Entrada $y_f(t) = \frac{A_1}{2} m(t)$ Ganancia $G = \frac{2}{A_1}$ Salida $\hat{m}(t) = \frac{\cancel{A_1}}{\cancel{2}} m(t) \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{A_1}} = m(t)$.

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Espectro de señal recibida al mixer:

$$S_{rec}(t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$
$$= A_1 m(t) \cos(\omega_0 t)$$
$$= A_1 m(t) \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} A_1 m(t) \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right)$$

Se usa propiedad $\rightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$, y $\omega_0 = 2\pi f_0$

Usamos $f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

$$S_{rec}(\omega) = F\left\{ \frac{1}{2} A_1 m(t) \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{2} A_1 F\{ m(t) e^{j\omega_0 t} + m(t) e^{-j\omega_0 t} \} = \frac{1}{2} A_1 \left(M(\omega - \omega_0) + M(\omega + \omega_0) \right)$$

Espectro de señal de salida del mixer:

$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0) \quad \text{con } \omega_0 = 2\pi f_0$$
$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(2\omega_0 t)$$
$$Y(\omega) = F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} \cos(2\omega_0 t) \right\} = F\left\{ \frac{A}{2} m(t) \right\} + F\left\{ \frac{A}{2} m(t) \cos(2\omega_0 t) \right\}$$
$$= \frac{A_1}{2} M(\omega) + F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) \cos(2\omega_0 t) \right\}$$

Se usa propiedad $\rightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$$= \frac{A_1}{2} M(\omega) + F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) \frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} \right\}$$

Usamos: $\rightarrow f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

$$= \frac{A_1}{2} M(\omega) + \frac{A_1}{4} F\{ m(t) e^{j2\omega_0 t} + m(t) e^{-j2\omega_0 t} \}$$
$$= \frac{A_1}{2} M(\omega) + \frac{A_1}{4} \left[M(\omega - \omega_0) + M(\omega + \omega_0) \right]$$

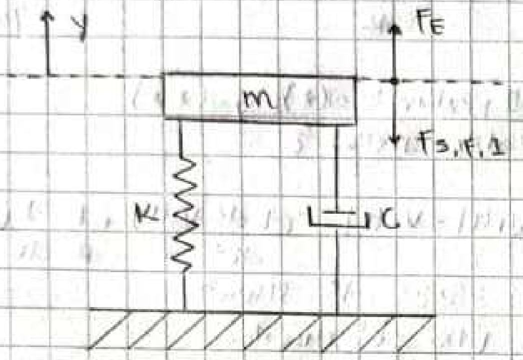
Espectro de señal de salida del mixer: $H_f(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

$$H_f(\omega) = \frac{Y_f(\omega)}{Y(\omega)} \qquad y_f(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \rightarrow Y_f(\omega) = \frac{A_1}{2} M(\omega)$$

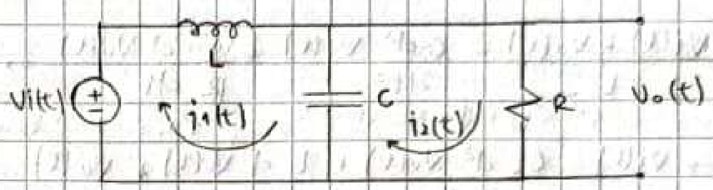
Espectro de señal del escalador:

$$\hat{m}(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \cdot \frac{2}{A_1} = m(t) \qquad \hat{M}(\omega) = F\{m(t)\} = M(\omega)$$

2. Encuentre la función de transferencia que caracteriza el sistema masa, resorte, amortiguador presentado en la siguiente figura. (asuma condiciones iniciales cero):



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador, a partir del siguiente circuito eléctrico:



Finalmente proponga unos valores de m, k y c y sus equivalentes R, L y C, para simular un sistema subamortiguado, sobreamortiguado y de amortiguamiento crítico (determine el factor de amortiguamiento, la frecuencia natural no amortiguada, el tiempo pico, tiempo de levantamiento y el tiempo de establecimiento en cada caso). Para cada caso, grafique el diagrama de polos y ceros, el diagrama de Bode, la respuesta impulso, respuesta escalón y respuesta rampa. Repita el proceso para modo lazo cerrado.

masa (bloque) = m, resorte = k, amortiguador = c.
Fuerza externa aplicada sobre la masa: $F_E(t)$ → hacia arriba.
Fuerza del resorte: F_s
$F_s = Ky(t)$ → opuesta al desplazamiento.
$F_d = Cy'(t)$ → opuesta a la velocidad) ; $F = m \cdot a$

Tomamos $y(t)$ como el desplazamiento
$my''(t) = F_E(t) - F_d(t) - F_s(t)$
$my''(t) + Cy'(t) + Ky(t) = F_E(t)$ → EDO del sistema. (1)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = s^n X(s)$$

Despejando → $\dfrac{Y(s)}{F_E(s)} = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$

$$F_E(s) = \mathcal{L}\{my''(t) + cy'(t) + ky(t)\}$$
$$= ms^2 Y(s) + csY(s) + kY(s)$$
$$= Y(s)(ms^2 + cs + k)$$

$H(s) = \dfrac{1}{ms^2 + cs + k}$ → Función de Transferencia

Se calcula la función de transferencia del circuito:
$i_1(t) = i_C(t) + i_R(t)$ → $i_C(t) = C\dfrac{d}{dt}V_C(t)$; $i_R = \dfrac{1}{R}V_R(t)$; $C \| R \rightarrow V_C(t) = V_R(t) = V_o(t)$.

Reemplazando los valores
→ $i_1(t) = C\dfrac{d}{dt}V_o(t) + \dfrac{1}{R}V_o(t)$

$$V_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t) = V_i(t) - V_o(t) \rightarrow \frac{d}{dt}i_L(t) = \frac{V_i(t) - V_o(t)}{L} \quad (*)$$

Si le aplicamos derivada a: $i_L(t) = C\frac{d}{dt}V_o(t) + \frac{1}{R}V_o(t)$

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = C\frac{d^2}{dt^2}V_o(t) + \frac{1}{R}\frac{d}{dt}V_o(t) \quad (**)$$ Igualando $(*)$ y $(**)$ obtenemos:

$$\frac{V_i(t) - V_o(t)}{L} = C\frac{d^2}{dt^2}V_o(t) + \frac{1}{R}\frac{d}{dt}V_o(t) \rightarrow V_i(t) - V_o(t) = CL\frac{d^2}{dt^2}V_o(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}V_o(t)$$

$$\rightarrow V_i(t) = CL\frac{d^2}{dt^2}V_o(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}V_o(t) + V_o(t) \rightarrow \text{EDO del circuito.}$$

$$V_i(s) = CLs^2V_o(s) + \frac{1}{R}sV_o(s) + V_o(s) \rightarrow V_i(s) = V_o(s)\left(CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right)$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CLs^2 + Ls/R + 1}\left(\frac{R}{R}\right) = \frac{R}{RCLs^2 + Ls + R} \rightarrow \text{Función de transferencia.}$$

$\rightarrow$ Para que $k \neq 1$ $\rightarrow$ $\frac{1}{C}V_i(t) = L\frac{d^2}{dt^2}V_o(t) + \frac{L}{CR}\frac{d}{dt}V_o(t) + \frac{1}{C}V_o(t) \quad (2)$

Comparamos término a término (1) y (2) $\rightarrow$ $m = L$, $k = 1/C$, $F_E(t) = V_i(t)/C$, $c = 1/RC$, $y(t) = V_o(t)$

$$H(s)_{\circledast} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \rightarrow \text{para simplificar} \rightarrow H(s)_{\circledast} = \frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + cs/m + k/m}$$

Para llevarlo a su forma estándar de segundo orden:
Si la frecuencia natural no amortiguada es $= \omega_n^2 = k/m \rightarrow \omega_n = \sqrt{k/m}$
$2\xi\omega_n = c/m$. ξ es factor de amortiguamiento adimensional despejando:
$\xi = c/2m\omega_n = c/2m\sqrt{k/m} = c/2\sqrt{km}$; si no hay amortiguamiento $c = 0$.

$$H(s) = \frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para los polos $\rightarrow s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$.

usando $P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \pm 4ac}}{2a} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2}$

$$= \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2(\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Para subamortiguado : $0 \leq \xi < 1 \rightarrow \xi^2 - 1 < 0$: $\sqrt{\xi^2 - 1} = j\sqrt{1-\xi^2}$

$P_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}$ → la frecuencia amortiguada es la frecuencia angular $w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$

Tiempo de establecimiento (2%) : $T_s = \dfrac{4}{\xi w_n}$

Tiempo de pico : $T_p = \dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Para amortiguamiento crítico : $\xi = 1$ $P_{1,2} = -w_n$

Para sobreamortiguado $\xi > 1 \rightarrow \xi^2 - 1 > 0$: $P_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n\sqrt{1-\xi^2}$

Ahora H(s) con lazo cerrado :

$$H(s) = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Para lazo cerrado hay una realimentación :

$$G_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}}{1 + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}} = \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}}{\frac{m(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)+1}{m(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)}}$$

$$= \frac{1}{m(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)}\cdot\frac{m(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)}{m(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)+1} = \frac{1}{m(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)+1}$$

$$= \frac{1/m}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2 + 1/m}$$

• Respuesta al impulso (subamortiguado) : Si $F_E(t) = \delta(t) \rightarrow F_E(s) = 1$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{Y(s)}{1} = Y(s) \rightarrow H(s) = Y(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}$$

$(s+\xi w_n)^2 + w_n^2(1-\xi^2) = (s+\xi w_n)^2 + w_d^2 \rightarrow \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{(s+\xi w_n)^2 + w_d^2}$

Si $\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2} \leftrightarrow e^{-at}\dfrac{\operatorname{sen}(bt)}{b}$ $\quad \begin{cases} H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) \end{cases}$

$$h(t) = \frac{1}{m}e^{-\xi w_n t}\frac{\operatorname{sen}(w_d t)}{w_d} = \frac{1}{m w_d}e^{-\xi w_n t}\operatorname{sen}(w_d t)$$

• Respuesta al escalón (subamortiguado) : Si $F_E(t) = u(t) \rightarrow F_E(s) = 1/s$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} \quad Y(s) = F_E(s)\, H(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}$$

Numerador $\rightarrow Bs+C = B((s+E\omega_n)-E\omega_n)-E\omega_n)+C = B(s+E\omega_n)+(C-BE\omega_n)$

Denominador $\rightarrow (s+E\omega_n)^2+\omega_n^2(1-E^2) = (s+E\omega_n)^2+\omega_d^2$

$$\frac{1}{m} = A(s^2+2E\omega_n s+\omega_n^2)+(Bs+C)s$$

$$\frac{1}{m} = As^2+A2E\omega_n s+A\omega_n^2+Bs^2+sC$$

$$\frac{1}{m} = (A+B)s^2+(A2E\omega_n+C)+A\omega_n^2$$

si comparamos coeficientes de ambos lados:

$$A+B=0 \quad , \quad A2E\omega_n+C=0 \quad , \quad A\omega_n^2 = 1/m.$$

$$A = \frac{1}{m\omega_n^2}, \quad DC \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{m\omega_n^2}$$

$$A = \frac{1}{k}, \quad B = -A = -\frac{1}{m\omega_n^2}, \quad C = -A2E\omega_n = -2E\omega_n\frac{1}{m\omega_n^2} = -\frac{2E}{m\omega_n}$$

$$\frac{Bs+C}{s^2+2E\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{Bs+C}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2} = B\frac{(s+E\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}+\frac{(C-BE\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

$$y(s) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{s^2+2E\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s} = A\frac{1}{s}+B\frac{(s+E\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}+\frac{(C-BE\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

$$y(s) = A\frac{1}{s}+B\frac{(s+E\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}+\frac{(C-BE\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

usando $- \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at}\cos(bt).$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at}\,\mathrm{sen}(bt) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}e^{-at}\,\mathrm{sen}(bt).$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = A\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+B\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+E\omega_n)}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}\right\}+\ldots$$

$$\ldots+(C+BE\omega_n)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+E\omega_n)^2+\omega_d^2}\right\}.$$

$$y(t) = A+Be^{-E\omega_n t}\cos(\omega_d t)+\frac{(C-BE\omega_n)}{\omega_d}e^{-E\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t)$$

$$= A+e^{-E\omega_n t}\left(B\cos(\omega_d t)+\frac{C-BE\omega_n}{\omega_d}\,\mathrm{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{-\xi\omega_n t}\left(-\frac{1}{m\omega_n^2}\cos(\omega_d t) + \left(-\frac{2\xi}{m\omega_n} - \left(-\frac{1}{m\omega_n^2}\xi\omega_n\right)\right)\frac{1}{\omega_d}\,\text{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$= \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{\xi\omega_n t}\left(-\frac{1}{m\omega_n^2}\cos(\omega_d t) + \left(-\frac{2\xi}{m\omega_n} + \frac{\xi}{m\omega_n}\right)\frac{1}{\omega_d}\,\text{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$= \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{-\xi\omega_n t}\left(-\frac{1}{m\omega_n^2}\cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{m\omega_n\omega_d}\,\text{sen}(\omega_d t)\right)$$

$$= \frac{1}{m\omega_n^2}\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\,\text{sen}(\omega_d t)\right)\right) \quad \text{Si } k = m\omega_n^2$$

$$= \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\,\text{sen}(\omega_d t)\right)\right)$$

- Respuesta al escalón (amortiguamiento crítico): $\xi = 1 \rightarrow \omega_d = 0$

$$Y(s) = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\xi\omega_n} + \frac{C}{(s+\omega_n)^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{m} = A(s+\omega_n)^2 + Bs(s+\omega_n) + Cs$$

$$A = \frac{1}{m\omega_n^2}; \quad B = \frac{1}{m\omega_n^2}; \quad C = -\frac{1}{m\omega_n}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+\xi\omega_n}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{(s+\omega_n)^2}\right\}$$

$$= A + Be^{-\omega_n t} + Cte^{-\omega_n t}$$

$$= \frac{1}{m\omega_n^2} - \frac{1}{m\omega_n^2}e^{-\omega_n t} - \frac{1}{m\omega_n}te^{-\omega_n t}$$

$$= \frac{1}{m\omega_n^2}\left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right) \quad \text{Si } k = m\omega_n^2$$

$$= \frac{1}{k}\left(1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right)$$

• Respuesta al escalón (sobreamortiguado): $P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

$$\frac{1}{m} = A(s-s_1)(s-s_2) + Bs(s-s_2) + Cs(s-s_1)$$

Para $s=0 \rightarrow A = \dfrac{1}{ms_1s_2} = \dfrac{1}{m\omega_n^2}$

Para $s=s_1 \rightarrow B = \dfrac{1}{ms_1(s_1-s_2)}$

Para $s=s_2 \rightarrow C = \dfrac{1}{ms_2(s_2-s_1)}$

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s-s_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s-s_2}\right\}$$

$$= A + Be^{s_1t} + Ce^{s_2t}$$

$$= \frac{1}{m\omega_n^2} + \frac{1}{ms_1(s_1-s_2)} e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\xi^2})t} + \frac{1}{ms_2(s_2-s_1)} e^{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}$$

• Respuesta a la rampa

$$y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$ si $F_E(t) = r(t) = tu(t) \rightarrow F(s) = R(s) = 1/s^2$

$$H(s) = \frac{y(s)}{F_E(s)} \rightarrow y(s) = F_E(s)H(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{m} = As(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) + B(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) + (Cs + D)s^2$$

$$As(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = As^3 + A2\xi\omega_n s^2 + A\omega_n^2 s$$

$B(s^2+2\xi w_n s+w_n^2) = Bs^2 + B2\xi w_n s + Bw_n^2$

$(Cs+D)s^2 = Cs^3 + Ds^2$

$\frac{1}{m} = (A+C)s^3 + (A2\xi w_n + B + D)s^2 + (Aw_n^2 + B2\xi w_n)s + Bw_n^2$

Comparamos términos a cada lado:

$A+C=0$; $C=-A$; $C=\frac{2\xi}{mw_n^3}$

$A2\xi w_n + B + D = 0$; $D = -A2\xi w_n - B$; $D = \frac{2\xi}{mw_n^3}2\xi w_n - \frac{1}{mw_n^2}$; $D = \frac{4\xi^2}{mw_n^2} - \frac{1}{mw_n^2}$; $D = \frac{4\xi^2-1}{mw_n^2}$

$Aw_n^2 + B2\xi w_n = 0$; $Aw_n^2 = -B2\xi w_n$; $Aw_n^2 = -\frac{1}{mw_n^2}2\xi w_n$; $A = \frac{-2\xi}{mw_n^3}$

$Bw_n^2 = \frac{1}{m}$; $B = \frac{1}{mw_n^2}$

• Para subamortiguado:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2\xi w_n s + w_n^2}$$

Numerador → $Cs+D = C((s+\xi w_n) - \xi w_n) + D = C(s+\xi w_n) + (D - C\xi w_n)$
Denominador → $s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = (s+\xi w_n)^2 + w_d^2$

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C(s+\xi w_n)}{(s+\xi w_n)^2 + w_d^2} + \frac{(D+C\xi w_n)}{(s+\xi w_n)^2+w_d^2}$$

$$y(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\xi w_n)}{(s+\xi w_n)^2+w_d^2}\right\} + \dots$$

$$\dots + (D+C\xi w_n)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\xi w_n)^2+w_d^2}\right\}$$

$$y(t) = A + Bt + Ce^{-\xi w_n t}\cos(w_d t) + (D - C\xi w_n)\frac{1}{w_d}e^{-\xi w_n t}\operatorname{sen}(w_d t)$$

$$= -\frac{2\xi}{mw_n^3} + \frac{t}{mw_n^2} + \frac{2\xi}{mw_n^3}e^{-\xi w_n t}\cos(w_d t) + \left(\frac{4\xi^2-1}{mw_n^2} - \frac{2\xi^2}{mw_n^2}\right)\cdot\dots$$

$$\dots\cdot\frac{1}{w_d}e^{-\xi w_n t}\operatorname{sen}(w_d t).$$