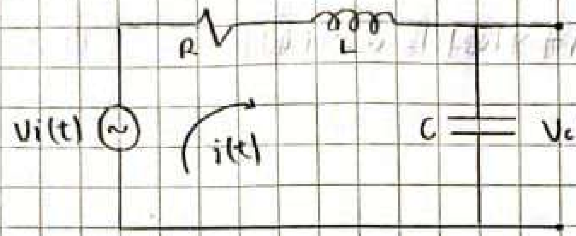
Tarea - señales y sistemas

1. Hallar la E.D.O del circuito.



$R = 1\,k\Omega$
$L = 180\,mH$
$C = 120\,\mu F$

Circuito en serie $\rightarrow$ $V_i(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_c(t)$
$i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_c(t)$

$V_R(t) = R\, i_L(t)$

$V_L(t) = L \dfrac{d}{dt} i_L(t)$

$i_c(t) = C \dfrac{d}{dt} V_c(t)$ → Todo en términos de C

$V_c(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)\, d\tau$ — se deja indicado

Reemplazando lo anterior:

$$V_i(t) = C\frac{d}{dt}V_c(t)\,R + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{d}{dt}V_c(t)\right) + V_c(t)$$

$$V_i(t) = LC\frac{d^2}{dt^2}V_c(t) + RC\frac{d}{dt}V_c(t) + V_c(t) \rightarrow \text{EDO}$$

Sustituyendo los valores de R, L y C:

$$(180\cdot 10^{-3})(120\cdot 10^{-6})\frac{d^2}{dt^2}V_c(t) + (1\cdot 10^{3})(120\cdot 10^{-6})\frac{d}{dt}V_c(t) + V_c(t) = V_i(t)$$

$$V_i(t) = 2{,}16\cdot 10^{-5}\frac{d^2}{dt^2}V_c(t) + 0{,}12\frac{d}{dt}V_c(t) + V_c(t) \longrightarrow \text{EDO}$$

2. Hallar la función de transferencia $H(w)$ en frecuencia:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} \rightarrow$$ Hacemos uso de Fourier: Y: salida X: Entrada

$$F\{y(t)\} = Y(w) \qquad F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = (jw)^2\, Y(w)$$

$$F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = jw\, Y(w) \qquad F\{x(t)\} = X(w)$$

Reemplazando en la EDO:

$$X(w) = LC(jw)^2 Y(w) + RCjw\, Y(w) + Y(w)$$

Sacamos $Y(w)$ como factor común para expresar como: $H(w) = Y(w)/X(w)$:

$$X(w) = (LC(jw)^2 + RCjw + 1)\, Y(w)$$

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{1}{LC(jw)^2 + RCjw + 1} \rightarrow$$ Función de transferencia en frecuencia.

Reemplazando los valores:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{1}{2{,}16 \cdot 10^{-5}(jw)^2 + 0{,}12(jw) + 1} \rightarrow$$ Función de transferencia en frecuencia.

- Diagrama de Bode [dB]:

$$H(w) = \frac{1}{2{,}16 \cdot 10^{-5}(-w^2) + 0{,}12(jw) + 1}$$ Real = $1 - 2{,}16 \cdot 10^{-5} w^2$
Imaginario = $0{,}12\, jw$

Magnitud $|H(w)| = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - 2{,}16 \cdot 10^{-5} w^2)^2 + (0{,}12\, jw)^2}}$

Magnitud en dB $|H(w)|_{dB} = 20 \log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(1 - 2{,}16 \cdot 10^{-5} w^2)^2 + (0{,}12\, jw)^2}}\right)$

Ángulo ó fase $\angle H(w) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{0{,}12\, w}{1 - 2{,}16 \cdot 10^{-5} w^2}\right)$

- Simulación de Bode: En Python.

- ¿Por qué el diagrama de Bode se hace en dB?

Se usa la escala en decibelios (dB) en los diagramas de Bode porque simplifica muchísimo el análisis de sistemas. Al aplicar logaritmos, los productos que aparecen en una función de transferencia (por ejemplo cuando un sistema tiene varios polos y ceros) se convierten en sumas. Esto permite analizar cada polo y cada cero por separado y luego simplemente sumar sus efectos, lo cual lo hace más fácil construir y entender la gráfica completa.

Además, la escala en dB comprime valores muy grandes y muy pequeños permitiendo ver el comportamiento del sistema en un solo eje sin perder detalle en ninguna región de frecuencias. Como en estos ejercicios se trabaja con señales de voltaje o amplitud, la magnitud se expresa como $20\log_{10}|H(\omega)|$, que es la forma correcta para este tipo de señales.

Gracias a esta representación logarítmica, las pendientes muestran patrones muy claros: cada polo aporta aproximadamente -20 dB por década y cada cero aporta +20 dB por década. Esto facilita identificar zonas planas, caídas, subidas y frecuencias de corte. En conjunto, usar dB vuelve más intuitivo analizar la respuesta en frecuencia, interpretar el comportamiento del circuito y verificar si los cálculos y diagramas obtenidos son correctos.

3. Hallar la función de transferencia $H(s)$ en el dominio de Laplace:

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ → Hacemos uso de Laplace: $Y(s)$ = salida, $X(s)$ = entrada

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ $\qquad$ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = s^2 Y(s)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s)$ $\qquad$ $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$

Reemplazando en la EDO:

$X(s) = LCs^2Y(s) + RCsY(s) + Y(s)$

Sacamos $Y(s)$ como factor común para expresar como $= H(s) = Y(s)/X(s) =$

$X(s) = (LCs^2 + RCs + 1)\,Y(s)$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$ → Función de transferencia en el dominio de Laplace

Reemplazando los valores:

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{2{,}16\times10^{-5}s^2 + 0{,}12s + 1}$ → Función de transferencia en el dominio de Laplace.

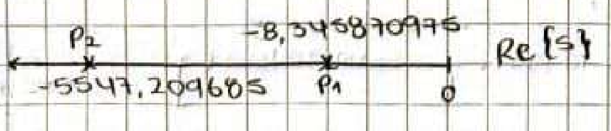
- Diagrama de polos y ceros:

Numerador $= 1$ → No hay ceros

Denominador $= 2{,}16\cdot10^{-5}s^2 + 0{,}12s + 1 = 0$ → 2 polos

Raíces → $P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0{,}12 \pm \sqrt{(0{,}12)^2 - 4(2{,}16\cdot10^{-5})(1)}}{2(2{,}16\cdot10^{-5})}$

$P_{1,2} = \frac{-0{,}12 \pm \sqrt{0{,}0143136}}{4{,}32\times10^{-5}}$ → $P_1 = -8{,}345870975$, $P_2 = -5547{,}209685$



No hay parte imaginaria.

$H(s) = \frac{1}{2{,}16\times10^{-5}(s-P_1)(s-P_2)}$ → Función de transferencia en el dominio de Laplace

4. Hallar $h(t)$ desde ③

$x(t) = \delta(t) \quad X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$
$H(s) = Y(s) \rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

Sabemos que $x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = 1$

De $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ despejamos $Y(s) = H(s)X(s)$ pero $X(s) = 1$

Entonces $Y(s) = H(s)$ además para una entrada impulso, la salida será también impulso.

$y(t) = h(t)$ sabemos que $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

$H(s) = \frac{K}{(s-P_1)(s-P_2)}$ Del punto ③ $\rightarrow H(s) = \frac{1}{2,16\times10^{-5}(s-P_1)(s-P_2)}$

$K = \frac{1}{2,16\times10^{-5}} = 46296,2963 \quad P_1 = -8,345870975 \quad P_2 = -5547,209685$ Usamos fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{A}{s+8,34587095} + \frac{B}{s+5547,209685}$$

Para $\frac{K}{(s-P_1)(s-P_2)} \rightarrow A = \frac{K}{P_1-P_2}$; $B = -\frac{K}{P_1-P_2} = -A$

$A = \frac{46296,2963}{5538,863814} = 8,358446399 \quad B = -A = -8,358446399$

$$H(s) = 8,358446399\left(\frac{1}{s+8,345870975} - \frac{1}{s+5547,209685}\right)$$

Se halla la transformada inversa.

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = 8,358446399\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+8,345870975}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5547,209685}\right\}\right]$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}u(t)$

$$h(t) = 8,358446399\,u(t)\left[e^{-8,345870975t} - e^{-5547,209685t}\right]$$

5. Hallar $y(t)$ desde ③

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = H(s)\,\mathcal{L}\{u(t)\}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\,\mathcal{L}\{u(t)\}\}$$

$X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$ Del punto ③ tenemos:

$$H(s) = \frac{1}{2,16\cdot 10^{-5}\,(s - p_1)(s - p_2)}$$

$K = 46296,2963 = 1/2,16\cdot 10^{-5}$
$p_1 = -8,345870975$
$p_2 = -5547,209685$

$$Y(s) = \frac{K}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$ Usando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}$$

$A = \frac{1}{1} = 1$; $\overset{A/p_1}{B} = \frac{8,358446399}{-8,345870975} \approx -1$

$$\overset{B/p_2}{C} = \frac{-8,358446399}{-5547,209685} \approx 0 \rightarrow y(t) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s - p_1} + \cancel{\frac{0}{s - p_2}}^{\,0}$$

Se halla la transformada inversa:

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}}_{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - p_1}\right\} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + a}\right\} = e^{-at}u(t)$$

$$y(t) = \cancel{e^{-0t}}^{\,1}\,u(t) - e^{-8,3458709975t}\,u(t) = u(t)\left(1 - e^{-8,3458709975t}\right)$$