Universidade Federal do Espírito Santo
CEUNES-UFES

Disciplina: Teoria dos Grafos
Professora: Luciana Lee
Aluna: Mariana Ferreira Rocha

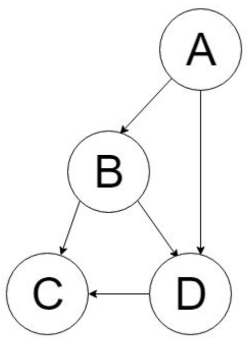
Lista de Exercícios I

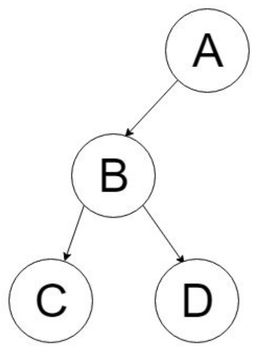
Questão 1:

a) Não. Como T é uma árvore geradora de G não é necessário que T possua todas as arestas de G, o que significa que mesmo se v tiver um grau maior que 1 em T, o que faz com que v se torne um vértice de corte em T, não significa que em G também será uma vértice de corte, pois como dito antes G pode ter mais arestas que podem ser pontes para os vértices que v tem ligação. Como por exemplo:

G = (V, E); V={A,B,C,D};
E={(A,B), (A,D), (B,C), (B,D), (D,C)}

T = (V, E); V={A,B,C,D};
E={(A,B), (B,C), (B,D)}





Pode-se notar por esse exemplo que o vértice B tem um grau maior que 2 em T mas ele não é um vértice de corte em G.

b) Sim. Pois se v é um vértice de corte em G significa que ele tem uma ligação com pelo menos dois vértices (v1 e v2) que com a remoção de v ficariam desconexo, e como a árvore geradora T que contém todos os vértices de G, o vértice v também tem que estar contido em T e como ele é um vértice de corte significa que existe apenas uma aresta entre v e os vértices v1 e v2 então essa será também as arestas contidas em T, sendo assim v também terá um grau maior maior que 1 em T.

c) Não. Como visto na letra b dessa questão, se v é um vértice de corte em G então em v terá em T um grau maior que 1, sendo assim v não pode ser uma folha de T pois uma folha tem grau 1.

Questão 2:

Prova que todo grafo conexo com n vértices e n - 1 arestas é árvore.

Provando por Indução:

Considerações:

G = grafo conexo

n = quantidade de vértices

m= quantidade de arestas

Como queremos provar que um grafo conexo simples com n - 1 arestas é uma árvore então precisamos também considerar que não existe ciclos neste grafo.

Caso base:

Para n = 1, temos que m = 0, pois se tivéssemos uma aresta seria um ciclo.

Caso n > 1:

Uma árvore com n>=2 possui no mínimo dois vértices de grau 1, sabendo disso vamos assumir x como sendo um vértice de um grau em G. O subgrafo G − x é conexo, pois a retirada de um vértice de grau 1 de um grafo não altera sua propriedade de conectividade e ele continua sendo acíclico, pois como estamos retirando vértices de grau 1 não tem como ter ciclo nele então o ciclo estaria em G mas já umas das afirmativas iniciais é que não tem ciclos em G. Então o subgrafo G0 = G − x é uma árvore.

Aplicando a hipótese de indução:

Como tiramos um vértice x de grau 1 a quantidade de vértices e arestas do subgrafo G0 vai ser:

$$mG0 = mG - 1$$
$$nG0 = nG - 1$$

Então para o caso geral do subgrafo G0 termos:

$$mG0 = nG0 - 1$$
$$mG - 1 = nG - 1 - 1$$
$$mG = nG - 1$$

Podendo assim deduzir: m = n -1

Assim podemos concluir que um grafo conexo simples com n - 1 arestas não possui ciclos e sendo assim é uma árvore.

Questão 3:

Prova de que um grafo T é árvore geradora de um grafo G se e somente se T é subgrafo conexo minimal de G.

(IDA): Se T é uma árvore geradora de G, então T é um grafo conexo. Por absurdo, vamos supor então que T não é um subgrafo conexo minimal, então para um n é uma aresta de T, se tiramos a aresta n de T ele continua conexo, chegamos aqui em um absurdo, pois se removermos um aresta da árvore ela deixa de ser conexa sendo assim T possui a quantidade mínima de arestas para o grafo continuar conexo o que a torna subgrafo conexo minimal de G.

(VOLTA): Se T é um subgrafo conexo minimal ela possui a quantidade mínima de aresta necessária para o grafo continuar conexo, ou seja, para um subgrafo ser conexo minimal de G é necessário que ele tenha n - 1 arestas e como visto em na questão 2 subgrafo n - 1 arestas é uma árvore, portanto T é árvore geradora.

Questão 4:

Prova de que toda árvore T tem pelo menos Δ(T) folhas:

Considerações:

v = um vértice pertencente a T
k = número de folhas em T

Então o que queremos provar é que k folhas ≥ Δ(T)

Caso base:

Quando a árvore tem apenas um nó, ou seja, esse será também um nó folha, que tem grau 0. Então k=1 e Δ(T) =0, sendo a condição k folhas ≥ Δ(T).

Para casos onde k>1:

Assumindo o vértice v como sendo o vértice de maior grau em T, tendo n filhos. Se todos os filhos de v forem folhas então k folhas ≥ Δ(T) = Δ(e) = n e assim mantendo a validade da afirmação. Agora no caso de alguns ou de todos os filhos de v não sejam folhas, temos a certeza de que o grau de cada um deles será maior ou igual, pois os filhos de v ou suas ramificações tem que chegar a um nó folha, sendo assim, Δ(T) = Δ(e) > n, ou seja, k folhas ≥ Δ(T) e assim a propriedade continua sendo satisfeita.

Questão 5:

Como sempre uma aresta que sai de um vértice incide em outro vértice os valores de $\sum_{v \in V} \delta^{+}(v)$ sempre vai ser igual $\sum_{v \in V} \delta^{-}(v)$ e como essas são as únicas arestas existentes em grafo então pode-se afirmar que $\sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v)$.

Questão 6:

a) Uma matriz de adjacência para um grafo G com n vértices é uma matriz quadrado de ordem n, ou seja, com n^2 elementos. Considerando que a diagonal principal será sempre igual a zero podemos então podemos eliminá-la, ou seja, agora temos n^2-n elementos. Como a matriz G de adjacência é simétrica metade da matriz é repetida então realmente temos (n^2 - n)/2 elementos necessários para serem armazenados. Com isso podemos concluir:

$$N(n) \ = \ \frac{(n^2 - n)}{2}$$

b) A função f(u, v) é a função que indica a posição que os elementos devem ser armazenados na matriz de adjacência tradicional era simples f(u, v) = M[u][v], mas como estamos modificando e otimizando em vez de usar uma matriz usaremos um único vetor que ficará no seguinte formato:

Então para esse método f(u,v) vai retornar m[u*(n+v)].

Mas como vimos na letra não precisamos de um formato nxn para armazenar então dessa forma precisamos descontar os elementos não são utlizados, que é no caso metade da matriz, esse desconto é dado em forma de um progressão matemática. A fórmula fechada da PA encontrada pela técnica de Gauss. Com isso a fórmula do mapeamento com deslocamento fica:

$$f(u, v) \ = \ u \ \star n \ + v \ - \ \frac{(u + 1)(u + 2)}{2}$$

Questão 7:

c) Um subgrafo G' é gerador do grafo G se ele tiver todos os vértices de G. Com isso temos que V'=V. Como cada aresta do grafo é liga a par de vértices, se G' tem n vértices temos que a quantidade de arestas é dado por C_2^n . Mas como o número de arestas que leva a esse conjunto pode variar de 0 a m arestas de acordo com o subgrafo gerador temos que o número total de subgrafos geradores é:

$$\sum_{q=0}^{m} C_q^{C_2^n}$$

d) O número de subgrafo de G.

Para saber a quantidade de subgrafos possíveis é necessário analisar para cada vértice as possibilidades de disposição de todas as arestas dele e repetir essa análise para todos os vértices, e o somatório total dessas analise será o número de subgrafos possível.

Questão 9:

Prova:

Considerações:

T é uma árvore.

v é um nó de T.

Caso Base: $\delta_T(v) = 1$

Como o grau de v é um isso significa que ele é um nó folha então v não é um vértice de corte então T- v continua sendo conexo e $|C(T - v)| = \delta_T(v) = 1.$

Caso Geral: $\delta_T(v) > 1$

Ao se remover v de T ocorre também a remoção das arestas incidentes a ele, e com T é uma árvore esse caminho é único, então os k vértices ligados a v se tornaram componentes conexas. Com isso temos que $|C(T - v)| = \delta_T(v) = k.$

Questão 10:

Como a busca em largura com r sendo o vértice inicial retorna o caminho mínimo entre r e qualquer vértice pertencente a T, então essa afirmação é verdadeira. Pois a busca em largura funciona da seguinte forma, a partir do vértice inicial r ela vai adicionando em uma fila todos os vértices adjacentes, depois de terminar essa exploração deve removê-lo da fila e repetir esse processo, sempre pegando o primeira da fila, até que a fila esteja vazia garantindo que todos os nós tenham sido visitados e com um caminho mínimo entre v e qualquer outro vértice de T.

Questão 11:

a) As árvores em largura de um grafo completo, resultará em uma árvore com dois níveis o primeiro será o raiz e o segundo será os n - 1 nós folhas.

b) As árvores em profundidade de um grafo completo terá uma altura será no máximo a quantidade de vértices do grafo e todos os nós terão arestas de retorno para qualquer vértice que não seja um filho da raiz.

Questão 12:

a)

vértice	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
pré-ordem	1	10	8	7	4	9	6	2	3	5
pós-ordem	10	3	2	5	8	4	6	9	1	7

b) Vértices Corte: e, h e d
Arestas de Corte: e-h e d-c

Questão 13:

a) IDA: Para T ser um vértice de corte é necessário que ele esteja ligado no mínimo dois vértice que quando T removido eles ficaram desconectados e como T é uma árvore esse caminho era único. Como T é um raiz esse dois vértices ligado a ele seriam seus filhos.
VOLTA: Caso T tivesse um filho(v) e como T é raiz então T seria a ponta de um grafo e ao removê-lo o grafo continuaria conexo e sendo assim T não seria um vértice de corte. Então para T ser um vértice de corte ele precisa ter mais de um filho.

b) IDA: Seja v um vértice não raiz de T que é vértice de corte em G. Então, existe nos p e w, pai e filho de v, respectivamente tais que, após a remoção de v estarão separados e em componentes conexas distintas. Suponha, por absurdo, que exista um descendente t de w que é um um vizinho e ancestral próprio a de v. Desse modo, wTt(t; a)aTp seria um caminho que leva de w a p caso v fosse removido. Isso implicaria que v não é um vértice de corte.
VOLTA: Seja v um vértice de T que possui um filho w tal que não exista descendente de w que é vizinho de um ancestral próprio de v. Suponha que exista caminho que leva de w ao pai de v em G - v. Então, tal caminho deve ter, no mínimo, uma aresta fora da árvore. Mas, como T é gerada por um percurso em profundidade, tal caminho deveria ligar w a um ancestral próprio de v. Absurdo!

c) IDA: Considere (u; v) uma aresta uma aresta de corte de G. Suponha, sem perda de generalidade, que u é pai de v. Desta forma, u é vértice de corte em G e, o sendo, pelo item b), não há aresta em G que ligue um descendente de v a um ancestral de u e a propriedade é válida.

VOLTA: De forma similar a segunda parte da prova do item anterior, considere (u; v) em T tal que nenhuma aresta em G conecta um descendente de v a um ancestral de u. Remova (u; v) de G. Se houvesse algum caminho que conectasse u a v, este caminho teria uma aresta fora da árvore. No entanto, como T é uma árvore que é obtida a partir de uma busca em profundidade, tal aresta deveria ligar exatamente um descendente de v a um ancestral de w. O que contradiz a hipótese. O que finaliza a prova.

.