UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ÁLGEBRA VECTORIAL

NOMBRE DEL ALUMNO:

Arias Quintero Luis Antonio

García Márquez Luis Yael

Gómez Urbano Mariana

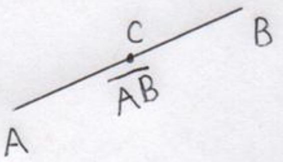
Luna Rosas Antonio

Velázquez Martínez Karla Andrea

EJERCICIOS									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

1.

1.- Sea $C(2,-3,5)$ el punto medio del segmento dirigido $\overline{AB}$. Empleando algebra vectorial, determinar las componentes de los puntos A y B, si las componentes escalares de $\overline{AB}$ sobre los ejes coordenados x, y, z son 4, −8 y 2 respectivamente



$\overline{AB} = (4,-8,2)$

$A(a_x, a_y, a_z)$

$B(b_x, b_y, b_z)$

1.- Solución

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (b_x - a_x,\ b_y - a_y,\ b_z - a_z) = (4,-8,2)$$

$$b_x - a_x = 4,\quad b_y - a_y = -8,\quad b_z - a_z = 2$$

C es punto medio de $\overline{AB}$

$$\therefore \frac{a_x + b_x}{2} = 2,\quad \frac{a_y + b_y}{2} = -3,\quad \frac{a_z + b_z}{2} = 5$$

$$\begin{matrix} -\cancel{a_x} + b_x = 4 \\ \cancel{a_x} + b_x = 4 \end{matrix} = 2b_x = 8;\ \underline{b_x = 4}\ \therefore a_x = 0$$

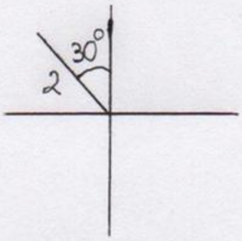
$$\begin{matrix} -\cancel{a_y} + b_y = -8 \\ \cancel{a_y} + b_y = -6 \end{matrix} = 2b_y = -14;\ \underline{b_y = 7}\ \therefore \underline{a_y = 1}$$

$$\begin{matrix} -\cancel{a_z} + b_z = 2 \\ \cancel{a_z} + b_z = 10 \end{matrix} = 2b_z = 12;\ \underline{b_z = 6}\ \therefore \underline{a_z = 4}$$

Entonces $\underline{A(0,1,4)}$ y $\underline{B(4,-7,6)}$

2.

2.- Sea el punto P que esta contenido en el plano YZ, está a dos unidades de distancia del origen de coordenadas, de ordenada negativa y cuyo vector de posición forma un ángulo de 30° con el eje Z; y sea el punto $Q(4, 8, 2\sqrt{3})$. Empleando algebra vectorial, calcular la distancia entre los puntos P y Q.



$\text{Sen } 30° = \frac{y_0}{2}$; $y_0 = 2 \text{ sen } 30° \doteq -1$

$\cos 30° = \frac{z_0}{2}$; $z_0 = 2 \cos 30° = \sqrt{3}$

$\therefore P(0, -1, \sqrt{3})$

$\overline{PQ} = (4, 8, 2\sqrt{3}) - (0, -1, \sqrt{3}) = (4, 9, \sqrt{3})$

$|\overline{PQ}| = \sqrt{4^2 + 9^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{16 + 81 + 3} = 10\, u_L$

3.

3.- Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, tales que $|\bar{u}|=15$ y $|v|=5$. Si el vector $\bar{u}$ tiene la misma dirección que el vector $\bar{a}=3i+4j$ y si el vector $\bar{v}$ tiene la misma dirección que el vector $\bar{c}=(-8,0,6)$.

a) Calcular el ángulo que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

b) Obtener el módulo del vector $\bar{u}+\bar{v}$

c) Determinar las componentes del vector $\bar{u}+\bar{v}$

a) $|\bar{u}|=15$; $|\bar{v}|=5$ $\qquad \bar{a}=(3,4,0)$; $|\bar{a}|=\sqrt{25}=\underline{5}$

$\bar{c}=(-8,0,6)$; $|\bar{c}|=\sqrt{100}=\underline{10}$

$3(3,4,0)=\bar{u}$; $\bar{u}=(9,12,0)$; $|\bar{u}|=\sqrt{225}=\underline{15}$

$\bar{v}=\frac{1}{2}(-8,0,6)=(-4,0,3)$; $|\bar{v}|=\sqrt{25}=\underline{5}$

Entonces $\cos\theta=\dfrac{(9,12,0)\cdot(-4,0,3)}{(15)(5)}=\dfrac{-36}{45}=\underline{\dfrac{-4}{5}}$

$\theta=\text{ang}\cos\left(\frac{-4}{5}\right)$; $\underline{\theta=143.1301}$

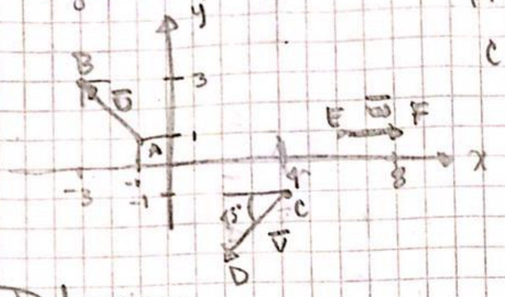
b) $\bar{u}+\bar{v}=(9,12,0)+(-4,0,3)=\underline{(5,12,3)}$

$|\bar{u}+\bar{v}|=\sqrt{178}$

c) $\underline{(5,12,3)}$

4.

(4) Sean los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ que se muestran en la siguiente figura:



$A(-1,1)$ $B(-3,3)$

$C(4,-1)$ $F(8,1)$

$\overline{AB} = \bar{u}$

$\overline{AB} = (-2,2) = \bar{u}$

$\overline{AB} = 2(-1,1)$

$|\bar{u}| = 2\sqrt{2}$

$E(x,1)$

Determinar

a) La componente escalar de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{w}$
b) La componente vectorial de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{w}$
c) La componente escalar de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{v}$.
d) La componente vectorial de $\bar{v}$ en la dirección de $\bar{u}$.

Si el valor absoluto de la componente escalar de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{v} = \sqrt{2}$ determinar:

e) Las componentes del vector $\bar{w}$
f) Las coordenadas del punto E.

a)

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{|\bar{u}||\bar{w}|} \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{w} = \cos\theta|\bar{u}||\bar{w}| \quad - (1)$$

$$(2) - C.E.\bar{u}_{\bar{w}} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{|\bar{w}|} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\bar{u}_x}{|\bar{u}|} \; ; \; \cos\alpha = \frac{-2}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; \alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$$

Sustituimos (1) en (2)

$$C.E.\bar{u}_{\bar{w}} = \frac{\cos\theta|\bar{u}||\bar{w}|}{|\bar{w}|} = |\bar{u}|\cos\theta \quad - (3)$$

$C.E._{\bar{v}\bar{w}} = 2\sqrt{2}\cos(135°) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$

b)

$C.V._{\bar{v}\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{w}|}\left(\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|}\right)$; $C.E._{\bar{v}\bar{w}}\left(\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|}\right) = -2(\bar{w}_0) = -2(1,0)$

$= (-2,0)$

c) Usando la ecuación 3

$|\bar{v}|\cos\theta = 2\sqrt{2}\cos 90° = 0$

d) $C.V._{\bar{v}\bar{u}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|}\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right)$; $C.E._{\bar{v}\bar{u}}\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) = 0\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) = (0,0)$

e)

$|C.E._{\bar{w}\bar{v}}| = \left|\frac{\bar{w}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|}\right| = \sqrt{2}$; $\frac{|(x,0)\cdot(-2,2)|}{|2\sqrt{2}|} = \sqrt{2}$

$|(x,0)\cdot(-2,2)| = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$

$|-2x| = 4$; $|-2||x| = 4$; $2|x| = 4$; $x = \frac{4}{2} = 2$

$w = (2,0)$

f)

$F(8,1)$

$E(x,y)$

$w = (2,0)$

$(2,0) = (8,1) - (x,y)$

$= (8-x, 1-y)$

$8 - x = 2$ | $1 - y = 0$

$8 - 2 = x$ | $1 - 0 = y$

$x = 6$ | $y = 1$

$E(6,1)$

5.

5. Para los vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$ que se muestran en las siguientes figuras, expresar $\overline{w}$ en términos de $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

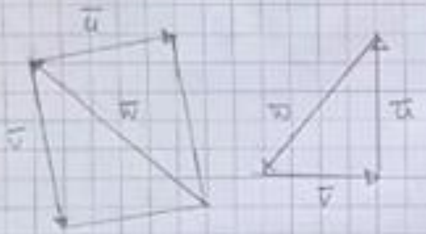
a)

$$\boxed{\vec{\omega} = 2\sqrt{(\overline{u})^2 + (\overline{v})^2}}$$

b)

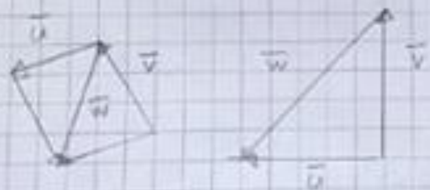
$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{u} + \vec{v}}$$

c)



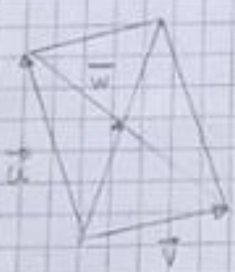
$$\boxed{\overline{w} = \sqrt{u^2 + v^2}}$$

d)



$$\boxed{\overline{\omega} = \sqrt{(\overline{u})^2 + (\overline{v})^2}}$$

e)



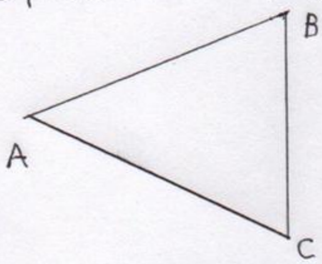
$$(2\overline{\omega})^2 = (\overline{u})^2 + (\overline{v})^2$$

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{\sqrt{(\overline{u})^2 + (\overline{v})^2}}{2}}$$

2.000186

6.

6.- Sea el triangulo cuyo vertice son los puntos A(-1,2,0), B(5,-1,3) y C(4,0,-2). Determinar un vector unitario que sea simultaneamente perpendicular a los lados de dicho triángulo.



$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (12,27,3) = 3(4\,9,1)$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 3\sqrt{98} = 21\sqrt{2}$$

$$\therefore (\overline{AB} \times \overline{Ac}) = \frac{1}{21\sqrt{2}} (3(4,9,1))$$

Si se realiza elcálculo de otros segmentos (producto cruz), se obtendria el mismo vector. Ejemplo:

$$\overline{AC} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (12,27,3)$$

$$\therefore (AC \times \overline{BC})_u = \frac{1}{7\sqrt{2}} (4,9,1)$$

7.

7.- Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ tales que $|\bar{u}| = 3$ y $|\bar{v}| = 4$ y que forman un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ radianes

a) Calcular $\bar{u} \cdot v$

b) Haciendo uso de algunas propiedades del producto escalar calcular $|\bar{u} + v|^2$

a) $\bar{u} \cdot v$: $\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$; $\cos 120^\circ = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{(3)(4)}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 12 \cos 120 = 12(-\cos 60) = \underline{-6}$

b) $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|$; $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$

$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|^2 + 2(\bar{u} \cdot \bar{v}) + |\bar{v}|^2$

$|u + \bar{v}|^2 = 3^2 + 2(-6) + 4^2 = 9 - 12 + 16 = \underline{13}$

8.

8.- Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ tales que:

El vector $\bar{u}$ forma angulos de $60°$ y $45°$ con los ejes X y Y.

El vector $\bar{v}$ forma ángulos de $30°$ y $60°$ con los ejes Y y Z.

Calcular el ángulo que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$

$\bar{u}: \cos^2 60° + \cos^2 45 + \cos^2 \gamma = 1;$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1; \quad \cos^2\gamma = \frac{1}{4}; \quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore \bar{u}_1 = (1, \sqrt{2}, 1) \quad \bar{u}_2 = (1, \sqrt{2}, -1)$

$\bar{v}: \cos^2\alpha + \cos^2 30 + \cos^2 60° = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 0 \therefore \cos^2\alpha = 0, \quad \cos\alpha = 90°$

$\therefore \bar{v}\,(0, \sqrt{3}, 1)$

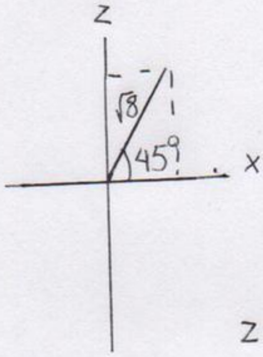
$$\cos\theta = \frac{(1, \sqrt{2}, \pm 1)\cdot(0, \sqrt{3}, 1)}{(2)(2)} = \frac{\sqrt{6} \pm 1}{4}$$

$\underline{\theta_1 = 30.7°}$ $\underline{\theta_2 = 68.8°}$

9.

9.- Sea el punto B que está contenido en el plano. Si su vector director $\bar{b}$ tiene modulo igual a $\sqrt{8}$ y forma 45° con los vectores unitarios i y k: determinar:

a) $B(2,0,2)$



$\cos 45° = \frac{x_0}{\sqrt{8}}$

$x_0 = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$x_0 = 2$

$\text{Sen}\, 45° = \frac{z_0}{2\sqrt{2}}$

$z_0 = 2$

b) $|\bar{b}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ; \cos\beta = 0$

$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $C.V._{\bar{b}\,\hat{k}} = \frac{\bar{b} \cdot \hat{k}}{|\hat{k}|}(\hat{k})$

$C.V._{\bar{b}\,\hat{k}} = \frac{(2,0,2)\cdot(0,0,1)}{1}(0,0,1) = 2\hat{k} = (0,0,2)$

10.

10. Sean los vectores:

$\overline{u} = 3i - 2j + 5k$
$\overline{v} = (2, 1, 0) = 2i + 1j$
$\overline{w} = (-2, 5, 4) = -2i + 5j + 4k$

Determinar: a) Un vector $\overline{x}$ tal que: $4\overline{u} - 3\overline{v} + 2\overline{x} = \overline{w}$
b) Un vector $\overline{a}$, perpendicular a $\overline{v}$ y $\overline{w}$ cuyo módulo sea $4\sqrt{14}$

a) $4(3i - 2j + 5k) - 3(2i + 1j) + 2(x_i + x_j + x_k) = -2i + 5j + 4k$

Para $\boxed{i}$ $\quad 12i - 6i + 2x_i = -2i$

$2x_i = -2i - 12i + 6i$
$x_i = \frac{-8i}{2}$; $x_i = -4i$

Para $\boxed{j}$

$-8j - 3j + 2x_j = 5j$

$2x_j = 5j + 8j + 3j$

$x_j = \frac{16j}{2}$; $x_j = 8j$

Para $\boxed{k}$ $\quad 20k + 2x_k = 4k$
$2x_k = 4k - 20k$
$x_k = \frac{-16k}{2}$; $x_k = -8k$

$\therefore \overline{x} = -4i + 8j - 8k$

Comprobando:

$12i - 8j + 20k - (6i + 3j + 0k) + (-8i + 16j - 16k) = \overline{w}$
$= -2i + 5j + 4k$

$12i - 8j + 20k - 6i - 3j + 0k - 8i + 16j - 16k$
$-2i + 5j + 4k = \overline{w} = -2i + 5j + 4k$

b) Vector
$|\overline{a}| = 4\sqrt{14}$
$|\overline{a}| = \sqrt{224}$

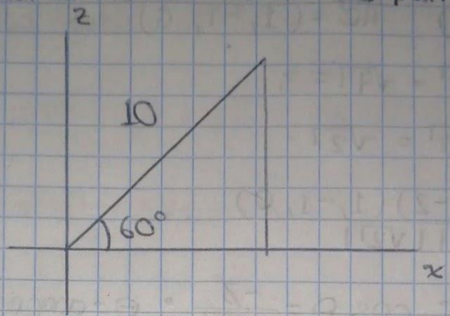
$$\overline{v} \times \overline{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (4, -8, 12) = \overline{a}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 12^2} = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

$\therefore \overline{a} = (4, -8, 12)$

11.

11) Sea el modulo A que pertenece al eje de las ordenadas, y cuya distancia al origen es igual a 6; y sea el punto B contenido en el plano xz, cuyo vector de posición forma un ángulo de 60° con el eje de las abscisas y de modulo igual a 10. Hallar la distancia entre los puntos A y B.



$|A| = 6 \quad \theta_B = 60° \quad |B| = 10 \quad \bar{a} = (0, 6, 0)$

$\operatorname{sen} 60° = \frac{z}{10}$; $z = 10 \operatorname{sen} 60°$; $z = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $z = 5\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{x}{10}$; $x = 10 \cos 60°$; $x = 10\left(\frac{1}{2}\right)$; $x = 5$

$\therefore \bar{b} = (5, 0, 5\sqrt{3})$

$\overrightarrow{ab} = (5, -6, 5\sqrt{3})$

$|\overrightarrow{ab}| = \sqrt{(5)^2 + (-6)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 36 + 75} = \sqrt{136}$

$\therefore d = 2\sqrt{34}\ u_L$

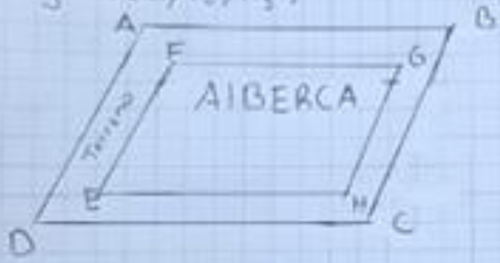
12.

12. En la instalaciones de un centro deportivo se desea construir una alberca cuya area sea $160 m^2$, si el proyecto arquitectonico exige que los lados de la alberca sean paralelos a los lados del terreno, con los datos que se dan a continuación y con ayuda de la fig. determinar vectorialmente las coordenadas de los puntos G y H.

A(0,0,3) B(0,22,3) C(30,22,3)

D(30,0,3) E(19,7,3) F(3,7,3) $G(g_1,g_2,g_3)$

y $H(h_1,h_2,h_3)$



Area = $160 m^2$

$\overline{AB} = (0,22,3)-(0,0,3) = (0,22,0)$

$\overline{BC} = (30,22,3)-(0,22,3) = (30,0,0)$

$\overline{FG} = (g_1,g_2,g_3)-(3,7,3) = (g_1-3, g_2-7, g_3-3)$

$22g_3 - 66 = 0$; $22g = 66$; $g = 3$

$22g_1 - 66 = 0$; $22g = 66$; $g_1 = 3$

$G = (3, g_2, 3)$

$\overline{CD} = (30,0,3)-(30,22,3) = (0,-22,0)$

$\overline{EH} = (h_1,h_2,h_3) - (19,7,3)$

$= (h_1-19, h_2-7, h_3-3)$

Meitnerio

13.

13. Sean los vectores $\overline{u} = (a, b, c)$, $\overline{v} = (-2, 1, -3)$

$\overline{w} = (4, 1, -2)$

$|\overline{v}| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

$= 4i + j - 2k$; $|\overline{w}| = \sqrt{4^2+1^2+2^2} = \sqrt{21}$

Determinar los valores de b y c tales que la componente escalar de $\overline{u}$ en la dirección de $\overline{v}$ sea igual a $\sqrt{14}$ y la de $\overline{u}$ en la dirección de $\overline{w}$ sea igual a $\sqrt{21}$

$$CE_{\overline{u}_{\overline{v}}} = \sqrt{14} = \frac{(a, b, c)(-2, 1, -3)}{\sqrt{14}} \qquad (1)\ 14 = b - 3c$$

$$CE_{\overline{w}_{\overline{u}}} = \sqrt{21} = \frac{(a, b, c)(4, 1, -2)}{\sqrt{21}} \qquad (2)\ 21 = b - 2c$$

Igualando:

$b - 3c = 14 \qquad b - 2c = 21$

En donde:

$$\left.\begin{array}{l} b = 14 + 3c \\ b = 21 + 2c \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 14 + 3c = 21 + 2c \\ 3c - 2c = 21 - 14 \\ c = 7 \end{array}$$

$b = 14 + 3(7)$

$b = 14 + 21$

$b = 35$

$\boxed{b = 35}$

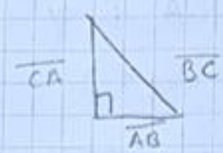
14.

14. Sean los puntos $A(3,1,2)$; $B(7,1,10)$, $C(1,4,3)$ utilizando algebra vectorial:

a) comprobar que forman un triángulo rectángulo.

b) calcular el área de dicho triángulo

a) $\overline{AB} = (4,0,8)$ $\overline{BC} = (-6,3,-7)$



$\overline{CA} = (2,-3,-1)$

$|\overline{AB}| = \sqrt{80}$ $\quad |\overline{BC}| = \sqrt{94}$

$|\overline{CA}| = \sqrt{14}$

T. Pitágoras:

$|\overline{AB}|^2 + |\overline{CA}|^2 = |\overline{BC}|^2$, $80+14=94$, $94=94$

$\overline{AB} \cdot \overline{CA} = (4,0,8)\cdot(2,-3,-1) = 8+0-8 = 0$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{CA}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{0}{\sqrt{80}\sqrt{1}}$

b)

$$\overline{AB} \times \overline{CA} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (24,20,-12) = 4(6,5,-3)$$

$$|\overline{AB} \times \overline{CA}| = 4\sqrt{36+25+9} = 4\sqrt{70}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{CA}| = \frac{1}{2}(4\sqrt{70}) = \boxed{2\sqrt{70}\ u_{sup}}$$

23.000111

15.

15. Sean los vectores $\bar{a}=(1,2,2)$ y $\bar{b}=(2,1,-2)$ perpendiculares entre si y tales que son los vectores de posición de los puntos A y B respectivamente.

Determinar las coordenadas de un punto C tal que sea vértice de un cubo de 3 unidades por lado, si los puntos A, B y el origen también son vértices del cubo.

$|\bar{a}| = |\bar{b}| = 3 \qquad |\bar{a}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$\bar{b} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6,6,-3)$$

$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{9(4+4+1)} = 9$

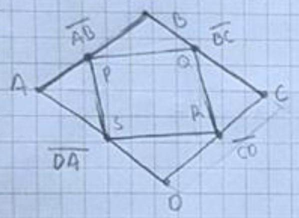
$\therefore \bar{c} = \frac{1}{3}(-6,6,-3) = (-2,2,-1)$

$\bar{c} = (2,-2,1) \qquad \therefore \boxed{C(-2,2,-1) \quad C(2,-2,1)}$

16.

16. Sean los puntos $A(5,1,1)$, $B(-3,3,1)$; $C(-7,-3,5)$ y $D(-5,-7,7)$ que pertenecen a un mismo plano. Determinar las coordenadas de los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, y demostrar que tales puntos son los vértices de un paralelogramo.

Calcular el área de dicho paralelogramo.



$\underbrace{\overline{PQ} \parallel \overline{SR}}$, y

$\underbrace{\overline{QR} \parallel \overline{PS}}$

Solución:

$\overline{AB} = (-8,2,0)$ $\overline{BC} = (-4,-6,4)$ $\overline{CD} = (2,-4,2)$

$\overline{DA} = (10,8,-6)$

$P(1,2,1)$ $Q(-5,0,3)$ $R(-6,-5,6)$

$S(0,-3,4)$

$|\overline{PQ}| = \sqrt{44}$ $\overline{PQ} = (-6,-2,2)$

$|\overline{QR}| = \sqrt{35}$ $\overline{QR} = (-1,-5,3)$

$\overline{SR} = (-6,-2,2)$ $\overline{PS} = (-1,-5,3)$

$\left.\begin{array}{l}\overline{PQ} = \overline{SR} \\ \overline{QR} = \overline{PS}\end{array}\right\}$ $\therefore$ P.Q.R.S si son vértices de un paralelogramo

$A = |\overline{PQ} \times \overline{QR}|$

$$\overline{PQ} \times \overline{QR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = (4,16,28)$$

$= 4(1,4,7)$ $\therefore A = 4\sqrt{1+16+49} = 4\sqrt{66}$

$$\boxed{A = 4\sqrt{66}\ U^2}$$

17.

17. Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, tales que:

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = 8 \quad y \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 2$$

calcular el ángulo formado por los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

$$\theta = \text{angcos} \frac{\bar{u} \cdot v}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \quad — \quad (1)$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

$$\cos\theta = \frac{2}{|\bar{u}||\bar{v}|} \quad ; \quad |\bar{u}||\bar{v}| = \frac{2}{\cos\theta} \quad — \quad (3)$$

$$8 = |\bar{u}||\bar{v}| \operatorname{sen}\theta \quad ;$$

$$|\bar{u}||\bar{v}| = \frac{8}{\operatorname{sen}\theta} \quad — \quad (4)$$

$$(3) = (4)$$

$$\frac{2}{\cos\theta} = \frac{8}{\operatorname{sen}\theta} \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{2}$$

$$\tan\theta = 4 \qquad \theta = \text{ang}\tan(4) \approx 75.96°$$

18.

18) Sea el vector $\bar{u}$, dos cuyos cosenos directores son:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \quad y \quad \cos\beta = \frac{1}{2}$$

obtener un vector $\bar{v}$ cuyo modulo sea igual a 18 unidades y que tenga la misma dirección del vector $\bar{u}$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1 \; ; \; \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \; ;$$

$$\frac{25}{36} + \cos\gamma = \frac{36}{36} \; ; \; \cos^2\gamma = \frac{11}{36} \; ; \; \cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{11}{36}} \; ;$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$$

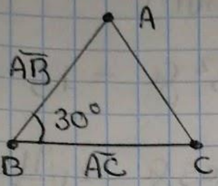
$$\therefore \bar{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{11}}{6}\right) \qquad \bar{v} = 18\bar{u}$$

$$18\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{11}}{6}\right) = (12, 9, \pm 3\sqrt{11})$$

19.

19) Los puntos A(1,-2,2) y B(1,-1,1) son los vertices de un Triángulo ABC. Determinar el conjunto de valores de la cota z de un punto C(1,-4,z), tercer vertice del Triángulo, para cada una de las siguientes ecuaciones:

A) Que el angulo interno en el vertice A sea de 30°



$\vec{AB} = (0,1,-1)$; $\vec{AC} = (0,-2,z-2)$;

$|\vec{AB}| = \sqrt{2}$ $\quad |\vec{AC}| = \sqrt{4+(z-2)^2}$

$$\cos 30° = \frac{(0,1,-1)\cdot(0,-2,z-2)}{\sqrt{2}\,\sqrt{4+(z-2)^2}}$$

$A_\Delta = 3u^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{-2}-z\cancel{+2}}{\sqrt{8+2(z-2)^2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-z}{\sqrt{8+2(z-2)^2}}$; $\sqrt{3}\sqrt{8+2(z-2)^2} = -2z$

$\sqrt{24+6(z-2)^2} = -2z$; $24+6(z-2)^2 = 4z^2$;

$24+6z^2-24z+24 = 4z^2$; $2z^2-24z+48=0$; $z^2-12z+24=0$;

$$z = \frac{12\pm\sqrt{144-4(24)}}{2} = \frac{12\pm\sqrt{48}}{2} = \frac{12\pm\sqrt{3}}{2} = 6\pm2\sqrt{3}$$

$\therefore z_1 = 6+2\sqrt{3}$ y $z_2 = 6-2\sqrt{3}$ //

B) Que el Triangulo tenga 3 unidades de area.

$\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{4+(z-2)^2}\ \text{sen}\ 30°$; $3^2 = \frac{1}{2}\sqrt{8+2(z-2)^2}$

$6^2 = 8+2(z-2)^2$; $36-8 = 2(z-2)^2$; $\frac{28}{2} = (z-2)^2$;

$14 = (z-2)^2$; $\pm\sqrt{14} = z-2$; $z = 2\pm\sqrt{14}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = (z-4, 0, 0)$$

$\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = (z-4)\frac{1}{2} = 3$; $\frac{1}{2}(z-4) = 3$; $z-4=6$; $z=10$ //

20.

20. Sean los puntos: $A(1,2,3)$, $B(0,3,1)$ y $C(-1,4,-1)$. Y sea el vector $\bar{u}=(3,-3,-3)$

Calcular:

a) La componente escalar del vector $\overline{AB}$ en la dirección del vector $\bar{u}$.

b) La componente vectorial del vector $\bar{u}$ en la dirección del vector $\overline{AB}$

c) El ángulo que forma los vectores $\overline{AB}$ y $\bar{u}$.

d) El producto escalar entre los vectores $\overline{AC}$ y $\bar{u}$

a) $\overline{AB}=(0,3,1)-(1,2,3)=(-1,1,-2)$

$$CE_{\frac{\overline{AB}}{\bar{u}}}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \;;\; CE_{\frac{\overline{AB}}{\bar{u}}}=\frac{(-1,1,-2)\cdot(3,-3,-3)}{\sqrt{(3)^2+(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{-3-3+6}{\sqrt{9+9+9}}$$

$$CE_{\frac{\overline{AB}}{\bar{u}}}=\frac{\overline{AB}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|} \;;\; =\frac{0}{3\sqrt{3}} \;,\; CE_{\frac{\overline{AB}}{\bar{u}}}=\emptyset$$

b)

$$CV_{\frac{\bar{u}}{\overline{AB}}}=\frac{(\bar{u}\cdot\overline{AB})}{|\overline{AB}|}\left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}\right)$$

$$\bar{u}\cdot\overline{AB}=(3,-3,-3)\cdot(-1,1,-2)=-3-3+6=\emptyset$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$CV_{\frac{\bar{u}}{\overline{AB}}}=\frac{\emptyset}{\sqrt{6}}=\emptyset$$

c) $\overline{AB}=(-1,1,-2)$ $\quad\bar{u}=(3,-3,-3)$

$$\cos\theta=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \;,\; \cos\theta=\frac{\overline{AB}\cdot\bar{u}}{|\overline{AB}||\bar{u}|}$$

$$|\overline{AB}||\bar{u}|=(\sqrt{6})(3\sqrt{3})=(\sqrt{3}\sqrt{2})(3\sqrt{3})=9\sqrt{2}$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{0}{9\sqrt{2}}\right) \qquad \theta=90^\circ$$

Scribe

ÁLGEBRA VECTORIAL

21.

(21) Sea el vector $\bar{a}$, paralelo al plano YZ, que forma un ángulo de 30° con el vector $\hat{j}$ y tal que $|\bar{a}| = 10$, y sea el vector $\bar{u}$, paralelo al plano XY, que forma ángulos de 45° con los vectores $\hat{i}$ y $\hat{j}$, y tal que $|\bar{u}| = 2$

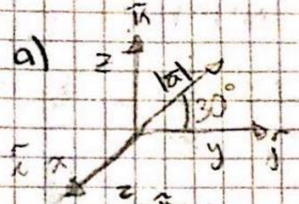
Determinar:

a) Las componentes de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{u}$

b) Las componentes de un vector $\bar{c}$, perpendicular a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{u}$, y tal que $|\bar{c}| = 2\sqrt{5}$

NOTA: Para los vectores $\bar{a}$ y $\bar{c}$, hay dos soluciones.

a)



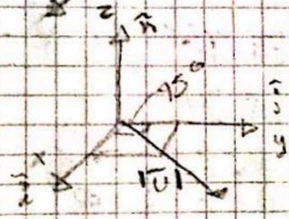
$|\bar{a}| = 10$

$x = 0$

$\operatorname{sen} 30° = \frac{z}{10}$

$z = \operatorname{sen} 30° (10)$

$z = \frac{1}{2}(10) = 5$



$|\bar{u}| = 2$

$\cos 30° = \frac{y}{10}$

$y = \cos 30° (10)$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(10) = 5\sqrt{3}$

$z = 0$

$\cos 45° = \frac{x}{2}$ $\quad \bar{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ $\quad \bar{a} = (0, \pm 5\sqrt{3}, 5)$

$x = 2\cos 45°$

$x = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = \sqrt{2}$

$\operatorname{sen} 45 = \frac{y}{2}$

$y = 2 \operatorname{sen} 45°$

$y = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

b) $\bar{c} \perp \bar{a}$ y $\bar{u}$ $\quad |\bar{c}| = 2\sqrt{5}$

$$\bar{D} = \bar{a} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 5\sqrt{3} & 5 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = (5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}, 5\sqrt{6})$$

$|\bar{D}| = 5\sqrt{10}$

Vector unitario

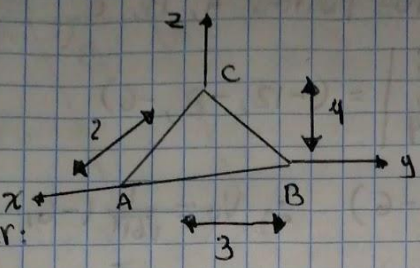
$$\hat{D} = \frac{\bar{D}}{|\bar{D}|} = \frac{5(\sqrt{2}\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} + \sqrt{6}\hat{k})}{5\sqrt{10}}$$

$$\hat{D} = \frac{\sqrt{2}\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} + \sqrt{6}\hat{k}}{\sqrt{10}}$$

$$\bar{c} = 2\sqrt{5}\,\hat{D} = 2\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{2}\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} + \sqrt{6}\hat{k}}{\sqrt{10}}\right)$$

22.

22) Para los datos que se muestran en la figura.



Determinar:

A) Los cosenos directores del segmento dirigido $\overline{AB}$

$A(2,0,0)$ $\quad B(0,3,0)$ $\quad \overline{AB}=(-2,3,0)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2+(3)^2+(0)^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}} \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\gamma = 0$$

B) Area del Triangulo ABC

$$\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}| = \overline{AB}\times C = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-12, 8, 0)$$

$$|\overline{AB}\times C| = \sqrt{(-12)^2+(8)^2+(0)^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208}$$
$$= 4\sqrt{13}\ U_{sup.}$$

$\therefore A_{\Delta} = 2\sqrt{13}$ u superficie

C) El ángulo que forman los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

$\overline{CA}(2,0,-4)$

$$\cos\theta = \frac{(-2,3,0)\cdot(2,0,-4)}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{-4}{2\sqrt{65}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{65}} \ ; \ \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right)$$

$$\therefore \theta = 88.23°$$

D) Componente de un vector unitario que sea normal al plano definido por los puntos A, B, C.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-12, -8, -6)$$

$$V_u = \frac{1}{2\sqrt{61}}(-12, -8, -6) \quad \therefore V_u = \frac{1}{\sqrt{61}}(-6, -4, -3)$$

E) Las coordenadas cartesianas del punto P que es simetrico del punto C con respecto al eje Y.

$$y = \left(\frac{Cx + Px}{2}, \frac{Cy + Py}{2}, \frac{Cz + Pz}{2} \right)$$

$$P(x, y, z) = (2y - Cx, 2y - Cy, 2y - C_z)$$
$$P(x, y, z) = (2(0) - 0, 2(0) - 0, 2(0) - 4)$$
$$P(x, y, z) = (0, 0, -4)$$

$$\therefore P(0, 0, -4)$$

F) El producto escalar entre el vector unitario i y el vector representado por el segmento dirigido $\overline{AC}$.

$\hat{i}(1, 0, 0)$

$$\overline{AC} \cdot \hat{i} = (-2, 0, 4) \cdot (1, 0, 0) = -2 + 0 + 0 = -2\, u_L$$

G) La componente escalar del segmento dirigido $\overline{CB}$ en la dirección del eje Y.

$$CE_{\overline{CB}_y} = \frac{(0, 3, 4) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{0 + 3 + 0}{5} = \frac{3}{5}$$

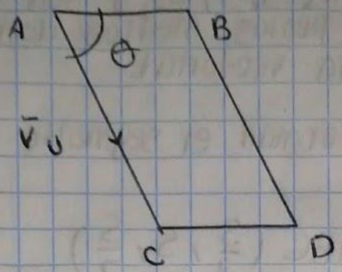
H) La componente vectorial del vector cuyo segmento dirigido es $\overline{AC}$ en la dirección del vector $\overline{BA}$.

$\overline{BA} = (2, -3, 0)$

$$CV_{\overline{AC}_{\overline{BA}}} = \frac{(-2, 0, 4) \cdot (2, 3, 0)}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-4}{2\sqrt{65}} = \frac{-2}{\sqrt{65}} = \frac{-2\sqrt{65}}{65}$$

23.

23) Sean los puntos A,B, C y D los vertices de un paralelogramo



Si $A(1,0,4)$, $B(1,3,4)$, $\bar{v}_u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ y la diagonal BC es paralela al eje x, determinar:

A) El angulo θ

$\overline{AB} = (1,3,4) - (1,0,4) = (0,3,0) \qquad |\overline{AB}| = \sqrt{3^2} = 3$

$\bar{v}_u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{0}{5}\right)$; $a_1 = 4$; $a_2 = 3$; $a_3 = 0$; $|\hat{v}| = 25$

$\cos\theta = \frac{(0,3,0)\cdot(-4,3,0)}{3\cdot 5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$; $\theta = \text{angcos}\left(\frac{3}{5}\right)$

$\therefore \theta = 53.15°$

B) Las coordenadas de los vértices C y D.

$\overline{AC} = \bar{v} = (4,3,0)$

$a_1 - 1 = 4 \qquad a_2 - 0 = 3 \qquad a_3 - 4 = 0$

$a_1 = 5 \qquad a_2 = 3 \qquad a_3 = 4$

$\therefore C(5,3,4)$

$\overline{BC} = \bar{v}\ (4,3,0) \qquad \therefore (0,3,0)$

$a_1 - 1 = 4 \qquad a_2 - 3 = 3 \qquad a_3 - 4 = 0$

$a_1 = 5 \qquad a_2 = 6 \qquad a_3 = 4$

$\therefore (5,6,4)$

c) El área del paralelogramo

$$\overline{AC} \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,12) \qquad |\overline{AC} \times \overline{CD}| = 12\,u_s$$

24.

24) Sea el Triangulo que tiene los vertices a los puntos: $A(-2,6,1)$, $B(7,5,3)$ y $C(-4,5,2)$, y sea L el segmento de la recta que une los puntos medios de los lados AC y BC. utilizando álgebra vectorial:

A) calcular el ángulo que forman el segmento L y el lado AB

$MAC\left(-3, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $MBC\left(\frac{3}{2}, 5, \frac{5}{2}\right)$

$\overline{MACMBC} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\overline{AB} \times \overline{MACMBC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 9 & -1 & 2 \\ 9/2 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

$|\overline{AB} \times \overline{MACMBC}| = 0$

$\therefore \theta_1 = 0°$ y $\theta_2 = 180°$

B) Determinar la relación que existe entre la longitud del segmento L y la longitud del lado AB

$|\overline{AB}| = \sqrt{(9)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{81+1+4} = \sqrt{86}$

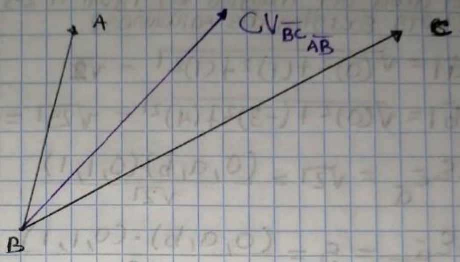
$|MAC\,MBC| = \sqrt{(9/2)^2 + (1/2)^2 + 1} = \sqrt{81/4 + 1/4 + 1} = \sqrt{86/4}$

$= \frac{\sqrt{86}}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}\,\overline{MACMBC} = \overline{AB}$

25.

25) Sean los puntos A(5,2,6); B(1,2,3) y C(9,4,9). Determinar la componente vectorial de $\overline{BC}$ en la dirección de BA, y representarla gráficamente en la figura.



$\overline{BC} = (8,2,6)$ $\qquad$ $\overline{AB} = (-6,0,-3)$

$$CV_{\overline{BC}_{\overline{AB}}} = \frac{(8,2,6)\cdot(-6,0,-3)}{\sqrt{(-6)^2+(0)^2+(-3)^2}}\left(\frac{(-6,0,-3)}{\sqrt{(-6)^2+(0)^2+(-3)^2}}\right)$$

$$CV_{\overline{BC}_{\overline{AB}}} = \frac{-66}{3\sqrt{5}}\left(\frac{-6,0,-3}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$CV_{\overline{BC}_{\overline{AB}}} = \frac{-66}{45}(-6,0,-3)$$

26.

26) Sea el triangulo rectangulo cuyos vértices son los puntos A(0,1,1), B(0,-3,4) y C(0,a,b). Tomando en consideración que el ángulo recto es el formado por los lados BA y BC, determinar los valores de a y b, para los cuales el área del triangulo es igual a 25 unidades de superficie (NOTA: existen dos soluciones).

$|\bar{a}| = \sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$|\bar{b}| = \sqrt{(0)^2+(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$CE_{\bar{c}_{\bar{a}}} = \sqrt{2} = \frac{(0,a,b)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $2 = a+b$ —— ①

$CE_{\bar{a}_{\bar{c}}} = 5 = \frac{(0,a,b)\cdot(0,1,1)}{5}$ $\qquad$ $25 = -3a-4b$ —— ②

$\begin{cases} a+b = 2 \\ -3a-4b = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} 3a+3b = 6 \\ -3a-4b = 25 \end{cases}$ $\quad -b = 31$ $\qquad$ $b = -31$

$a - 31 = 2$; $a = 2+31$; $a = 33$

$\therefore C(0,33,-31)$

27.- Calcular todos los valores de "y" y "x" tales que la componente escalar de $\bar{a}=(1,y,z)$ Sobre $\bar{b}=2i-\sqrt{5}j$ y sobre $\bar{c}=(-2,\sqrt{5},0)$ sea igual a 0

$a=(1,y,z)$ $\quad b(2,-\sqrt{5},0)$ $\quad c=(-2,\sqrt{5},0)$

$$C.E._{\bar{a}_{\bar{b}}}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}=0;\quad 0=\frac{(1,y,z)\cdot(2,-\sqrt{5},0)}{3}$$

$$0=(1,y,z)\cdot(2,-\sqrt{5},0);\quad 0=2-\sqrt{5}y;\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$C.E.\bar{a}_{\bar{c}}=\frac{(1,y,z)(-2,\sqrt{5},0)}{3}=0$$

$$0=(1,y,z)\cdot(-2,\sqrt{5},0)=-2+\sqrt{5}y+0;\quad 0=-2+\sqrt{5}y$$

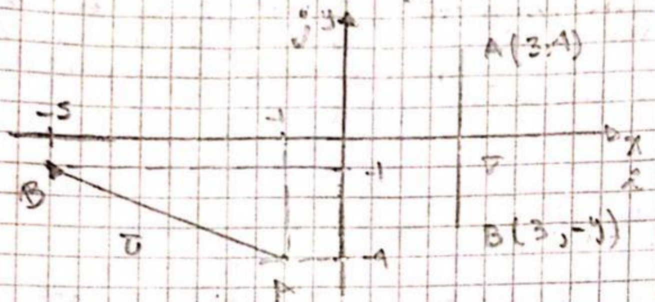
$$y=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \therefore z=0$$

Entonces:

$$\bar{a}=(1,\frac{2}{\sqrt{5}},0)$$

28.

28. Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ que se muestran en la figura



A(-1,-4)
B(-5,-1)
$\overline{AB} = \bar{u}$
$\overline{AB} = (-4,3)$

Si el $|$Comp. Vect. $\bar{v}_{\bar{u}}| = 6$ (Módulo de la componente vectorial) y determinar:

a) $C.E_{\bar{u}\bar{v}}$

b) $C.V._{\bar{u}\bar{v}}$

c) $C.E.\bar{v}_{\bar{u}}$

d) Las coordenadas del punto B

e) $C.V\ \bar{v}_{\bar{u}}$

a) Tenemos que el vector $\bar{u}=(-4,3)$, además como $\bar{v} \parallel -\hat{j}$, la proyección sobre $\bar{v}$ será la proyección sobre $-\hat{j}$.

$$C.E._{\bar{u}\bar{v}} = \bar{u} \cdot (-\hat{j})\ ;\ C.E_{\bar{u}\bar{v}} = (-4,3)\cdot(0,-1) = -3$$

b)
$$C.V._{\bar{u}\bar{v}} = -3(-\hat{j}) = 3\hat{j}$$

$\therefore\ C.V._{\bar{u}\bar{v}} = (0,3)$

c) Como $C.V.\bar{v}_{\bar{u}}$ y $\bar{u}$ tienen sentidos contrarios; podemos afirmar que:

$$C.E.\bar{v}_{\bar{u}} = -|C.V.\bar{v}_{\bar{u}}| = -6$$

d) Podemos representar a $\bar{v}$ como:

$$\bar{v} = (0, -y-4)$$

Pero sabemos que:

$$C.E.\bar{v}_{\bar{u}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{(0,-y-4)\cdot(-4,3)}{\sqrt{16+9}}$$

$$= \frac{-3y+12}{5} = -6$$

$$y = 6$$

$$\therefore B(3,-6)$$

e) $$C.V.\bar{v}_{\bar{u}} = -6\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) = -6\left(\frac{(-4,3)}{5}\right) = \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

$$C.V.\bar{v}_{\bar{u}} = \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

29.

29. Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores de los cuales se sabe que:

$$|\bar{u}| = 2 \qquad \bar{v} = (2, -1, 2) \qquad \bar{u} \cdot \bar{v} = 3$$

Calcular el área del paralelogramo que tiene como lados a los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

$$|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\theta = \text{angcos}\left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}\right); \quad \theta = \text{angcos}\left(\frac{3}{2 \cdot 3}\right);$$

$$\theta = \text{angcos}\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \theta = 60^\circ$$

$$A = |\bar{u}||\bar{v}| \operatorname{sen}\theta = (2)(3) \operatorname{sen} 60^\circ$$

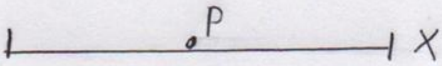
$$= (2)(3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{3} \ u^2$$

30.

30.- Empleando algebra vectorial, determinar las coordenadas de todos los puntos sobre el eje x que estan a 6 unidades del punto $P(2, \sqrt{11}, 3)$

Analizando:



Entonces P es punto medio.

$x_1(x_1, \sqrt{11}, 3)$

$2 = \frac{2 + x_1}{2}$; $4 = 2 + x_1$; $x_1 = 2$

$\overline{Px} = (x-2, \sqrt{11}-\sqrt{11}, 3-3)$; $\overline{Px} = (x-2, 0, 0)$

$|\overline{Px}| = 6$; $6 = \sqrt{(x-2)^2}$; $36 = (x-2)^2$; $\underline{x = 8}$

Punto x_1 es extremo, punto x_2 tambien es extremo; entonces:

$2 = \frac{8 + x_2}{2}$; $4 = 8 + x_2$; $\underline{x_2 = -4}$

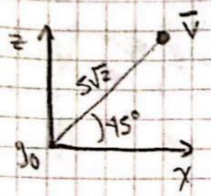
comprobando:

$\overline{Px_2} = (-4, \sqrt{11}, 3) - (2, \sqrt{11}, 3) = (-6, 0, 0)$

$|\overline{Px_2}| = \sqrt{(6)^2} = \sqrt{36} = \underline{6}$ $\therefore$ $x_1(8, \sqrt{11}, 3)$
$x_2(-4, \sqrt{11}, 3)$

31.

31. Determinar las componentes de un vector perpendicular al eje y, cuyo módulo es $5\sqrt{2}$ y forma ángulos iguales con los ejes x y z.



$$\operatorname{sen} 45° = \frac{z}{5\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{x}{5\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(5\sqrt{2}) = z \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(5\sqrt{2}) = x$$

$$z = 5 \qquad x = 5$$

$$\bar{V} = (5, 0, 5)$$

32.

32) Dados los puntos: $A(7,3,-1)$, $B(5,4,-3)$ y $C(8,2,-1)$, obtener:

A) El angulo interior del ángulo ABC con vertice en A.

$\vec{AB} = (-2, 1, -2) \qquad \vec{AC} = (1, -1, 0)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{AC}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{(-2,1,-2)(1,-1,0)}{|3||\sqrt{2}|}$$

$$\cos\theta = \frac{-2-1}{3\sqrt{2}}\ ;\ \cos\theta = \frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}}\ ;\ \theta = \text{angcos}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\therefore\ \theta = 135°$

B) La componente escalar de $\overline{AC}$ en dirección de $\overline{AB}$.

$$CE_{\overline{AC}\,\overline{AB}} = \frac{(1,-1,0)(-2,1,-2)}{3}$$

$$C.E_{\overline{AC}\,\overline{AB}} = \frac{-2-1}{3}\ ;\ CE_{\overline{AB}} = \frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}}\ ;\ C.E_{\overline{AC}\,\overline{AB}} = -1$$

C) El vector unitario en dirección $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}_u\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

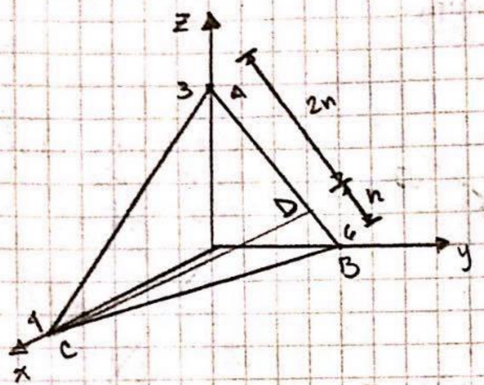
D) La componente vectorial de $\overline{AC}$ en dirección de $\overline{AB}$

$$C.V_{\overline{AC}\,\overline{AB}} = -1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

$$C.V_{\overline{AC}\,\overline{AB}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

33.

33. Para los puntos A, B, C y D de la siguiente figura:



Obtener el vector:

$\bar{S} = 2\overline{CD} + 3\overline{BC}$

A (0, 0, 3)
B (0, 6, 0)
C (4, 0, 0)
D (0, 4, 1)

$\overline{BA} = (0, -6, 3)$; $n = \frac{1}{3}(0, -6, 3) = (0, -2, 1) = \overline{BD}$

$\overline{DA} = \bar{A} - \bar{D} = (0, 0, 3) - (x, y, z) = 2(0, -2, 1)$

$(0-x, 0-y, 3-z) = 0, -4, 2 = \overline{DA}$

$0 - x$ $\quad$ $0 - y = -4$ $\quad$ $3 - z = 2$

$x = 0$ $\quad$ $y = 4$ $\quad$ $-z = 2 - 3$

$z = 1$

$D(0, 4, 1)$

$\bar{S} = 2\overline{CD} + 3\overline{BC}$

$\overline{CD} = (-4, 4, 1)$; $2\overline{CD} = 2(-4, 4, 1) = (-8, 8, 2)$

$\overline{BC} = (4, -6, 0)$; $3\overline{BC} = 3(4, -6, 0) = (12, -18, 0)$

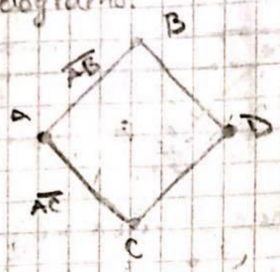
$\bar{S} = (-8, 8, 2) + (12, -18, 0) = (4, -10, 2)$

34.

34. Sean los puntos $A(1,2,3)$ $B(-1,3,2)$ y $C(3,1,-2)$

Determinar las coordenadas del punto D del paralelogramo formado por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

Calcular el área del paralelogramo.



$\overline{AB} = (-2, 1, -1)$

$\overline{AC} = (2, -1, -5)$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{CD} = (x-3, y-1, z+2)$

$x-3=-2 \qquad y-1=1 \qquad z+2=-1$

$x=-2+3 \qquad y=2 \qquad z=-1-2$

$x=1 \qquad z=-3$

$D(1, 2, -3)$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

$\overline{BD} = (2, -1, -5)$

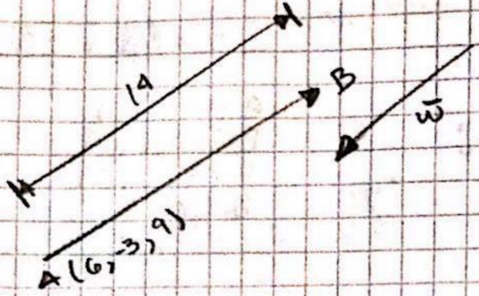
$A = |\overline{AB} \times \overline{AC}| = 6\sqrt{5}\ u^2$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-6, -12, 0)$$

$$= 6(-1, -2, 0)$$

35.

35. Sea el segmento dirigido $\overline{AB}$, paralelo al vector $\bar{w} = (2,-3,6)$ y de sentido contrario a éste, como se muestra en la figura.



Determinar las coordenadas del punto B.

$|\overline{AB}| = 14$ $\quad A(6,-3,9)$ $\quad \bar{w} = (2,-3,6)$

$$\bar{w}_u = \frac{(2,-3,6)}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{2,-3,6}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}$$

$$\overline{AB} = 14\,\bar{w}_u = 14\left(\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}\right) = (4,-6,12)$$

Vector contrario : $-(4,-6,12) = (-4,6,-12)$

$\overline{AB} = (-4,6,-12)$; $\overline{AB} = \bar{B} - \bar{A} = (x-6, y+3, z-9)$

$x-6=-4$	$y+3=6$	$z-9=-12$
$x=-4+6$	$y=6-3$	$z=-12+9$
$x=2$	$y=3$	$z=-3$

$\therefore B(2,3,-3)$

36.

36. Sean los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ tales que $\bar{u} = -2j$, $|\bar{v}| = 4$, $|\bar{w}| = 2$ y $|\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}| = -4$. Si además el vector $\bar{u}$ forma $30°$ con el vector $\bar{v}$, determinar el ángulo que forma el vector $\bar{w}$ con el vector perpendicular tanto a $\bar{u}$ como a $\bar{v}$.

$$\cos\theta = \frac{\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})}{|\bar{w}|\,|\bar{u} \times \bar{v}|} = \frac{-4}{2\,|\bar{u} \times \bar{v}|}$$

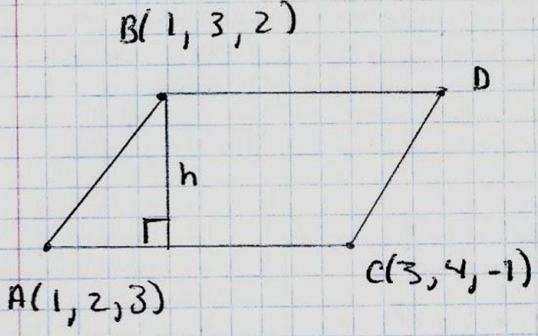
$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \operatorname{sen}\theta \ ; \ |\bar{u} \times \bar{v}| = (2)(4) \operatorname{sen} 30°$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = 8\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4$$

$$\cos\theta = \frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \ ; \ \theta = \operatorname{ang}\cos\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 120°$$

37.

37. Sea el paralelogramo que se muestra en la figura:



a) la altura h

$AB = (0, 1, -1)$

$AC = (2, 2, -4)$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|}$$

$$\cos\theta = \frac{(0,1,-1)(2,2,-4)}{(\sqrt{2})(2\sqrt{6})} \; ; \; \cos\theta = \frac{0+2+4}{4\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{6}{4\sqrt{3}} \longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{6}{4\sqrt{3}}\right) = 30°$$

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{h}{|AC|} \; ; \; h = |AC| \operatorname{Sen}\theta$$

$$h = \sqrt{2}\operatorname{sen}30° \; ; \; h = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}\, ul$$

Determinar el area del paralelogramo y las coordenadas del vertice D

$\vec{AC} = \vec{BD}$ entonces

$(1,2,3) - (3,4,-1) = (1,3,2) - (x,y,z)$

$(2,2,-4) = (x-1, y-3, z-2)$

igualamos componente a componente

$x-1 = 2$ $\quad$ $y-3 = 2$ $\quad$ $z-2 = -4$

$x = 2+1$ $\quad$ $y = 2+3$ $\quad$ $z = -4+2$

$x = 3$ $\quad$ $y = 5$ $\quad$ $z = -2$

Entonces D es $D(3,5,-2)$

— Area —

$\vec{BA} \times \vec{AC}$

$\vec{BA} = (1-1, 2-3, 3-2)$

$= (0,-1,1)$

$\vec{AC} = (3-1, 4-2, -1-3)$

$= (2,2,-4)$

$$\vec{BA} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$\vec{BA} \times \vec{AC} = (4-2)\hat{i} - (0-2)\hat{j} + (0+2)\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$A = |\vec{BA} \times \vec{AC}|$

$A = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$; $A = \sqrt{12}$

$= 2\sqrt{3}$

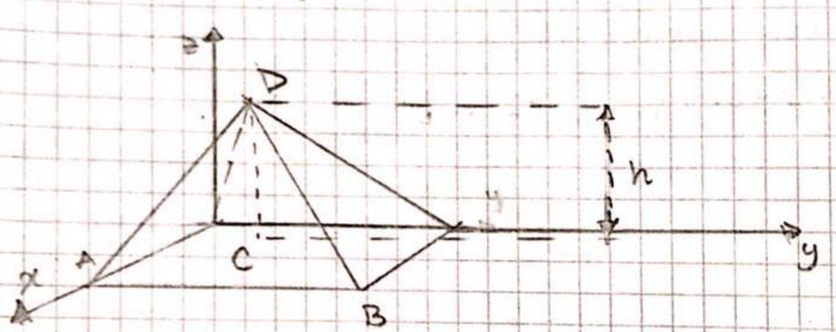
38.

38. Para la pirámide regular que se muestra en la figura, tal que la longitud de cada una de sus aristas es 4 unidades, utilizando algebra vectorial determinar:

a) Las coordenadas del punto D, si la arista $\overline{DB}$ es paralela al vector $\bar{v}=(-4,-4,4\sqrt{2})$

b) La altura h

c) El área triangular de la cara ABD.



a) $|\overline{DB}| = |\lambda\bar{v}|$; $4=|\lambda|\,|(-4,-4,4\sqrt{2})|$;

$|\lambda|\cdot 4\cdot\sqrt{1^2+1^2+2}+0 = 8|\lambda|=4$; $|\lambda|=\frac{1}{2}\rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{2}$

$\overline{DB}=\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{2}(-4,-4,4\sqrt{2})=(\mp 2,\mp 2,\pm 2\sqrt{2})$

$\overline{DB}=(2,2,-2\sqrt{2})$ $\quad D=(4,4,0)-(2,2,-2\sqrt{2})$

$D(2,2,2\sqrt{2})$

b) $|\overline{CB}|^2+|\overline{CD}|^2=|\overline{DB}|^2$; $|\overline{CB}|^2+h^2=|\overline{DB}|^2$

$|2,2,-2\sqrt{2}|^2=h^2+|\frac{1}{2}\overline{B}|^2$

$|2,2,0|^2+h=6$; $16=h^2+(\sqrt{4+4})^2$; $8+h^2=16$

$h^2-8=\lambda\sqrt{2}=h$ $\qquad h=2\sqrt{2}\ u_l$

c) $A = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AD}|$ $A(1,0,0)$

$\overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = (8\sqrt{2}, 0, 8)$

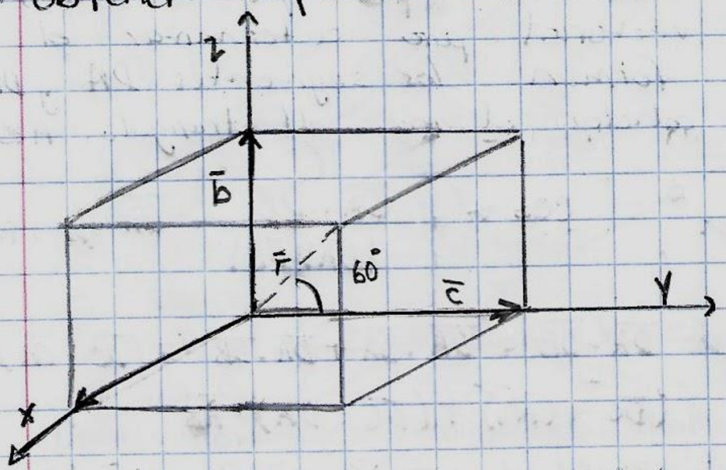
$|\overline{AB} \times \overline{AD}| = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2 + 64} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}\,u$

$A = \frac{1}{2} 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ u^2$

39.

Ejercicio 39

Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{r}$ que se muestran en la figura tales que $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ y el ángulo que forman los vectores $\bar{c}$ y $\bar{r}$ es 60°. Obtener componentes del vector $\bar{F}$.



$|\bar{a}| = 3$

$|\bar{b}| = 4$

$\theta = 60°$

$$\cos 60° = \frac{X_0}{3} = X_0 = 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X_0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sen } 60° = \frac{Z_0}{4} = Z_0 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z_0 = 2\sqrt{3}$$

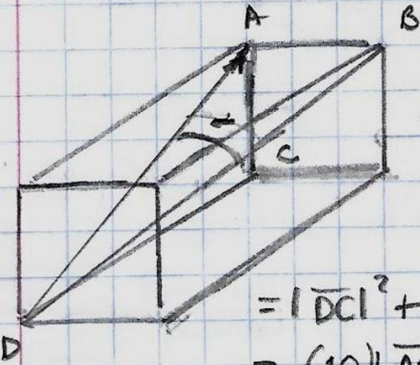
$$F\left(3/2,\ 0,\ 2\sqrt{3}\right)$$

$$|\bar{F}| = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

40.

Ejercicio 40

Sea el paralelepípedo rectangular que se muestra en la figura Xx si las aristas AB y AC son de igual longitud, en tanto que la arista CD mide el triple que la AC, emplear álgebra vectorial para determinar el ángulo α que forman los segmentos DA y DB, así como para calcular el área del triángulo ABD



$$\cos\alpha = \frac{\overline{DA}\cdot\overline{DB}}{|\overline{DA}||\overline{DB}|} = \overline{DA}\cdot(\overline{DA}+\overline{AB})$$

$$\overline{DA}\cdot\overline{DB} = \overline{DA}\cdot\overline{DA} + \overline{DA}\cdot\overline{DB} = (\overline{DC}+\overline{CA})\cdot(\overline{DC}+\overline{CA}) + (\overline{DC}+\overline{DA})\cdot\overline{AB}$$

$$= |\overline{DC}|^2 + |\overline{CA}|^2 = (3|\overline{AC}|)^2 + |\overline{AC}|^2 = 9|\overline{AC}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

$$= (10)|\overline{AC}|^2$$

$$|\overline{DA}|^2 = (3|\overline{AC}|)^2 + |\overline{AC}|^2 = 9|\overline{AC}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 10|\overline{AC}|^2$$

$$|\overline{DB}|^2 = |\overline{DA}|^2 + |\overline{AB}|^2 = 10|\overline{AC}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 11|\overline{AC}|^2$$

$$|\overline{DB}| = \sqrt{11}|\overline{AC}|$$

Al sustituir en el modelo

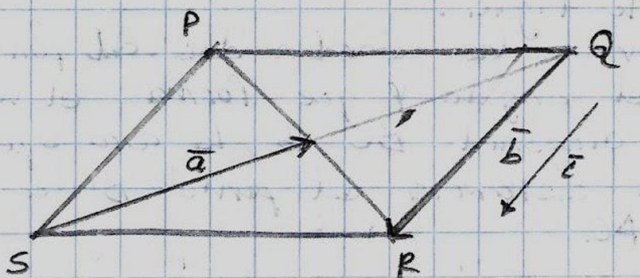
$$\cos\alpha = \frac{10|AC|^2}{\sqrt{10}|\overline{AC}|\sqrt{11}|\overline{AC}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{110}} \qquad \underline{\alpha = 17.5484006^\circ}$$

41.

Ejercicio 41.

Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ que se muestra en la figura



Si $\bar{a} = -i + 2j - 4k$ y $\bar{b}$ es paralelo al vector $\bar{c} = (\frac{2}{3}, -1, 2)$ tal que $|\bar{b}| = 7$, mediante algebra vectorial calcular el área del paralelogramo PQRS.

$\bar{a} = -i + 2j - 4k$

$\bar{b}$ paralelo a $\bar{c} = (\frac{2}{3}, -1, 2)$

$|\bar{b}| = 7$

$\overline{SQ} = 2\bar{a} = 2(-1, +2, -4)$

$\overline{SQ} = (-2, 4, -8)$

$|\bar{c}| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$

$\bar{C}_u = \left(\frac{\frac{2}{3}}{7/3}, \frac{-1}{7/3}, \frac{2}{7/3}\right); \bar{C}_u = (2/7, -3/7, 6/7)$

$\bar{b} = 7\bar{C}_u = \bar{b} = (2, -3, 6)$

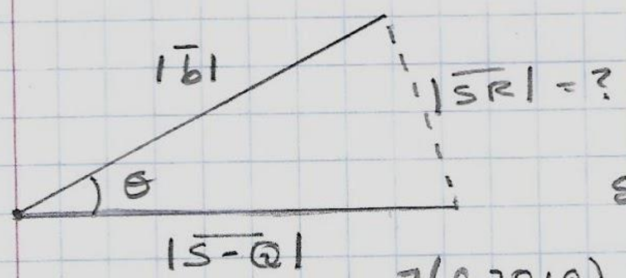
$|\overline{SQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

$|\bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

$$\cos\theta = \frac{\overline{SQ}\cdot\overline{b}}{|\overline{SQ}||\overline{b}|} = \frac{(+2,-4,+8)(2,-3,6)}{2\sqrt{21}\,(7)}$$

$$= \frac{2-12+48}{14\sqrt{21}} = \frac{40}{14\sqrt{21}}$$

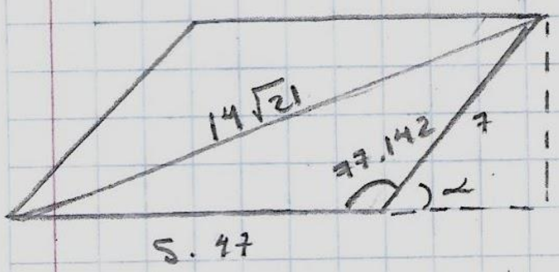
$$\theta = \text{ang}\cos\left(\frac{40}{14\sqrt{21}}\right) = 51.429^\circ$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\overline{SR}|}{|\overline{b}|}$$

$$\operatorname{sen} 51.429^\circ = \frac{|\overline{SR}|}{7}$$

$$7(0.7818) = |\overline{SR}| = \underline{5.47}$$



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$$

$$\operatorname{sen} 102.858 = \frac{h}{7}$$

$$0.9749(7) = h \;;\; h = 6.82$$

$$A = b \times h \;;$$

$$5.47(6.82) = A$$

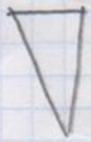
$$\underline{A = 37.32\ U_{sup}}$$

42.

42.-

a) $\cos\theta = \dfrac{\overline{CD} \cdot |\overline{BC}|}{|\overline{BC}|}$

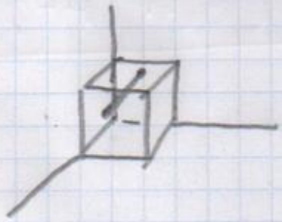
b) 

 → Mitad paralelogramo

$$\text{Área} = \frac{|a \times b|}{2}$$

 $D \triangle L$, L $= D^2 = \sqrt{2L^2}$

$$A = \left|\frac{L \times D}{2}\right| = \left|\frac{L \times \sqrt{2L^2}}{2}\right|$$

c) 

$$\overline{AO} = (O_1 - A_1, O_2 - A_2, O_3 - A_3)$$

$$|\overline{AO}| = \sqrt{(O_1 - A_1)^2 + (O_2 - A_2)^2 + (O_3 - A_3)^2}$$

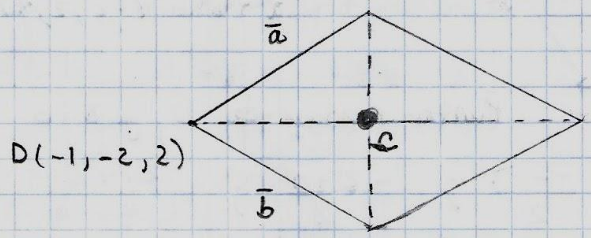
$$\cos\alpha = \frac{O_1 - A_1}{|\overline{AO}|}, \quad \cos\beta = \frac{O_2 - A_2}{|\overline{AO}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{O_3 - A_3}{|\overline{AO}|}$$

43.

Ejercicio 43

Sea el paralelogramo que se muestra en la figura



en donde
$\bar{a} = (1, 2, 6)$ y $\bar{b} = -3i - 2k$

Determinar las coordenadas cartesianas del punto C y calcular los angulos interiores del paralelogramo

$\bar{a} = (1,2,6)$ $\qquad |\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2}$

$\bar{b} = (-3i - 2k)$ $\qquad |\bar{a}| = \sqrt{41}$

$\bar{b} = (-3,0,-2)$ $\qquad |\bar{b}| = \sqrt{13}$

1) $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$; $\cos\theta = \dfrac{(1,2,6)(-3,0,-2)}{\sqrt{41}\ \sqrt{13}}$;

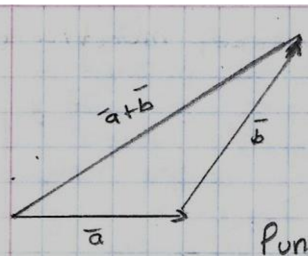
$\cos\theta = \dfrac{-3-12}{\sqrt{41}\ \sqrt{13}} = \dfrac{-15}{\sqrt{533}} \approx \cos\theta = -0.649$

$\theta \approx \arccos(-0.649) = 130.52°$

$\theta_1 = \theta_2 \approx 130.52°$

y

$\theta_3 = \theta_4 \approx 49.47°$



a) $\bar{a} + \bar{b} = (1-3,\ 2+0,\ 6-2)$

$\bar{a} + \bar{b} = (-2, 2, 4)$

Punto medio de D y $\bar{a} + \bar{b}$

$\dfrac{-2-1}{2}$; $\dfrac{-2+1}{2}$; $\dfrac{2+4}{2}$

$C\left(-\frac{3}{2}, 0, 3\right)$

44.

Ejercicio 44

Obtener las componentes escalares de un vector $\bar{a}$ que se encuentre en el primer octante, forma un angulo de 60° con el eje X y 45° con el eje Z, si ademas su componente paralela al eje Y es de 8 unidades.

$x, y, z > 0$ en el primer octante

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\cos \alpha = \cos 60° = \frac{1}{2} \frac{a_x}{|\bar{a}|} \longrightarrow \cos \gamma = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a_z}{|\bar{a}|}$

$\cos^2 \alpha + \cos \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1 \longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \beta = 1$

$= \frac{3}{4} + \cos^2 \beta = 1 \longrightarrow \cos \beta = \pm \frac{1}{2}$

$u = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow \bar{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

en el 3er octante

Al ser $a_y = 8$

$\bar{a} = (8, 8, 8\sqrt{2})$

45.

45.

Sean los puntos $A(0,0,0)$, $B(4,2,4)$, $C(2,2,2)$ y $D(2,4,4)$ vértices de un paralelepípedo. Calcular el volumen de dicho paralelepípedo si tres de sus aristas concurrentes son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (4-0,\ 2-0,\ 4-0) = (4,2,4)$$
$$\overline{AC} = (2-0,\ 2-0,\ 2-0) = (2,2,2)$$
$$\overline{AD} = (2-0,\ 4-0,\ 4-0) = (2,4,4)$$

para poder calcular el volumen se necesita

$$V = |\bar{a} \cdot (b \times c)|$$

$$(\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \bar{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 4(8-8) + 2(8-4) + 4(8-4)$$
$$= 4(0) + 2(4) + 4(4)$$
$$= 0 + 8 + 16$$
$$= 24$$

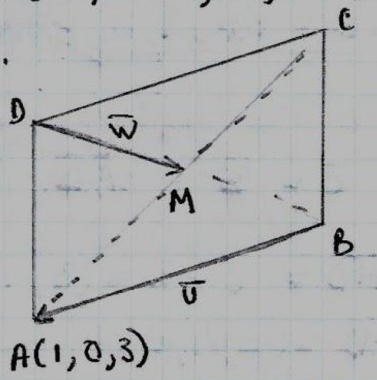
$$V = |24| = 24_u$$

46.

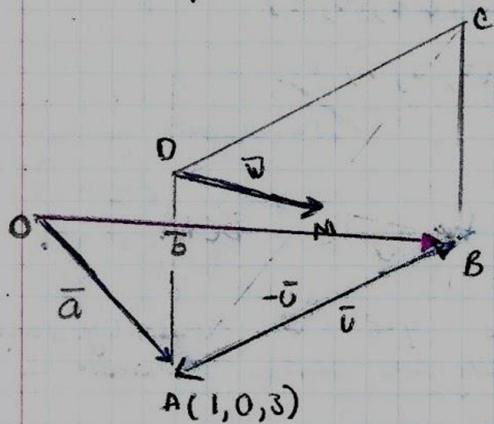
Ejercicio 46.

Sea el paralelogramo ABCD que se muestra en la figura.

$\bar{u} = (-4, -3, -1)$ $\bar{w} = (1, 1, -2)$



a) Determinar las coordenadas cartesianas de los puntos B, C, D y M



$\bar{a} = (1,0,3)$

$\bar{b} = \bar{a} + (-\bar{u}) = \bar{a} - \bar{u}$

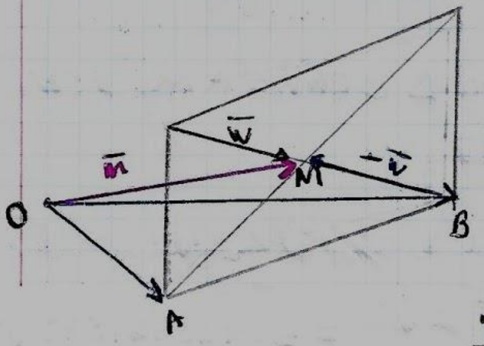
$\bar{b} = (1,0,3) - (-4,-3,-1)$

$\bar{b} = (5,3,4)$

$\therefore B(5,3,4)$ //

Entonces $\bar{a} = (1,0,3)$

$\bar{b} = (5,3,4)$



$\bar{m} = \bar{b} + (-\bar{w}) = \bar{b} - \bar{w}$

$\bar{m} = (5,3,4) - (1,1,-2)$

$\bar{m} = (4,2,6)$

$\therefore M(4,2,6)$ //

Entonces

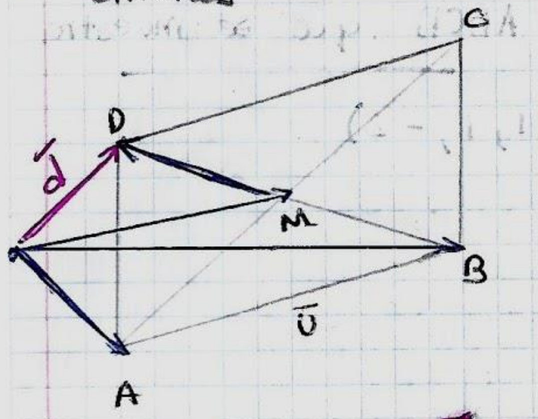
$\bar{d} = \bar{m} + (-\bar{w}) = \bar{m} - \bar{w}$

$\bar{d} = (4,2,6) - (1,1,-2)$

$\bar{d} = (3,1,8)$

$\therefore D = (3,1,8)$

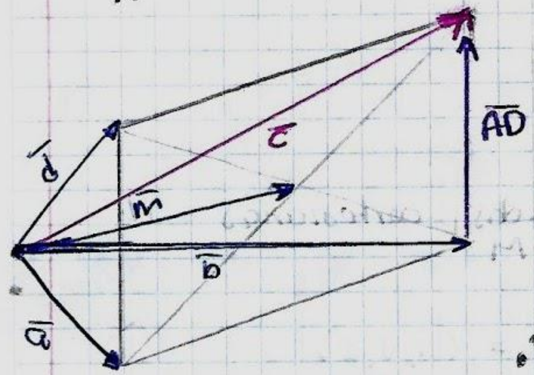
Entonces



$\bar{c} = \bar{b} + \overline{AD}$

$\overline{AD} = \bar{d} - \bar{a} = (3,1,8) - (1,0,3)$

$\overline{AD} = (2,1,5)$



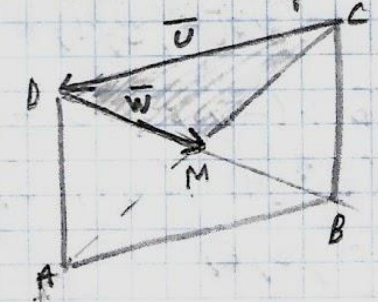
$\bar{c} = (5,3,4) + (2,1,5)$

$\bar{c} = (7,4,9)$

$\therefore C = (7,4,9)$

b) Calcular el area del triangulo BCM

Teniendo en cuenta que que el paralelogramo esta formado x 4 triangulos estos tienen la misma área por lo tanto



Area Δ BCM = Area DCM

$A = \dfrac{|\bar{u} \times \bar{w}|}{2}$

$A = \dfrac{|(-4,-3,-1) \times (1,1,-2)|}{2}$

$A = \dfrac{|(7,-9,-1)|}{2}$; $A = \dfrac{\sqrt{131}}{2} u^2 = 5.722761571 \; u^2$

47.

47) Dado los vectores $\bar{c} = (-1, 3, -1)$ y $\bar{w} = -\hat{i} + 2\hat{k}$, obtener

$\bar{c} = (-1, 3, -1) \qquad \bar{w} = (-1, 0, 2)$

A) un vector $\bar{v}$ que sea perpendicular tanto a $\bar{c}$ como a $\bar{w}$ y que tenga modulo $\sqrt{6}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} = 3(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$\sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$$\bar{v}_u = \frac{\cancel{3}(2, 1, 1)}{\cancel{3}\sqrt{6}}$$

$\therefore \bar{v}_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\bar{v} = (2, 1, 1)$

B) un vector $\bar{u}$ de modulo igual a $2\sqrt{15}$, que sea perpendicular a $\bar{w}$ y forme un angulo de $60°$ con e eje "y"

$\bar{w} \cdot \bar{u} = 0$; $(-1, 0, 2) \cdot (2, y, 1) = 0$

$\cos 60° = \frac{y}{2\sqrt{15}}$; $y = 2\sqrt{15} \cos 60°$; $y = 2\sqrt{15}\left(\frac{1}{2}\right)$

$y = \sqrt{15}$

$\therefore \bar{u} = (2, \sqrt{15}, 1)$

comprobación

$\bar{w} \cdot \bar{u} = 0$; $(-1, 0, 2) \cdot (2, \sqrt{15}, 1) = 0$; $-2 + 0 + 2 = 0$

$0 = 0 \quad \therefore$ cumple

$|\bar{u}| = 2\sqrt{15}$; $\sqrt{(2)^2 + (\sqrt{15})^2 + (1)^2} = 2\sqrt{15}$

$\sqrt{4 + 15 + 1} = 2\sqrt{15}$; $\sqrt{20} = 2\sqrt{15}$; $2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ En este caso no cumple ya que si se buscan las componentes 'x' y 'z' para dar un modulo de $2\sqrt{15}$, la perpendicularidad no sería posible.

48.

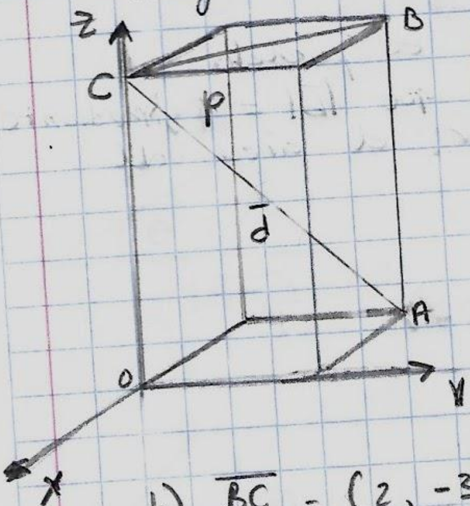
Ejercicio 48

Sea el vector $\bar{d} = 2i - 3j + 6K$ que corresponde a la diagonal AC del paralelepipedo rectangular mostrando en la figura.

a) Determinar las coordenadas del punto B

b) Calcular el angulo φ que forma el vector $\bar{d}$ y la diagonal BC de la cara superior

c) Calcular la distancia del punto B a la diagonal AC.



$\overline{AC} = \bar{d} = (2, -3, 6)$

$\bar{c} = (0, 0, 6)$

$a = (-2, 3, 0)$

a) $B(-2, 3, 6)$

b) $\overline{BC} = (2, -3, 0)$ $\quad \bar{d} = (2, -3, 6)$

$|\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$|\bar{d}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

$\cos\varphi = \dfrac{(2, -3, 0) \cdot (2, -3, 6)}{\sqrt{13}\,(7)} = \dfrac{4 + 9 + 0}{\sqrt{13}\,(7}$

$\cos\varphi = \dfrac{13}{7\sqrt{13}}$ $\quad \varphi = \arccos\left(\dfrac{13}{7\sqrt{13}}\right)$ $\quad \varphi = 58.997°$

c) $B(-2, 3, 6)$ $\quad \overline{AC} = (2, -3, 6)$

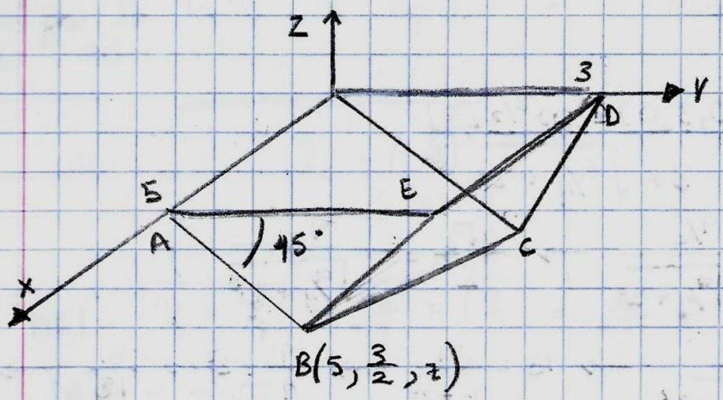
Scribe

ÁLGEBRA VECTORIAL

49.

Ejercicio 49

Sea el prisma triangular de la figura tal que el punto C pertenece al plano YZ, el segmento BC es paralelo al eje X y el punto E pertenece al plano XY.



Determinar

a) la coordenada de z del punto B

b) la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$

c) El área de la cara BCDE

a) Teniendo en cuenta

$A(5,0,0)$ $\quad \theta = 45°$

$\cos\theta = \dfrac{AE * AB}{|AE| * AB}$ $\quad$ pero $AE = D = (0,3,0)$

$$\cos 45° = \frac{(0,3,0) * AB}{3 * |AB|} \quad y \quad AB = C = (0, 3/2, z)$$

entonces

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(0,3,0) * (0, 3/2, z)}{3 * \sqrt{9/4 + z^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9/2}{3\sqrt{9/4 + z^2}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2\sqrt{9/4 + z^2}} ;$$

$$\rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{9}{\sqrt{9/4 + z^2}} \longrightarrow 18 = \frac{81}{\frac{9}{4} + z^2} \longrightarrow \frac{9}{4} + z^2 = \frac{81}{18} \longrightarrow$$

$$\rightarrow z^2 = \frac{81}{18} - \frac{9}{4} \longrightarrow z^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} \longrightarrow z^2 = \frac{18}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\rightarrow z^2 = \frac{9}{4} \longrightarrow z = \pm \frac{3}{2}$$

pero $z < 0$ entonces así

el punto B es $B(5, \frac{3}{2}, -3/2)$

b)

$$AB = B - A = \left(5, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) - (5,0,0) = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

por lo tanto la longitud es el modulo del vector AB

$$|AB| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-3/2\right)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{9/4 + 9/4} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$|AB| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

c) Usamos el segmento BE y ED = A = (5,0,0)

$$BE = E - B = (5,3,0) - \left(5, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Entonces el área es

$$A = |BE \times ED| = |BE \times A| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left|\left(0, \frac{15}{2}, -\frac{15}{2}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{225}{2} + \frac{225}{2}} = \sqrt{\frac{450}{2}} = \sqrt{225} = 15$$

$$A = 15 u^2$$

50.

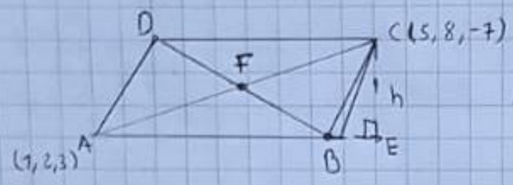
50. Sea el paralelogramo ABCD que se muestra en la figura donde $\overline{BC} = (0, 2, -2)$

Determinar:

a) Las coordenadas del punto E.

b) Las coordenadas del punto F.

c) El área del triangulo ACD.



a) $\overline{AD} = \overline{CB}$

$(x, y, z) - (1, 2, 3) = (0, 2, -2)$ | $x-1=0$ | $x=1$
$(x-1, y-2, z-3) = (0, 2, -2)$ | $y-2=2$ | $y=4$ | $D(1, 4, 1)$
| $z-3=-2$ | $z=1$

$\overline{AD} = (1, 4, 1) - (1, 2, 3) = (0, 2, -2) = \overline{AD}$

$\overline{CD} = \overline{AE}$

$(1, 4, 1) - (5, 8, -7) = (x, y, z) - (1, 2, 3)$

$(-4, -4, 8) = (x-1, y-2, z-3)$

$x = -3 \quad y = -2 \quad z = 11 \qquad \boxed{E(-3, -2, 11)}$

b) $\overline{AC}$

$\overline{AC} = (5, 8, -7) + (1, 2, 3) = (6, 10, -4)$

$\overline{AC} = (6, 10, -4)$

$F = \dfrac{(6, 10, -4)}{2} = (3, 5, -2) \qquad F(3, 5, -2)$

c) $\dfrac{|\overline{AD} \times \overline{CD}|}{2} \qquad \overline{CD} = (-4, -4, 8)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 8 \end{vmatrix} = (8, 8, 8)$$

$|\overline{AB} \times \overline{CD}| = \sqrt{192} \qquad \text{Area}\,\Delta = \dfrac{\sqrt{192}}{2} = \boxed{4\sqrt{3}\ u^2}$