UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

NOMBRE DEL ALUMNO

Arias Quintero Luis Antonio

García Márquez Luis Yael

Gómez Urbano Mariana

Luna Rosas Antonio

Velázquez Martínez Karla Andrea

RECTA Y PLANO

ASIGNATURA

Calculo y Geometría Analítica

NO. DE GRUPO

8

FECHA DE ENTREGA

de febrero de 2021

EJERCICIOS									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

1)

1.- Sea la recta cuyas ecuaciones son:

$$L \begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Calcular:

a) La distancia del origen de coordenadas a la recta L.

b) La distancia de la recta L y el eje de las cotas

c) Los ángulos α, β, γ que forma la recta L con los ejes coordenados x, y y z.

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) $d = \dfrac{|\overline{PQ} \times \bar{u}|}{|\bar{u}|}$ Si $P(0,3,1)$ y $Q(0,0,0)$, además $\bar{u} = (1,0,0) = \hat{\imath}$

$$PQ \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-1,3)$$

$|\overline{PQ} \times \bar{u}| = \underline{\sqrt{10}}\ u_L$

b) $d = |C.E.\ \overline{PO}_{\bar{u}\times\hat{k}}|$ $\quad d = \dfrac{|\overline{PQ} \cdot (\bar{u} \times \hat{k})|}{|\bar{u} \times \hat{k}|}$ $\quad \overline{PQ} = (0,-3,-1)$

$$\bar{u} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0);\ |\bar{u} \times \hat{k}| = 1$$

$$d = \frac{(0,-3,-1) \cdot (0,-1,0)}{1} = \underline{3 u_L}$$

c) $\cos\alpha = 1 \quad \cos\beta = 0 \quad \cos\gamma = 0 \quad \underline{\alpha = 0°, \beta = 90°, \gamma = 90°}$

2)

2.- Sean L_1 y L_2 las rectas cuyas ecuaciones son

$$L_1 : \; x = 1; \; \frac{y-1}{a} = \frac{3-3z}{-3}$$

$$L_2 = \frac{x}{b} = y = -\frac{4z}{-4}$$

Si dichas rectas son perpendiculares entre sí, y además se intersecan, determinar los valores de a y b.

$$L_1 : x = 1; \; \frac{y-1}{a} = \frac{-\cancel{3}(z-1)}{-\cancel{3}}, \quad L_1 : x = 1; \; \frac{y-1}{a} = \frac{z-1}{1}$$

$\underline{P_1(1,1,1) \quad \bar{U}_1 = (0,a,1)}$

$$L_2 : \frac{x}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad P_2(0,0,0) \quad \bar{U}_2 = (b,1,1)$$

$$L_1 \perp L_2 : \bar{U}_1 \cdot \bar{U}_2 = 0 \quad \therefore (0,a,1) \cdot (b,1,1) = 0; \; a + 1 = 0$$

$$\underline{a = -1}$$

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = b\beta \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Igualando

$$x : 1 = b\beta \qquad\qquad \cancel{\alpha} + \beta = 1$$
$$y : 1 - \alpha = \beta \qquad\qquad -\cancel{\alpha} + \beta = 1$$
$$z : 1 + \alpha = \beta \qquad\qquad 2\beta = 2 \quad \therefore \beta = 1$$

Sustituyendo

$$\underline{b = 1} \quad \therefore \quad a = -1, \; b = 1$$

3)

3.- Sean las rectas L y R definidas de la siguiente manera:

L: Contiene al origen, esta contenida en el plano yz y forma un ángulo de 60° con el eje y.

R: es paralela al eje z y corta al eje x en el punto P(2,0,0).

a) Determinar unas ecuaciones paramétricas de las rectas L y R

b) Indicar si las rectas L y R definen un ángulo entre si. En caso afirmativo, calcularlo.

$L: P(0,0,0) \quad \alpha = 90°, \beta = 60°, \gamma = ?$

$\cos^2 90° + \cos^2 60° + \cos \gamma = 1 \therefore \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\bar{u}_1 = (0, 1, \sqrt{3}), \bar{u}_2 = (0, 1, -\sqrt{3})$

$R: \bar{v} = \hat{k} \; ; \bar{v} = (0,0,1) \quad P_R(2,0,0)$

a) $L: \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \pm\sqrt{3}\alpha \end{cases} \qquad R: \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = \beta \end{cases}$

b) $\cos\theta = \frac{(0,1,\pm\sqrt{3}) \cdot (0,0,1)}{(2)(1)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta_1 = 30°$

$\theta_2 = 150°$

4)

4.- Sean las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones

$$L_1 : \bar{p} = (1-t, 0, 1-t)$$

$$L_2 : 1-x = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3z}{2}}{-3} \;, \; y=0$$

$$L_1 : \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 0 \\ z = 1-\alpha \end{cases} \qquad L_2 : \left\{ x-1 = \frac{z-1}{-2} \;;\; y = 0 \right.$$

$P_1(1,0,1)$ $\qquad$ $P_2(1,0,-1)$

$\bar{u}_1 = (1,0,1)$ $\qquad$ $\bar{u}_2 = (1,0,-2)$

a) Determinar si L_1 y L_2 son paralelas, si se cruzan o si se cortan

b) En caso de que L_1 y L_2 se corten, determinar el punto de intersección.

$$\theta = \text{angcos} \frac{(1,0,1) \cdot (1,0-2)}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}} \;, \; \theta = \text{angcos}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$\theta = 108.43$ $\quad \therefore$ Se intersecton/cortan

b) $\quad L2 \begin{cases} x = 1+\beta \\ y = 0 \\ z = -1-2\beta \end{cases}$

$$1-\alpha = 1+\beta \;; \quad 1-\alpha = -1-2\beta \;;$$

$$\begin{array}{r} 1+\beta = 1-x \\ 1+2\beta = -1+x \\ \hline 2+3\beta = 0 \end{array} \;; \beta = \frac{-2}{3}$$

sustituyendo

$$P_I\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

5)

5.- Determinar las coordenadas del punto de intersección entre la recta

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{z}{8} \\ y = 6 \end{cases}$$

y la recta R que contiene a los puntos $(4,6,8)$ y $(0,6,0)$

$$L: \frac{x-4}{-4} = \frac{z}{8} = \alpha \ ; \ y = 6 \quad \therefore \quad L: \begin{cases} x = 4-4\alpha \\ y = 6 \\ z = 8\alpha \end{cases}$$

$$R: \overline{AB} = (-4,0,-8) = 4(1,0,2) \quad \bar{v} = (1,0,2)$$

$$\overline{BA} = (4,0,8)$$

$$R: \begin{cases} x = 4+\beta \\ y = 6 \\ z = 8+2\beta \end{cases}$$

Igualando

$$x: \quad 4-4\alpha = 4+\beta \ ; \ 4\alpha+\beta = 0$$

$$z: \quad 8\alpha = 8+2\beta \ ; \ 8\alpha - 2\beta = 8$$

$$16\alpha = 8 \ , \ \underline{\alpha = \tfrac{1}{2}} \ y \ \underline{\beta = -2}$$

Sustituyendo valores

$$\underline{P_1(2,6,4)}$$

6)

6.- Calcular la distancia entre rectas

$$L:\begin{cases} z = 8-2x \\ y = 6 \end{cases}$$

y el eje de las abcisas

$$L = \frac{x}{1} = \frac{z-8}{-2} \ ; \ y = 6 \begin{cases} P_L(0,6,8) \\ \bar{u} = (1,0,-2) \end{cases}$$

Eje x: $P_x(0,0,0)$ $\quad \bar{v} = (1,0,0)$

$$\overline{P_x P_L} = (0,6,8)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-2,0) \qquad |\bar{u} \times \bar{v}| = 2$$

$$\therefore d = \frac{|(0,6,8)\cdot(0,-2,0)|}{2} = \frac{12}{2} = \underline{6\,U_L}$$

7)

7.- Sea la recta R que contiene al punto $P(4,-1,0)$, que es perpendicular al eje x y cuyo vector director tiene como ángulos directores $\beta<90°$ y $\gamma=126.87°$; y sea la recta L, una de cuya ecuación vectorial es:

$$\bar{p}=(2,y_0,-1)+t(1,-3,c)$$

Determinar los valores de y_0 y c tales que las rectas R y L se intersequen perpendicularmente.

Como $L \perp x$: $(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(1,0,0)=0$

$$1\alpha+0+0=0 \therefore \alpha=0$$

$\cos\alpha=0$, $\cos\beta=\theta<90°$, $\cos\gamma=126.87$

$$\cos^2\beta=1-\cancel{\cos^2\alpha}^{\,0}-\cos^2\gamma$$

$$\cos^2\beta=1-.3600$$

$$\cos^2\beta=.6399;\ \underline{\cos\beta=.799998982}$$

$\therefore \bar{U}_R(0,.7999,-.6000)$

Entonces

$$R: \bar{p}=(4,-1,0)+s(0,.7999,-.6000)$$

Como $R\perp L$: $\bar{U}\cdot\bar{V}=0$; $(0,.7999,-.6000)\cdot(1,-3,c)=0$

$$\bar{U}\cdot\bar{V}=0+(-2.3997)+(-.6000(c))=0$$

$$\underline{c=-3.9995}$$

Entonces $\bar{V}$: $\bar{V}=(1,-3,-3.9995)$

$$R: \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 + .7999s \\ z = -.6000s \end{cases} \qquad L: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = y_0 - 3t \\ z = -1 - 3.999t \end{cases}$$

Igualando:

$x: \quad 4 = 2 + t; \quad \underline{t = 2}$

$z: -.6000s = -1 - 3.999t \quad \therefore t = 2$

$-.6000s = -1 - 7.998$

$-.6000s = -8.998$

$\underline{s = 14.99}$

$y: -1 + .79999s = y_0 - 3(2); \; -1 + .79999s = y_0 - 6;$

$-1 + .79999(14.99) + 6 = y_0$

$\underline{y_0 = 16.9918}$

$\therefore \quad \underline{\bar{p} = (2, 16.9918, -1) + t(1, -3, -3.999)}$

8)

8.- Sea la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: -2x-4=-2z\ ;\ y+6=0$$

Determinar las coordenadas del punto de la recta que esta más cerca del origen.

$\bar{u}\cdot\overline{OL}=0$

$$L:\left\{\frac{x+2}{1}=\frac{z}{1}\ ;\ y=-6\right. \quad \therefore \bar{u}=(1,0,1)$$

$$L:\begin{cases} x=-2+\alpha \\ y=-6 \\ z=\alpha \end{cases} \ ;\ \alpha\in\mathbb{R}:\ L:\bar{p}\ (-2+\alpha,-6,\alpha)$$

$$\overline{OL}=(-2+\alpha,-6,\alpha)-(0,0,0)=(-2+\alpha,-6,\alpha)$$

$$\bar{u}\cdot\overline{OL}=(1,0,1)\cdot(2+\alpha,-6,\alpha)=0;\ -2+\alpha+\alpha=0;$$

$2\alpha=2;\ \underline{\alpha=1}$

$\therefore\ \underline{P(-1,-6,1)}$

9)

Ejercicio 9

Obtener una ecuación vectorial de una recta L que contiene al punto A(-2, -4, 1), es paralela al plano XZ y forma con el plano $\pi: 4 - 2z = 0$ un angulo de 60°

Datos:

$\pi: 4 - 2z = 0$

$\theta = 60°$

$A(-2, -4, 1)$

Entonces si L es paralela a XZ entonces el vector director es de la forma

$$\bar{U}_L = (a, 0, b)$$

Si L forma forma un angulo de 60° con π, debe cumplir que:

$$\frac{\bar{N}_\pi \cdot \bar{U}_L}{|\bar{N}_\pi||\bar{U}_L|} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{N}_\pi = (0, 0, -2) = -2\hat{k}$$

Si $\bar{U}_L$ es unitario

$$\Longrightarrow |\bar{U}_L| = 1$$

Scribe

$$\Longrightarrow \frac{-2(a,0,b)\cdot(0,0,1)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pero $a^2 + b^2 = 1$

$$a^2 = 1 - \frac{3}{4}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ a = \pm \frac{1}{2}$$

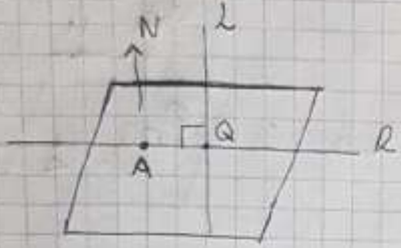
Entonces la ecuación vectorial

$$\bar{p} = (-2, -4, 1) + \alpha\left(\pm\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

10)

10. Determinar unas ecuaciones paramétricas de la recta R, que contiene al punto $A(3,1,0)$ y que corta perpendicularmente a la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: \frac{4-2x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{2}$$



$$L: -x+2 = \frac{y+1}{2} = \frac{-z+3}{2}$$

$$L: x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$$

$\vec{u} = (1, 2, -2)$

$P_L(2, -1, 3)$

$$L: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\pi \begin{cases} A(3,1,0) \\ \bar{N}_\pi = \bar{u}_L = (1\,2,-2) \end{cases}$$

$ax + by + cz + d = 0$

$x + 2y - 2z + d = 0$

$3 + 2(1) - 2(0) + d = 0$

$3 + 2 - 0 + d = 0$

$5 + d = 0 \quad d = -5$

$\pi: x + 2y - 2z - 5 = 0$

$Q = L \cap \pi \rightarrow$

$(2+\alpha) + 2(-1+2\alpha) - 2(3-2\alpha) - 5 = 0$

$2 + \alpha - 2 + 4\alpha - 6 + 4\alpha - 5 = 0$

$9\alpha - 11 = 0 \qquad \alpha = \frac{11}{9}$

$$Q: \begin{cases} x = 29/9 \\ y = 13/9 \\ z = 5/9 \end{cases} \qquad Q = L \cap \pi \left(\frac{29}{9}, \frac{13}{9}, \frac{5}{9} \right)$$

$$A(3, 1, 0)$$

$$\alpha = \frac{11}{9}$$

$$R: \begin{cases} A(3, 1, 0) \\ \vec{v}_R = \vec{P}\vec{O} = Q - P = \left(\frac{29}{9}, \frac{13}{9}, \frac{5}{9} \right) - (3, 1, 0) \end{cases}$$

$$= \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right) \quad \|(2, 4, 5)\|$$

Parametrica de R

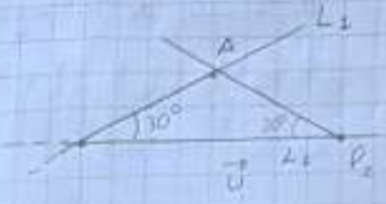
$$R: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases} \qquad \text{Comprobando } \vec{u} \cdot \vec{v} = \emptyset$$

$$\vec{u} = (1, 2, -2) \quad \vec{v} = (2, 4, 5)$$

$$= 2 + 8 - 10 = \emptyset$$

11)

11. Sea la recta L_1 la cual contiene al punto $A(2,2,3)$ y se intersecca con la recta $L_2: \begin{cases} x=3 \\ z=2 \end{cases}$ y forma un ángulo de $30°$. Determinar las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas



Solución:

$L_2: \bar{p} = (3, t, 2)$ $\quad \overline{PA} \angle 30° \, \bar{u}$

$\bar{u} = (0, 1, 0)$

$\overline{PA} = \bar{A} - \bar{P} = (2,2,3) - (3,t,2) = (-1, 2-t, 1)$

$|\overline{PA}| = \sqrt{1+(2-t)^2+1} = \sqrt{2+4-4t+t^2} = \sqrt{t^2-4t+6}$

$\cos 30° = \dfrac{\overline{PA} \cdot \bar{u}}{|\overline{PA}||\bar{u}|}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(-1, 2-t, 1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{t^2-4t+6}\ (1)}$;

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2t}{\sqrt{t^2-4t+6}} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4(-2)}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$

$= \dfrac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{6}}$

$t_1 = 2+\sqrt{6}$; $t_2 = 2-\sqrt{6}$

Finalmente:

Sustituyendo t_1 y t_2 en

L_2 : $\boxed{\begin{array}{l} P_1(3, 2+\sqrt{6}, 2) \\ P_2(3, 2-\sqrt{6}, 2) \end{array}}$

12)

La redacción está incompleta

13)

13. Sea la viga $\overline{AB}$ que tiene por extremos a los puntos $A(1,2,3)$ y $B(7,6,5)$ si desde el punto $C(4,5,C)$ cae en forma vertical un objeto, determinar el punto de contacto; en caso contrario calcular a que distancia de la viga pasara el objeto.

$\overline{AB} = (7,6,5) - (1,2,3) = (6,4,2)$ $\quad A(1,2,3)$

Ecuación de la recta: $\quad B(7,6,5)$

$\overline{AB} \quad \bar{p} = (1,2,3) + \alpha(6,4,2)$

$p = (1+6\alpha, 2+4\alpha, 3+2\alpha)$

$$L: \begin{cases} x = 1 + 6\alpha \\ y = 2 + 4\alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}$$

$$L: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2} \qquad \bar{p} = (1,2,3) \quad \bar{v} = (6,4,2)$$

$\overline{CJ} = (4,5,10) - (0,0,1) = (4,5,9)$

Ecuación de la recta

$\overline{CJ} = \bar{p} = (4,5,10) + \beta(4,5,9)$

$\bar{p} = (4+4\beta, 5+5\beta, 10+9\beta)$

$$R: \begin{cases} x = 4 + 4\beta \\ y = 5 + 5\beta \\ z = 10 + 9\beta \end{cases}$$

$$R: \left\{ \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-10}{9} \right. \qquad \bar{v} = (4,5,10)$$

$$\bar{v} = (4,5,9)$$

→ Si se intersectan

$$1+6\alpha = 4+4\beta \qquad \begin{aligned} 6\alpha - 4\beta &= 3 \\ -6\alpha + 15\beta &= -9 \\ \hline 11\beta &= -6 \end{aligned} \qquad \beta = \frac{-6}{11}$$

$$2+2\alpha = 5+5\beta$$

$$\beta = \frac{-6}{11} \qquad \alpha = \frac{3}{22} \qquad \alpha = \frac{3+4\left(\frac{-6}{11}\right)}{6}$$

Sustituyendo en z:

$$L: \; z = 3 + 2\left(\frac{3}{22}\right) \qquad z = \frac{36}{11}$$

$$R: \; 10 + 9\left(\frac{-6}{11}\right) = z \qquad z = 56/11$$

$$\boxed{\text{No hay intersección}}$$

14)

14. Sea la recta L que contiene al punto A(2,4,6) y que forma ángulos agudos iguales con los ejes x y Y. Si el ángulo entre la recta L y el eje Z es de 45°, determinar:

a) El ángulo que forma la recta L con los ejes x y Y.

Datos

$A(2,4,6)$ $\theta_z = 45°$ $\theta_x = \theta_y =$ agudos

$A = 2(1,2,3)$ $x(1,0,0)$ $Y(0,1,0)$

$\bar{N} = i \times j = k$

$$\theta = \text{ang}\cos \frac{\bar{N} \cdot \bar{U}}{|\bar{N}| \cdot |\bar{U}|}$$

$$\theta = \text{ang}\cos \frac{(0,0,1) \cdot (1,2,3)}{\sqrt{14}}$$

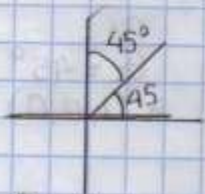
$$\theta = \text{ang}\cos \frac{3}{\sqrt{14}}$$

b) Unas ecuaciones paramétricas

$$P = (2,4,6) + t(1,2,3)$$

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

c) El punto en el cual la recta L se interseca con el plano XZ



$x = 45^\circ$

$\cos\alpha = ?$ $\quad \cos\beta = 90$ $\quad \cos g : 45$

$\cos\alpha = ?$ $\quad \cos\beta = 0$ $\quad \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 ; \quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{4}$

$\cos^2\alpha = \frac{2}{4} ; \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces

$(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

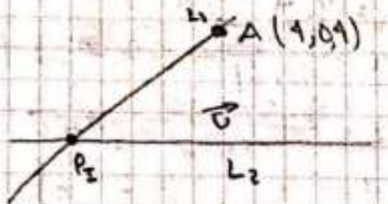
15)

15. Sea la recta L_1 que contiene al punto $A(4,0,4)$, que interseca a la recta L_2 y forma con ésta un ángulo de 60°. Si las ecuaciones de la recta L_2 son:

$$2-x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$$

Determinar las coordenadas de los puntos de intersección entre L_1 y L_2, (hay dos soluciones).

$$L_2:\begin{cases}x=2+\alpha\\ y=-1+3\alpha\\ z=1+2\alpha\end{cases}\qquad \bar{u}=(1,3,2)\qquad |\bar{u}|=\sqrt{14}$$



$$\overline{PA}=(2-\alpha,\ 1-3\alpha,\ 3-2\alpha)$$

$$\cos 60°=\frac{\overline{PA}\cdot\bar{u}}{|\overline{PA}||\bar{u}|}$$

$$|\overline{PA}|=\sqrt{(2-\alpha)^2+(1-3\alpha)^2+(3-2\alpha)^2}$$
$$=\sqrt{4-4\alpha+\alpha^2+1-6\alpha+9\alpha^2+9-12\alpha+4\alpha^2}$$
$$=\sqrt{14-22\alpha+14\alpha^2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{(2-\alpha,1-3\alpha,3-2\alpha)\cdot(1,3,2)}{\sqrt{14-22\alpha+14\alpha^2}\sqrt{14}}\ ;\ \frac{1}{2}=\frac{(2-\alpha,1-3\alpha,3-2\alpha)\cdot(1,3,2)}{\sqrt{196-308\alpha+196\alpha^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{(11-14\alpha)}{\sqrt{196-308\alpha+196\alpha^2}}\ ;\ \left(\sqrt{196-308\alpha+196\alpha^2}\right)^2=(22-28\alpha)^2$$

$$196-308\alpha+196\alpha^2=484-1232\alpha+784\alpha^2$$
$$588\alpha^2-924\alpha+288=0$$

$a = 588 \quad b = -924 \quad c = 288$

$$\alpha = \frac{924 \pm \sqrt{(-924)^2 - 4(588)(288)}}{2(588)}$$

$$\alpha = \frac{924 \pm \sqrt{853776 - 677376}}{1176}$$

$$\alpha = \frac{924 \pm \sqrt{176400}}{1176}$$

$$\alpha = \frac{924 \pm 420}{1176} \qquad \alpha_1 = \frac{924 + 420}{1176} = \frac{8}{7}$$

$$\alpha_2 = \frac{924 - 420}{1176} = \frac{3}{7}$$

Sustituyendo α_1 y α_2 en L_2

$P_1\left(\frac{22}{7}, \frac{17}{7}, \frac{23}{7}\right)$

$P_2\left(\frac{17}{7}, \frac{2}{7}, \frac{13}{7}\right)$ //

16)

16. Sean las rectas:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = -y = \frac{3z-6}{9}$$

$$L_2: \frac{4-2x}{-4} = 1-y = \frac{3z-8}{6}$$

a) Calcular el ángulo que forman L_1 y L_2.
b) Determinar la distancia entre L_1 y L_2.
c) Obtener la ecuación cartesiana del plano definido por L_1 y L_2.

$$L_1: \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 2+3\alpha \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 2+2\beta \\ y = 1-\beta \\ z = 4+3\beta \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$: $P_3(3,-1,5)$ Si $\beta = -1$: $P_4(0,2,1)$

$\therefore \quad \overline{P_3P_4} = (-3,3,-4)$

Solución:

a) $\overline{u_1} = (2,-1,3) \qquad \overline{u_2} = (2,-1,3)$

$$\theta = \text{ang cos } \frac{(2,-1,3)(2,-1,3)}{\sqrt{14}\ \sqrt{14}} =$$

$$\text{ang cos}\left(\frac{14}{14}\right) = \text{ang cos } 1 = \underline{0°}$$

b) $\overline{P_1P_2} = (1,1,2)$

$$\overline{U_1} \times \overline{U_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

$|\overline{U_1} \times \overline{U_2}| = 0$ $\quad d = \frac{0}{0}$ ✗

Como $L_1 \parallel L_2$ la distancia se calcula como la distancia de un punto a una de las rectas.

$$d = \frac{|\overline{P_1P_2} \times \overline{u_1}|}{|\overline{u_1}|}$$

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{U_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5,1,-3)$$

$$|\overline{P_1P_2} \times \overline{U_1}| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

Sustituyendo:

$$d = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7\cdot 5}{7\cdot 2}} = \boxed{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

c) $\overline{U} = \overline{V} = (2,-1,3)$ $\quad \left.\begin{array}{l} P_1(1,0,2) \\ P_2(2,1,4) \end{array}\right\} \overline{P_1P_2} = (-5,-1,3)$

$$\overline{N} = \overline{U} \times \overline{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,-1,3)$$

$\therefore \ \pi: -5x - y + 3z + D = 0$

$\overline{N} = \overline{P_1P_2} \times \overline{U} = (5,1,-3)$

$\pi: 5x + y - 3z + D = 0$

Sustituyendo

$P_1(1,0,2)$ en $\pi: -5(1) - 0 + 3(2) + D = 0$

$1 + D = 0$ $\quad \boxed{D = -1}$

$\therefore \ \pi: -5x - y + 3z - 1 = 0$

17)

17) Sea la recta L y R que tienen por ecuaciones

$$L: \left\{ \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{2z+6}{4} \right. \; ; \; R: \left\{ \frac{2-x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{6-z}{9} \right.$$

$$L: \left\{ \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{2} \right. \; ; \; R: \left\{ \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{-9} \right.$$

a) Si L y R se intersecan, determinar el punto de intersección; en caso contrario calcular las distancias entre dichas rectas.

$$L: \begin{cases} x = 3\alpha - 1 \\ y = 4\alpha + 3 \\ z = 2\alpha - 3 \end{cases} \; ; \; R: \begin{cases} x = -3\beta + 2 \\ y = 3\beta \\ z = -9\beta + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 1 = -3\beta + 2 \\ 4\alpha + 3 = 3\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 3 \\ 4\alpha - 3\beta = -3 \end{cases} \qquad \alpha = \frac{0}{7} \; ; \; \alpha = 0$$

$$7\alpha \quad = 0$$

$$3(0) + 3\beta = 3 \; ; \; 3\beta = 3 \; ; \; \beta = \frac{3}{3} \; ; \; \beta = 1$$

$x = 3(0) - 1$ $\qquad$ $x = -3(1) + 2$

$x = -1$ $\qquad$ $x = -1$

$y = 4(0) + 3$ $\qquad$ $y = 3(1)$

$y = 3$ $\qquad$ $y = 3$

$z = 2(0) - 3$ $\qquad$ $z = -9(1) + 6$

$z = -3$ $\qquad$ $z = -3$

$\therefore$ Punto de intersección $P(-1, 3, -3)$

B) Determinar el punto de intersección de la recta R con el plano xy

$$R: \left\{ \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{3} \right.$$

$$y = \frac{3(x-2)}{-3} \; ; \; y = 2 - x$$

$$2 - x = 0 \; ; \; -x = -2 \; ; \; x = 2$$

$$y = 2 - (0) \; ; \; y = 2$$

$\therefore$ $(2, 0)$ y $(0, 2)$

18)

18. Sean los planos: $\pi_1: 6x-3y+z=0$

$\pi_2 = 3x+2y-4=0$

Determinar:

a) La ecuación cartesiana del plano π_3 que contiene al punto $A(0,7,-1)$ y que es simultáneamente perpendicular a los planos π_1 y π_2;

b) Unas ecuaciones paramétricas de la recta R de intersección del plano π_2 con el plano yz, $x=0$

c) El ángulo que forma el plano π_2 con el eje z.

Solución:

$\bar{N}_1 = (6,-3,1)$, $\bar{N}_2 = (3,2,0)$, $|\bar{N}_2| = \sqrt{13}$

a)

$\bar{N}_3 = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 3, 21)$$

$\pi_3: -2x+3y+21z+D=0$, sust. $A(0,7,-1)$ en π_3

$-2(0)+3(7)+21(-1)+D=0 \quad \therefore D=0$

$\pi_3: -2x+3y+21z=0$

b) Sust. $x=0$ en π_2: $2y-1=0$; $y=2$

$$\therefore R \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

c) $\theta = \text{ang sen } \dfrac{\overline{N_2} \cdot \hat{k}}{|\overline{N_2}||\hat{k}|}$

$\text{ang sen } \dfrac{(3,2,0)\,(0,0,1)}{\sqrt{13}} = \text{angsen }(0)$

$\therefore \theta = 0°, 180°$

19)

19. Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$L: \begin{cases} 4x+6y-12=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad R: \begin{cases} 2x-4z-6=0 \\ y=0 \end{cases}$

Determinar si las recta L y R definen un plano. En caso afirmativo, obtener la ecuación cartesiana de dicho plano, en caso contrario, explicar porque no definen un plano.

Solución:

$L: \{4x+6y-12=0;\ z=0$

$L: \{2x+3y-6=0,\ z=0;\ L: \{2x=-3y+6,\ z=0$

$L: \{2x=-3(y-2);\ z=0;\ L: \left\{\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-2}{2},\ z=0\right.$

$\therefore L: \bar{u}=(-3,2,0)$

$P_L(0,2,0)$

$R:\ 2x-4z-6=0;\ y=0$

$R\{x-2z-3=0,\ y=0,\ R:\{x=2z+3,\ y=0$

$R: \{x=2(z+\frac{3}{2});\ y=0$

$R: \{\frac{x}{2}=z+\frac{3}{2};\ y=0$

$\therefore R: \bar{v}=(2,0,1) \quad P_R(0,0,-3/2)$

$$\pi: \bar{N} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,3,-4)$$

$\therefore \pi: 2x+3y-4z+D=0$

Sustituyendo $P_L(0,2,0)$ en π:

$2(0)+3(2)-4(0)+D=0$

$6+D=0$

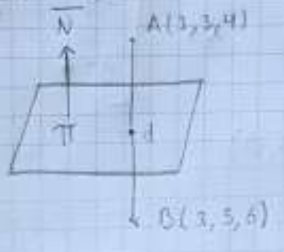
$D=-6$

$$\therefore \pi: 2x+3y-4z-6=0$$

20)

20. El punto $A(3,3,4)$ es simétrico del punto $B(3,5,6)$ respecto al plano π. Obtener la ecuación cartesiana del plano π.

Solución:



$\bar{N} \parallel \overline{AB}$

$\overline{AB} = (0,2,2)$

$\therefore \bar{N} = (0,2,2)$
$= 2(0,1,1)$

$0x+2y+2z+D=0$

Obteniendo C:

$C(3,4,5)$

Sustituyendo C en π

$2(4)+2(5)+D=0, \quad 18+D=0 \quad D=-18$

$\pi: 2y+2z-18=0$

$$\boxed{\pi: y+z-9=0}$$

21)

21. Determinar la ecuación cartesiana del plano que forman las rectas:

$M: \; p=(4,0,8)+t(-4,6,0)$

$\bar{p}=(4-4t,\; 6t,\; 8)$

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{z}{8} \\ y=6 \end{cases}$$

$$L: \begin{cases} x = 4-4t \\ y = 6t \\ z = 8+0t \end{cases} \qquad v=(-4,6,0)$$

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z-8}{0} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} B(4,0,8) \\ \overline{AB}=(4,0,8) \end{array}$$

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 8 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-48,-32,24)$$

$(0-48)\hat{i} - (0+32)\hat{j} + (24+0)\hat{k} = -48\hat{i} - 32\hat{j} + 24\hat{k}$

$\overline{P_0P}\cdot\bar{n}=0;\; (x-0,\, y-0,\, z-0)\cdot(-48,-32,24)=0$

$-48x-32y+24z=0$

$$\boxed{-6x-4y+3z=0}$$

22)

22) sea la recta L de ecuaciones cartesianas $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{5} = \frac{5z-3}{10}$ Determinar las coordenadas de los puntos A y B que pertenecen a la recta L cuya distancia al punto $C\left(5, -2, \frac{8}{5}\right)$ es igual a $3\sqrt{6}$

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z - 3/5}{2} \qquad P(1, 0, 3/5)$$

$$\bar{u} = (2, 5, 2)$$

$$L: \bar{P} = (1, 0, 3/5) + t(2, 5, 2)$$

$$L: \bar{P} = \left(1+2t,\ 5t,\ \tfrac{3}{5} + 2t\right)$$

$$\overline{AC} = (4-2t,\ -2-5t,\ 1-2t)$$

$$|\overline{AC}| = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore\ |(4-2t,\ -2-5t,\ 1-t)| = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{(4-2t)^2 + (-2-5t)^2 + (1-2t)^2} = 3\sqrt{6}$$

$$(4-2t)^2 + (-2-5t)^2 + (1-2t)^2 = 9 \cdot 6$$

$$16 - 16t + 4t^2 + 4 + 20t + 25t^2 + 1 - 4t + 4t^2 - 54 = 0$$

$$33t^2 - 33 = 0$$

$$t^2 = \frac{33}{33} = 1 \longrightarrow t = \pm\sqrt{1}$$

$$t = \pm 1$$

$$\therefore\ A\left(3, 5, \frac{13}{5}\right) \text{ y } B\left(-1, -5, -\frac{7}{5}\right)$$

23)

23) sea el plano π definido por los puntos $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,6)$

A) Calcular la distancia entre el punto $Q(3,2,3)$ y el plano π

$\overline{AB} = (-3,3,0)$; $\overline{AC} = (-3,0,6)$; $\overline{BC} = (0,-3,6)$

$\overline{AB} = 3(-1,1,0)$; $\overline{AC} = 3(-1,0,2)$; $\overline{BC}\ 3(0,-1,2)$

$$\bar{N} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,2,1)$$

$\therefore\ \pi : 2x+2y+z+D=0 \qquad 2(3)+D=0\ ;\ D=-6$

$\therefore\ \pi = 2x+2y+z-6=0$

$d = \dfrac{|\overline{BQ}\cdot\bar{N}|}{|\bar{N}|}$; $\overline{BQ} = (3,2,3)-(0,3,0) = (3,-1,3)$

$|\bar{N}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$$d = \frac{|(3,-1,3)\cdot(2,2,1)|}{3} = \frac{|6-2+3|}{3} = \frac{7}{3}\ u_L$$

B) Determinar las coordenadas del punto de intersección entre el plano π y la recta L que contiene al punto $D(4,5,6)$ y que es normal al plano π

$R: \bar{P} = (4,5,6) + \alpha(2,2,1) = (4+2\alpha, 5+2\alpha, 6+\alpha)$

sustituyendo R en π:

$2(4+2\alpha)+2(5+2\alpha)+(6+\alpha)-6=0$

$8+4\alpha+10+4\alpha\ \cancel{+6}+\alpha\ \cancel{-6}=0$

$18+9\alpha=0\ ;\ 9\alpha=-18\ ;\ \alpha=-2$

Sustituyendo $\alpha=-2$ en R:

$\therefore\ PI(0,1,4)$

24)

24) Determinar la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano π_1 cuya ecuación es $y=0$, y que contiene a la recta L de ecuaciones:

$$L: \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$$

$$\bar{u}=(1,0,1)$$

Despejando

$$L: \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=-1+\alpha \end{cases} \qquad L: \bar{P}=(\alpha, 0, \alpha-1)$$

$$\bar{u}\cdot\bar{OL}=(1,0,1)\cdot(\alpha,0,\alpha-1)$$
$$=(\alpha,0,\alpha-1)\cdot\alpha+\alpha-1=2\alpha-1 \rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

sustituyendo $\alpha=\frac{1}{2}$ en L

$$L: \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \\ z=-\frac{2}{2}+\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad L: \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\pi=\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z=0 ; \quad 2\left(\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z=0\right);$$

$$x+2y-2-z=0$$

$$\therefore \pi = x+2y-z-2=0$$

25)

25) Sea el plano π cuya ecuación es $3x-6y+z+6=0$ y sea la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: x-3 = y-3 = \frac{3-z}{-3}$$

Determinar, si existe, la intersección entre la recta y el plano

Sustituyendo L en π:

$$\pi: 3x - 6y + z + 6 = 0$$

$$3(3+\alpha) - 6(3+\alpha) + (3+3\alpha) + 6 = 0$$

$$\cancel{9} + \cancel{3\alpha} - \cancel{18} - \cancel{6\alpha} + \cancel{3} + \cancel{3\alpha} + \cancel{6} = 0$$

$$0 = 0$$

$\therefore$ Como $0=0$ L es parte de π

26)

26. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $P(2,-1,4)$ y que es perpendicular a la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: \begin{cases} 2x-4y-6z+7=0 \\ x+3y-5z-3=0 \end{cases} \qquad \bar{N}_1=(2,-4,-6) \quad \bar{N}_2=(1,3,-5)$$

$$\bar{U}=\bar{N}_1\times\bar{N}_2=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}=(38,4,10)$$

$\pi: 38x+4y+10z+D=0$

Sustituyendo $P(2,-1,4)$ en π

$$38(2)+4(-1)+10(4)+D=0$$
$$76-4+40+D=0$$
$$112+D=0$$
$$D=-112$$

$\therefore \pi: 38x+4y+10z-112=0$

ó $\pi: 19x+2y+5z-56=0$

27)

27) Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $A(1,-2,3)$ y al eje x.

$-\hat{i} = (-1,0,0)$ $\quad O = (0,0,0)$

$\overline{AO} = (-1,-2,3)$

$\bar{N} = \overline{AO} \times -\hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-3,2)$

$\Pi = -3y - 2z + D = 0$

$-3(0) - 2(2) + D = 0$

$0 + 0 + D = 0$

$D = 0$

$\therefore \Pi = -3y - 2z = 0$

28)

28) Determinar las ecuaciones cartesianas de los tres planos que contienen a la recta L de ecuaciones

$$L: \frac{8-2x}{6} = y = \frac{16-z}{7}$$

y que son perpendiculares a los tres planos coordenados.

$$L: \frac{x-4}{-3} = y = \frac{z-16}{-7}$$

$$L: \begin{cases} x = 4-3t \\ y = t \\ z = 16-7t \end{cases}$$

$$\bar{u} \times \hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-7,-1)$$

$$(4,0,16)\cdot(0,-7,-1) = -16(-1) = +16$$

$$\bar{u} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (7,0,-3)$$

$$(4,0,16)\cdot(7,0,-3) = -20(-1) = +20$$

$$\hat{u} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,3,0)$$

$$(4,0,16)\cdot(1,3,0) = 4(-1) = -4$$

$$\therefore \pi_1 = -7y - z + 16 = 0\ ;\ \pi_2 = 7x - 3z + 20 = 0\ ;\ \pi_3 = x + 3y - 4 = 0$$

29)

29) Determinar la ecuación cartesiana del plano π_1 que contiene al punto $A(-1,2,1)$ y a la recta L de la intersección del plano π_2 cuya ecuación es $5x-2y+4z-4=0$ con el plano YZ.

$\pi_2 = 5x-2y+4z-4=0$; $\pi_1 : A(-1,2,1)$ $\;yz=0$

Si $x=0$ π_2:

$$-2y+4z=4 \longrightarrow -y=\frac{4-4z}{2} \rightarrow y=2z-2$$

$$L:\begin{cases} x=0 \\ y=2t-2 \\ z=t \end{cases} \qquad \bar{u}=(0,2,1) \qquad B(0,-2,0)$$

$$\overline{AB}=(1,-4,-1) \qquad \bar{N}=\overline{AB}\times\bar{u}$$

$$\overline{AB}\times\bar{u}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,2)$$

$$\bar{P}=\overline{P_0A}$$

$$\bar{P}=(x+1,y-2,z-1)\cdot(-2,-1,2)=0$$

$$\bar{P}=(-2x-2,-y+2,2z-2)=0$$

$$\bar{P}=(-2x-y+2z-2=0)$$

$$\therefore \; \pi_1 : -2x-y+2z-2$$

30)

30. Sea la recta L y el plano π representados por las ecuaciones:

$$L: \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \qquad \pi: \bar{p} = s\hat{i} + t\hat{j}$$

a) Obtener las coordenadas del punto F, intersección de L con π.

b) Calcular el ángulo que forman L y π.

c) Determinar unas ecuaciones cartesianas en forma general de la recta R que resulta de la intersección del plano π con el plano cartesiano YZ.

a)

$$L: \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \Rightarrow L: \{ x = y = z \qquad \bar{u} = (1,1,1) \quad P_1(0,0,0)$$

$$\pi: \bar{p} = s\hat{i} + t\hat{j} = s\hat{i} + t\hat{j} + \bar{0} \qquad P_2(0,0,0)$$

Como L y π tienen al origen como punto en común, este será el punto de Intersección:

$$F = PI(0,0,0)$$

b)

Del plano $z = 0 \Rightarrow \bar{N} = (0,0,1)$

Recta: $L: \bar{u} = (1,1,1)$

$$\theta = \text{angsen} \frac{(0,0,1) \cdot (1,1,1)}{(1)(\sqrt{3})} ; \; \theta = \text{angsen} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta \approx 35.26°$$

c)

El plano $\pi: z = 0$ y el plano cartesiano YZ es $x = 0$

$$\therefore \; R: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

31)

31. Sea la recta L_1 y L_2 que se cruzan en el espacio sin cortarse y cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : \{ P_0(0,0,0) \quad \bar{u} = (-1,-4,0)$$

$$L_2 : \begin{cases} x = -2+t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Determinar la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L_1 y L_3, siendo esta ultima ortogonal tanto a L_1 como a L_2

$$L_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = -2+t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Como $L_3 = L_1 \times L_2$

$$L_1 \times L_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 1, 5)$$

Los vectores directores L_1 y L_3 pertenecen al plano

$\pi : (\bar{r} - \bar{p}) \cdot \bar{u} = 0$

$(x-0, y-0, z-0) \cdot (-4,1,5) = 0 \qquad D = 0$

$\pi : -4x + y + 5z = 0$

32)

Ejercicio 32

Determinar la ecuación cartesiana y una ecuación vectorial del plano π que contiene las rectas:

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{2y+2}{4} = \frac{1-z}{-3} \quad y \quad R: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-4t \\ z = 4-6t \end{cases}$$

Entonces:

$$0 = \frac{x-1}{1} = \frac{2y+2}{4} = \frac{1-z}{-3} \quad \therefore A(1,-2,1)$$

Los vectores generadores $\begin{cases} \vec{U} = (1,4,-3) \\ \vec{V} = (-2,-4,-6) \end{cases}$

Ecuación del plano

$$\bar{n} = \vec{U} \times \vec{V} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = (-12, 0, 4)$$

$$\therefore \bar{n} = -12i + 0j + 4k$$

Entonces la ecuación del plano

$$-12(x-1) + 0(y-2) + 4(z-1) = 0$$

$$-12x + 12 + 4z - 4 = 0$$

$$-12x + 4z + 8 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación del plano } \pi$$

Teniendo en cuenta que tenemos la Ec. cartesiana :

$$\pi : \left\{ -12x + 4z + 8 = 0 \right.$$

1 Ecuación

Rango A = Rango A* = 1

$$\underbrace{\left(\underbrace{-12 \quad 0 \quad 4}_{A} \mid -8 \right)}_{A^*}$$

$$x = -4z - 8$$

Ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = -4\alpha - 8 \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$$

$\bar{A} = (-8, 0, 0)$

$\bar{v} = (0, 1, 0)$

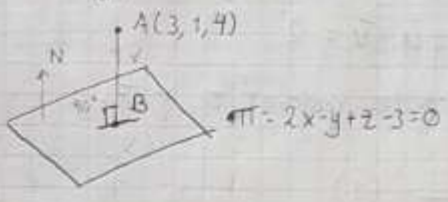
$\vec{v} = (-4, 0, 1)$

Ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (-8, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \alpha(-4, 0, 1)$$

33)

33. Determinar las coordenadas del punto B que se muestra en la siguiente figura.



$A(3,1,4)$

$\pi: 2x-y+z-3=0$

$N_\pi(2,-1,1)$

1) Recta ⊥ plano y pase por B

$$\left.\begin{matrix} A(3,1,4) \\ n_\pi(2,-1,1) \end{matrix}\right\} \quad r \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$$

2) Intersección recta plano

$2x-y+z-3=0$

$2(3+2\lambda)-(1-\lambda)+(4+\lambda)-3=0$

$6+4\lambda-1+\lambda+4+\lambda-3=0$

$6+6\lambda=0 \quad \lambda=\frac{-6}{6} \quad \boxed{\lambda=-1}$

3) Punto de la recta con λ

$$r: \begin{cases} x = 3+2(-1) = 1 \\ y = 1-(-1) = 2 \\ z = 4+(-1) = 3 \end{cases}$$

$\boxed{B(1,2,3)}$

34)

34.- Determinar la ecuación cartesiana del plano que es bisector que forman las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones

$$L_1 : x = y = z$$
$$L_2 : x = -y = z$$

$$L_1 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$\alpha = 2$

$P_1(2,2,2)$ $\qquad$ $P_2(2,-2,2)$

$\bar{u} = 2(1,1,1)$ $\qquad$ $\bar{v}(1,-1,1)$

$$P_1 \times P_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$$

$$2x + 0y - 2z + D = 0$$

$$2(2) + 0(2) - 2(2) + D = 0$$
$$D = 0$$

$$\therefore \underline{2x - 2z + 0 = 0}$$

35)

35. Sea la recta L, una de cuyas ecuaciones son:

$$L: \frac{-x}{5} = \frac{10-2z}{-10} \; ; \; y=0 \qquad \frac{-2(z-5)}{-10}$$

y sea π el plano cuya ecuación es:

$$\pi: 2x-3y+2z-10=0$$

a) Calcular el ángulo que forma L con π.

b) Determinar la intersección de L con π, si esta existe.

a) $L: \frac{x}{-5} = \frac{-2(z-5)}{-10} \; ; y=0 \; // \; L: \frac{x}{-5} = \frac{z-5}{5} \; ; y=0 = \alpha$

$$L: \begin{cases} x = -5\alpha \\ y = 0 \\ z = 5+5\alpha \end{cases}$$

$\pi: 2x-3y+2z-10=0$

$\bar{N} = (2,-3,2)$

$|\bar{N}| = \sqrt{17}$

$\bar{U} = (-5,0,5)$

$$\theta = \text{angsen} \frac{\bar{N}\cdot\bar{U}}{|\bar{N}||\bar{U}|} \; ; \; \theta = \text{angsen}\left(\frac{(2,-3,2)\cdot(-5,0,5)}{(\sqrt{17})(5\sqrt{2})}\right)$$

$$\theta = \text{angsen}\left(\frac{-10+10}{5\sqrt{34}}\right) ;$$

$\therefore$ Como el producto punto es 0 podemos decir que la recta y el plano son paralelos formando $0° / 180°$

b) Sustituimos L en π

$$2(-5\alpha)-3(0)+2(5+5\alpha)-10=0$$
$$-10\alpha+10+10\alpha-10=0$$
$$0=0$$

$\therefore$ L está contenida en π.

36)

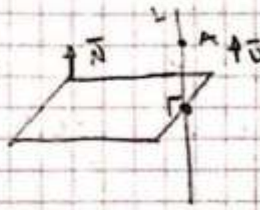
36. Sea la recta L que contiene al punto A(7,0,0) y que es normal al plano π de ecuación:

$$\pi: 4x-2y+2z+8=0$$

a) Determinar el punto de intersección entre dicha recta y plano.

b) Si T_1 y T_2 son las rectas de intersección del plano π con los planos coordenados XZ y YZ, respectivamente, calcular el ángulo comprendido entre T_1 y T_2.

c) Determinar unas ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene al punto A y que es simultáneamente perpendicular a las rectas mencionadas en el inciso anterior.

a) 

$\bar{N}=(4,-2,2)=2(2,-1,1)$

$\therefore \bar{v}=(2,-1,1)$

Recta L:

$$L: \begin{cases} x=7+2\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo x, y, z en π:

$\pi: 4x-2y+2z+8=0$
$2x-y+z+4=0$

$2(7+2\alpha)-(-\alpha)+(\alpha)+4=0$
$14+4\alpha+\alpha+\alpha+4=0 \ ; \ 18+6\alpha=0 \ ; \ \alpha=-3$

Sustituir $\alpha=-3$ en L

$x=7+2(-3) \quad y=-(-3) \quad z=-3 \quad PI(1,3,-3)$
$x=7-6 \quad y=3$
$x=1$

b) $T_1: \begin{cases} 4x-2y+2z+8=0 & — ① \\ y=0 & — ② \end{cases}$

$T_2: \begin{cases} 4x-2y+2z+8=0 & — ③ \\ x=0 & — ④ \end{cases}$

Sustituir ② en ①

$4x+2z+8=0$
$2x+z+4=0$
$z=-2x-4$

Sustituir ④ en ③

$-2y+2z+8=0$
$-y+z+4=0$
$z=y-4$

$\therefore T_1: \begin{cases} x=\beta \\ y=0 \\ z=-2\beta-4 \end{cases}$

$\therefore T_2: \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\lambda-4 \end{cases}$

$\bar{u}_1=(1,0,-2)$

$\bar{u}_2=(0,1,1)$

$\theta=\arg\cos\left[\frac{(1,0,-2)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{5}\ \sqrt{2}}\right]; \theta=\arg\cos\left(\frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$

$\theta=\arg\cos\left(\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)\approx 129.23°$

c) $\bar{u}_L=\bar{u}_1\times\bar{u}_2=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,1)$

$\bar{u}_L=(2,-1,1)$ $\quad A(7,0,0)$

$L: \frac{x-7}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$

37)

37. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta L y que es perpendicular al plano π si:

$$L:\left\{\frac{x-1}{3}=\frac{2-y}{-2}=\frac{3z-12}{9}\right.$$

$\pi: 2x+3y-4z-9$

$$L:\begin{cases} x=1+3\alpha \\ y=2+2\alpha \\ z=4+3\alpha \end{cases} \qquad L:\left\{\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}\right.$$

$\bar{u}=(3,2,3)$

$\overline{B}=(1,2,4)$

$\overline{AB}=(1,2,4)$

$$\bar{N}=\overline{AB}\times\bar{u}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(-2,9,-4)$$

$\pi: -2x+9y-4z+D=0$

Sustituyendo un punto en π, obtenemos $D=0$

$\therefore\ \pi: -2x+9y-4z=0$

38)

38. Sea el plano π, que contiene a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: \frac{-2x}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{3(z-3)}{18} \qquad L_2: \bar{p} = (1,2,3) + t(-2,2,0)$$

Determinar:

a) La ecuación cartesiana del plano π.
b) La distancia entre el punto $P(1,0,3)$ y el plano π.
c) Las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas L_1 y L_2.

a) $L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-3}{6} \qquad L_2: \bar{p} = (1,2,3) + t(-2,2,0)$

$P_0(0,3,3) \qquad \bar{P_1}(1,2,3)$

$\bar{u} = (3,3,6) = 3(1,1,2) \qquad \bar{v} = (-2,2,0) = 2(-1,1,0)$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-2,2) \qquad \therefore \bar{N} = (-2,-2,2)$$

$\pi: -2x - 2z + 2y + D = 0$

Sustituyendo P_1 en π, obtenemos $D = 0$

$\therefore \pi: -2x - 2z + 2y = 0$ ó $\pi: -x - z + y = 0$

b) $\overline{P_0P} = (0,3,3) - (1,0,3) = (-1,3,0) \qquad d = \frac{|\overline{P_0P} \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$

$$d = \frac{|(-1,3,0)\cdot(-2,-2,2)|}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u_L$$

c) $L_1 : \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = 3 + 6\alpha \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$

Igualando z de ambas rectas:

$$3 + 6\alpha = 3$$
$$\alpha = 0$$

Igualando x de ambas rectas:

$$0 = 1 - 2t$$
$$2t = 1$$
$$t = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de α en L_1

$PI(0, 3, 3)$

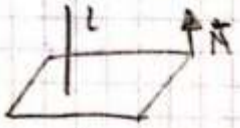
39)

(39.) Sea la recta L y el plano π, cuyas rectos son:

$$L: \frac{x-3}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3} \qquad \pi: 3x-2y+n=0$$

Determinar los valores de m y n que hacen $\perp$ a la recta y plano.

$\bar{u}=(m,4,-3) \quad \bar{N}=(3,-2,n)$



$$\bar{u}\times\bar{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m & 4 & -3 \\ 3 & -2 & n \end{vmatrix} = (4n-6, -(mn+9), -2m-12) = (0,0,0)$$

$4n-6=0$

$n=\frac{2}{3}$

$-2m-12=0$

$2m=-12$

$m=-6$

40. Obtener la ecuación vectorial de la recta L_3 que interseca perpendicularmente a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

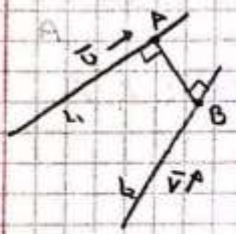
$$L_1: \frac{4x-4}{4} = 2-y = z+1 \qquad L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{1-y}{-1} = z-2$$

$$L_1: x-1 = 2-y = z+1 \qquad L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = z-2$$

$$L_1: \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = -1+\alpha \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = -2+2\beta \\ y = 1+\beta \\ z = 2+\beta \end{cases}$$

$\bar{u} = (1,-1,1)$ $\qquad$ $\bar{v} = (2,1,1)$

$P_1(1,2,-1)$ $\qquad$ $P_2(-2,1,2)$



Ec. Vectorial

$L_1: \bar{p}_1 = (1+\alpha, 2-\alpha, -1+\alpha) \rightarrow B$

$L_2: \bar{p}_2 = (-2+2\beta, 1+\beta, 2+\beta) \rightarrow A$

$\overline{AB} \cdot \bar{u} = 0$

$(3+\alpha-2\beta, 1-\alpha-\beta, -3+\alpha-\beta)\cdot(1,-1,1) = 0$

$3+\alpha-2\beta-1+\alpha+\beta-3+\alpha-\beta = 0$

$3\alpha-2\beta-1 = 0$ — (1)

$\overline{AB} \cdot \bar{v} = 0$

$(3+\alpha-2\beta, 1-\alpha-\beta, -3+\alpha-\beta)\cdot(2,1,1) = 0$

$6+2\alpha-4\beta+1-\alpha-\beta-3+\alpha-\beta = 0$

$2\alpha-6\beta+4 = 0$

$\alpha-3\beta+2 = 0$ — (2)

$$\begin{cases} 3\alpha-2\beta-1=0 \\ \alpha-3\beta+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\alpha-2\beta-1=0 \\ -3\alpha+9\beta-6=0 \end{cases}$$

$7\beta-7=0$

$\beta = 1$

Sustituir $\beta=1$ en 2

$\alpha-3(1)+2=0$; $\alpha-3+2=0$; $\alpha-1=0$; $\alpha=1$

$\therefore$ Los puntos del segmento $\overline{AB}$ son:

$A(2,1,0)$ $B(0,2,3)$

$\overline{AB}=(-2,1,3)$

$L_3: \bar{p}=(2-2\lambda, 1+\lambda, 3\lambda)$

41)

41) Obtener la ecuación cartesiana de un plano π que es perpendicular a la recta representada por la ecuación siguiente:
$\bar{P} = (2, 1, 3) + t(-2, 2, 1)$ y dista 6 u del origen

$\bar{N} = (-2, 2, 1)$

$\pi: -2x + 2y + z + D = 0$

como la distancia debe de ser 6 unidades

$\therefore \ \pi: -2x + 2y + z \pm 6 = 0$

42)

Ejercicio 42.

Sean la recta $L: \begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ y el plano

$\Pi : y = 5$, y sean tambien los puntos $A(4,0,0)$ y $B(8,6,10)$.

Determinar:

a) el angulo que forman L y Π

b) Si existe, la interseccion de la recta L con el plano Π

c) La distancia del punto A a la recta L y

d) la distancia del punto B al plano Π.

$L: \begin{cases} x = 4 \\ y = \alpha \\ z = 3 \end{cases}$ $\quad \bar{u} = (0,1,0) \quad \Pi : y = 5 \quad \bar{N} = (0,1,0)$

a) $\underline{\theta = 90^\circ}$

b) P.I. $(4, 5, 3)$

c) $d = \dfrac{|\overline{P_{LA}} \times \bar{u}|}{|\bar{u}|}$ $\quad \overline{P_{LA}} = (4,0,0) - (4,5,3) = (0,-5,-3)$

$$\overline{P_{LA}} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3,0,0)$$

$|\overline{P_0A} \times \bar{u}| = 3$

$\therefore \; d = \frac{3}{1} = 3\; u_L$

d)

$d = \frac{|\overline{P_0B} \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|} = 1\, u_L$

43)

Ejercicio 43

Sea la recta L de ecuaciones: $\begin{cases} x-1=0 \\ 2z+6=0 \end{cases}$

Determinar:

a) Las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta, tal que la distancia entre dicho punto y el plano XZ sea 8 unidades

b) Las coordenadas del punto Q que pertenece a la recta L y que es el mas proximo al punto A(3, 4, 1)

Plano $x_z \to 0$

a) $L: \begin{cases} x = 1 \\ y = \alpha \\ z = -3 \end{cases}$ $\quad L: \bar{p} = (1, \alpha, -3)$

$\therefore N(0,1,0)$

punto de xz

el origen $O(0,0,0)$

$d = \frac{|\overline{OP} \cdot \bar{N}|}{\bar{N}} \qquad 8 = \frac{(1,\alpha,-3)(0,1,0)}{1}$

$8 = |\alpha|$ teniendo $\alpha = 8$

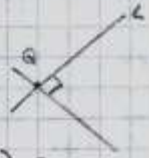
El punto seria $P(1, 8, -3)$

b) los coordenadas del punto Q que pertenece a L y a es proximo a (3, 4, 1)

Tenemos que

$\overline{QA} \cdot \bar{v} = 0$

$v = (0, 1, 0)$



$L: \bar{p} = (1, \alpha, -3)$

$(2, 4-\alpha, 4) \cdot (0, 1, 0) = 0$

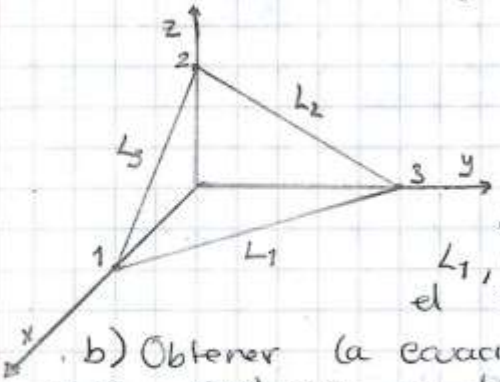
$4 - \alpha = 0$ entonces $\alpha = 4$

El punto es $Q(1, 4, -3)$

44)

Ejercicio 44

Sean los segmentos de recta L_1, L_2, L_3 que se muestran en la figura.



a) Determinar la ecuación cartesiana de un plano que es paralelo al plano que contiene a L_1, L_2, L_3 y que dista de él 7 unidades.

b) Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a L_3 y es perpendicular al plano yz

a)

$$L_1 = (1,0,0) + \alpha(-1,3,0) = \bar{u}$$

$$L_2 = (0,3,0) + \beta(0,-3,2) = \bar{v}$$

$$L_3 = (0,0,2) + \gamma(1,0,-2) = \bar{w}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (6, 2, 3)$$

$$(6,2,3) \cdot (1,0,0) = 6(-1) = -6$$

Plano original

$$\Pi : 6x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Plano paralelo $\quad D_{\pi} = -6 + 7$

$\Pi_{\parallel}: 6x + 2y + 3z + 1 = 0 \quad 0$

$\Pi_{\parallel}: 6x + 2y + 3z - 13 = 0$

b) $L_2 = (0,5,0) + \beta(0,-3,2)$

$\bar{v} = (0,-3,2)$

$\hat{i} = (1,0,0)$

$$\bar{v} \times \hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,2,3)$$

$D = (0,2,3) \cdot (0,3,0) = 6(-1) = -6$

$\Pi = 2y + 3z - 6 = 0$

45)

Ejercicio 45

Sea la recta L representada por la ecuación vectorial $\bar{p} = (t, t, t)$. Determinar las coordenadas del punto B que pertenece a dicha recta y que se encuentra más cerca del punto $A\left(12, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$L: p = (t, t, t) \qquad A(12, 1/3, -1/3)$

$B(t, t, t) \qquad \bar{u} = (1, 1, 1)$

$\overline{AB} = (t - 12,\ t - 1/3,\ t + 1/3)$

$(t - 12,\ t - 1/3,\ t + 1/3) \cdot (1, 1, 1) = 0$

$\overline{AB} = (t - 12 + t - 1/3 + t + 1/3) = 0 \longrightarrow 3t - 12 = 0$

$3t = 12$

$t = \frac{12}{3}$

$t = 4$

Sustituyendo

$\bar{p} = (4, 4, 4) = B(4, 4, 4)$

46)

Ejercicio 46

Sea R la recta que contiene a los puntos A(1,2,3) y B(4,8,5). Determinar la ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta R y cuya distancia al origen de coordenadas es igual a una unidad de longitud.

$\overline{AB} = (4-1, 8-2, 5-3)$

$\overline{AB} = (3, 6, 2)$

El vector $\overline{AB} = \overline{N}$ debido a que es perpendicular al plano

$\therefore \pi: 3x + 6y + 2z + D = 0$

El valor de D corresponde a la distancia que es igual a 1

$\therefore \pi: 3x + 6y + 2z + 1 = 0$

47)

47) Determinar la ecuación cartesiana del plano π que está comprendido en el punto $A(4,-6,8)$ y el origen, y que además es equidistante de dichos puntos. Datos: $O(0,0,0)$

$\overline{AO} = (-4,6,-8)$; $\bar{N} = (-4,6,-8)$

$-4x+6y-8z+D=0$

$-4(4)+6(-6)-8(8)+D=0$

$-16-36-64+D=0$

$-116+D=0$

$D=116$

$\pi: (-4x+6y-8z+116=0)\frac{1}{2}$

$\therefore \pi: -2x+3y-4z+58=0$

48)

Ejercicio 48

Sea la recta L una cuyas ecuaciones vectoriales es $p = (2,2,2) + (\sqrt{3}t, -\sqrt{3}t, -\sqrt{3}t)$

Determinar:

a) angulo que forma L con el plano XY

b) El punto de intersección de L con el plano YZ

c) Unas ecuaciones cartesianas en forma simetrica de L

a) plano xy

$$\hat{i} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

$\pi: z = 0$

$$\theta = \text{angsen} \frac{(0,0,1)\cdot(\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})}{1(3)} = \text{angsen} \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

b) plano yz

$$\hat{j} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

$\pi: x = 0$

$$L \begin{cases} x = \sqrt{3}(0) = 0 \\ y = -\sqrt{3}(0) = 0 \\ z = -\sqrt{3}(0) = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{3}t = 0$

$t = 0$

P.I $(0,0,0)$

c)

$$L \left\{ \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{-\sqrt{3}} = \frac{z}{-\sqrt{3}} \right.$$

Ecuación cartesiana simetrica

$x = \sqrt{3}\,t \;;\; t = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$y = -\sqrt{3}\,t \;;\; t = \dfrac{y}{-\sqrt{3}}$

$z = -\sqrt{3}\,t \;;\; t = \dfrac{z}{-\sqrt{3}}$

49)

Ejercicio 49

Determinar unas ecuaciones paramétricas de una recta L que dista 3 unidades del origen, contiene al punto $A(0, y, -4)$ y es paralela a la recta R de ecuaciones $\frac{2x-4}{6} = \frac{z}{4}$; $y = 4$

$R: \frac{2x-4}{6} = \frac{z}{4} \qquad y = 4$

$\frac{x-2}{3} = t \qquad y = 4 \qquad \frac{z}{4} = t$

$x = 3t + 2 \qquad y = 4 \qquad z = 4t$

$\bar{R} = (2, 4, 0) + t(3, 0, 4)$

$\bar{U} = (3, 0, 4)$

$|\bar{U}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

Pasa por $A(0, y, -4)$

$x = 3t \qquad y = y + 0t \qquad z = -4 + 4t$

$t = (0, y, -4) + t(3, 0, 4)$

hay una $d = 3$ del origen

$P_0 = (0, 0, 0) \rightarrow$ origen $\quad$ y $P_1(0, y, 4)$

$d = \frac{|\overline{P_{01}} \times \bar{U}|}{|\bar{U}|} \qquad \overline{P_{01}} \times \bar{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & y & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4y - 12 + 3y$

$$3 = \frac{\sqrt{4y^2 + (-12)^2 + (3y)^2}}{\sqrt{25}} = 3 = \frac{\sqrt{25y^2 + 144}}{5}$$

$15^2 = 25y^2 + 144; \; 15^2 - 144 = 25y^2$

$81 = 25y^2 \quad \frac{81}{25} = y^2 \quad y = \pm\sqrt{\frac{81}{25}} \quad y = \pm\frac{9}{5}$

$y = 1.8$

Entonces $A(0, 1.8, -4)$

$\bar{l} = (0, 1.8, 4) + t(3, 0, 4)$

$x = 0 + 3t$

$y = 1.8 + 0t$

$z = -4 + 4t$

$$L: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1.8 \\ z = -4 + 4t \end{cases}$$

50)

Ejercicio 50

Determinar las coordenadas del punto B que pertenece al plano $\pi: x - y - z + 10 = 0$ y que es el mas proximo al punto $A(9,3,1)$

$\overline{N} = (1,-1,-1)$ $\qquad \overline{AB} = \alpha \overline{N}$

$\overline{AB} = (x,y,z) - (9,3,1) = (x-9,\ y-3,\ z-1)$

$(x-9,\ y-3,\ z-1) = \alpha(1,-1,-1)$

$$\begin{array}{ll} x-9 = \alpha & \\ y-3 = -\alpha & \\ z-1 = -\alpha & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 9+\alpha \\ y = 3-\alpha \\ z = 1-\alpha \end{array} \right.$$

$9+\alpha-(3-\alpha)-(1-\alpha)+10=0$

$9+\alpha-3+\alpha-1+\alpha+10=0$

$3\alpha+15=0$

$\alpha=-5$

$x = 9+(-5) = 4$

$y = 3-(-5) = 8$

$z = 1-(-5) = 6$

$B(4,8,6)$