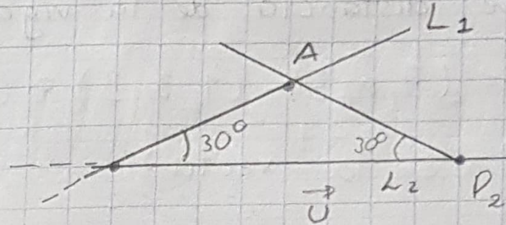
# Recta plano

11. Sea la recta $L_1$ la cual contiene al punto $A(2,2,3)$ y se intersecа con la recta $L_2 : \begin{cases} x=3 \\ z=2 \end{cases}$ y forma un ángulo de 30°. Determinar las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas




Solución:

$L_2 : \overline{P} = (3, t, 2)$ $\qquad \overline{PA} \measuredangle 30° \; \overline{U}$

$\overline{u} = (0, 1, 0)$

$$\overline{PA} = \overline{A} - \overline{P} = (2,2,3) - (3,t,2) = (-1, 2-t, 1)$$

$$|\overline{PA}| = \sqrt{1 + (2-t)^2 + 1} = \sqrt{2 + 4 - 4t + t^2} = \sqrt{t^2 - 4t + 6}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{U}}{|\overline{P_A}||\overline{U}|} \; ; \; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(-1, 2-t, 1) \cdot (0,1,0)}{\sqrt{t^2 - 4t + 6} \; (1)} \; ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2t}{\sqrt{t^2 - 4t + 6}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-2)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{6}}$$

$t_1 = 2 + \sqrt{6} \; ; \; t_2 = 2 - \sqrt{6}$

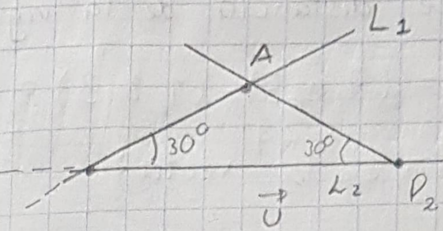
Finalmente:

Sustituyendo $t_1$ y $t_2$ en

$$L_2 : \boxed{\begin{array}{l} P_1(3, 2+\sqrt{6}, 2) \\ P_2(3, 2-\sqrt{6}, 2) \end{array}}$$

# Recta plano

11. Sea la recta $L_1$ la cual contiene al punto $A(2,2,3)$ y se interseca con la recta $L_2 : \begin{cases} x=3 \\ z=2 \end{cases}$ y forma un ángulo de $30°$. Determinar las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas




Solución:

$L_2 : \overline{P} = (3, t, 2)$ $\quad \overline{PA} \measuredangle 30° \; \overline{u}$

$\overline{u} = (0,1,0)$

$$\overline{PA} = \overline{A} - \overline{P} = (2,2,3) - (3,t,2) = (-1, 2-t, 1)$$

$$|\overline{PA}| = \sqrt{1 + (2-t)^2 + 1} = \sqrt{2 + 4 - 4t + t^2} = \sqrt{t^2 - 4t + 6}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{u}}{|\overline{P_A}|\,|\overline{u}|} \; ; \; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(-1, 2-t, 1) \cdot (0,1,0)}{\sqrt{t^2 - 4t + 6} \; (1)} \; ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2t}{\sqrt{t^2 - 4t + 6}} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-2)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{6}}$$

$t_1 = 2 + \sqrt{6}$ ; $t_2 = 2 - \sqrt{6}$

Finalmente:

Sustituyendo $t_1$ y $t_2$ en

$$L_2 : \boxed{\begin{matrix} P_1(3, 2+\sqrt{6}, 2) \\ P_2(3, 2-\sqrt{6}, 2) \end{matrix}}$$

13. Sea la viga $\overline{AB}$ que tiene por extremos a los puntos $A(1,2,3)$ y $B(7,6,5)$ si desde el punto $C(4,5,C)$ cae en forma vertical un objeto, determinar el punto de contacto; en caso contrario calcular a que distancia de la viga pasara el objeto.

$\overline{AB} = (7,6,5)-(1,2,3) = (6,4,2)$ $\quad A(1,2,3)$

Ecuacion de la recta: $\quad B(7,6,5)$

$\overline{AB} \quad \overline{P} = (1,2,3) + \alpha(6,4,2)$

$P = (1+6\alpha, 2+4\alpha, 3+2\alpha)$

$$L: \begin{cases} x = 1+6\alpha \\ y = 2+4\alpha \\ z = 3+2\alpha \end{cases}$$

$$L: \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$\overline{P} = (1,2,3)$

$\overline{V} = (6,4,2)$

$\overline{CJ} = (4,5,10)-(0,0,1) = (4,5,9)$

Ecuacion de la recta

$\overline{CJ} = \overline{P} = (4,5,10) + \beta(4,5,9)$

$\overline{P} = (4+4\beta, 5+5\beta, 10+9\beta)$

$$\beta: \begin{cases} x = 4+4\beta \\ y = 5+5\beta \\ z = 10+9\beta \end{cases}$$

$$R: \left\{ \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-10}{9} \right.$$

$\bar{r} = (4,5,10)$

$\bar{v} = (4,5,9)$

→ Si se intersectan

$1+6\alpha = 4+4\beta$

$2+2\alpha = 5+5\beta$

$$\begin{array}{r} 6\alpha - 4\beta = 3 \\ -6\alpha + 15\beta = -9 \\ \hline 11\beta = -6 \end{array}$$

$\beta = \frac{-6}{11}$

$\beta = \frac{-6}{11}$ $\quad \alpha = \frac{3}{22}$ $\quad \alpha = \frac{3+4\left(\frac{-6}{11}\right)}{6}$

Sustituyendo en z:

$L: \; z = 3 + 2\left(\frac{3}{22}\right)$ $\quad z = \frac{36}{11}$

$R: \; 10 + 9\left(\frac{-6}{11}\right) = z$ $\quad z = 56/11$

$\boxed{\text{No hay intersección}}$

16. Sean las rectas:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = -y = \frac{3z-6}{9}$$

$$L_2: \frac{4-2x}{-4} = 1-y = \frac{2z-8}{6}$$

a) Calcular el ángulo que forman $L_1$ y $L_2$.
b) Determinar la distancia entre $L_1$ y $L_2$.
c) Obtener la ecuación cartesiana del plano definido por $L_1$ y $L_2$.

$$L_1: \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 2+3\alpha \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 2+2\beta \\ y = 1-\beta \\ z = 4+3\beta \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$: $P_3(3,-1,5)$ Si $\beta = -1$: $P_4(0,2,1)$

$\therefore \overline{P_3P_4} = (-3,3,-4)$

Solución:

a) $\overline{U_1} = (2,-1,3)$ $\overline{U_2} = (2,-1,3)$

$$\theta = \text{ang cos} \frac{(2,-1,3)(2,-1,3)}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} =$$

$$\text{ang cos}\left(\frac{14}{14}\right) = \text{ang cos } 1 = \underline{0^\circ}$$

b) $\overline{P_1P_2} = (1,1,2)$

$$\overline{U_1} \times \overline{U_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

$$|\overline{U_1} \times \overline{U_2}| = \emptyset \qquad d = \frac{\emptyset}{\emptyset} \times$$

Como $L_1 \parallel L_2$ la distancia se calcula como la distancia de un punto a una de las rectas.

$$d = \frac{|\overline{P_1P_2} \times \overline{U_1}|}{|\overline{U_1}|}$$

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{U_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, 1, -3)$$

$$|\overline{P_1P_2} \times \overline{U_1}| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$$

Sustituyendo:

$$d = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 5}{7 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

c) $\overline{U} = \overline{V} = (2, -1, 3)$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 (1, 0, 2) \\ P_2 (2, 1, 4) \end{array} \right\} \overline{P_1P_2} = (-5, -1, 3)$

$$\overline{N} = \overline{U} \times \overline{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5, -1, 3)$$

$$\therefore \ \pi : -5x - y + 3z + D = \emptyset$$

$$\overline{N} = \overline{P_1P_2} \times \overline{U} = (5, 1, -3)$$

$\pi : 5x + y - 3z + D = 0$

Sustituyendo

$P_1 (1, 0, 2)$ en $\pi : -5(1) - 0 + 3(2) + D = 0$

$1 + D = 0$ $\boxed{D = -1}$

$\therefore \ \pi : -5x - y + 3z - 1 = 0$

18. Sean los planos: $\pi_1: 6x-3y+z=0$

$\pi_2 = 3x+2y-4=0$

Determinar:

a) La ecuación cartesiana del plano $\pi_3$ que contiene al punto $A(0,7,-1)$ y que es simultáneamente perpendicular a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$;

b) Unas ecuaciones paramétricas de la recta $R$ de intersección del plano $\pi_2$ con el plano $YZ$, $x=0$

c) El ángulo que forma el plano $\pi_2$ con el eje $Z$.

Solución:

$\overline{N_1} = (6,-3,1)$ , $\overline{N_2} = (3,2,0)$ ; $|\overline{N_2}| = \sqrt{13}$

a)

$$\overline{N_3} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,3,21)$$

$\pi_3: -2x+3y+21z+D=0$ ; sust. $A(0,7,-1)$ en $\pi_3$

$-2(0)+3(7)+21(-1)+D=0 \quad \therefore D=0$

$\pi_3: -2x+3y+21z=0$

b) Sust. $x=0$ en $\pi_2$: $2y-1=0$ ; $y=2$

$$\therefore R \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

c) $\theta = \text{ang sen} \dfrac{\overline{N_2} \cdot \hat{k}}{|\overline{N_2}||\hat{k}|}$

$\text{ang sen} \dfrac{(3,2,0)\ (0,0,1)}{\sqrt{13}} = \text{angsen}\ (0)$

$\therefore\ \theta = 0°,\ 180°$

19. Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$$L: \begin{cases} 4x+6y-12=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad R: \begin{cases} 2x-4z-6=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Determinar si lasrecta L y R definen un plano. En caso afirmativo, obtener la ecuación cartesiana de dicho plano; en caso contrario, explicar porque no definen un plano.

Solución:

$L: \{4x+6y-12=0;\ z=0$

$L: (2x+3y-6=0;\ z=0;\ L: \{2x=-3y+6;\ z=0$

$L: \{2x=-3(y-2);\ z=0;\ L: \{\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{2};\ z=0$

$\therefore L: \bar{u}=(-3,2,0)$

$P_L(0,2,0)$

R:

$2x-4z-6=0;\ y=0$

$R\{x-2z-3=0;\ y=0;\ R: \{x=2z+3,\ y=0$

$R: \{x=2(z+\frac{3}{2});\ y=0$

$R: \{\frac{x}{2}=z+\frac{3}{2};\ y=0$

$\therefore R: \bar{v}=(2,0,1) \quad P_R(0,0,-3/2)$

$$\pi : \overline{N} = \overline{U} \times \overline{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 3, -4)$$

$\therefore \pi : 2x + 3y - 4z + D = 0$

Sustituyendo $P_1(0, 2, 0)$ en $\pi$ :

$2(0) + 3(2) - 4(0) + D = 0$

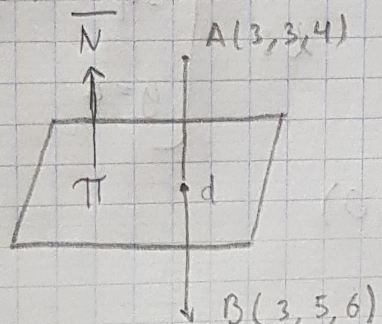
$6 + D = 0$

$D = -6$

$$\boxed{\therefore \pi : 2x + 3y - 4z - 6 = 0}$$

20. El punto $A(3,3,4)$ es simétrico del punto $B(3,5,6)$ respecto al plano $\pi$. Obtener la ecuación cartesiana del plano $\pi$.

Solución:




$\overline{N} \parallel \overline{AB}$

$\overline{AB} = (0,2,2)$

$\therefore \overline{N} = (0,2,2)$
$= 2(0,1,1)$

$0x + 2y + 2z + D = 0$

Obtenido C:

$C(3,4,5)$

Sustituyendo C en $\pi$

$2(4) + 2(5) + D = 0; \quad 18 + D = 0 \quad D = -18$

$\pi : 2y + 2z - 18 = 0$

$$\boxed{\pi : y + z - 9 = 0}$$

27. Determinar la ecuación cartesiana del plano que forman las rectas:

$M: P = (4,0,8) + t(-4,6,0)$

$\overline{P} = (4-4t, 6t, 8)$

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{z}{8} \\ y = 6 \end{cases}$$

$$L: \begin{cases} x = 4-4t \\ y = 6t \\ z = 8+0t \end{cases} \qquad v = (-4,6,0)$$

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z-8}{0} \end{cases}$$

$B(4,0,8)$

$\overline{AB} = (4,0,8)$

$$\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 8 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-48,-32;24)$$

$$(0-48)\hat{i} - (0+32)\hat{j} + (24+0)\hat{k} = -48\hat{i} - 32\hat{j} + 24\hat{k}$$

$$\overline{P_oP} \cdot \overline{n} = 0; \quad (x-0, y-0, z-0)\cdot(-98,-32,24) = 0$$

$$-48x - 32y + 24z = 0$$

$$\boxed{-6x - 4y + 32 = 0}$$