Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas

Álgebra (1120)

Profesor(a): Rosalba Rodríguez Chávez

Semestre 2021-1

SERIE 2

Nombre: Aguilar Maya Daniel
Grupo: 28

Cd. Universitaria a 01 de noviembre de 2020.

SERIE TEMA 2: "NÚMEROS REALES" (PARES)

2. Calcular las siguientes sumas por medio de la definición de adición en números naturales.

a) $5+4 = 5+3^*$
$= (5+3)^*$
$= (5+2^*)^*$
$= ((5+2)^*)^*$
$= ((5+1^*)^*)^*$
$= (((5+1)^*)^*)^*$
$= (((5^*)^*)^*)^*$
$= (((6)^*)^*)^*$
$= ((7)^*)^*$
$= (8)^*$
$\boxed{5+4 = 9}$

b) $2+3$
$= 2+2^*$
$= (2+2)^*$
$= (2+1^*)^*$
$= ((2+1)^*)^*$
$= ((2^*)^*)^*$
$= ((3)^*)^*$
$= (4)^*$
$\boxed{2+3 = 5}$

4. Demostrar: $|a+b| = |a|+|b|$

- a) Si $a>0$ y $b>0$ $\rightarrow$ $|a|=a$ y $|b|=b$

Como $a>0$ y $b>0$, $a+b>0$
$\rightarrow |a+b| = a+b$
$\rightarrow \boxed{|a+b| = |a|+|b|}$ ∎

- b) Si $a<0$ y $b<0$ $\rightarrow$ $|a|=-a$ y $|b|=-b$

Como $a<0$ y $b<0$, $a+b<0$
$\rightarrow |a+b| = -(a+b)$
$\rightarrow |a+b| = (-a)+(-b)$
$\rightarrow \boxed{|a+b| = |a|+|b|}$ ∎

6) Demostrar que $2 < 5$

Si $2<5 \rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N} \ni 2+x=5$

$x = 5-2$

$x = 3$

$\therefore x \in \mathbb{N}$

$\therefore 2 < 5$ ■

8) Sean los números enteros definidos por $a = m-n$, $b = p-q$, $c = r-s$ donde m, n, p, q, r y s pertenecen a los números naturales, demostrar que:

a) $a+(b+c) = (a+b)+c$

Dem $a+(b+c) = (m-n) + ((p-q)+(r-s))$

$= (m-n) + (p-q+r-s)$

$= (m-n) + p-q+r-s$ Propiedad distributiva

$= m-n+p-q+r-s$

$= (m-n+p-q) + (r-s)$

$= ((m-n)+(p-q)) + (r-s)$

$a+(b+c) = (a+b)+c$ ■

b) $a \cdot b = b \cdot a$

Dem $a \cdot b = (m-n)(p-q)$

$= (mp+nq) - (mq+np)$

$= (pm+qn) - (qm+pn)$

$= (p-q)(m-n)$

$a \cdot b = b \cdot a$ ■

(10) Determinar para cualquier número $a \in \mathbb{Z}$ el elemento idéntico multiplicativo.

Por demostrar $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} \ni x \cdot a = a$

Dem

$x \cdot a = a$

$\rightarrow x \cdot a = a + 0$ (elemento idéntico aditivo)

$\rightarrow x \cdot a = a + (a - a)$ (elemento inverso aditivo)

$\rightarrow x \cdot a = a + a - a$ (propiedad distributiva)

$\rightarrow x \cdot a = (a+a) + (-a)$ (prop. asociativa)

$\rightarrow x \cdot a = 2a - a$ (suma)

$\rightarrow x \cdot a = a(2-1)$ (factorización)

$\rightarrow x \cdot a = a \cdot 1$ (resta)

$\rightarrow a \cdot x = a \cdot 1$ (prop. conmutativa)

$\rightarrow x = 1$ (prop. cancelación)

$\therefore x \in \mathbb{Z}$

$\therefore \exists\ 1 \in \mathbb{Z} \ni 1 \cdot a = a$ ▪

(12) Determinar el elemento inverso aditivo para cualquier número entero

Por demostrar $\exists!\ x \in \mathbb{Z} \ni x + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

Dem

$x + a = 0$

$\rightarrow x + a + (-a) = 0 + (-a)$ (Sumamos $-a$ en ambos lados)

$\rightarrow x + a - a = 0 - a$ (quitamos paréntesis)

$\rightarrow x + (a - a) = 0 - a$ (propiedad asociativa)

$\rightarrow x + (a - a) = -a$ (propiedad neutro aditivo)

$\rightarrow x + (1 \cdot a - 1 \cdot a) = -a$ (propiedad neutro multiplicativo)

$\rightarrow x + (a(1-1)) = -a$ (factorizamos a)

$\rightarrow x + (a(0)) = -a$ $(1-1=0)$

$\rightarrow x + 0 = -a$ (para todo n en $\mathbb{Z}$, $n \cdot 0 = 0$)

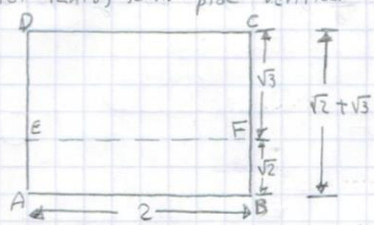
$\rightarrow x = -a$ (neutro aditivo)

$\therefore x = -a \in \mathbb{Z}$

$\therefore \exists!\ -a \in \mathbb{Z} \ni (-a) + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ ▪

(14) Verificar gráficamente que $a(b+c) = ab + ac$ para $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{3}$ e indicar el nombre de esta propiedad.

Por tanto, se nos pide verificar $2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$:



Se observa que el área total del rectángulo ABCD se puede calcular multiplicando la base por su altura, es decir:

$$\text{Área} = 2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Pero también el area total se puede calcular sumando el área de los dos rectángulos pequeños: el ABFE y DEFC. Por tanto

$$\text{Área} = \text{Área}[ABFE] + \text{Área}[DEFC]$$

$$= 2(\sqrt{2}) + 2(\sqrt{3})$$

En conclusión:

$$\text{Área} = \text{Área}$$

$$\boxed{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$$

La propiedad es llamada distributiva

(16) Convertir $\frac{1}{4}$ a su expresión decimal y dar su periodo.

$$\begin{array}{r|l} & 0.2500 \\ 4 & 10 \\ & -8 \\ & 20 \\ & 00 \\ & 00 \\ & 0 \end{array}$$

Por tanto: $\frac{1}{4} = 0.25\overline{0}$

(18). Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, $xy = yx$

Como $x, y \in \mathbb{Q} \rightarrow x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$

Por demostrar $xy = yx$

Dem

$$x \cdot y = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{ac}{bd}\right)$$

$$= \left(\frac{ca}{db}\right) \leftarrow \text{Propiedad conmutativa en } \mathbb{Z}$$

$$= \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

(20). Indicar en cuáles conjuntos (naturales, enteros, racionales e irracionales) tienen solución las siguientes ecuaciones

a) $x + 2 = 7$

$\rightarrow x = 5$

$\therefore$ Tiene solución en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

b) $x + 6 = 2$

$\rightarrow x = 2 - 6$

$\rightarrow x = -4$

$\therefore$ Tiene solución en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

c) $9x^2 - 25 = 0$

$\rightarrow 9x^2 = 25$

$\rightarrow x^2 = \frac{25}{9}$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} = \pm\frac{5}{3}$

$\therefore$ Tiene solución en $\mathbb{Q}$

d) $7x^2-63=0$

$\rightarrow 7x^2=63$

$\rightarrow x^2=63/7$

$\rightarrow x^2=9$

$\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

$\therefore$ Tiene solución en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

e) $x^2-3=0$

$\rightarrow x^2=3$

$\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ Tiene solución en $\mathbb{Q}'$

f) $x^2+1=0$

$\rightarrow x^2=-1$

$\rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

$\therefore$ No tiene solución en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}'$

(22) Simplificar:

a) $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+\sqrt{27} = 2\cdot 2\sqrt{3} - 3\cdot 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= (4-15+3)\sqrt{3}$

$2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+\sqrt{27} = -8\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{3^3\cdot 2} + \sqrt[3]{2^3\cdot 2} + \sqrt[3]{5^3\cdot 2}$

$= 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$

$= (3+2+5)\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250} = 10\sqrt[3]{2}$

(24) Investigar cuál es el número de oro.

El número áureo es un número irracional, representado por la letra griega φ(phi) (en minúscula) o Φ (Phi) (en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias. Su valor numérico, mediante radicales o decimales es:

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ 033\ 988\ 749\ 894\ldots$

26. Demostrar, mediante inducción matemática que:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{n+2}{2(n+1)} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Dem

- $n=1$ $\quad 1-\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1+2}{2(1+1)}$

$\rightarrow 1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2(2)}$

$\rightarrow 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore$ Si cumple para $n=1$

- $n=k$ $\quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\frac{k+2}{2(k+1)} \leftarrow$ H. I.

- $n=k+1$ $\quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\left[1-\frac{1}{((k+1)+1)^2}\right]=\frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$ } Tesis

$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\left[1-\frac{1}{(k+2)^2}\right]=\frac{k+3}{2(k+2)}$ } Tesis

Partiendo de H. I.:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Multiplicamos ambos lados por $\left[1-\frac{1}{(k+2)^2}\right]$:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\underbrace{\left[1-\frac{1}{(k+2)^2}\right]}=\frac{k+2}{2(k+1)}\underbrace{\left[1-\frac{1}{(k+2)^2}\right]}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\left[\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}\right]$$

$$=\frac{(k+2)[(k+2)^2-1]}{2(k+1)(k+2)^2}$$

$$=\frac{(k+2)^2-1}{2(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+2)^2-1^2}{2(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+2+1)(k+2-1)}{2(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+3)(k+1)}{2(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+3}{2(k+2)} \; ; \; k+1 \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ Válida $\forall n \in \mathbb{N}$

28. Demostrar por medio de inducción matemática la validez de la proposición:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + n(3^n) = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$$

Dem

• $n=1$ $\quad 1\cdot(3^1) = \frac{(2(1)-1)3^{1+1}+3}{4} \rightarrow 3 = \frac{9+3}{4}$

$\rightarrow 1\cdot 3 = \frac{(2-1)\cdot 3^2+3}{4} \qquad \rightarrow 3 = \frac{12}{4}$

$\rightarrow 3 = \frac{3^2+3}{4} \qquad \rightarrow 3 = 3$ $\therefore$ Si cumple para $n=1$

• $n=k$ $\quad 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + k(3^k) = \frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4} \leftarrow$ H. I.

• $n=k+1$ $\quad 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + k(3^k) + (k+1)3^{k+1} = \frac{(2(k+1)-1)3^{k+1+1}+3}{4}$ } Tesis.

$1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + k(3^k) + (k+1)3^{k+1} = \frac{(2k+1)3^{k+2}+3}{4}$ } Tesis.

Partiendo de H. I.:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + k(3^k) = \frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4}$$

Sumamos ambos lados $(k+1)3^{k+1}$:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots + k(3^k) + \underbrace{(k+1)3^{k+1}} = \frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4} + \underbrace{(k+1)3^{k+1}}$$

$$= \frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4} + \frac{4(k+1)3^{k+1}}{4}$$

$$= \frac{(2k-1)3^{k+1}+3+4(k+1)3^{k+1}}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}((2k-1)+4(k+1))+3}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}(2k-1+4k+4)+3}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}(6k+3)+3}{4}$$

$$= \frac{3^{k+1}\cdot 3(2k+1)+3}{4}$$

$$= \frac{3^{k+2}(2k+1)+3}{4}$$

$$= \frac{(2k+1)3^{k+2}+3}{4} \quad ; \quad k+1 \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ Válida $\forall n \in \mathbb{N}$

30. Demostrar por inducción matemática la validez de la siguiente proposición

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Dem

• $n=1$ $\quad \frac{1}{3^1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^1}\right)$

$$\rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ ∴ Si cumple para $n=1$

• $n=K$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)$ ← H.I.

• $n=K+1$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$ } Tesis

Partiendo de H.I.:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)$$

Sumamos en ambos lados $\frac{1}{3^{k+1}}$:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}+\frac{2}{3^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-3+2}{3^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{-1}{3^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$$; $k+1\in\mathbb{N}$

∴ Válida $\forall n\in\mathbb{N}$

32 Demostrar, por medio de inducción matemática, que $n+1=1+n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Dem

• $n=1$ $\quad 1+1=1+1$

$\rightarrow 2=2$ $\quad \therefore$ Si cumple para $n=1$

• $n=k$ $\quad k+1=1+k \leftarrow$ H. I.

• $n=k+1$ $\quad (k+1)+1=1+(k+1)$

Partiendo de H. I. :

$k+1=1+k$

Sumamos en ambos lados $\underline{1}$:

$k+1+\underbrace{1}=1+k+\underbrace{1}$

$(k+1)+1=1+(k+1)$; $k+1 \in \mathbb{N}$

$\therefore$ Es válida $\forall n \in \mathbb{N}$ ■

34 Resolver las siguientes desigualdades y expresar la solución como un intervalo

a) $|x|<3$

$\rightarrow -3<x<3$

$\rightarrow x \in (-3,3)$

b) $|x| \leq 3$

$\rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$\rightarrow x \in [-3,3]$

c) $|x-2| \leq 3$

$\rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3$

$\rightarrow -3+2 \leq x-2+2 \leq 3+2$

$\rightarrow -1 \leq x \leq 5$

$\rightarrow x \in [-1,5]$

d) $|x|>3$

$\rightarrow x>3$ ó $x<-3$

$\rightarrow x \in (3,\infty)$ ó $x \in (-\infty,-3)$

$\rightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

e) $|x-2| \geq 3$

$\rightarrow x-2 \geq 3$ ó $x-2 \leq -3$

$\rightarrow x \geq 3+2$ ó $x \leq -3+2$

$\rightarrow x \geq 5$ ó $x \leq -1$

$\rightarrow x \in [5,\infty)$ o $x \in (-\infty,-1]$

$\rightarrow \boxed{x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)}$

36. Obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad

$$\left|\frac{1}{x-4}\right| > 3$$

$\frac{1}{x-4} > 3$ ó $\frac{1}{x-4} < -3$

Primera desigualdad: $\frac{1}{x-4} > 3$

- Caso 1: $x-4>0$, $x>4$

$\frac{1}{x-4} > 3$

$\rightarrow 1 > 3(x-4)$

$\rightarrow 1 > 3x-12$

$\rightarrow 3x < 13$

$\rightarrow x < 13/3$

$\therefore x \in (4,\infty) \cap (-\infty, 13/3)$

$\therefore x \in (4, 13/3)$

- Caso 2: $x-4<0$, $x<4$

$\frac{1}{x-4} > 3$

$\rightarrow 1 < 3(x-4)$

$\rightarrow 1 < 3x-12$

$\rightarrow 3x > 13$

$\rightarrow x > 13/3$

$\therefore x \in (-\infty, 4) \cap (13/3, \infty)$

$\therefore x \in \emptyset$

- Uniendo casos

$\therefore x \in (4, 13/3) \cup \emptyset$

$\therefore x \in (4, 13/3)$

Segunda desigualdad: $\frac{1}{x-4} < -3$

- Caso 1: $x-4>0$, $x>4$

$\frac{1}{x-4} < -3$

$\rightarrow 1 < -3(x-4)$

$\rightarrow 1 < -3x+12$

$\rightarrow 3x < 11$

$\rightarrow x < 11/3$

$\therefore x \in (4,\infty) \cap (-\infty, 11/3)$

$\therefore x \in \emptyset$

- Caso 2: $x-4<0$, $x<4$

$\frac{1}{x-4} < -3$

$\rightarrow 1 > -3(x-4)$

$\rightarrow 1 > -3x+12$

$\rightarrow 3x > 11$

$\rightarrow x > 11/3$

$\therefore x \in (-\infty, 4) \cap (11/3, \infty)$

$\therefore x \in (11/3, 4)$

- Uniendo casos

$\therefore x \in (11/3, 4) \cup \emptyset$

$\therefore x \in (11/3, 4)$

Así pues:

$\frac{1}{x-4} > 3$ ó $\frac{1}{x-4} < -3$

$\rightarrow x \in (4, 13/3)$ ó $x \in (11/3, 4)$

$\rightarrow x \in (4, 13/3) \cup (11/3, 4)$

$\rightarrow \boxed{x \in (11/3, 13/3) / \{4\}}$

38. Obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad

$|x-5| < 5|3x-5|$

$\rightarrow \frac{|x-5|}{|3x-5|} < 5$ con $x \neq \frac{5}{3}$

$\rightarrow \left|\frac{x-5}{3x-5}\right| < 5$

- Desigualdad 1: $\frac{x-5}{3x-5} < 5$

Caso 1: $3x-5>0$, $x>5/3$

$\frac{x-5}{3x-5} < 5$

$\rightarrow x-5 < 5(3x-5)$

$\rightarrow x-5 < 15x-25$

$\rightarrow 20 < 14x$

$\rightarrow x > 20/14$

$\rightarrow x > 10/7$

$\therefore x \in (5/3, \infty)$

Caso 2: $3x-5<0$, $x<5/3$

$\frac{x-5}{3x-5} < 5$

$\rightarrow x-5 > 5(3x-5)$

$\rightarrow x-5 > 15x-25$

$\rightarrow 20 > 14x$

$\rightarrow x < 20/14$

$\rightarrow x < 10/7$

$\rightarrow \therefore x \in (-\infty, 10/7)$

$\therefore$ Desigualdad 1: Caso 1 $\cup$ Caso 2

Desigualdad 1: $x \in (-\infty, 10/7) \cup (5/3, \infty)$

- Desigualdad 2: $\frac{x-5}{3x-5} > -5$

Caso 1: $3x-5>0$, $x>5/3$

$\frac{x-5}{3x-5} > -5$

$\rightarrow x-5 > -5(3x-5)$

$\rightarrow x-5 > -15x+25$

$\rightarrow x+15x > 30$

$\rightarrow 16x > 30$

$\rightarrow x > 30/16$

$\rightarrow x > 15/8$

$\therefore x \in (15/8, \infty)$

Caso 2: $3x-5<0$, $x<5/3$

$\frac{x-5}{3x-5} > -5$

$\rightarrow x-5 < -5(3x-5)$

$\rightarrow x-5 < -15x+25$

$\rightarrow 16x < 30$

$\rightarrow x < 30/16$

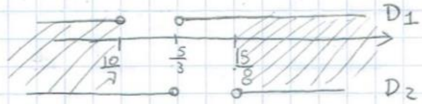
$\rightarrow x < 15/8$

$\therefore x \in (-\infty, 5/3)$

$\therefore$ Desigualdad 2: Caso 1 $\cup$ Caso 2

Desigualdad 2: $x \in (-\infty, 5/3) \cup (15/8, \infty)$

Como $\left|\frac{x-5}{3x-5}\right| < 5$, la solución es la intersección de las desigualdades.



$\therefore$ Solución: $D_1 \cap D_2 = [(-\infty, 10/7) \cup (5/3, \infty)] \cap [(-\infty, 5/3) \cup (15/8, \infty)]$

$$\boxed{\therefore x \in (-\infty, 10/7) \cup (15/8, \infty)}$$

(40) Obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad

$$\frac{3}{|x+1|} < 4$$

$\rightarrow \quad 3 < 4|x+1|$ con $x \neq -1$

$\rightarrow \quad 4|x+1| > 3$

$\rightarrow \quad |x+1| > \frac{3}{4}$

$\rightarrow \quad x+1 > \frac{3}{4}$ ó $x+1 < -3/4$

$\rightarrow \quad x > \frac{3}{4} - 1$ ó $x < -\frac{3}{4} - 1$

$\rightarrow \quad x > -\frac{1}{4}$ ó $x < -\frac{7}{4}$

$\rightarrow \quad x \in (-1/4, \infty)$ ó $x \in (-\infty, -7/4)$

$\rightarrow \quad \boxed{x \in (-\infty, -7/4) \cup (-1/4, \infty)}$

42. Obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \leq 2$$

- Desigualdad 1: $\frac{x-3}{x+1} \leq 2$

Caso 1: $x+1>0$, $x>-1$

$\frac{x-3}{x+1} \leq 2$

$\to x-3 \leq 2(x+1)$

$\to x-3 \leq 2x+2$

$\to -3-2 \leq 2x-x$

$\to x \geqslant -5$

$\to x \in (-1,\infty)$

Caso 2: $x+1<0$, $x<-1$

$\frac{x-3}{x+1} \leq 2$

$\to x-3 \geqslant 2(x+1)$

$\to x-3 \geqslant 2x+2$

$\to -3-2 \geqslant 2x-x$

$\to x \leq -5$

$\to x \in (-\infty,-5]$

$\therefore$ Desigualdad 1: Caso 1 $\cup$ Caso 2

D_1: $(-\infty,-5] \cup (-1,\infty)$

- Desigualdad 2: $\frac{x-3}{x+1} \geqslant -2$

Caso 1: $x+1>0$, $x>-1$

$\frac{x-3}{x+1} \geqslant -2$

$\to x-3 \geqslant -2(x+1)$

$\to x-3 \geqslant -2x-2$

$\to x+2x \geqslant -2+3$

$\to 3x \geqslant 1$

$\to x \geqslant 1/3$

$\to x \in [1/3,\infty)$

Caso 2: $x+1 \leq 0$, $x<-1$

$\frac{x-3}{x+1} \geqslant -2$

$\to x-3 \leq -2(x+1)$

$\to x-3 \leq -2x-2$

$\to x+2x \leq -2+3$

$\to 3x \leq 1$

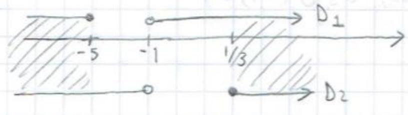
$\to x \leq 1/3$

$\to x \in (-\infty,-1)$

$\therefore$ Desigualdad 2: Caso 1 $\cup$ Caso 2

D_2: $(-\infty,-1) \cup [1/3,\infty)$

Como $\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \leq 2$, la solución es la intersección de las desigualdades



$\therefore$ Solución: $D_1 \cap D_2 = [(-\infty,-5] \cup (-1,\infty)] \cap [(-\infty,-1) \cup [1/3,\infty)]$

$\therefore x \in (-\infty,-5] \cup [1/3,\infty)$