Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Álgebra (1120)

Profesor(a): Rosalba Rodríguez Chávez

Semestre 2021-1

SERIE TEMA 4 “POLINOMIOS”

Nombre: Aguilar Maya Daniel
Grupo: 28

Cd. Universitaria a 14 de diciembre de 2020.

2.- Para el polinomio $p(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 24x + 12$

determinar:

a) Las posibilidades en que pueden presentarse las raíces de $p(x)$.

b) Las raíces del polinomio $p(x)$.

2. Para el polinomio $p(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 24x + 12$

determinar:

a) Las posibilidades en que pueden presentarse las raíces de $p(x)$.

b) Las raíces del polinomio $p(x)$

a) $p(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 24x + 12$ $\qquad \mathbb{R}^+ \to 4, 2, 0$

$p(-x) = -x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 11x^2 + 24x + 12$ $\qquad \mathbb{R}^- \to 1$

Posibilidades $\rightarrow$

$\mathbb{R}^+$	4	2	0
$\mathbb{R}^-$	1	1	1
$\mathbb{C}$	0	2	4
Total	5	5	5

b) $p(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 24x + 12$; posibles raíces de $p(x)$: $\pm\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -5 & 5 & 11 & -24 & 12 \\
1 & & 1 & -4 & 1 & 12 & -12 \\
\hline
 & 1 & -4 & 1 & 12 & -12 & \underline{|0} \\
2 & & 2 & -4 & -6 & 12 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 6 & \underline{|0} & \\
2 & & 2 & 0 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \underline{|0} & &
\end{array}
$$

$p(x) = (x-1)(x-2)(x-2)(x^2-3)$

$p(x) = (x-1)(x-2)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$\therefore$ $\boxed{x_1 = 1}$ $\boxed{x_2 = 2}$ $\boxed{x_3 = 2}$ $\boxed{x_4 = -\sqrt{3}}$ $\boxed{x_5 = \sqrt{3}}$

4.- Sea el polinomio $p(x) = 2x^6 + 6x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 14x + 12$.

a) Determinar las posibilidades en que pueden presentarse las raíces de $p(x)$ de acuerdo a la regla de los signos de Descartes.

b) Expresar a $p(x)$ en términos de sus factores lineales, siendo uno de sus factores $(x+i)$.

4.- Sea el polinomio $p(x) = 2x^6 + 6x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 14x + 12$

a) Determinar las posibilidades en que pueden presentarse las raíces de $p(x)$ de acuerdo a la regla de los signos de Descartes.

b) Expresar a $p(x)$ en términos de sus factores lineales, siendo uno de sus factores $(x+i)$

a) $p(x) = 2x^6 + 6x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 14x + 12$ $\qquad \mathbb{R}^+ \to 4, 2, 0$

$p(-x) = 2x^6 - 6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 14x + 12$ $\qquad \mathbb{R}^- \to 2, 0$

Posibilidades $\to$

$\mathbb{R}^+$	4	4	2	2	0	0
$\mathbb{R}^-$	2	0	2	0	2	0
$\mathbb{C}$	0	2	2	4	4	6
Total	6	6	6	6	6	6

b) $p(x) = 2x^6 + 6x^5 - 4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 14x + 12$

$p(x) = 2(x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 7x + 6)$

Como $(x+i)$ es un factor de $p(x)$, entonces $-i$ es raíz. Y si $-i$ es raíz, tambien i lo es:

	1	3	-2	-4	3	-7	6
$-i$		$-i$	$-1-3i$	$-3+3i$	$3+7i$	$7-6i$	-6
	1	$3-i$	$-3-3i$	$-7+3i$	$6+7i$	$-6i$	$\boxed{0}$
i		i	$3i$	$-3i$	$-7i$	$6i$	
	1	3	-3	-7	6	$\boxed{0}$	

$p(x) = 2(x+i)(x-i)\underbrace{(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6)}$

posibles raíces: $\pm\{1, 2, 3, 6\}$

	1	3	-3	-7	6
1		1	4	1	-6
	1	4	1	-6	$\boxed{0}$
1		1	5	6	
	1	5	6	$\boxed{0}$	

$p(x) = 2(x+i)(x-i)(x-1)(x-1)(x^2+5x+6)$

$$\boxed{p(x) = 2(x+i)(x-i)(x-1)(x-1)(x+3)(x+2) = 2(x+i)(x-i)(x-1)^2(x+3)(x+2)}$$

6.- Dado el polinomio $p(\theta) = \cos^3\theta + \cos^2\theta - 2$.
Determinar las raíces del polinomio $p(\theta)$.

6.- Dado el polinomio $p(\theta) = \cos^3\theta + \cos^2\theta - 2$

Determinar las raíces del polinomio $p(\theta)$

Solución: Sea $x = \cos\theta$, entonces:

$p(x) = x^3 + x^2 - 2$. Posibles raíces racionales: $\pm\{2, 1\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$p(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 + 2x + 2)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$p(x) = (x-1)(x - (-1-i))(x - (-1+i))$

Pero $x = \cos\theta$, $\rightarrow$

$p(\theta) = \underbrace{(\cos\theta - 1)}_{1}\underbrace{(\cos\theta + 1 + i)}_{2}\underbrace{(\cos\theta + 1 - i)}_{3}$

De 1 $\quad \cos\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = 1$

$\theta = \arg\cos 1$

$\boxed{\theta = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

De 2 $\quad \cos\theta + 1 + i = 0$

$\cos\theta = -1 - i$

Como la función $\cos\theta$ es par $\rightarrow$

$\cos(-\theta) = -1 - i$ y $\cos(\theta) = -1 - i$

$\boxed{\theta = -\arg\cos(-1-i) + 2\pi k, \quad \theta = \arg\cos(-1-i) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}$

De (3) $\quad \cos\theta + 1 - i = 0$

$\cos\theta = -1 + i$

Como la función $\cos\theta$ es par. $\rightarrow$

$\cos(-\theta) = -1 + i$ y . $\cos\theta = -1 + i$

$\boxed{\theta = -\arg\cos(-1+i) + 2\pi k, \quad \theta = \arg\cos(-1+i) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}$

8.- Obtener los valores de A, B y C $\in \mathbb{R}$ para que los polinomios $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 5$ y $q(x) = A(3x - 2) + B(x^3 - 7x - 1) + Cx^2$ sean iguales.

8.- Obtener los valores de A, B y C $\in \mathbb{R}$ para que los polinomios $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 5$ y $q(x) = A(3x-2) + B(x^3 - 7x - 1) + Cx^2$ sean iguales

Solución:

$$q(x) = A(3x-2) + B(x^3 - 7x - 1) + Cx^2$$

$$q(x) = 3Ax - 2A + Bx^3 - 7Bx - B + Cx^2$$

$$q(x) = (B)x^3 + C(x^2) + (3A - 7B)x + (-2A - B)$$

Si son iguales $q(x)$ y $p(x)$, entonces sus respectivos coeficientes asociados a la variable con el mismo exponente son iguales, i.e.:

$$B = 1, \quad C = 3, \quad \underbrace{3A - 7B = -1}_{①}, \quad \underbrace{-2A - B = -5}_{②}$$

Sustituyendo $B = 1$ ya sea en ① o en ②:

① $3A - 7(1) = -1 \rightarrow 3A - 7 = -1 \rightarrow 3A = 6 \rightarrow A = 2$

② $-2A - B = -5 \rightarrow -2A - 1 = -5 \rightarrow -2A = -4 \rightarrow A = 2$

Por tanto: $\boxed{A = 2}$ $\boxed{B = 1}$ $\boxed{C = 3}$

10.- Obtener el polinomio $p(x)$ de menor grado, de coeficientes reales, su cuatro de sus raíces son $\alpha_1 = -2 + 2i$, $\alpha_2 = 3 - \sqrt{5}$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

10. Obtener el polinomio $p(x)$ de menor grado, de coeficientes reales, si cuatro de sus raíces son $\alpha_1 = -2 + 2i$, $\alpha_2 = 3 - \sqrt{5}$, $a_3 = a_4 = 0$

Solución: Dadas las condiciones de $p(x)$ entonces $\overline{\alpha}_1$ y $\overline{\alpha}_2$ también son raíces: $\overline{\alpha}_1 = -2 - 2i$, $\overline{\alpha}_2 = 3 + \sqrt{5}$

$$\therefore \quad p(x) = A(x - (-2+2i))(x - (-2-2i))(x - (3 - \sqrt{5}))(x - (3 + \sqrt{5}))(x - 0)(x - 0)$$

$$= A(x + 2 - 2i)(x + 2 + 2i)(x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{3})(x^2)$$

$$= A((x+2)^2 - (2i)^2)((x-3)^2 - (\sqrt{3})^2)(x^2)$$

$$= A(x^2 + 4x + 4 + 4)(x^2 - 6x + 9 - 5)(x^2)$$

$$= A(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 6x + 4)(x^2)$$

$$= A(\underline{x^4} - 6x^3 + \underline{4x^2} + 4x^3 - \underline{24x^2} + 16x + \underline{8x^2} - 48x + 32)(x^2)$$

$$= A(x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 32x + 32)(x^2)$$

$$= A(x^6 - 2x^5 - 12x^4 - 32x^3 + 32x^2)$$

$$\boxed{p(x) = Ax^6 - 2Ax^5 - 12Ax^4 - 32Ax^3 + 32Ax^2, \quad A \in \mathbb{R} \neq 0}$$

12.- Obtener las raíces del polinomio

$$f(x) = x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 6x + 36$$

si $\alpha_1 = 1 + i$ es una de ellas.

12. Obtener las raíces del polinomio

$$f(x) = x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 6x + 36$$

si $\alpha_1 = 1+i$ es una de ellas

	1	6	7	-8	6	36
$1+i$		$1+i$	$6+8i$	$5+21i$	$-24+18i$	-36
	1	$7+i$	$13+8i$	$-3+21i$	$-18+8i$	$\boxed{0}$

$(1+i)(7+i) = (7-1)+(1+7)i = 6+8i$

$(1+i)(13+8i) = (13-8)+(8+13)i = 5+21i$

$(1+i)(-3+21i) = (-3-21)+(-3+21)i = -24+18i$

$(1+i)(-18+18i) = (-18-18)+(18-18)i = -36$

Y como $\alpha_1 = 1+i$ es raíz, también $\bar{\alpha}_1 = 1-i$

	1	$7+i$	$13+8i$	$-3+21i$	$-18+18i$
$1-i$		$1-i$	$8-8i$	$21-21i$	$18-18i$
	1	8	21	18	$\boxed{0}$

$$\therefore f(x) = (x-(1-i))(x-(1+i))(\underbrace{x^3+8x^2+21x+18}_{\text{posibles raíces racionales: } \pm\{1,2,3,6,9,18\}})$$

	1	8	21	18
-3		-3	-15	-18
	1	5	6	$\boxed{0}$

$f(x) = (x-(1-i))(x-(1+i))(x+3)(x^2+5x+6)$

$f(x) = (x-(1-i))(x-(1+i))(x+3)(x+3)(x+2)$

Raíces

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = 1-i & x_{3,4} = -3 \\ x_2 = 1+i & x_5 = -2 \end{array}}$$

14.- Sea el polinomio $p(x) = x^3 - Ax^2 - Bx + 12$.

a) Determinar el de valor de A y $B \in \mathbb{R}$, si la gráfica del polinomio $p(x)$ contiene a los puntos $P_1(3,0)$ y $P_2(2,0)$.

b) Con los valores de A y B obtenidos, calcular las raíces de $p(x)$.

14.- Sea el polinomio $p(x) = x^3 - Ax^2 - Bx + 12$

a) Determinar el de valor de A y $B \in \mathbb{R}$, si la gráfica del polinomio $p(x)$ contiene a los puntos $P_1(3,0)$ y $P_2(2,0)$.

b) Con los valores de A y B obtenidos, calcular las raíces de $p(x)$.

Solución: Dados P_1 y P_2, $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$ son raíces de $p(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -A & -B & 12 \\
3 & & 3 & 9-3A & 27-9A-3B \\
\hline
 & 1 & 3-A & 9-3A-B & 39-9A-3B=0 \quad (1) \\
2 & & 2 & 10-2A & \\
\hline
 & 1 & 5-A & 19-5A-B=0 \quad (2) &
\end{array}$$

$$\begin{cases} 39-9A-3B=0 \\ 19-5A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3A-B=-13 \\ -5A-B=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+\cancel{B}=13 \\ -5A-\cancel{B}=-19 \end{cases}$$

$$-2A = -6$$

$$\boxed{A = 3}$$

De (1) $\rightarrow$ $39 - 9A - 3B = 0$

$13 - 3A - B = 0$

$B = 13 - 3A = 13 - 3(3)$
$= 13 - 9 = 4$

$$\boxed{B = 4}$$

b) $\therefore$ $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & -4 & 12 \\
3 & & 3 & 0 & -12 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \underline{0} \\
2 & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \underline{0} &
\end{array}$$

$\therefore$ $p(x) = (x-3)(x-2)(x+2)$

Raíces: $\boxed{x_1 = 3, \; x_2 = 2, \; x_3 = -2}$

16.- Sea el polinomio $p(\lambda)=\lambda^3-12\lambda+2k$.

a) Determinar el valor de $k\in\mathbb{R}$ para que $\alpha\in\mathbb{R}^+$ sea una raíz con multiplicidad 2.

b) Las raíces de $p(\lambda)$ con el valor de k obtenido en el inciso anterior.

16. - Sea el polinomio $p(\lambda)=\lambda^3-12\lambda+2K$

a) Determinar el valor de $K\in\mathbb{R}$ para que $\alpha\in\mathbb{R}^+$ sea una raíz de multiplicidad 2.

b) Las raíces de $p(\lambda)$ con el valor de K obtenido en el inciso anterior.

Solución:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -12 & 2K \\
\alpha & & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3-12\alpha \\
\hline
 & 1 & \alpha & \alpha^2-12 & \boxed{\alpha^3-12\alpha+2K=0} \leftarrow (1) \\
\alpha & & \alpha & 2\alpha^2 & \\
\hline
 & 1 & 2\alpha & \boxed{3\alpha^2-12=0} \leftarrow (2) &
\end{array}$$

De (2) $3\alpha^2-12=0$

$3\alpha^2=12$

$\alpha^2=4$

$\alpha=\pm 2$, pero $\alpha\in\mathbb{R}^+$

$\therefore \alpha=2$

De (1) $\alpha^3-12\alpha+2K=0$

$2^3-12(2)+2K=0$

$\Leftrightarrow 8-24+2K=0$

$\Leftrightarrow -16+2K=0$

$\Leftrightarrow 2K=16$

$\Leftrightarrow K=8$

$\therefore \boxed{K=8}$

b) $p(\lambda)=\lambda^3-12\lambda+2(8)=\lambda^3-12\lambda+16$

Posibles raíces racionales: $\pm\{1,2,4,8,16\}$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -12 & 16 \\
2 & & 2 & 4 & -16 \\
\hline
 & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\therefore \quad p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 4)$

Raíces

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_1 = 2 \\
\lambda_2 = 2 \\
\lambda_3 = -4
\end{pmatrix}
$$

18.- Obtener las raíces del polinomio $p(x) = x^3 f(x) g(x)$ del cual se conoce lo siguiente:

$f(x) = x^3 + (1+i)x^2 + (-2+i)x - 2i$ tiene como raíz a $(-i)$ y $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ cumple que $g(\sqrt{2}) = 0$.

18. Obtener las raíces del polinomio $p(x) = x^3 f(x)\, g(x)$ del cual se conoce lo siguiente:

$f(x) = x^3 + (1+i)x^2 + (-2+i)x - 2i$ tiene como raíz a $(-i)$ y
$g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ cumple que $g(\sqrt{2}) = 0$

Solución: De $f(x)$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1+i & -2+i & -2i \\ -i & & -i & -i & 2i \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{\lfloor 0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = (x+i)(x^2+x-2) = (x+i)(x+2)(x-1)$

De $g(x)$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & -6 \\ \sqrt{2} & & \sqrt{2} & 3\sqrt{2}+2 & 6 \\ \hline & 1 & 3+\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \underline{\lfloor 0} \\ -\sqrt{2} & & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & \\ \hline & 1 & 3 & \underline{\lfloor 0} & \end{array}$$

$\therefore\ g(x) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)$

Procedemos a sustituir $f(x)$ y $g(x)$ en $p(x)$

$p(x) = x^3 (x+i)(x+2)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)$

$p(x) = (x)(x)(x)(x+i)(x+2)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)$

Raíces de $p(x)$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_{1,2,3} = 0 & x_7 = -3 \\ x_4 = -i & x_8 = \sqrt{2} \\ x_5 = -2 & x_9 = -\sqrt{2} \\ x_6 = 1 & \end{array}}$$