

- 2. Formas normales y dispositivos de dos estados**
- 2.1 Forma normal disyuntiva principal**
- 2.2 Forma normal conjuntiva principal**

43. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$P \rightarrow Q$$

Use los siguientes métodos:

- Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
- Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
- A partir de la FNDP obtenga la FNCP.
- A partir de la FNCP obtenga la FNDP.
- Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP

Procedimiento

Ahora, se trabaja para llegar a la FNDP

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

Ley o propiedad

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge T) \vee (Q \wedge T)$$

Con-Dis

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P))$$

Identidad

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)$$

Tautología

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Distributiva

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

Commutativa

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

Idempotencia

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

Commutativa

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP

Procedimiento

Obtener la FNCP

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

Ley o propiedad

$$\text{FNCP} \quad \text{Con-Dis}$$

Método c: A partir de la FNDP obtener la FNCP

Procedimiento	Ley o propiedad
Ahora, se llega a la FNCP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ trabaje con ella.	Con-Dis
$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q))$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge T)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg P$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow T \wedge (\neg P \vee Q)$	Tautología y comm.
$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$	Identidad

Método d: A partir de la FNCP obtener la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
Ahora, se llega a la FNDP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ ésta es la FNCP, trabaje con ella.	Con-Dis
$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge T) \vee (Q \wedge T)$	Identidad
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	Commutativa

Método e: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Otra forma de resolver el problema consiste en el uso de la tabla de verdad. Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, $P \rightarrow Q$ es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y genere las combinaciones directamente. Cada combinación es un mintérmino. El único conectivo binario que contiene cada mintérmino corresponde a la conjunción.

P	Q	$P \rightarrow Q$	FNDP	FNCP
T	T	T	$(P \wedge Q)$	
T	F	F		
F	T	T	$(\neg P \wedge Q)$	
F	F	T	$(\neg P \wedge \neg Q)$	

Finalmente, relacione los mintérminos obtenidos por medio de disyunciones.

Así, la FNDP está dada por:

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Por otra parte, para obtener la FNCP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor falso en la columna resultante. Para generar las combinaciones correspondientes vea el valor de la atómica y cámbielo.

Cada combinación obtenida es un maxtérmino. El único conectivo binario que contiene cada maxtérmino corresponde a la disyunción. Si existe más de un maxtérmino, relacionelos por medio de conjunciones.

P	Q	$P \rightarrow Q$	FNDP	FNCP
T	T	T	$(P \wedge Q)$	
T	F	F		$(\neg P \vee Q)$
F	T	T	$(\neg P \wedge Q)$	
F	F	T	$(\neg P \wedge \neg Q)$	

De la tabla, obtenemos sólo un maxtérmino, por lo que no se requieren conjunciones para relacionarlo.

Así, la FNCP está dada por:

$$(\neg P \vee Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

Comentarios:

Se llama forma normal principal porque cada término contiene a todas las atómicas que aparecen en la fórmula original. La forma normal principal toma el nombre del conectivo que relaciona a los términos. Así, en el caso de los mintérminos, éstos se relacionan con disyunciones, por eso se llama Forma Normal Disyuntiva Principal, FNDP. Para el caso de los maxtérminos, éstos se relacionan con conjunciones, de ahí el nombre de Forma Normal Conjuntiva Principal, FNCP. Otro punto muy importante es que las formas normales principales son únicas. Como ve, existen diferentes modalidades para obtener las formas normales principales.

Si la fórmula original es una contingencia entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP ($\# t_{FNDP}$) y de la FNCP ($\# t_{FNCP}$) es igual a 2^n , donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula original.

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 2^n$$

Para el ejercicio, $n = 2$

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 3 + 1 = 2^2 = 4$$

44. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$P \vee (\neg P \wedge Q)$$

Use los siguientes métodos:

- Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
- Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
- Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.
- A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.
- A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP
Procedimiento

	Ley o propiedad
$P \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (\neg P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ FNDP	Distributiva

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP
Procedimiento

	Ley o propiedad
$P \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (T) \wedge (P \vee Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q)$ FNCP	Identidad

Método c: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Otra forma de resolver el problema consiste en el uso de la tabla de verdad. Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	$P \vee (7P \wedge Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, $P \vee (7P \wedge Q)$ es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y escriba las combinaciones directamente. Cada combinación corresponde a un mintérmino, el cual contiene conjunciones y, en su caso, negaciones.

P	Q	$P \vee (7P \wedge Q)$	FNDP	FNCP
T	T	T	$(P \wedge Q)$	
T	F	T	$(P \wedge 7Q)$	
F	T	T	$(7P \wedge Q)$	
F	F	F		

Finalmente, relacione lo obtenido con disyunciones.

Entonces la FNDP está dada por:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q)$$

Por otra parte, para obtener la FNCP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor falso en la columna resultante. Para escribir las combinaciones correspondientes vea el valor de la atómica y cámbielo.

Cada combinación corresponde a un maxtérmino, el cual contiene disyunciones y, en su caso, negaciones.

P	Q	$P \vee (7P \wedge Q)$	FNDP	FNCP
T	T	T	$(P \wedge Q)$	
T	F	T	$(P \wedge 7Q)$	
F	T	T	$(7P \wedge Q)$	
F	F	F		$(P \vee Q)$

Relacione lo obtenido por medio de conjunciones, si existe más de un maxtérmino. En este ejercicio sólo existe un maxtérmino.

Entonces la FNCP está dada por:

$$(P \vee Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

Para la solución d y e, hacemos uso de la tabla obtenida en la solución c.

Método d: A partir de los términos faltantes de la FNDP se obtiene la FNCP.

Procedimiento

Ya se obtuvo la FNDP

$$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

Ahora, a partir de la FNDP se obtiene la otra forma, ¿cómo?

Vea la tabla de verdad:

1º Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNDP son:

$$(7P \wedge 7Q)$$

2º Relacione los términos faltantes con \vee : Como sólo es uno, no es necesario.

(7P \wedge 7Q) Se deja igual

3º Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

$$\overline{7[(7P \wedge 7Q)]}$$

4º Aplique De Morgan y desarrolle:

$$\overline{7[(7P \wedge 7Q)]} \Leftrightarrow 7\overline{7P} \vee 7\overline{7Q}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q)$$

FNCP

Método e: A partir de los términos faltantes de la FNCP se obtiene la FNDP.

Procedimiento

Ya se obtuvo la FNCP

$$P \vee (7P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

FNCP

Ahora, a partir de la FNCP se obtiene la otra forma, ¿cómo?

Vea la tabla de verdad:

1º Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNCP son:
 $(P \vee 7Q)$, $(7P \vee Q)$ y $(7P \vee 7Q)$

2º Relacione los términos faltantes con \wedge :

$$(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)$$

3º Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

$$\overline{7[(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)]}$$

4º Aplique De Morgan y desarrolle:

$$\overline{7[(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)]} \Leftrightarrow 7(P \vee 7Q) \vee 7(7P \vee Q) \vee 7(7P \vee 7Q)$$

$$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

Comentarios:

Se llama forma normal principal porque cada término contiene a todas las atómicas que aparecen en la fórmula original. La forma normal principal toma el nombre del conectivo que relaciona a los términos. Así, en el caso de los mintérminos, éstos se relacionan con disyunciones, por eso se llama Forma Normal Disyuntiva Principal, FNDP. Para el caso de los maxtérminos, éstos se relacionan con conjunciones, de ahí el nombre de Forma Normal Conjuntiva Principal, FNCP.

Otro punto muy importante es que las formas normales principales son únicas.

Como ve, existen diferentes modalidades para obtener las formas normales principales. Practique.

Si la fórmula original es una contingencia entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP ($\# t_{FNDP}$) y de la FNCP ($\# t_{FNCP}$) es igual a 2^n , donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula.

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 2^n$$

Para el ejercicio, $n = 2$

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 3 + 1 = 2^2 = 4$$

Recuerde, las formas normales principales cumplen tres condiciones:

1. El único conectivo que se permite usar fuera de los términos corresponde al nombre de la forma normal principal. El conectivo aparece cuando existe más de un término.
2. El único conectivo binario que se permite dentro de cada término es el dual del conectivo externo.
3. Dentro de cada término deben aparecer todas las atómicas que contiene la fórmula proposicional original.

Observe que en las formas normales principales, los únicos conectivos que pueden aparecer son \vee , \wedge y \neg .

45. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

Use los siguientes métodos:

- a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
- b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
- c) Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.
- d) A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.
- e) A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$	Bi-Con
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee P))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee Q))$	Comutativa
$\Leftrightarrow P \vee ((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee Q))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee ((P \rightarrow Q) \wedge (P \vee Q))$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee ((P \rightarrow Q) \wedge P) \vee ((P \rightarrow Q) \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge P) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q)$	Dist. y conm.
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (F) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \vee (F)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$	FNDP
	Identidad

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP

Procedimiento	Ley o propiedad
De la solución a) vimos que:	
$(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$	
A partir de esta expresión se obtienen más equivalencias:	
$(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (T) \wedge (P \vee Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q)$	Identidad
	FNCP

Método c: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Otra forma de resolver el problema consiste en usar tabla de verdad.

Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	$(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, $(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y escriba las combinaciones directamente. Cada combinación corresponde a un mintérmino.

P	Q	$(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$	FNDP	FNCP
T	T	T	$(P \wedge Q)$	
T	F	T	$(P \wedge \neg Q)$	
F	T	T	$(\neg P \wedge Q)$	
F	F	F		

Finalmente, relacione lo obtenido con disyunciones.

Entonces la FNDP está dada por:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$(P \vee Q) \rightarrow (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Por otra parte, para obtener la FNCP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor falso en la columna resultante. Para escribir las combinaciones correspondientes vea el valor de la atómica y cámbielo.

Cada combinación corresponde a un maxtérmino.

P	Q	$(P \vee Q) \rightarrow (P \neq Q)$	FNDP	FNCP
T	T	T	$(P \wedge Q)$	
T	F	T	$(P \wedge \neg Q)$	
F	T	T	$(\neg P \wedge Q)$	
F	F	F		$(P \vee Q)$

Relacione lo obtenido por medio de conjunciones, si existe más de un maxtérmino. En este caso sólo existe un maxtérmino.

Entonces la FNCP está dada por:

$$(P \vee Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$(P \vee Q) \rightarrow (P \neq Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

Para la solución d y e, hacemos uso de la tabla obtenida en la solución c.

Método d: A partir de los términos faltantes de la FNCP se obtiene la FNDP.

Procedimiento

Ya se tiene la FNCP

$$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \neq 7Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \quad \text{FNCP}$$

Ahora, a partir de la FNCP se obtiene la otra forma, ¿cómo?

Vea la tabla de verdad:

1º Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNCP son:

$$(P \vee 7Q), (7P \vee Q) \text{ y } (7P \vee 7Q)$$

2º Relacione los términos faltantes con \wedge :

$$(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)$$

3º Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

$$\neg[(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)]$$

4º Aplique De Morgan y desarrolle:

$$\neg[(P \vee 7Q) \wedge (7P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)] \Leftrightarrow \neg(P \vee 7Q) \vee \neg(7P \vee Q) \vee \neg(7P \vee 7Q)$$

$$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

Método e: A partir de los términos faltantes de la FNDP se obtiene la FNCP.

Procedimiento

Ya se tiene la FNDP

$$(7P \vee 7Q) \rightarrow (P \neq 7Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

Ahora, a partir de la FNDP se obtiene la otra forma, ¿cómo?

Vea la tabla de verdad:

1º Los términos (las combinaciones) faltantes de la FNDP son:

$$(7P \wedge 7Q)$$

2º Relacione los términos faltantes con \vee : Como sólo es uno, no es necesario.

$$(7P \wedge 7Q)$$

3º Encierre lo obtenido entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

$$\neg[(7P \wedge 7Q)]$$

4º Aplique De Morgan y desarrolle:

$$\neg[(7P \wedge 7Q)] \Leftrightarrow \neg(7P \wedge 7Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \quad \text{FNCP}$$

Comentarios:

En este ejercicio se mostraron las diferentes modalidades para obtener formas normales principales.

46. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional. Use únicamente el método algebraico.

$$(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q)$$

Solución: Método algebraico.

Procedimiento

Primero se obtiene la FNDP

$(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (\neg P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((Q \vee P) \wedge \neg P) \wedge Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow ((Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg P)) \wedge Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow ((Q \wedge \neg P) \vee \text{F}) \wedge Q$	Contradicción
$\Leftrightarrow (Q \wedge \neg P) \wedge Q$	Identidad
$\Leftrightarrow (Q \wedge Q) \wedge \neg P$	Comm. y asoc.
$\Leftrightarrow \text{F}$	Contradicción
$\Leftrightarrow \text{F}$ La fórmula es una contradicción	Dominancia

Como la fórmula es una contradicción no tiene FNDP.

Siguiendo otro camino, se obtiene la FNCP:

$(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (\neg P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$	Comm. e identidad
$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$	FNCP

Como la fórmula es una contradicción únicamente tiene FNCP.

Comentarios:

Si la fórmula proposicional es una tautología, entonces únicamente contiene FNDP.

Si la fórmula proposicional es una contradicción, entonces únicamente contiene FNCP.

En cada término de las formas normales principales aparecen, en estricto orden alfabético, todas las atómicas contenidas en la fórmula proposicional original.

Compruebe su resultado usando el método de tabla de verdad.
Cuidado, no se confunda.

47. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$(Q \rightarrow P) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Solución:

Usando el método algebraico.

Procedimiento

Primero se obtiene la FNCP

Ley o propiedad

$(Q \rightarrow P) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \vee (\neg P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((\neg Q \vee P) \vee \neg P) \wedge ((\neg Q \vee P) \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg Q \vee (P \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \vee Q) \vee P)$	Asoc. y conm.
$\Leftrightarrow (\neg Q \vee T) \wedge (T \vee P)$	Tautología
$\Leftrightarrow (T \vee P) \wedge (T \vee P)$	Dominancia
$\Leftrightarrow T$	Idemp. o domi.

De acuerdo con el desarrollo, la fórmula corresponde a una tautología. Por lo tanto, la fórmula no tiene FNCP.

Obtengamos la FNDP.

$(Q \rightarrow P) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \vee (\neg P \wedge Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \vee P)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (P \wedge \neg Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge (P \vee \neg P)) \vee (P \wedge (\neg Q \vee Q))$	Tautología
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (P \wedge \neg Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$	Commutativa

Como la fórmula es una tautología, únicamente tiene FNDP.

Comentarios:

Si la fórmula original es una tautología, entonces únicamente tiene FNDP.
No se confunda con el ejercicio 46.

48. Obtenga, por separado, las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$Q \wedge (P \vee \neg Q)$$

Solución:

Usando el método algebraico.

Procedimiento

Ley o propiedad

Por separado, primero se obtiene la FNDP

$$\begin{aligned} Q \wedge (P \vee \neg Q) &\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee \text{F} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \text{F} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \end{aligned}$$

Distributiva
Contradicción
Commutativa
Identidad

Ahora se obtiene la FNCP

$$\begin{aligned} Q \wedge (P \vee \neg Q) &\Leftrightarrow (Q \vee \text{F}) \wedge (P \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (Q \vee (P \wedge \neg P)) \wedge (P \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \end{aligned}$$

Identidad
Contradicción
Distributiva y
comutativa
Comutativa

Comentarios:

Si la fórmula original es una contingencia, entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP ($\# t_{FNDP}$) y de la FNCP ($\# t_{FNCP}$) es igual a 2^n , donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula.

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 2^n$$

Para el ejercicio, $n = 2$

$$\# t_{FNDP} + \# t_{FNCP} = 1 + 3 = 2^2 = 4$$

49. Obtenga, a partir de cada una de ellas, las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$Q \wedge (P \vee \neg Q)$$

Solución:	
Usando el método algebraico.	
Procedimiento.	Ley o propiedad
Si ya tenemos (del ejercicio 48)	
$Q \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$	FNDP
Tomamos la parte derecha y obtenemos la FNCP	
$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (Q \vee F)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (Q \vee (P \wedge \neg P))$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$	Comutativa
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$	Idempotencia
Si ya tenemos	
$Q \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	FNCP
Tomamos la parte derecha y obtenemos la FNDP	
$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (F) \vee (P \wedge \neg Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$	FNDP
	Identidad

Comentarios:

Recuerde:

Si la fórmula original es una contingencia, entonces contiene FNDP y FNCP.

La suma de términos de la FNDP y la FNCP es igual a 2^n , donde n es el número de atómicas que contiene la fórmula.

50. Obtenga, a partir de términos faltantes de cada una de ellas, las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$Q \wedge (P \vee \neg Q)$$

Solución:

Por el método algebraico.

Procedimiento

Si ya tenemos (del ejercicio 48)

$$Q \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

A partir de esta equivalencia obtenemos la FNCP.

1º Los términos faltantes son:

$$(P \wedge \neg Q), (\neg P \wedge Q) \text{ y } (\neg P \wedge \neg Q)$$

2º Relacione los términos faltantes con \vee :

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

3º Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

$$\neg[(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)]$$

4º Aplique De Morgan y desarrolle:

$$\begin{aligned} \neg[(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q) \quad \text{FNCP} \end{aligned}$$

Por otra parte, si ya tenemos la FNCP

$$Q \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \quad \text{obtenemos la FNDP}$$

1º El término faltante es:

$$(\neg P \vee \neg Q)$$

2º Relacione los términos faltantes con \wedge : Como sólo es uno, no es necesario.

$$(\neg P \vee \neg Q)$$

3º Encierre todo entre paréntesis cuadrados y niéguelo:

$$\neg[(\neg P \vee \neg Q)]$$

4º Aplique De Morgan y desarrolle:

$$\neg[(\neg P \vee \neg Q)] \Leftrightarrow (P \wedge Q) \quad \text{FNDP}$$

Comentarios:

Este método es muy sencillo. Pero debe estar seguro de que la forma normal principal de la cual se parte esté correcta. En caso contrario, la otra forma estará incorrecta.
Para este ejercicio, Usted debe identificar las reglas, leyes o propiedades que se usaron.

51. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$$

Use los siguientes métodos:

- a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
- b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
- c) A partir de la FNDP obtener la FNCP.
- d) A partir de la FNCP obtener la FNDP.
- e) Por tablas de verdad obtener la FNDP.
- f) Por tablas de verdad obtener la FNCP.
- g) A partir de los términos faltantes de la FNDP obtenga la FNCP.
- h) A partir de los términos faltantes de la FNCP obtenga la FNDP.

Solución:

Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\text{F}) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Identidad
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge T) \vee (\neg P \wedge R \wedge T) \vee (Q \wedge R \wedge T)$	Identidad
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge R \wedge (P \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge R \wedge (P \vee \neg P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q) \vee (Q \wedge R \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R \wedge P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q) \vee (Q \wedge R \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R \wedge P)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge R)$	FNDP

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7Q \vee R)$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee F) \wedge (7Q \vee R \vee F)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee (R \wedge 7R)) \wedge (7Q \vee R \vee (P \wedge 7P))$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee R) \wedge (7P \vee Q \vee 7R) \wedge (7Q \vee R \vee P) \wedge (7Q \vee R \vee 7P)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee R) \wedge (7P \vee Q \vee 7R) \wedge (P \vee 7Q \vee R) \wedge (7P \vee 7Q \vee R)$	Distributiva
FNCP	Comutativa

Método c: Si ya tenemos la FNDP obtenemos la FNCP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge 7R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge (R \vee 7R)) \vee (Q \wedge R \wedge (P \vee 7P))$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge (T)) \vee (Q \wedge R \wedge (T))$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge R)$	Identidad
$\Leftrightarrow ((7P \wedge 7Q) \vee Q) \wedge ((7P \wedge 7Q) \vee R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7Q \vee Q) \wedge (7P \vee R) \wedge (7Q \vee R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (T) \wedge (7P \vee R) \wedge (7Q \vee R)$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7P \vee R) \wedge (7Q \vee R)$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee F) \wedge (7P \vee R \vee F) \wedge (7Q \vee R \vee F)$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee (R \wedge 7R)) \wedge (7P \vee R \vee (Q \wedge 7Q)) \wedge (7Q \vee R \vee (P \wedge 7P))$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee R) \wedge (7P \vee Q \vee 7R) \wedge (7P \vee R \vee Q) \wedge (7P \vee R \vee 7Q) \wedge (7Q \vee R \vee P) \wedge (7Q \vee R \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee R) \wedge (7P \vee Q \vee 7R) \wedge (7P \vee R \vee Q) \wedge (7P \vee R \vee 7Q) \wedge (7Q \vee R \vee P) \wedge (7Q \vee R \vee 7P)$	Comutativa
$\Leftrightarrow (7P \vee Q \vee R) \wedge (7P \vee Q \vee 7R) \wedge (7P \vee R \vee Q) \wedge (7P \vee R \vee 7Q) \wedge (7Q \vee R \vee P) \wedge (7Q \vee R \vee 7P)$	Idempotencia
FNCP	Comutativa

Método d: Si ya tenemos la FNCP obtenemos la FNDP

Procedimiento	Ley o propiedad
$(7P \vee Q \vee R) \wedge (7P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$	
$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \vee (\neg R \wedge R)) \wedge ((7Q \vee R) \vee (P \wedge \neg P))$	Distributiva
$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \vee (\text{F})) \wedge ((7Q \vee R) \vee (\text{F}))$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \wedge (7Q \vee R)$	Identidad
$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \wedge 7Q) \vee ((7P \vee Q) \wedge R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge 7Q) \vee (7P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (\text{F}) \vee (7P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q) \vee (7P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge T) \vee (7P \wedge R \wedge T) \vee (Q \wedge R \wedge T)$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee (7P \wedge R \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge R \wedge (P \vee \neg P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge \neg R) \vee (7P \wedge R \wedge Q) \vee (7P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R \wedge P) \vee (Q \wedge R \wedge \neg P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge \neg R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (7P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (7P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (7P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge 7Q \wedge R) \vee (7P \wedge 7Q \wedge \neg R) \vee (7P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (7P \wedge \neg Q \wedge R)$	Idempotencia
	FNDP