

18. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una contradicción:

$$P \Leftrightarrow \neg P$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$P \Leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow (P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P)$	Bi-Con
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg P) \wedge (\neg \neg P \vee P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg P) \wedge (P \vee P)$	Doble negación
$\Leftrightarrow \neg P \wedge P$	Idempotencia
$\Leftrightarrow F$	Contradicción

Inténtelo de otra manera.

Comentarios:

Recuerde: Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial se puede llegar a una contradicción, es decir, a una constante falsa F.

19. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$$(P \rightarrow \neg Q) \vee P$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow \neg Q) \vee P \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee \neg Q$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (T) \vee \neg Q$	Tautología
$\Leftrightarrow T$	Dominancia

Ahora, resuelva el problema a su manera.

Comentarios:

Recuerde: Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial se puede llegar a una tautología, es decir, a una constante verdadera T.

20. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología:

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Solución:	Ley o propiedad
Procedimiento	
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \wedge ((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	Bi-Con
$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg \neg Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg \neg Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \vee \neg P)) \wedge ((Q \vee \neg P) \rightarrow (\neg P \vee Q))$	Doble negación
$\Leftrightarrow (\neg (\neg P \vee Q) \vee (Q \vee \neg P)) \wedge (\neg (Q \vee \neg P) \vee (\neg P \vee Q))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)) \wedge (\neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q))$	Comutativa
$\Leftrightarrow (\neg \top \vee \top) \wedge (\neg \top \vee \top)$	Tautología
$\Leftrightarrow \top$	Idempotencia

Siga otro camino.

Comentarios:

Los ejercicios se empiezan a complicar. Aquí fue indispensable tener presente que
 $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ corresponde a Bi-Con

Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial es factible llegar a una tautología, es decir, a una constante verdadera T.

21. Usando el método algebraico, determine el tipo de fórmula proposicional:

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \vee R)) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \vee R)) \rightarrow ((\neg P \vee \neg P) \vee (Q \vee R))$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee Q \vee R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q \vee R) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow T$	Tautología

Corresponde a una tautología.

Busque otro camino para resolver el problema.

Comentarios:

El paso en el cual se usaron las propiedades commutativa y asociativa, para después aplicar idempotencia, fue posible debido a que, dentro del paréntesis en cuestión, sólo contiene un tipo de conectivo binario (en este caso disyunción)

Recuerde: Por el método algebraico, usando la Tabla II. Leyes y propiedades, a partir de la fórmula inicial es posible llegar a una tautología, es decir, a una constante verdadera T.

22. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7P \vee P) \wedge (P \wedge (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$$

Primera solución: Por tabla de verdad

P	Q	$(7P \vee P) \wedge (P \wedge (P \wedge Q))$	\Leftrightarrow	$(P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

Se sustituye el símbolo \Leftrightarrow por el conectivo \Leftrightarrow para poder construir la tabla de verdad. Para que se cumpla la equivalencia, la columna resultante debe contener únicamente valores verdaderos (tautología). En cualquier otro caso, significa que no se cumple la equivalencia.

Segunda solución: Por método algebraico

Procedimiento

$$(7P \vee P) \wedge (P \wedge (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (T) \wedge (P \wedge (P \wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge P) \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q$$

Ley o propiedad

Tautología

Identidad

Asociativa

Idempotencia

Intente otro camino.

Comentarios:

El símbolo de equivalencia tiene varias representaciones. Así, la equivalencia de dos proposiciones P y Q se indica como $P \Leftrightarrow Q$ o $P \equiv Q$, pero no debemos olvidar que son símbolos, no conectivos. En consecuencia, para obtener la tabla de verdad, se debe sustituir el símbolo \Leftrightarrow por el conectivo bicondicional \Leftrightarrow .

Para demostrar equivalencias usaremos principalmente el método algebraico.

23. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Comentarios:

Domine un procedimiento. Primero vaya de la expresión que aparece del lado izquierdo para llegar a la expresión que se encuentra en el lado derecho. Después inténtelo de derecha a izquierda.

Para no confundirse, le recomiendo ir de izquierda a derecha, aun cuando la equivalencia es conmutativa.

Para introducir atómicas faltantes, use tautologías. La tautología debe estar en función de la atómica que se requiera.

No es necesario utilizar notación totalmente parentizada.

24. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee \neg Q$	Conn. y asoc.
$\Leftrightarrow T \vee \neg Q$	Tautología
$\Leftrightarrow T$	Dominancia
$\Leftrightarrow T \vee Q$	Dominancia
$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee Q$	Tautología
$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee Q)$	Conn. y asoc.
$\Leftrightarrow P \vee (P \rightarrow Q)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	Dis-Con
Ahora vaya de derecha a izquierda. Inténtelo, Usted puede.	

Comentarios:

Recuerde: Cualquier fórmula proposicional en disyunción con una tautología da como resultado una tautología.

La clave de este ejercicio se encuentra en el tercero, cuarto y quinto paso.

25. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(R \vee \neg R) \wedge S \Leftrightarrow (R \rightarrow ((R \wedge Q) \vee R)) \rightarrow S$$

Solución:

Procedimiento

(R $\vee \neg R$) $\wedge S \Leftrightarrow (\top) \wedge S$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow S$	Tautología
$\Leftrightarrow F \vee S$	Identidad
$\Leftrightarrow \neg F \rightarrow S$	Identidad
$\Leftrightarrow T \rightarrow S$	Dis-Con
$\Leftrightarrow (\neg R \vee R) \rightarrow S$	Negación
$\Leftrightarrow (R \rightarrow R) \rightarrow S$	Tautología
$\Leftrightarrow (R \rightarrow ((R \wedge Q) \vee R)) \rightarrow S$	Dis-Con
	Absorción

Ya domina el método. Busque otro camino.

Comentarios:

La absorción es una propiedad muy importante; así como nos permite eliminar atómicas, también nos permite insertar atómicas. Piense y actúe.

En este caso, a partir de R se introdujo $(R \wedge Q) \vee R$, es decir $R \Leftrightarrow (R \wedge Q) \vee R$.

26. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7P \vee (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \rightarrow Q$$

Solución:

Procedimiento

$$\begin{aligned} 7P \vee (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow 7P \vee (7P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (7P \vee 7P) \vee Q \\ &\Leftrightarrow 7P \vee Q \\ &\Leftrightarrow P \rightarrow Q \end{aligned}$$

Ley o propiedad
Con-Dis
Asociativa
Idempotencia
Dis-Con

Intente varios caminos. Usted si puede.

Comentarios:

La idempotencia es una propiedad muy importante. Así como nos permite eliminar proposiciones, también nos permite insertar proposiciones. Piense y actúe.

27. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R))) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R))) \Leftrightarrow P \vee (\neg (\neg P \wedge (\neg Q \rightarrow R)))$	Con-Dis
$\Leftrightarrow P \vee (P \wedge (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$	Doble negación
$\Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (Q \vee (\neg Q \rightarrow R))$	Asociativa
$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$	Idempotencia

Trate de hacerlo de derecha a izquierda.

Comentarios:

En este ejercicio se observa que el conectivo \vee aparece como conectivo único en los últimos pasos. Cuando sucede esto, se pueden eliminar los paréntesis y reagrupar las atómicas. Recuerda, esto se puede hacer porque el conectivo binario es el mismo (disyunción o conjunción únicamente, no mezclados). En caso contrario, no se pueden eliminar los paréntesis. Cuidado, debe tener mucho cuidado. Primero observe, piense y actúe. ¡Hágalo!

28. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$$

Solución:

Procedimiento

$$\begin{aligned}(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee Q \\&\Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee Q \\&\Leftrightarrow \neg\neg(P \vee R) \rightarrow Q \\&\Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q\end{aligned}$$

Ley o propiedad
Con-Dis
Distributiva
De Morgan
Dis-Con
Doble negación

Hágalo a su manera.

Comentarios:

En el segundo paso, la ley que se utilizó fue la distributiva, aun cuando en realidad lo que se hizo fue factorizar. Dicho de otra manera, se utilizó la propiedad distributiva al revés.

Por otra parte, la doble negación tiene aplicaciones importantes.

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

29. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \rightarrow R) \rightarrow Q$$

Solución:

Procedimiento

$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q)$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg R) \vee Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg \neg P \vee \neg \neg R) \vee Q$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$	Dis-Con
$\Leftrightarrow (\neg P \rightarrow R) \rightarrow Q$	Dis-Con

Trate de hacerlo de derecha a izquierda.

Comentarios:

La Condicional-Disyunción (Con-Dis) tiene aplicaciones interesantes.

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

30. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$$

Restricción: No use absorción.

Solución:	
Procedimiento 1	
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (P \wedge Q)$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \wedge (T)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P$	Tautología
	Identidad
Procedimiento 2	
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \wedge (T \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (T)$	Dominancia
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 3. Ahora por el lado derecho.	
$P \Leftrightarrow P \wedge T$	Identidad
$\Leftrightarrow P \wedge (T \vee Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$	Identidad
Busque Usted otro camino.	

Comentarios:

Por medio de este ejercicio se comprueban varias propiedades, tales como identidad y dominancia. Observe, piense y actúe.

Como está demostrado, es posible resolver los ejercicios siguiendo otros caminos, procedimientos, formas o maneras.

31. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$$

Solución:

Procedimiento

$$P \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R$$

Ley o propiedad

Con-Dis

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg P \vee Q \vee R$$

Idempotencia

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$$

Conn. y asoc.

$$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$$

Dis-Con

Intente otra forma de resolver el problema.

Comentarios:

Cuando las expresiones resultantes contienen un solo tipo de conectivo binario, en este caso disyunción, se pueden eliminar los paréntesis para reasociar, reagrupar o reordenar las fórmulas proposicionales, según convenga.

Por otra parte, idempotencia suele usarse para introducir la proposición que haga falta.

32. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

Solución:

Procedimiento

$\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \rightarrow ((\neg P \vee \neg P) \vee Q)$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$	Asociativa
$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \vee (\neg P \vee Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee \neg P) \vee Q$	Doble negación
$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P)) \vee Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow (T \wedge (Q \vee \neg P)) \vee Q$	Distributiva
$\Leftrightarrow (T \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$	Tautología
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee Q$	Comutativa
$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$	Asociativa
$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$	Idempotencia

Ahora vaya de derecha a izquierda.

Comentarios:

Siga varios caminos para demostrar las equivalencias. Es factible que alguno sea más fácil que otros.

Practique, para dominar el método.

33. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$7(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge 7(P \wedge Q)$$

Solución:

Procedimiento

$7(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow 7[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$	Ley o propiedad Bi-Con
$\Leftrightarrow 7(P \rightarrow Q) \vee 7(Q \rightarrow P)$	De Morgan
$\Leftrightarrow 7(7P \vee Q) \vee 7(7Q \vee P)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge 7P)$	De Morgan
$\Leftrightarrow ((P \wedge 7Q) \vee Q) \wedge ((P \wedge 7Q) \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7Q \vee Q) \wedge (P \vee 7P) \wedge (7Q \vee 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\top) \wedge (\top) \wedge (7Q \vee 7P)$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7Q \vee 7P)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (7P \vee 7Q)$	Commutativa
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge 7(P \wedge Q)$	De Morgan

Use otras leyes o propiedades.

Comentarios:

La práctica hace al maestro. Intente diferentes caminos.

34. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7A \wedge (7B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow C$$

Solución:

Procedimiento

$$(7A \wedge (7B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (7A \wedge (7B \wedge C)) \vee ((B \vee A) \wedge C) \\ &\Leftrightarrow (7A \wedge (7B \wedge C)) \vee ((A \vee B) \wedge C) \\ &\Leftrightarrow ((7A \wedge 7B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge C) \\ &\Leftrightarrow [(7A \wedge 7B) \vee (A \vee B)] \wedge C \\ &\Leftrightarrow [7(A \vee B) \vee (A \vee B)] \wedge C \\ &\Leftrightarrow [T] \wedge C \\ &\Leftrightarrow C \end{aligned}$$

Ley o propiedad

Distributiva

Commutativa

Asociativa

Distributiva

De Morgan

Tautología

Identidad

Trate de hacerlo de derecha a izquierda.

Comentarios:

Como se puede observar, no es necesario que la parte izquierda de la equivalencia contenga el mismo número de atómicas que la parte derecha.

Para el ejercicio, la propiedad distributiva se usó al revés, es decir, en realidad se factorizó la atómica común.

35. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$$

Restricción: No use absorción.

Solución:

Procedimiento 1

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Ley o propiedad
$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \vee (\neg F)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P$	Contradicción
	Identidad

Procedimiento 2

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (\neg F)$	Dominancia
$\Leftrightarrow P$	Identidad

Procedimiento 3. Ahora por el lado derecho:

$P \Leftrightarrow P \vee F$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$	Identidad

Busque otro camino.

Comentarios:

Practique. Vea la utilidad de la contradicción.

La contradicción nos sirve para introducir aquella atómica que haga falta. En este caso la contradicción se escribió en función de Q.

Comprenda y maneje las propiedades.

36. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge Q)$$

Solución:

Procedimiento

$(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow ((7P \wedge 7P) \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Ley o propiedad Asociativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow ((7P \wedge Q) \wedge P) \vee ((7P \wedge Q) \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow ((7P \wedge P) \wedge Q) \vee (7P \wedge (Q \wedge Q))$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow ((F) \wedge Q) \vee (7P \wedge (Q \wedge Q))$	Contradicción
$\Leftrightarrow ((F) \wedge Q) \vee (7P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (F) \vee (7P \wedge Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow 7P \wedge Q$	Identidad

Otro procedimiento

$(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow ((7P \wedge 7P) \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Asociativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7P \wedge (Q \wedge (P \vee Q))$	Asociativa
$\Leftrightarrow 7P \wedge (Q \wedge P) \vee 7P \wedge (Q \wedge Q)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7P \wedge Q$	

Comentarios:

¿Ya comprobó la utilidad de la contradicción?

La absorción tiene aplicaciones interesantes.

Recuerde que para usar la propiedad asociativa debe aplicarse sobre el mismo tipo de conectivo binario, disyunción o conjunción, para relacionar los términos que se van a reasociar, reagrupar o reordenar. Todos los conectivos binarios son disyunciones o todos los conectivos binarios son conjunciones. No se pueden mezclar.

37. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q)$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	$\Leftrightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q) \vee (P \wedge Q)$
	Asociativa
	$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$
	Idempotencia
	$\Leftrightarrow 7P \vee (Q \vee (P \wedge Q))$
	Asociativa
	$\Leftrightarrow 7P \vee (Q \vee P)$
	Absorción
	$\Leftrightarrow 7P \vee Q$

Otro procedimiento.

$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	$\Leftrightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Asociativa
	$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \vee P) \wedge ((7P \vee Q) \vee Q)$	Distributiva
	$\Leftrightarrow ((7P \vee P) \vee Q) \wedge ((7P \vee Q) \vee Q)$	Comm. y asoc.
	$\Leftrightarrow ((T) \vee Q) \wedge (7P \vee (Q \vee Q))$	Tautología
	$\Leftrightarrow ((T) \vee Q) \wedge (7P \vee Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow (T) \wedge (7P \vee Q)$	Dominancia
	$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	Identidad

Comentarios:

Compare el ejercicio 36 con el ejercicio 37.

Del ejercicio 36: $(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge Q)$

Del ejercicio 37: $(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q)$

La expresión del lado izquierdo del ejercicio 36 y la expresión del lado izquierdo del ejercicio 37 son duales entre sí.

La expresión del lado derecho del ejercicio 36 y la expresión del lado derecho del ejercicio 37 son duales entre sí.

Por lo tanto, las leyes de dualidad sirven para demostrar equivalencias. Investigue.

38. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$((P \vee (Q \vee P)) \vee R) \wedge R \Leftrightarrow 7(R \rightarrow 7R)$$

Solución:

Procedimiento

$$\begin{aligned} ((P \vee (Q \vee P)) \vee R) \wedge R &\Leftrightarrow ((Q \vee (P \vee P)) \vee R) \wedge R \\ &\Leftrightarrow ((Q \vee P) \vee R) \wedge R \\ &\Leftrightarrow R \\ &\Leftrightarrow 7(7R) \\ &\Leftrightarrow 7(7R \vee 7R) \\ &\Leftrightarrow 7(R \rightarrow 7R) \end{aligned}$$

Ley o propiedad
Comm. y asoc.
Idempotencia
Absorción
Doble negación
Idempotencia
Dis-Con

Hagámoslo de una forma más directa:

$$((P \vee (Q \vee P)) \vee R) \wedge R \Leftrightarrow R$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 7(7R) \\ &\Leftrightarrow 7(7R \vee 7R) \\ &\Leftrightarrow 7(R \rightarrow 7R) \end{aligned}$$

Absorción
Doble negación
Idempotencia
Dis-Con

Intente hacerlo usando otras leyes.

Comentarios:

Otra vez, la absorción nos saca del apuro, así como la doble negación.

Idempotencia tiene aplicaciones valiosas. Practique.

39. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \rightarrow (7Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge ((Q \wedge P) \wedge Q))$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow (7Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee (Q \vee P)) \rightarrow Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7(7P \vee (Q \vee P)) \vee Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7((7P \vee P) \vee Q) \vee Q$	Comm. y asoc.
$\Leftrightarrow 7((\text{---T---}) \vee Q) \vee Q$	Tautología
$\Leftrightarrow 7(\text{---T---}) \vee Q$	Dominancia
$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee Q$	Negación
$\Leftrightarrow Q$	Identidad
$\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge Q)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge Q)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge P \wedge Q \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge ((Q \wedge P) \wedge Q))$	Comm. y asoc.
Busque otro camino.	

Comentarios:

De nuevo aplicamos la absorción y nos saca del apuro. Idempotencia no se queda atrás. Piense, qué es lo que está buscando. A partir de esto, seleccione la ley o la propiedad más adecuada.

40. Demuestre la siguiente simplificación:

$$P \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (P \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

Solución:

Procedimiento	Ley o propiedad
$P \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (P \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow P \vee [(Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg P)] \vee ((S \vee \neg S) \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee [(Q \wedge R) \wedge T] \vee (T \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q)$	Tautología
$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R) \vee P \vee (\neg P \wedge Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Comutativa
$\Leftrightarrow (P \vee (\neg P \wedge Q)) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Asociativa
$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q)) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Distributiva
$\Leftrightarrow (T \wedge (P \vee Q)) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Tautología
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee (Q \wedge R) \vee P$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee P) \vee Q \vee (Q \wedge R)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow P \vee Q \vee (Q \wedge R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \vee (Q \vee (Q \wedge R))$	Asociativa
$\Leftrightarrow P \vee Q$	Absorción

Repita aquellos pasos que no entienda.

Comentarios:

Para este ejercicio, la primera aplicación de la propiedad distributiva en realidad fue una factorización.

Como se puede observar, no es necesario que la parte izquierda de la equivalencia contenga el mismo número de atómicas que la parte derecha. Por medio de tautologías, se puede eliminar alguna atómica, debido a que cualquier expresión en conjunción con una tautología, nos da como resultado la misma expresión. Trate de resolver el ejercicio de derecha a izquierda.

41. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(S \rightarrow (P \rightarrow S)) \rightarrow P \Leftrightarrow P \rightarrow (S \wedge (P \wedge S) \wedge S)$$

Comentarios:

Espero que comprenda la importancia de la idempotencia, la cual sirve para eliminar atómicas repetidas, pero también es útil para introducir aquello que haga falta, como es el caso que nos ocupa.

Compare este ejercicio con el ejercicio 39. ¿Encuentra alguna similitud?

Bien, vamos muy bien.

42. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (R \rightarrow \neg R) \Leftrightarrow \neg R$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
Hagámoslo primero de derecha a izquierda:	
$\neg R \Leftrightarrow T \wedge \neg R$	Identidad
$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg R)$	Tautología
$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg R \vee \neg R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (R \rightarrow \neg R)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (R \rightarrow \neg R)$	De Morgan
Muy bien, ahora hagámoslo de izquierda a derecha:	
$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (R \rightarrow \neg R) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (R \rightarrow \neg R)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg R \vee \neg R)$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg R)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (T \wedge \neg R) \wedge \neg R$	Tautología
$\Leftrightarrow \neg R$	Identidad

Comentarios:

La tautología nos sirve para introducir aquellas atómicas que se requieran. Para el ejercicio, la tautología se escribió en función de P y Q.

Si tiene dudas, realice más ejercicios.

Vea la importancia del uso de los paréntesis. En ocasiones nos aclaran algunos pasos del procedimiento.

Ya está Usted listo para pasar a otros temas. Todo lo aprendido lo va a usar. Si tiene dudas estude y adelante.