Teorema de Muestreo

Mariana Rodríguez Castañeda

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS)
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
Circuito Escolar 3000, 04510, México
marianaguezcas@gmail.com

***Abstract*—Este documento desarrolla una explicación del teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, teóricamente y con ejercicios de apoyo en código. Los ejercicios visuales siempre brindan una comprensión intuitiva sobre temas muy complejos y es lo que plantea en este trabajo. Conocer la importancia de tomar muestras suficientes para representar una señal continua en un espacio discreto. Principalmente se demostrará la efectividad del teorema, apoyandonos de la fórmula de interpolación de Whittaker–Shannon, al reconstruir la señal antes discretizada, y así volver a tenerla en tiempo continuo. Dado la naturalidad del ejercicio, el tiempo continuo se represent rá de manera discreta.**

***Index Terms*—muestreo, Nyquist, teorema, workshop, matlab, procesamiento, digital, señales**

I. Introduccion

Las señales analógicas y continuas son toda aquellas que suceden en un lugar físico, por ejemplo, la información que percibimos a través de nuestros sentidos. El procesamiento de estas señales es importante para analizar la información que nos brinda nuestro entorno y poder sacar estimados, pronósticos o implementar actuadores.

Es por esta razón que es tan importante que la infomración que analizamos mantenga las características más relevantes de la original. La explicación de que necesitamos mapear las señales analógica se encuentra en el equipo que se utiliza para analizarlas, todas nuestras herramientas tienen capacidades finitas que nos obligan a crear un modelo con las mismas características para ellas.

II. Teoría de Señales

A. Representación de señales

El modelado matemático de una función senoidal en tiempo continuo está dada por la función: $x_a(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$ o bien, $x_a(t) = A(2\pi ft + \phi)$ Dónde A = Amplitud, f = frecuencia, t = tiempo, $\phi = fase$, con estos parámetros se describe matemáticamente una señal continua.

En caso de la representación de la función en un tiempo discreto la función seno, por dar un ejemplo, será: $x_a(n) = A(2\pi fn + \phi)$ dónde t a sido sustituida por la variable n, en un espacio discreto el tiempo se vuelven muestras, representadas por la letra n.

Siguiendo con la notación descrita, la suma de varias señales analógicas continuas, es descrita por la ecuación: $x_a(n) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(2\pi f_i n + \phi_i)$

B. Muestreo de una señal

El teorema de muestreo se utiliza para saber a qué frecuencia se deben adquirir los datos de una señal continua para obtener una representación fiel de la señal al mapearla a un espacio discreto. Uno de los criterios para poder utilizar el teorema de muestreo es que la señal que esta siendo descrita por éste, sea peródica.

Fourier a través de su trabajo en series matemáticas, nos indica que toda función periódica puede ser representada por la suma de senos y cosenos. Las señales de nuestro alrededor como lo son las ondas electromagneticas son señales periodicas, quiere decir que podemos combinar ambos trabajos para entender el teorema de Nyquist-Shannon.

Éste nos presenta una forma rápida de obtener la frecuencia de muestreo, al tener en cuenta una descomposición de la señal periodica en senos y cosenos, se encuentra la frecuencia máxima, también conocido como el ancho de banda de la señal de interés. Es decir, dada una señal analógica periodica, al mapear dicha señal a un espacio discreto, uno debe conocer función con más ciclos por segundo (F_max). La frecuencia de muestreo (F_s) entonces tendrá que ser mayor a dos veces la frecuencia máxima. $F_s > 2F_{max}$

C. Fórmula de interpolación de Shannon

La fórmula de interpolación de shannon permite construir una función continua en base a una secuencia de datos con separación equidistante. Debido a que la señal muestreada no es más que la suma de un tren de impulsos y dado que la transformada de fourier de un impulso es la función sinc, la expresión matemática para la reconstrucción de la señal, la función de interpolación es: $g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$

III. Procedimiento

A. Definir la señal

Proponemos tres señales con diferente amplitud, fase y frecuencia. Representadas por las siguientes funciones, la primera: $\sin 2\pi 3(t - 0.4)$ la segunda: $0.5 \sin 2\pi 9(t - 0.2)$ y por último: $0.1 \sin 2\pi 30t$.

Se suman y represntan con la funcion: $f(t) = \sin 2\pi 3(t-0.4) + 0.5 \sin 2\pi 9(t-0.2) + 0.1 \sin 2\pi 30t$. Obteniendo la fig. 1.

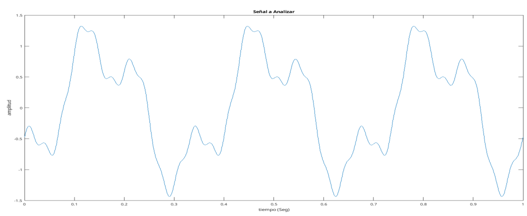

Fig. 1. Señal resultante de la suma de funciones

B. Muestreo

Una vez teniendo nuestra señal representada por la suma de sus componentes, se encuentra la F_{max}. La f_{max} es la frecuencia más alta que se encuentra en nuestra señal, para este caso particular, la primer señal tiene una frecuencia de 3Hz, la segunda de 9Hz y la tercera de 30Hz, lo que nos indica que la tercer señal tiene la frecuencia más alta, repitiendose cada segundo 30 veces. Así concluímos que la F_{max} = 30Hz.

Siguiendo el teorema de Nyquist una frecuencia de muestreo (F_s) adecuada debe ser mayor a 60 Hz. Para la demostración se utilizarán tres frecuencias de muestreo: 90Hz, 25Hz y 10Hz. El resultado se muestra en la fig.2 para cada frecuencia de muestreo, se observa que la señal muestreada a 90 Hz nos brinda informacion mas acertada de nuestra señal original.

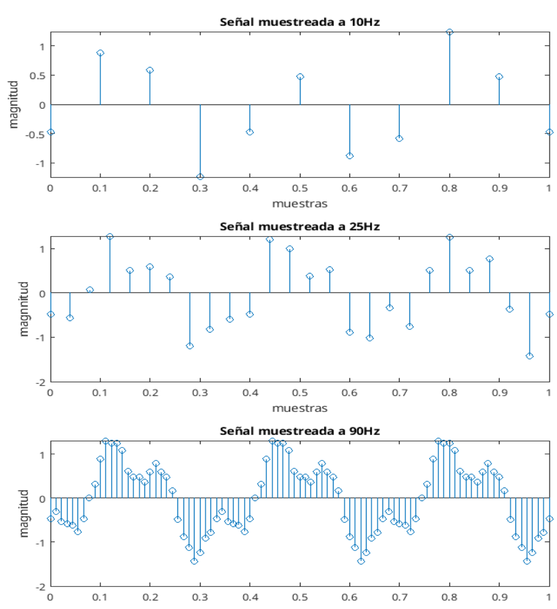

Fig. 2. Señal muestreada a diferentes frecuencias

C. Reconstruccion

Por la interpolacion de Shannon, cada señal muestreada se convoluciona con la funcion sinc para la reconstruccion. El resultado se encuentra en la fig. 3, se observa que al tener una frecuencia de muestreo mayor a dos veces nuestra frecuencia maxima al reconstruir la señal se notan muchas mas caracteristicas y propiedades de la señal a analizar que en los anteriores casos.

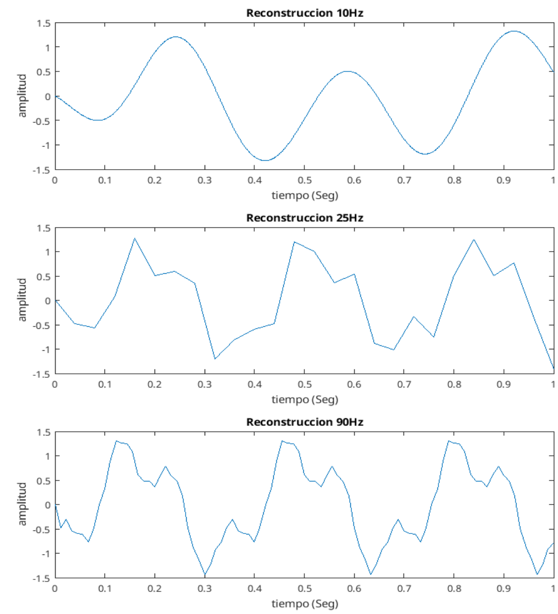

Fig. 3. Señal reconstruida de diferentes frecuencias

Como modo representativo, en la fig.4 se muestra una reconstruccion a 600Hz, aun cuando es notable que hay cambios, no son tan relevantes, lo que propone que el teorema de muestreo ahorra procesamiento.

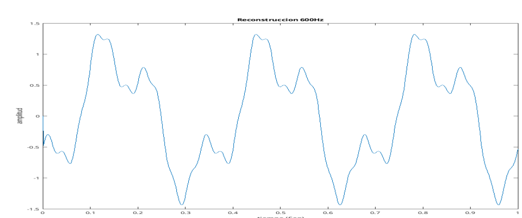

Fig. 4. Señal muestreada a 600Hz

REFERENCES

[1] Escobar Salguero, L., 2008. Conceptos Básicos de Procesamiento Digital de Señales. 1st ed. Ciudad de México: Facultad de Ingeniería UNAM, pp.13-18.

[2] Fourier series - Wikipedia. [online] Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series [Accessed 13 August 2022].

[3] Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon - Wikipedia, la enciclopedia libre. [online] Available at: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_muestreo_de_Nyquist-Shannon [Accessed 13 August 2022].