Trabajo Práctico Probabilidad y Estadística

Bobe Julio y Grau Marianela

May 25, 2021

1 Ejercicio 1

En este ejercicio se presenta una situación simplificada de una comunicación, en donde influyen dos partes: un emisor y un receptor. El contenido del mensaje de la conversación entre dichos miembros consta de un 1 o 0. Además, para que haya una comunicación idónea, el receptor deberá recibir exactamente lo que el emisor le envió.

Dadas dichas características de la comunicación propuesta por el ejercicio, modelaremos el envio y recepción de mensajes como una tupla de dos elementos: el primero representa el elemento enviado y el segundo el elemento recibido.

Por todo lo comentado anteriormente, se tomó como conjunto muestral:

$$S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

Dado el conjunto muestral, se definieron 4 sucesos:

- E_1: "Se envía un 1".
- E_0: "Se envía un 0".
- R_1: "Se recibe un 1".
- R_0: "Se recibe un 0".

Luego, los mismos dados por extensión son:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(1,0),(1,1)\} \\ E_0 &= \{(0,0),(0,1)\} \\ R_1 &= \{(0,1),(1,1)\} \\ R_0 &= \{(0,0),(1,0)\} \end{aligned}$$

Una vez habiendo planteado el conjunto muestral y definido los sucesos, se debe encontrar la probabilidad de que se cometa un error en la transmisión del mensaje, es decir la probabilidad de que se de un caso de tipo (0, 1) o (1, 0) (esto es que se envíe un uno y reciba un cero o viceversa). Lo cual es equivalente a hallar la probabilidad de que se envíe un uno y se reciba un 0 o viceversa.

Por lo tanto, sea el suceso T: "Ocurre un error en la transmisión" tenemos que:

$$P(T) = P((E_1 \cap R_0) \cup (E_0 \cap R_1)) \tag{1}$$

Como $E_1 \cap R_0$ y $E_0 \cap R_1$ son sucesos mutuamente excluyentes ya que la intersección entre el suceso E_1 y el suceso R_0 contiene a los elementos que envían un 1 y reciben un 0 y, la intersección entre E_0 y R_1 contiene exactamente a los elementos opuestos de esa primera intersección. Por lo tanto:

$$P((E_1 \cap R_0) \cup (E_0 \cap R_1)) = P(E_1 \cap R_0) + P(E_0 \cap R_1) \tag{2}$$

Además:

$$P(E_0 \cap R_1) = P(R_1/E_0) * P(E_0) \tag{3}$$

$$P(E_1 \cap R_0) = P(R_0/E_1) * P(E_1) \tag{4}$$

Luego por (1), (2), (3) y (4) tenemos:

$$P(T) = P(R_1/E_0) * P(E_0) + P(R_0/E_1) * P(E_1) \tag{5}$$

Finalmente, sabemos que la probabilidad de enviar un uno o un cero es la misma. Entonces, $\mathrm{P}(E_1) = \mathrm{P}(E_0) = \frac{1}{2}$.

Reemplazando y factorizando en (5), queda:

$$P(T) = \frac{1}{2}(P(R_0/E_1) + P(R_1/E_0))$$

2 Ejercicio 2

Este ejercicio consta de una empresa de análisis de datos que prueba sus programas dos veces. En cada testeo puede ocurrir los siguientes casos:

- Errores importantes (ocasionan que el programa falle por completo).
- Errores menores (fallas que permiten que el programa se corra, pero que en algunas situaciones producen resultados erróneos).
- Ningún error.

Dichas situaciones las representaremos como EI, EM, NE respectivamente.

Por todo lo dicho arriba, el conjunto muestral es:

$$S = \{(EI, EI), (EI, EM), (EI, NE), (EM, EI), (EM, EM),\\ (EM, NE), (NE, EI), (NE, EM), (NE, NE)\}$$

Está compuesto por nueve tuplas, donde cada una representa el testeo completo de un programa con sus resultados obtenidos de la primer y segunda prueba respectivamente.

Se definen los siguientes sucesos:

- EI_1: "Ocurrió un error importante en la primer prueba".
- EM_1: "Ocurrió un error menor en la primer prueba".
- NE_1: "No ocurrió ningún error en la primer prueba".
- EI_2: "Ocurrió un error importante en la segunda prueba".
- EM_2: "Ocurrió un error menor en la segunda prueba".
- NE_2: "No ocurrió ningún error en la segunda prueba".

Donde además se saben sus probabilidades, que son:

$$P(EI_1) = 0.6000$$
$$P(EM_1) = 0.3000$$
$$P(NE_1) = 0.1000$$
$$P(EI_2/EI_1) = 0.3000$$
$$P(EM_2/EI_1) = 0.5000$$
$$P(NE_2/EI_1) = 0.2000$$
$$P(EI_2/EM_1) = 0.1000$$
$$P(EM_2/EM_1) = 0.3000$$
$$P(NE_2/EM_1) = 0.6000$$
$$P(EI_2/NE_1) = 0.0000$$
$$P(EM_2/NE_1) = 0.2000$$
$$P(NE_2/NE_1) = 0.8000$$

2.1 Apartado a)

Utilizando la fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A/B) * P(B)$$

Creamos la siguiente tabla con las todas las intersecciones de los sucesos ya definidos:

		Tipo de error en la Segunda Prueba		
		Importante	Menor	Ninguno
Tipo de error en la Primer Prueba	Importante	0.1800	0.3000	0.1200
	Menor	0.0300	0.0900	0.1800
	Ninguno	0.0000	0.0200	0.0800

2.2 Apartado b)

Para conseguir $P(EI_2)$ basta con notar que $EI_2 = (EI_1 \cap EI_2) \cup (EM_1 \cap EI_2) \cup (NE_1 \cap EI_2)$. Los tres conjuntos que se unen son mutuamente excluyentes entre ellos. Esto sucede ya que representan sucesos en los cuales la primera prueba del software da un resultado distinto, por lo tanto, la primera componente de las tuplas siempre va a diferir.

Por lo tanto:

$$P(EI_2) = P(EI_1 \cap EI_2) + P(EM_1 \cap EI_2) + P(NE_1 \cap EI_2) \tag{6}$$

Por lo obtenido en el apartado a) se sabe que:

$$P(EI_1 \cap EI_2) = 0.1800 \tag{7}$$
$$P(EM_1 \cap EI_2) = 0.0300 \tag{8}$$
$$P(NE_1 \cap EI_2) = 0.0000 \tag{9}$$

Sumando y reemplanzando lo conseguido en (6), (7), (8) y (9) obtengo que la P(EI_2) = 0.2100.

2.3 Apartado c)

Lo que se pide en este apartado es obtener P(EM_1/EI_2).

Se sabe que:

$$P(EM_1/EI_2) = P(EM_1 \cap EI_2)/P(EI_2) \tag{10}$$

Por lo obtenido en el apartado a) y b) se conoce que:

$$P(EM_1 \cap EI_2) = 0.0300 \tag{11}$$
$$P(EI_2) = 0.2100 \tag{12}$$

Por lo tanto, reemplazando y dividiendo lo de (10), (11) y (12) obtengo que P(EM_1/EI_2) = $\frac{1}{7}$.

2.4 Apartado d)

Se sabe que dos sucesos A y B son independientes sí y solo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{13}$$

Siguiendo lo hecho en el apartado b), obtenemos P(EM_2) y P(EN_2):

$$\begin{aligned} P(EM_2) &= P(EI_1 \cap EM_2) + P(EM_1 \cap EM_2) + P(NE_1 \cap EM_2) \\ &= 0.3000 + 0.0900 + 0.0200 = 0.4100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(NE_2) &= P(EI_1 \cap NE_2) + P(EM_1 \cap NE_2) + P(NE_1 \cap NE_2) \\ &= 0.1200 + 0.1800 + 0.0800 = 0.3800 \end{aligned}$$

Se realizan las operaciones:

$$P(EM_1) * P(EI_2) = 0.0630$$
$$P(EM_1) * P(EM_2) = 0.1230$$
$$P(EM_1) * P(NE_2) = 0.1140$$
$$P(EI_1) * P(EI_2) = 0.1260$$
$$P(EI_1) * P(EM_2) = 0.2460$$
$$P(EI_1) * P(NE_2) = 0.2280$$
$$P(NE_1) * P(EI_2) = 0.0210$$
$$P(NE_1) * P(EM_2) = 0.0410$$
$$P(NE_1) * P(NE_2) = 0.0380$$

Por los resultados obtenidos se concluye que los sucesos del primer análisis no son independientes con respecto a los del segundo análisis puesto que no cumplen (13).

3 Ejercicio 3)

Sea S el conjunto muestral:

$$S : \text{"}personas\ de\ la\ poblaci\acute{o}n\text{"}. \tag{14}$$

Se definen los siguientes sucesos:

- PersEnf: "personas enfermas".
- PersSan: "personas sanas".
- TestPos: "personas a las que el test le dio positivo".
- TestNeg: "personas a las que el test le dio negativo".

Se sabe que $PersSan = \overline{PersEnf} \therefore P(PersSan) = 1 - P(PersEnf)$

Luego:

$$P(PersEnf) = 0.1200 \tag{15}$$
$$P(PersSan) = 0.8800 \tag{16}$$
$$P(TestPos/PersEnf) = 0.9000 \tag{17}$$
$$P(TestPos/PersSan) = 0.0500 \tag{18}$$

Lo que se pide en el enunciado de este ejercicio es:

$$P(PersSan/TestPos) = P(PersSan \cap TestPos)/P(TestPos) \tag{19}$$

Obtención de $P(PersSan \cap TestPos)$:

$$\begin{aligned} P(TestPos/PersSan) &= P(TestPos \cap PersSan)/P(PersSan) \\ P(TestPos \cap PersSan) &= P(TestPos/PersSan) * P(PersSan) \end{aligned} \tag{20}$$

Reemplazando en (20) y por (18), (16) finalmente se obtiene:

$$P(PersSan \cap TestPos) = \frac{11}{250} \tag{21}$$

Obtención de $P(PersEnf \cap TestPos)$:

$$P(TestPos \cap PersEnf) = P(TestPos/PersEnf) * P(PersEnf) \tag{22}$$

Reemplazando en (22) y por (17), (15) finalmente se obtiene:

$$P(PersEnf \cap TestPos) = \frac{27}{250} \tag{23}$$

Obtención $P(TestPos)$:

$TestPos$ es el suceso "personas que dieron positivo al test" y, por lo tanto, el mismo se conforma del suceso $PersEnf$ y del suceso $PersSan$. Con esto en la mente, se puede concluir que:

$$TestPos = (TestPos \cap PersSan) \cup (TestPos \cap PersEnf)$$

Debido a que ambos sucesos a unir que componen a $TestPos$ son mutuamente excluyentes puesto que $TestPos \cap PersSan$ da las personas que dieron positivas al test siendo personas sanas y $TestPos \cap PersEnf$ provee las personas que también dieron positivas al test siendo enfermos. Por lo tanto, el conjunto a unir es disjunto y la unión de sucesos pasa a ser la suma de las probabilidades de dichos sucesos. Finalmente queda:

$$TestPos = P(TestPos \cap PersSan) + P(TestPos \cap PersEnf) \tag{24}$$

Reemplazando en (24) y por lo obtenido en (21) y (23) se tiene que:

$$TestPos = \frac{38}{250} \tag{25}$$

Volviendo a lo pedido por el ejercicio, reemplazando en (19) y usando lo obtenido en (21) y (25) queda:

$$P(PersSan/TestPos) = \frac{11}{38}$$