Aula Exploratória-1
Gravitação

Física Geral II - F 228

2º semestre, 2019

Exercício 1 - Uma massa *M* é repartida em duas partes, *m* e (*M* – *m*), e depois são separadas por uma certa distância *r*.

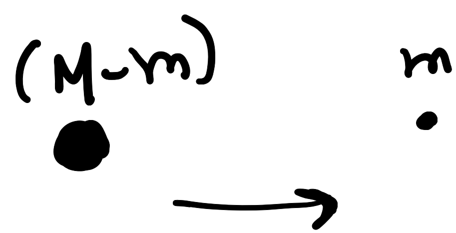
a) Qual é a força gravitacional entre as duas novas massas?

b) Faça o gráfico F *vs* *m*.

c) Qual valor de *m* que maximiza a intensidade da força gravitacional entre as partes?

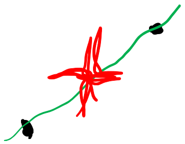
a) $\vec{F}=\frac{G}{r^2}\left(-m^2+Mm\right)\hat{r}$

b) Gráfico



c) $m=\frac{M}{2}$

a) Para calcular a força gravitacional, usamos a lei da gravitação universal:



$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}.$$

Usando as massas dadas no problemas, encontramos:

$$F = G\frac{m(M-m)}{r^2}.$$

Pela terceira lei de newton, as forças devem ter o mesmo módulo com a diferença que:

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}.$$

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \quad , \quad m_1 = M - m$$

$$m_2 = m$$

$$\vec{F} = G\frac{(M-m)m}{r^2}\hat{r}$$

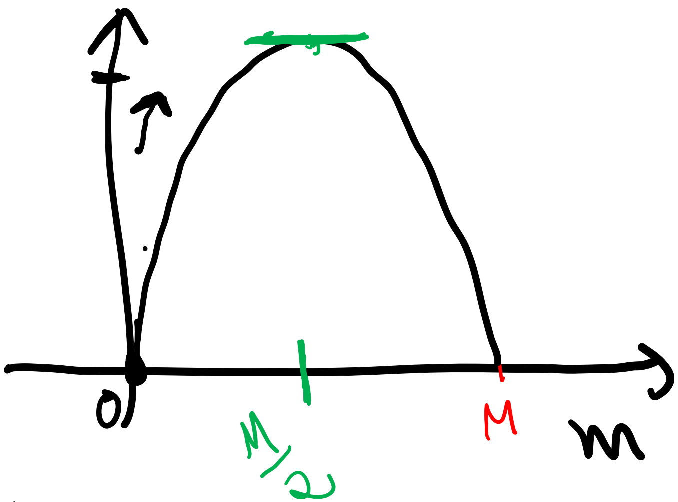
//

b) Gráfico

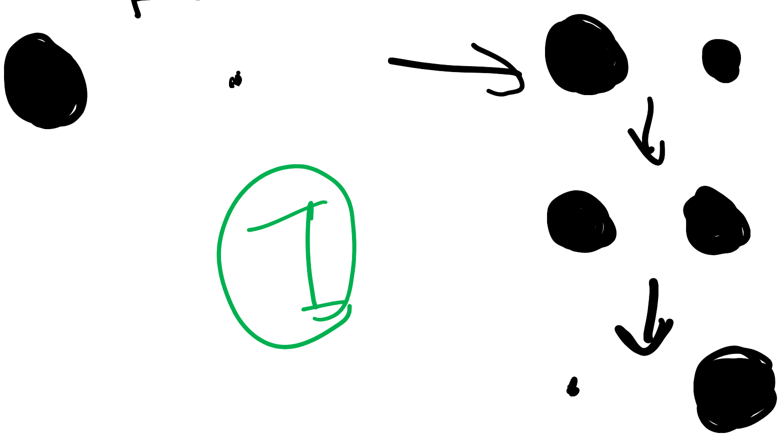
$(M-m) \to m$

$m_{max} = M$

$m_{min} = 0$



$F = 0$



$$F = \frac{G(M-m)m}{r^2}$$

$$F = \underbrace{\left(\frac{G}{r^2}\right)}\underbrace{\left[Mm - m^2\right]}$$

(II)

$$Mm - m^2 = 0$$

$$m(M-m) = 0$$

$m = 0$ $\quad m = M$

c) Para encontrar os máximos da função em relação à M, precisamos encontrar m que satisfaça:

$$\frac{\partial F}{\partial m}=0$$

Derivando

$$\frac{\partial F}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{G(M-m)m}{r^2}\right)=\frac{G}{r^2}\frac{\partial\left(Mm-m^2\right)}{\partial m}=\frac{G}{r^2}(M-2m)$$

Igualando a zero:

$$\frac{G}{r^2}(M-2m)=0\Rightarrow(M-2m)=0\Rightarrow M=2m\Rightarrow m=\frac{M}{2}$$

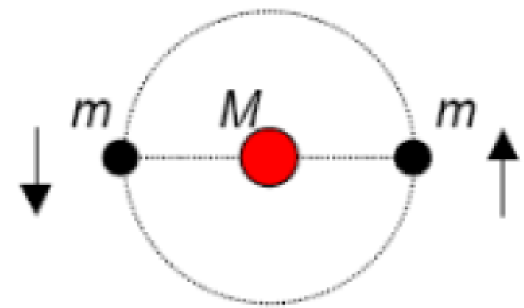
$$F = \frac{G(M-m)m}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{G(M-m)m}{r^2}\right) = \frac{G}{r^2}\frac{\partial}{\partial m}\left[Mm - m^2\right]$$

$$= \frac{G}{r^2}\underbrace{\left(M - 2m\right)} = 0$$

$$M = 2m$$

$$m = \frac{M}{2}$$

Exercício 2 – Um sistema particular de três estrelas é formado por duas estrelas, cada uma de massa *m*, orbitando uma estrela central de massa *M*. O raio orbital das estrelas menores é *r*. As duas estrelas estão sempre diametralmente opostas na órbita (ver figura).



a) Escreva a expressão para a força gravitacional resultante atuando em uma das estrelas menores.

b) Calcule a aceleração centrípeta em que as estrelas menores estão submetidas.

c) Calcule o período orbital das estrelas menores.

d) Como a hipótese das posições relativas entre as estrelas menores influencia no resultado?

a) $F = \frac{Gm}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right)$

b) $a_c = \frac{G}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right)$

c) $T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\left(G\left[M + m/4\right]\right)^{1/2}}$

a) Para calcular a resultante das forças em uma das esferas pequenas, precisamos somar a força da esfera M e da outra esfera m:

$$F_M = G\frac{m\,M}{r^2} \qquad\qquad F_m = G\,\frac{m^2}{(2\,r)^2}$$

Como as três esferas se encontram colineares e ambas apontam na mesma direção, podemos somar os módulos:

$$F_{tot} = G\left(\frac{m\,M}{r^2} + \frac{m^2}{4\,r^2}\right) = Gm\,\frac{4\,M + m}{4\,r^2}$$

Pela terceira lei de newton, as forças em cada bola devem ter o mesmo módulo com a diferença que:

$$\hat{r}_{12} = -\,\hat{r}_{21}\,.$$

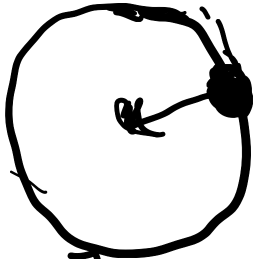
$$F_M = \frac{GmM}{r^2}$$

$$+ \; F = \frac{Gm}{r^2}\left[M + \frac{m}{4}\right]$$

$$F_m = \frac{G\,m\,m}{(2r)^2}$$

b) A aceleração centrípeta é a força na direção ortogonal ao movimento. Como as órbitas é circular, ela é exatamente a força gravitacional resultante na esfera:

$$a_c = \frac{F_{tot}}{m} = G\frac{4M+m}{4r^2}$$



$$a_c = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{G\cancel{m}}{r^2}\left[M + \frac{m}{4}\right]\frac{1}{\cancel{m}} = \frac{G}{r^2}\left[M + \frac{m}{4}\right]$$

$F = ma$

C) O período orbital para uma órbita circular é dado por:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

em que ω é a velocidade angular do objeto:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

Também sabemos que para órbitas circulares:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{a_c r},$$

Dado que encontramos a aceleração centrípeta na questão anterior:

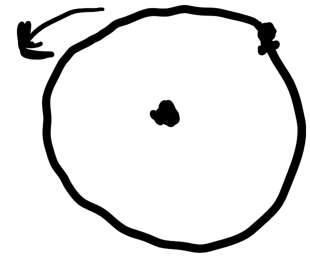
$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{a_c r}} = \frac{4\pi r^{3/2}}{\sqrt{G(4M+m)}}$$

(I)

$$\omega\tau = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

(II)

$$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$



(III)

$$a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{a_c r}$$

III → II

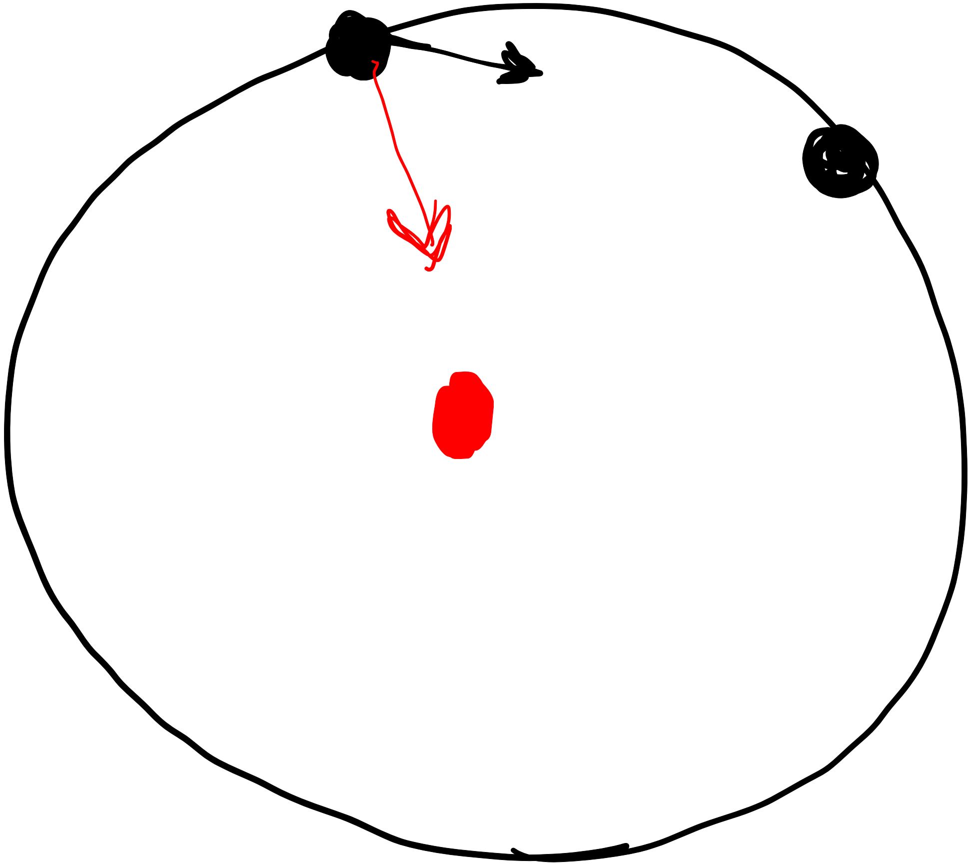
$$\omega = \frac{\sqrt{a_c r}}{r}$$

→ III & (II) → (I)

$$r^{\frac{3}{2}} = \underbrace{r \; r^{\frac{1}{2}}}_{r\sqrt{r}}$$

$$\tau = \frac{2\pi r}{\sqrt{a_c r}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\cancel{\frac{G}{r^2}}\left(M+\frac{m}{4}\right)\cancel{r}}} = \frac{2\pi\, r\sqrt{r}}{\sqrt{G\left(M+\frac{m}{4}\right)}} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G\left(M+\frac{m}{4}\right)}}$$

d) Discussão sobre órbitas não circulares:



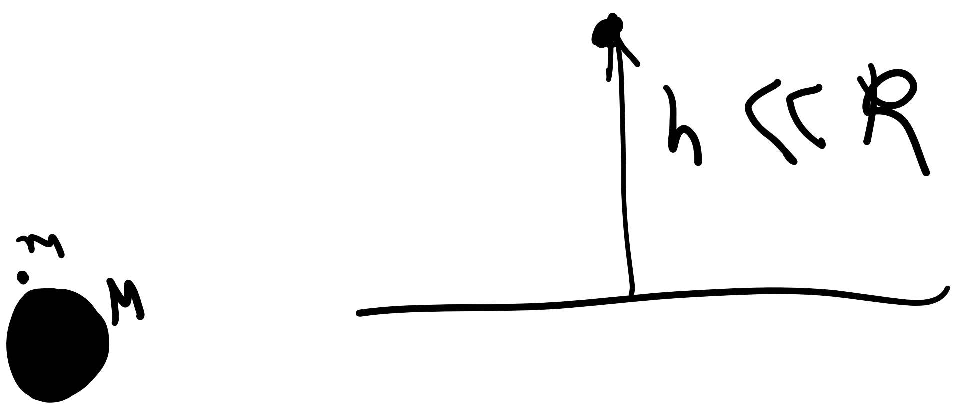
Exercício 3 - O potencial de uma pequena massa *m* situada à uma distância *r* do centro da Terra é dado pela expressão:

$$U(r) = - GMm / r$$

onde r é maior que o raio da Terra R. **Mostre que**:

$$U(r_2) – U(r_1) = mg(y_2 - y_1)$$

se $r_1 = R + y_1$, $r_2 = R + y_2$ **e também** $y_1/R << 1$, $y_2/R << 1$.



a) A maneira mais simples de resolver esse problema é considerar que:

$$r = R + h,$$

Em que R é o raio da terra e h é uma altura na superfície da terra. Dado que R»h:

$$\frac{1}{R+h} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

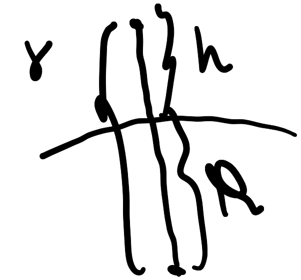
Substituindo essa expressão no potencial:

$$U(h) = \frac{-GMm}{r} \approx -GMm\frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

Se pegarmos a diferença entre duas posições pequenas:

$$U(h_2) - U(h_1) \approx \underbrace{\frac{GM}{R^2}}_{g}\underbrace{m}_{m}\underbrace{(h_2 - h_1)}_{h},$$ em que $$\boxed{\frac{GM}{R^2} = g}$$

$$U(r) = G\frac{Mm}{r} \longrightarrow U(r_2) - U(r_1) = mg(h_2 - h_1)$$



$$U(r) = GMm\left(\frac{1}{R+h}\right)$$

$$\frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right) \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x}$$

$$U(r) = \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$U(r_2) - U(r_1) = \frac{GMm}{R}\left[\left(\cancel{1} - \frac{h_2}{R}\right) - \left(\cancel{1} - \frac{h_1}{R}\right)\right]$$

$$= -\frac{GMm}{R^2}\underbrace{(h_2 - h_1)}$$

$$U(r_2) - U(r_1) = -mgh$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

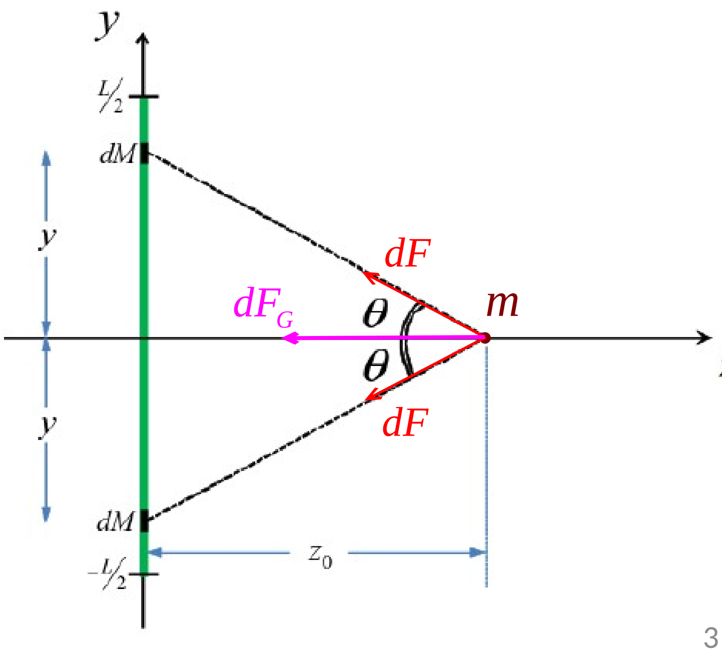
Extra – A figura abaixo representa uma barra vertical delgada e homogênea de comprimento L com densidade linear de massa $\rho(y) = 4M|y|/L^2$. Uma massa pontual *m* está situada a uma distância fixa z_0 do centro da barra. Dois elementos infinitesimais de massa dM, situados em pontos simétricos em relação ao eixo-z que passa pelo centro da barra. Estes infinitesimais de massa exercem forças gravitacionais sobre a massa pontual em z_0 ao longo das linhas pontilhadas formando um ângulo θ em com eixo-z, como ilustrado na figura.

a) Calcule o módulo da força resultante gravitacional infinitesimal dF_G que atua sobre a massa pontual *m* devido à presença das massas infinitesimais dM.

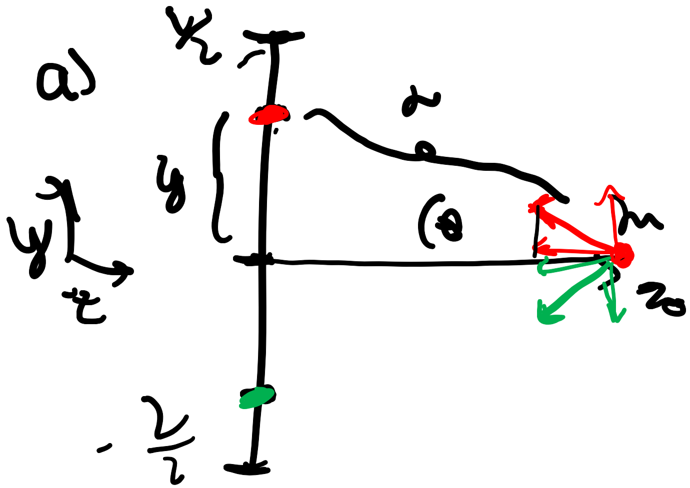
b) Qual é o módulo da força gravitacional resultante F_G sofrida pela massa pontual *m* devido, agora, à presença de toda a barra?

a) $$dF = 2Gm\frac{dM}{r^2}\cos\theta$$

b) $$F = \frac{8GmM}{L^2} z_0 \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\left[z_0^2 + (L/2)^2\right]^{1/2}} \right)$$

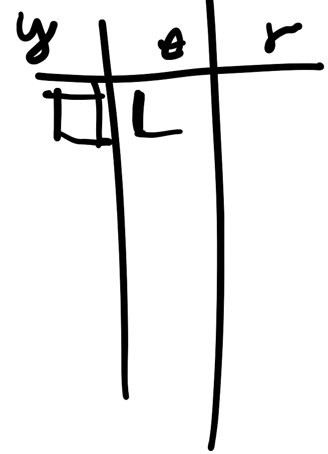


a)



$\rho = \frac{4M|y|}{L^2}$

$F_y = 0$



$$dF_{2m} = 2\,dF_1 \cos\theta = 2\cos\theta \frac{G m\, dM}{r^2}$$

$$dM = \rho(y)\,dy = \frac{4My}{L^2}\,dy$$

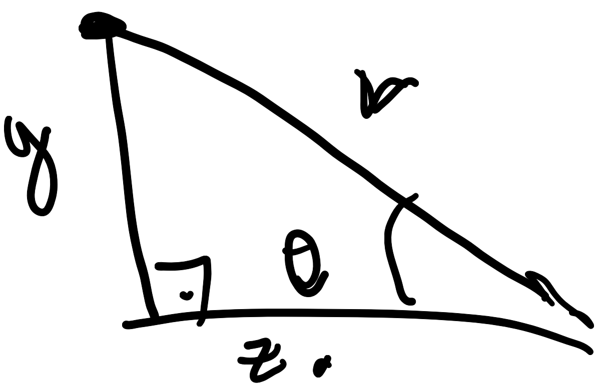
b)

$$\int dF_{2M} = 2Gm \int \frac{\cos\theta}{r^2}\,\frac{4M}{L^2}\, y\,dy$$

cst

$$= \frac{8GmM}{L^2} \int \frac{\cos\theta}{r^2}\, y\,dy = cst \int \frac{z_0}{r^3}\, y\,dy$$

$$= cst \int_0^{L/2} \frac{z_0\, y\,dy}{(z_0^2+y^2)^{3/2}}$$



$$\cos\theta = \frac{z_0}{r} \qquad r^2 = z_0^2 + y^2$$

$$z_0^2 + y^2 = u$$

$$du = 2y\,dy$$

$$y\,dy = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{Cst}{\alpha} \int_0^{L/2} \frac{z_0\, du}{u^{3/2}} = \frac{CsT\, z_0}{\alpha} \int_{z_0^2}^{L^2/4} u^{-3/2}\, du \,.$$

$$u = z_0^2 + y^2$$

$$u_{min} = z_0^2$$

$$u_{max} = z_0^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$