Aula Exploratória-1
Gravitação

Física Geral II - F 228

2º semestre, 2019

Exercício 1 - Uma massa *M* é repartida em duas partes, *m* e (*M* – *m*), e depois são separadas por uma certa distância *r*.

a) Qual é a força gravitacional entre as duas novas massas?

b) Faça o gráfico F *vs* *m*.

c) Qual valor de *m* que maximiza a intensidade da força gravitacional entre as partes?

a) $\vec{F}=\frac{G}{r^2}\left(-m^2+Mm\right)\hat{r}$

b) Gráfico

c) $m=\frac{M}{2}$

a) Para calcular a força gravitacional, usamos a lei da gravitação universal:

$$\overrightarrow{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}.$$

Usando as massas dadas no problemas, encontramos:

$$F = G\frac{m(M-m)}{r^2}.$$

Pela terceira lei de newton, as forças devem ter o mesmo módulo com a diferença que:

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}.$$

b) Gráfico

c) Para encontrar os máximos da função em relação à M, precisamos encontrar m que satisfaça:

$$\frac{\partial F}{\partial m}=0$$

Derivando

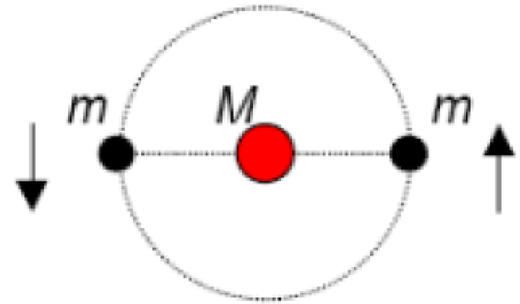
$$\frac{\partial F}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{G(M-m)m}{r^2}\right)=\frac{G}{r^2}\frac{\partial\left(Mm-m^2\right)}{\partial m}=\frac{G}{r^2}(M-2m)$$

Igualando a zero:

$$\frac{G}{r^2}(M-2m)=0\Rightarrow(M-2m)=0\Rightarrow M=2m\Rightarrow m=\frac{M}{2}$$

Exercício 2 – Um sistema particular de três estrelas é formado por duas estrelas, cada uma de massa *m*, orbitando uma estrela central de massa *M*. O raio orbital das estrelas menores é *r*. As duas estrelas estão sempre diametralmente opostas na órbita (ver figura).

a) Escreva a expressão para a força gravitacional resultante atuando em uma das estrelas menores.



b) Calcule a aceleração centrípeta em que as estrelas menores estão submetidas.

c) Calcule o período orbital das estrelas menores.

d) Como a hipótese das posições relativas entre as estrelas menores influencia no resultado?

a) $$F = \frac{G m}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right)$$

b) $$a_c = \frac{G}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right)$$

c) $$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\left(G\left[M + m/4\right]\right)^{1/2}}$$

a) Para calcular a resultante das forças em uma das esferas pequenas, precisamos somar a força da esfera M e da outra esfera m:

$$F_M = G\frac{m\,M}{r^2} \qquad\qquad F_m = G\,\frac{m^2}{(2\,r)^2}$$

Como as três esferas se encontram colineares e ambas apontam na mesma direção, podemos somar os módulos:

$$F_{tot} = G\left(\frac{m\,M}{r^2} + \frac{m^2}{4\,r^2}\right) = Gm\,\frac{4\,M + m}{4\,r^2}$$

Pela terceira lei de newton, as forças em cada bola devem ter o mesmo módulo com a diferença que:

$$\hat{r}_{12} = -\,\hat{r}_{21}.$$

b) A aceleração centrípeta é a força na direção ortogonal ao movimento. Como as órbitas é circular, ela é exatamente a força gravitacional resultante na esfera:

$$a_c = \frac{F_{tot}}{m} = G\,\frac{4\,M + m}{4\,r^2}$$

C) O período orbital para uma órbita circular é dado por:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

em que ω é a velocidade angular do objeto:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

Também sabemos que para órbitas circulares:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{a_c r},$$

Dado que encontramos a aceleração centrípeta na questão anterior:

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{a_c r}} = \frac{4\pi r^{3/2}}{\sqrt{G(4M+m)}}$$

d) Discussão sobre órbitas não circulares:

Exercício 3 - O potencial de uma pequena massa *m* situada à uma distância *r* do centro da Terra é dado pela expressão:

$$U(r) = - GMm / r$$

onde r é maior que o raio da Terra R. **Mostre que**:

$$U(r_2) - U(r_1) = mg(y_2 - y_1)$$

se $r_1 = R + y_1$, $r_2 = R + y_2$ **e também** $y_1/R << 1$, $y_2/R << 1$.

a) A maneira mais simples de resolver esse problema é considerar que:

$$r = R + h,$$

Em que R é o raio da terra e h é uma altura na superfície da terra. Dado que R»h:

$$\frac{1}{R+h} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

Substituindo essa expressão no potencial:

$$U(h) = \frac{-GMm}{r} \approx -GMm\frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

Se pegarmos a diferença entre duas posições pequenas:

$$U(h_2) - U(h_1) \approx \frac{GM}{R^2} m (h_2 - h_1),$$ em que $$\frac{GM}{R^2} = g$$

Extra – A figura abaixo representa uma barra vertical delgada e homogênea de comprimento L com densidade linear de massa $\rho(y) = 4M|y|/L^2$. Uma massa pontual *m* está situada a uma distância fixa z_0 do centro da barra. Dois elementos infinitesimais de massa dM, situados em pontos simétricos em relação ao eixo-z que passa pelo centro da barra. Estes infinitesimais de massa exercem forças gravitacionais sobre a massa pontual em z_0 ao longo das linhas pontilhadas formando um ângulo θ em com eixo-z, como ilustrado na figura.

a) Calcule o módulo da força resultante gravitacional infinitesimal dF_G que atua sobre a massa pontual *m* devido à presença das massas infinitesimais dM.

b) Qual é o módulo da força gravitacional resultante F_G sofrida pela massa pontual *m* devido, agora, à presença de toda a barra?

a) $$dF = 2Gm\frac{dM}{r^2}\cos\theta$$

b) $$F = \frac{8GmM}{L^2} z_0\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\left[z_0^2 + (L/2)^2\right]^{1/2}}\right)$$