



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP 1

Page Rank

11 de septiembre de 2022

Métodos Numéricos

12

Integrante	LU	Correo electrónico
Damburiarena, Gabriel	889/19	gabriel.damburiarena@gmail.com
Guastella, Mariano	888/19	marianoguastella@gmail.com
Silva, Ignacio Tomas	410/19	ignaciotomas.silva622@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

1. Introducción

1.1. Definiciones

Una de las tareas que debe poder resolver un motor de búsqueda es la de determinar un orden de las páginas según su importancia, para presentar la información con un orden de relevancia que le sirva al navegante.

Lo primero que se nos ocurre es: ¿Cómo definimos la importancia de una página? Una posible respuesta es con el modelo PageRank, en otras palabras, un ranking de las páginas. Para calcular este ranking hay que resolver un sistema de ecuaciones lineales donde la cantidad de ecuaciones e incógnitas del sistema es igual al número de páginas consideradas.

Contaremos la cantidad y la calidad de los links de cada página que apuntan a otra página determinada para asignar un puntaje. Se busca que el ranking sea mayor en las páginas importantes.

Representaremos las conexiones de n páginas web con la matriz de conectividad \mathbf{W} definiendo $w_{ij} = 1$ si la página j tiene un link a la página i y $w_{ij} = 0$ en caso contrario. Además $w_{ii} = 0$ ya que no tiene sentido tener en cuenta los autolinks. Un dato no menor es que la matriz \mathbf{W} puede resultar extremadamente mala y muy grande de acuerdo al tamaño del conjunto de páginas que hay en la web.

Para cada página $j = 1 \dots n$, definimos su grado como:

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^n w_{ij} \quad (1)$$

Es decir, el la cantidad de links salientes de j .

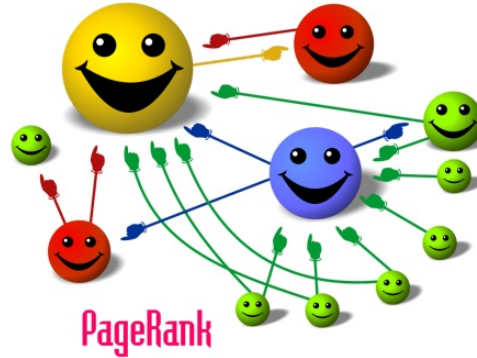


Figura 1: Esquema del PageRank

Como dijimos antes, vamos a asignarle calidad a los links, por lo tanto una página es importante cuando es apuntada por muchas otras páginas. Por ende, no todos los links pesan igual: los links de páginas más importantes valen más. Pocos links de páginas importantes pueden valer más que muchos links de páginas poco importantes. Y los links de páginas con muchos links valen poco. Por lo tanto, una forma de calcular la importancia o puntaje x_i de la página i es:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{c_j} w_{ij} \quad (2)$$

También, se puede definir la matriz de puntajes $\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{D}$, donde \mathbf{D} es una matriz diagonal con elementos d_{jj} de la forma:

$$d_{jj} = \begin{cases} \frac{1}{c_j} & c_j \neq 0 \\ 0 & c_j = 0. \end{cases}$$

Lo cual nos permite calcular el ranking de todas las páginas como:

$$\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (3)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$. Luego, la ecuación 2 corresponde al elemento i -ésimo $(\mathbf{R} \mathbf{x})_i$.

La falla de esta representación es que la navegación de los usuarios es errática y no secuencial en cuanto a los links, por lo cual vamos a tener que darle un giro de tuerca para poder capturar ese comportamiento.

Vamos a considerar un modelo donde el usuario comienza en una página aleatoria del conjunto, y luego en cada página j que visita elige con probabilidad $p \in (0, 1)$ si va a seguir uno de sus links, o con probabilidad $1 - p$, si va a pasar a otra página cualquiera del conjunto. Si decidió seguir un link de la página j elige uno al azar con probabilidad $1/c_j$, mientras que si decidió pasar a otra página cualquiera entonces decide aleatoriamente con probabilidad $1/n$ a que página avanzar. Cuando la página j no tiene links salientes, es decir $c_j = 0$, avanza aleatoriamente a cualquier otra página.

Luego, la probabilidad de pasar de la página j a la página i es:

$$a_{ij} = \begin{cases} (1-p)/n + (pw_{ij})/c_j & c_j \neq 0 \\ 1/n & c_j = 0 \end{cases}$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a la matriz de elementos a_{ij} . Entonces, como adelantamos previamente, el ranking de Page es la solución del sistema: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}$ porque cumple $x_i \geq 0$ y $\sum_i x_i = 1$. Por lo tanto, el elemento i -ésimo $(\mathbf{A}\mathbf{x})_i$ es la probabilidad de que el navegante aleatorio esté en la página i sabiendo que x_j es la probabilidad de esté en la página j , para $j = 1 \dots n$;

Desarmándola en partes, la matriz \mathbf{A} se puede reescribir como:

$$\mathbf{A} = p\mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{e}\mathbf{z}^T \quad (4)$$

donde \mathbf{D} es la matriz diagonal mencionada previamente, \mathbf{e} es un vector columna de dimensión n y \mathbf{z} es un vector columna cuyos componentes son:

$$z_j = \begin{cases} (1-p)/n & c_j \neq 0 \\ 1/n & c_j = 0 \end{cases}$$

1.2. Algoritmos y estructuras de datos

Para resolver el sistema lineal de la última ecuación vamos a implementar el siguiente algoritmo de Eliminación Gaussiana:

Eliminación Gaussiana(matriz)

```

1: for  $i = 0$  hasta  $\text{dimFila}(\text{matriz}) - 1$  do
2:   for  $j = i$  hasta  $\text{dimFila}(\text{matriz})$  do
3:     value = matriz[j][i]
4:     if value  $\neq 0$  then
5:       factor = value / matriz[i][i]
6:       for  $k = j$  hasta  $\text{dimColumna}(\text{matriz})$  do
7:         matriz[j][k] = matriz[j][k] - (factor * matriz[i][k])
8:       end for
9:     end if
10:   end for
11: end for

```

Como vamos a tener matrices ralas, ya que la mayoría de las páginas no se van a apuntar entre ellas. En este caso utilizaremos como estructura de matrices ralas la CSR (Compressed Spare Rows) ya que es eficiente para acceder a sus elementos, es rápida para hacer aritmética y productos de vectores. Luego, para el algoritmo de Eliminación Gaussiana vamos a utilizar una estructura llamada VoL (vector of lists) ya que nos permite hacer operaciones entre filas de manera dinámica más óptima que CSR.

Breve ejemplificación de CSR:

Sea una matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sea \mathbf{NZ} a la cantidad de elementos no nulos de \mathbf{M} .

- Tenemos tres arreglos \mathbf{A} , \mathbf{IA} y \mathbf{JA} .
- \mathbf{A} y \mathbf{JA} son de tamaño \mathbf{NZ} .
- \mathbf{A} guarda los valores de los elementos no nulos en orden: primero por fila, luego columna.
- \mathbf{JA} guarda a qué columna pertenece cada elemento de \mathbf{A} .
- \mathbf{IA} tiene $m + 1$ elementos. Guarda, para cada fila, los índices en \mathbf{A} entre los cuales están sus elementos (inicio y fin).

$$\text{Un ejemplo: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hay 8 elementos no nulos, por lo tanto $\mathbf{NZ} = 8$. Además, $m = 4$.

$$\mathbf{A} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8]$$

$$\mathbf{JA} = [0 \quad 5 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3]$$

$$\mathbf{IA} = [0 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 8]$$

VoL, por otro lado, se refiere a un vector de tamaño fijo de listas enlazadas. Cada lista enlazada representa una fila de la matriz donde sus componentes son tuplas del tipo (columna, valor), sin incluir los ceros.

1.3. Desarrollo teórico

Preguntas que debemos responder antes de pasar a la experimentación:

- 1. ¿Por qué es válida la igualdad planteada en 4? Es decir, ¿por qué la matriz \mathbf{A} es equivalente a $p \mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{e} \mathbf{z}^T$?
- 2. ¿Cómo se garantiza la aplicabilidad de EG sin pivoteo? ¿Qué tipo de matriz resulta $(\mathbf{I} - p \mathbf{W} \mathbf{D})$?

1) Queremos ver que $\mathbf{A} = p \mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{e} \mathbf{z}^T$ es igual a la matriz \mathbf{A} . Definimos:

$$\mathbf{B} = p \mathbf{W} \mathbf{D} \Rightarrow b_{ij} = p \sum_{k=1}^n w_{ik} d_{kj} .$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{e} \mathbf{z}^T \Rightarrow g_{ij} = e_i z_j^t .$$

$$\text{Luego, } \mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{G} \Rightarrow a_{ij} = p \sum_{k=1}^n w_{ik} d_{kj} + e_i z_j^t .$$

Sabiendo que cuando $c_j = 0 \Rightarrow z_j = 1/n$ en vez de $(1-p)/n$ y el término de la $\mathbf{W} \mathbf{D}$ se anula, ya que vale 0 también en ese caso, nos queda exactamente la misma definición que la de \mathbf{A} .

2) Para cualquier matriz \mathbf{M} , se puede garantizar la aplicabilidad de EG sin pivoteo si todas sus submatrices principales son no singulares.

Vamos a probarlo por inducción en n .

Casos bases:

$$n = 1, M_1 = [m_{11}]$$

$$n = 2, M_2 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

Como el $\det(M_1) \neq 0 \Leftrightarrow m_{11} \neq 0$ entonces puedo usar el algoritmo de Eliminación Gaussiana sin intercambio de filas en M_2 . Luego se que existen únicos U_2, L_2 tal que $M_2 = U_2 L_2$.

Paso inductivo:

$$\text{Supongo que vale } M_n = M_1 = \begin{bmatrix} M_{n-1} & b_n \\ c_n & a_{nn} \end{bmatrix} = L_n U_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & u_n \\ 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

donde M_{n-1} , L_{n-1} y U_{n-1} son matrices de $n-1 \times n-1$, b_n y u_n columnas de $n-1$ elementos así como c_n y l_n son filas de $n-1$ elementos.

$$\text{Queremos ver que vale } M_{n+1} = \begin{bmatrix} M_n & b_{n+1} \\ c_{n+1} & m_{n+1n+1} \end{bmatrix} = L_{n+1}U_{n+1} = \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ l_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n & u_{n+1} \\ 0 & u_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

Es decir que mis incógnitas son l_{n+1} , u_{n+1} y u_{n+1n+1} . Como los bloques son del mismo tamaño puedo multiplicar por bloques y despejando queda:

$$1) l_{n+1} U_n = c_{n+1}$$

$$2) c_{n+1} = L_n U_{n+1}$$

$$3) l_{n+1} u_{n+1} + u_{n+1n+1} = m_{n+1n+1}$$

1 y 2 tienen soluciones únicas porque U_n y L_n son inversibles.

Ahora falta ver que nuestra matriz cumple con esta condición.

Sabemos que la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{I} - p\mathbf{W}\mathbf{D}$ tiene unos en la diagonal y números menores o iguales a 0 en caso contrario. Esto se debe a que la matriz \mathbf{W} es una matriz de ceros y unos, y la matriz \mathbf{D} es diagonal con valores positivos o ceros, como explicamos anteriormente.

Primero vamos a demostrar que la matriz $(\mathbf{I} - p\mathbf{W}\mathbf{D})$ es estrictamente diagonal dominante (edd) por columnas. La definición de estrictamente diagonal dominante por columnas es:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_{ij} < m_{jj} \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Sabemos que la matriz \mathbf{M} tiene unos en la diagonal, entonces para que sea edd necesitamos que:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_{ij} < 1 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Si prestamos atención a como se forma \mathbf{M} , podemos ver que empieza con la matriz \mathbf{W} siendo multiplicada por la matriz \mathbf{D} diagonal a derecha. Esto resulta en que las columnas de \mathbf{W} están multiplicadas por cada uno de los elementos de la diagonal de \mathbf{D} (recordemos que estos elementos son $\frac{1}{c_j}$). Si llamamos w_d a los elementos de la matriz \mathbf{WD} y miramos la suma de sus columnas nos queda que:

$$\sum_{i=1}^n w_{ij} d_{jj} = d_{jj} \sum_{i=1}^n w_{ij} = \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^n w_{ij} = \frac{1}{c_j} c_j = 1 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}.$$

Luego, al multiplicar por p para llegar a $p\mathbf{WD}$, nos quedaría que el resultado de la suma de las columnas es p . Como p es menor estricto que 1, se cumple que la matriz es edd por columnas. En el caso de que c_j sea 0, d_{jj} vale 0 por lo que la sumatoria es menor que 1 de todas formas.

Veamos ahora que una matriz edd por columnas es inversible. En la teórica 1 (Álgebra lineal), vimos que para cualquier matriz \mathbf{A} inversible:

$$(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t$$

Es decir, si \mathbf{A} es inversible, también lo tiene que ser su traspuesta para que valga esta ecuación. Luego, en la teórica 3, vimos que una matriz edd por filas tiene factorización LU y es única, es decir, es no singular.

Teniendo esto en cuenta, si trasponemos nuestra matriz \mathbf{M} edd por columnas, vamos a tener una matriz edd por filas, que sabemos que es no singular. Pero si \mathbf{M}^t es no singular, esto implica que \mathbf{M} también lo es. De esta manera concluimos que una matriz edd por columnas es no singular.

Una propiedad de las matrices edd por columnas es que todas sus submatrices principales también son edd por columnas, lo que significa que, por lo mencionado anteriormente, todas las submatrices principales de \mathbf{M} también son no singulares.

Entonces \mathbf{M} tiene todas sus submatrices no singulares \Rightarrow tiene factorización LU sin pivoteo. Además, \mathbf{M} es una matriz no singular y esta factorización LU es única.

2. Experimentación

2.1. Instancias de experimentación cualitativa

Las instancias propuestas a continuación van a ser de 20 páginas cada una.

aTpNaP : Es el caso donde una página específica apunta a todas pero ninguna del resto de páginas apunta a ella. Luego hay un camino de links que arranca en la página 9 y termina en la 4, pasando de la 6 a la 1. Con esta queremos evaluar esos casos de páginas que se llenan de links para *ganar* puntaje. También evaluar el peso de que esa misma página apunte a otras. Tiene 27 links entre páginas.

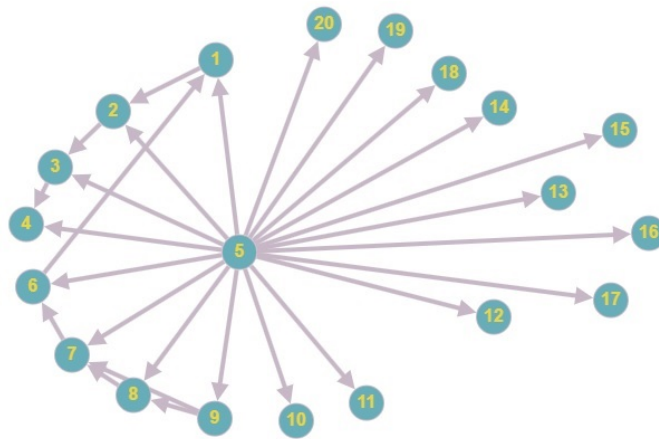


Figura 2: Instancia ATpNaP

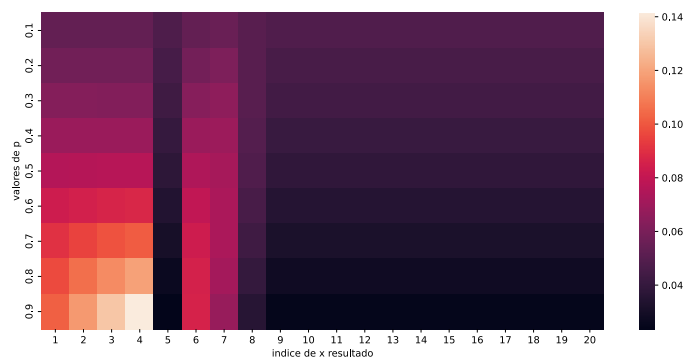


Figura 3: El vector solución en función de la probabilidad. Instancia ATpNaP

En esta instancia la página 5 apunta a todas las páginas y pero hay un camino entre las páginas 9 a 1 sin incluir la 5 que finaliza en la 4. Podemos ver que se cumple lo que esperábamos, la página 5 tiene el mismo valor que el resto de páginas que no tienen conexiones. La página 9 incrementa su puntaje con respecto a la 5 y de ahí en adelante van aumentando el puntaje respectivo de cada página en *cascada* y culmina en la página 4. Esto se debe a que se inicia una camino desde la página 9 que termina en la página 4 saltando la página 5. El puntaje se va *acumulando* entre los que forman un camino y nos sirve para evaluar que no tiene sentido apuntar a muchas páginas con tal de intentar ganar valoración. Por otro lado se puede armar un grupo de páginas como el dado de 9 a 4 para inflar su valoración. Con respecto a el cambio de la probabilidad, a medida que aumenta la misma, más valor tienen las páginas con links. Por lo tanto recomendamos un valor para p mayor a 0.5.

PaTaT : Es el caso donde una página apuntada por todas que apunta a todas las otras. Queremos ver si se anula el que muchas páginas le apunten a una si esta misma apunta a todas también. Nos es natural imaginar que fuerzas opuestas se deberían anular y también esperamos que no se promueva como falla del sistema el que todas las páginas se apunten entre sí con tal de ganar valoración. Tiene 38 links entre páginas.

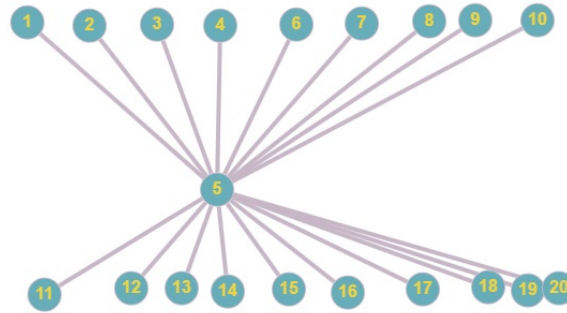


Figura 4: Instancia PaTaT

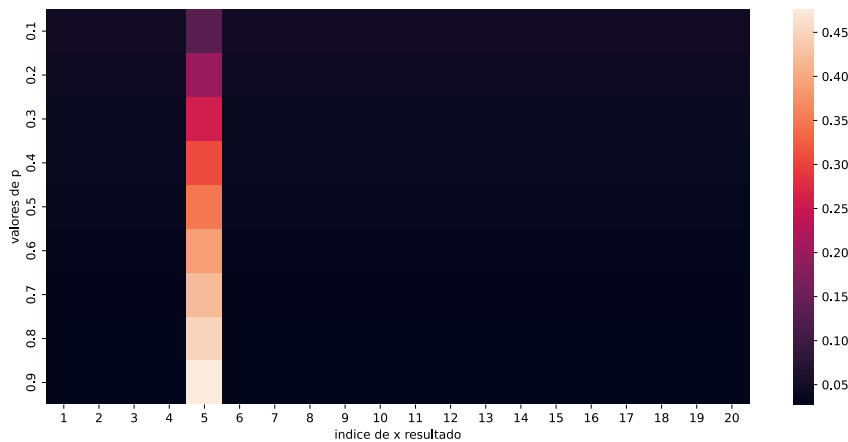


Figura 5: El vector solución en función de la probabilidad. Instancia PaTaT

En esta instancia la página 5 apunta a todas las otras páginas y a su vez, todas las páginas apuntan a la 5. Esperábamos que se anulase el puntaje de la página 5 por apuntar a todas, pero nos llevamos la sorpresa de que no es así. Entendemos que la relación no es tan directa como esperábamos. Ganas mas puntaje por que te señalen del

que perdes por señalar, al menos en este caso donde todas las páginas solo apuntan a la 5, osea tienen grado 1. Esto explicaría que al concentrarse todos los caminos hacia la página 5, la misma retiene más valoración que el resto que solo recibe 1 link. Con la variación de la probabilidad pasa lo mismo que en el caso anterior, es decir, lo esperado. A mayor probabilidad de usar los links de la página, mayor es el puntaje de la misma. Recomendamos usar p mayor a 0.5.

PaTa1: Es el caso donde una página apuntada por todas que apunta a unas pocas(una). Con esta queremos evaluar como se *traspasa* la valoración alta de una página a otra. Tiene 20 links entre páginas.

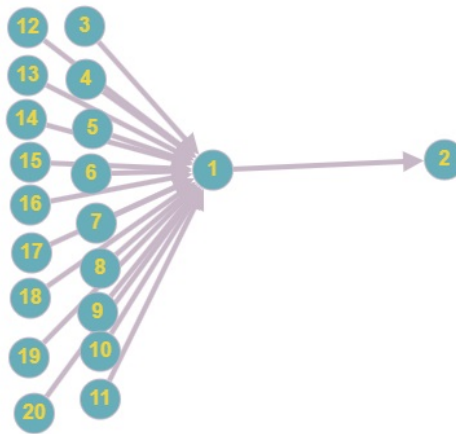


Figura 6: Instancia PaTa1

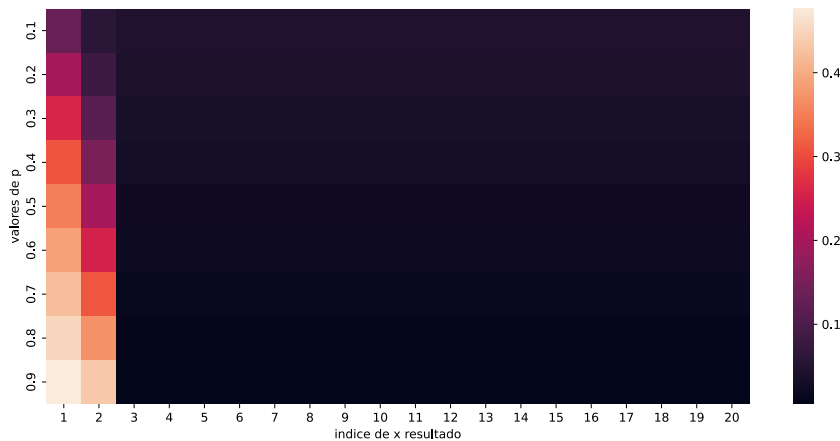


Figura 7: El vector solución en función de la probabilidad. Instancia PaTa1

En esta instancia queríamos ver como se pasaba el puntaje de una página a otra, ya que la página 1 es apuntada por todas y la misma apunta a la página 2. No hay más links entre el resto de páginas. Ocurre lo esperado y es que le transfiere en menor medida su puntaje. El traspaso de valoración es adecuado ya que no fomenta el hacer negocios con una página para que esta apunte a otra en particular porque la valoración que pasa es menor y va a ser cada vez mas chica a medida que apunte a más páginas, tanto de la que apunta como de las apuntadas. Con respecto a la probabilidad, vuelve a ocurrir lo mismo. A mayor probabilidad de usar links de la página, mayor valor tienen. Recomendamos usar un p mayor a 0.5.

2.2. Instancias de la cátedra para hacer comparaciones:

Al momento de ejecutar el algoritmo de eliminación gaussiana en instancias muy grandes, vamos a empezar a notar el error numérico que genera el uso de números de punto flotante en computadoras. Por eso, para realizar la experimentación cuantitativa, decidimos definir un ϵ que funcionaría como cota superior del error tal que si un valor, al hacer la eliminación gaussiana, llegase a ser menor que ϵ , entonces se trataría como un 0. Para ver más explícitamente el efecto de esta constante sobre los resultados del algoritmo, vamos a asignarle distintos valores y comparar sus resultados calculando la "norma 2" de la resta del vector resultado de nuestro algoritmo con el vector resultado proporcionado por la cátedra. No hemos podido presentar gráficos que describan las diferencias de error entre pruebas de distinto ϵ ya que los resultados eran tan abismalmente diferentes que fue imposible presentarlos visualmente.

Aleatorio desordenado: Esta instancia no sigue ningún patrón en particular, ya que los links entre sus páginas fueron generados de forma aleatoria. Tiene 5 páginas y 12 links entre páginas. El objetivo de presentar una instancia tan pequeña para la experimentación cuantitativa es para demostrar que el ϵ no tiene efecto alguno sobre los resultados que presenta. Aunque tomemos un ϵ de 0.001, es decir, que tomemos como error numérico a todos los números menores a ϵ , nos encontramos con que el error generado por esta cota es de 0. Cabe aclarar que esta cota es extremadamente grande para errores numéricos.

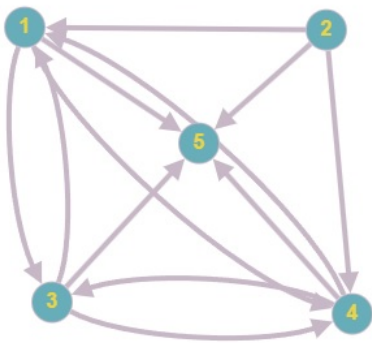


Figura 8: Instancia aleatoria desordenada.

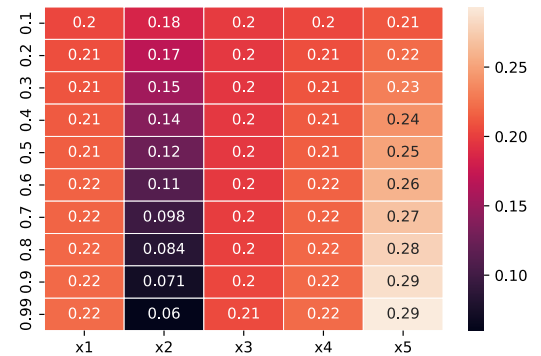


Figura 9: El vector solución en función de la probabilidad. Instancia aleatoria desordenada.

En este caso también queremos analizar la variación de la probabilidad, que se comporta distinto al resto de casos y nos pareció interesante. El valor se mantiene constante en la mayoría. Pero en un caso donde la página es no es apuntada por otra, esta página pierde valor ante el aumento del valor de otra página que si es apuntada por el resto. Esto era esperado pero no deja de ser muy ilustrativo ya que muestra como la página 2 no tiene mucho valor a no ser apuntada por ninguna, caso evaluado previamente, y como la 5 es la que más valoración tiene por ser apuntada por todas las otras.

Test 15 segundos : Posee 2000 páginas y 12000 links. Vamos a usarla para analizar el error absoluto de cálculo con $\epsilon \in \{ 0.001, 0.00001, 1e-7, 1e-9 \}$. Esperamos que los errores sean cada vez menores a medida que el epsilon se achica.

Empezando por el ϵ más chico, tenemos que la norma de nuestro vector error es de $\approx 3.553e^{-10}$.

Luego tomando el $\epsilon = 1e-7$, nuestro error de cálculo aumenta aproximadamente 20 veces mayor que el caso anterior, a ser $\approx 7.239e^{-09}$.

El siguiente ϵ sería el de 0.00001. Éste presenta un error absoluto de cálculo del $\approx 1.476e^{-06}$. Vale aclarar que es fácil de notar que este error es miles de veces mayor al primer error que calculamos.

Finalmente llegamos al valor de ϵ más controversial de todos, el mayor. Al tomar este valor, nuestro error llega a ser de ≈ 0.000285 . Siendo un error tan grande, nos sirve para graficar el vector error (es decir el vector resultado nuestro

menos el vector resultado de la cátedra) y analizarlo.

Como podemos ver en la figura 10 se puede observar que el error aumenta a medida que avanzamos de la primer coordenada del vector hasta la última. Esto se debe a que, a medida que avanzamos en el algoritmo de eliminación gaussiana, vamos arrastrando el error de las iteraciones anteriores y en consecuencia, acentuándolo cada vez más. A esto se deben los picos en el lado derecho del gráfico, que corresponden al error de las últimas coordenadas del vector.

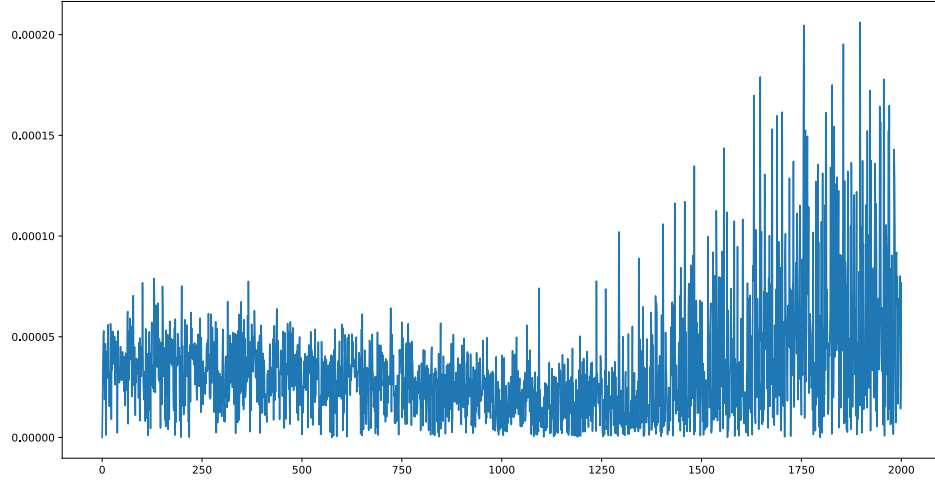


Figura 10: Comparación del error del vector solución de nuestra implementación con $\epsilon = 0.001$ vs. el de la cátedra en instancia 15 segundos.

Test 30 segundos : Posee 3000 páginas y 18000 links. Es otro caso que sirve para analizar el error absoluto de cálculo. Se comporta de forma similar al test de 15 segundos, la única diferencia observable que se mantiene en todos los ϵ es que el error absoluto es menor al de la instancia anterior. Esto se debe a que, habiendo más páginas y links entre ellas, los valores de la matriz \mathbf{M} (y por ende también del vector solución) tienden a ser más chicos y por consecuencia también el error tiende a ser más chico. Tomando los mismos ϵ , en el mismo orden, tenemos: $2.9916e^{-10}$, $1.0202e^{-08}$, $6.70593e^{-06}$ y 0.0001473.

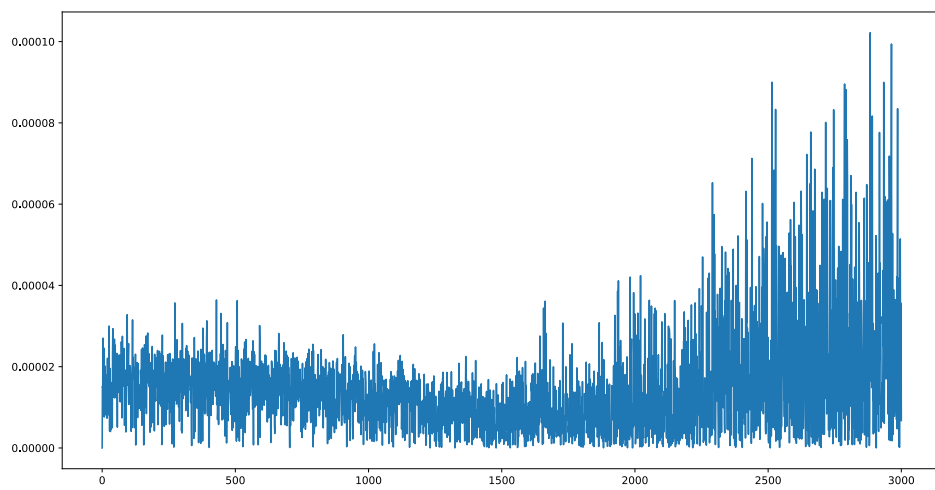


Figura 11: Comparación del error del vector solución de nuestra implementación vs. el de la cátedra en instancia 30 segundos.

3. Conclusiones

El Problema de PageRank probó ser útil para ver en práctica el algoritmo de eliminación gaussiana y tener un ejemplo de su aplicabilidad. Pudimos probar la complejidad del algoritmo usando distintas implementaciones de matrices ralas y de esa forma optar por la implementación óptima.

Además entendimos (con cierto grado de abstracción) las relaciones entre las páginas y cómo tienen influencia tanto directa como indirecta las unas sobre las otras. Variando el p pudimos ver cómo el efecto se acentuaba o debilitaba, ilustrado en las figuras 3, 5, 7 y 9.

Finalmente le hicimos frente al problema que causan los cálculos de punto flotante en computadoras: el error. Planteando varios epsilon pudimos analizar su influencia sobre los resultados del algoritmo y calcular la diferencia con el resultado real.