

# Catálogo Grupal de Algoritmos

## Integrantes:

- Josué Araya García - 2017103205
- Jonathan Guzmán Araya - 2013041216
- Mariano Muñoz Masís - 2016121607
- Luis Daniel Prieto Sibaja - 2016072504

## Índice

<b>1. Tema 1: Ecuaciones no Lineales</b>	<b>2</b>
1.1. Método 1: Bisección . . . . .	2
1.2. Método 2: Newton-Raphson . . . . .	4
1.3. Método 3: Secante . . . . .	5
1.4. Método 4: Falsa Posición . . . . .	6
1.5. Método 5: Punto Fijo . . . . .	8
1.6. Método 6: Muller . . . . .	9
<b>2. Optimización</b>	<b>11</b>
2.1. Método 1: Descenso Coordinado . . . . .	11
2.2. Método 2: Gradiente Conjugado No Lineal . . . . .	13
<b>3. Sistemas de Ecuaciones</b>	<b>16</b>
3.1. Método 1: Eliminación Gaussiana . . . . .	16
3.2. Método 2: Factorización LU . . . . .	18
3.3. Método 3: Factorización Cholesky . . . . .	19
3.4. Método 4: Método de Thomas . . . . .	21
3.5. Método 5: Método de Jacobi . . . . .	23
3.6. Método 6: Método de Gauss-Seidel . . . . .	25
3.7. Método 7: Método de Relajacion . . . . .	27
3.8. Método 8: Método de la Pseudoinversa . . . . .	29

<b>4. Polinomio de Interpolación</b>	<b>31</b>
4.1. Método 1: Método de Lagrange . . . . .	31
4.2. Método 2: Método de Diferencias Divididas de Newton . . . . .	32
4.3. Método 3: Trazador Cúbico Natural . . . . .	33
4.4. Método 4: Cota Error Polinomio de Interpolación . . . . .	35
4.5. Método 5: Cota Error Trazador Cúbico Natural . . . . .	37
<b>5. Integración Numérica</b>	<b>38</b>
5.1. Regla del Trapecio y Cota de Error . . . . .	38
5.2. Regla de Simpson y Cota de Error . . . . .	39
5.3. Regla Compuesta del Trapecio y Cota de Error . . . . .	40
5.4. Regla Compuesta de Simpson y Cota de Error . . . . .	42
5.5. Cuadratura Gaussiana y Cota de Error . . . . .	43
<b>6. Diferenciación Numérica</b>	<b>44</b>
6.1. Método de Euler . . . . .	44
6.2. Método Predictor Corrector . . . . .	45
6.3. Runge-Kutta de Orden 4 . . . . .	45
6.4. Adam-Bashford . . . . .	47
<b>7. Valores y Vectores Propios</b>	<b>48</b>

## 1. Tema 1: Ecuaciones no Lineales

### 1.1. Método 1: Bisección

Código 1: Lenguaje M.

```
%{
Metodo de la Biseccion
Parametros de Entrada
    @param f: funcion a la cual se le aplicara el algoritmo
    @param a: limite inferior del intervalo
    @param b: limite superior del intervalo
    @param MAXIT: iteraciones maximas
    @param TOL: tolerancia del algoritmo

Parametros de Salida
    @return xAprox: valor aproximado de x
    @return error: porcentaje de error del resultado obtenido
}%}

clc;
```

```

clear;

function [xAprox, err] = biseccion(f, a, b, MAXIT, TOL)

    if(f(a) * f(b) < 0)

        iter = 1;
        err = 1;
        iterl = []; % Lista que almacena el numero de iteraciones para despues graficar
        errl = []; % Lista que almacena el % de error de cada iteracion para despues graficar

        while(iter < MAXIT)
            xAprox = (a + b) / 2;
            fx = f(xAprox);

            if(f(a) * fx < 0)
                b = xAprox;
            elseif(f(b) * fx < 0)
                a = xAprox;
            endif

            iterl(iter) = iter;
            errl(iter) = err;
            err = (b - a) / (2)^(iter-1);

            if(err < TOL)
                grafica(iterl, errl);
                return;
            else
                iter = iter + 1;
            endif
        endwhile
        grafica(iterl, errl);
    else
        error("Condiciones en los parametros de entrada no garantizan el cero de la funcion.")
    endif
    return;
endfunction

%{
    Parametros de Entrada
    @param listaValoresX: valores del eje 'x'
    @param listaValoresY: valores del eje 'y'

    Parametros de Salida
    @return: Grafico de los datos ingresados
%}

function grafica(listaValoresX, listaValoresY)
    plot(listaValoresX, listaValoresY, 'bx');
    title("Metodo de la Biseccion");
    xlabel("Iteraciones");
    ylabel("% Error");
endfunction

```

```

%Valores iniciales
a = 0;
b = 2;
%Iteraciones maximas
MAXIT = 100;
%Tolerancia
TOL = 0.0001;
%Funcion
funct = @(x) e^x - x - 2;
%llamado de la funcion
[xAprox, err] = biseccion(funct, a, b, MAXIT, TOL);
printf("##### \n");
printf("Metodo de la Biseccion \n");
printf('xAprox = %f\nError = %d \n', xAprox, err);

```

## 1.2. Método 2: Newton-Raphson

Código 2: Lenguaje Python.

```

#####
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.misc import derivative
#####

def newton_raphson(func, x0, MAXIT, TOL):
    """
    Metodo de Newton-Raphson
    :param func: es la funcion a analizar
    :param x0: valor inicial
    :param MAXIT: es la cantidad de iteraciones maximas a realizar
    :param TOL: es la tolerancia del algoritmo
    :return: xAprox: es la solucion, valor aproximado de x
    :return: error: pocentaje de error del resultado obtenido
    """
    itera = 1
    err = 1
    iterl = [] # Lista que almacena el numero de iteraciones
    errl = [] # Lista que almacena el % de error de cada iteracion
    xAprox = x0

    while (itera < MAXIT):
        xk = xAprox
        fd = derivative(func, xk, dx=1e-6)
        xAprox = xk - (func(xk)) / (fd)
        err = (abs(xAprox - xk)) / (abs(xAprox))
        iterl.append(itera)
        errl.append(err)

        if(err < TOL):
            grafica(iterl, errl)
            return xAprox, err

```

```

        else:
            itera = itera + 1

grafica(iterl, errl)
return xAprox, err

def grafica(listaValoresX, listaValoresY):
    '''
    Grafica
    :param listaValoresX: valores que se graficaran en el eje 'x'
    :param listaValoresY: valores que se graficaran en el eje 'y'
    :return: Grafico con lo valores ingresados
    '''

    plt.plot(listaValoresX, listaValoresY, 'bx')
    plt.title("Metodo de Newton-Raphson")
    plt.xlabel("Iteraciones")
    plt.ylabel("% Error")
    plt.show()

if __name__ == '__main__':
    # Valor inicial
    x0 = 1
    # Tolerancia
    TOL = 0.0001
    # Maximo iteraciones
    MAXIT = 100
    # Funcion
    def func(x): return (math.e)**x - 1/x
    # Llamado de la funcion
    xAprox, err = newton_raphson(func, x0, MAXIT, TOL)
    print("#####")
    print("Metodo de Newton-Raphson \n")
    print('xAprox = {}\n%Error = {}'.format(xAprox, err))

```

### 1.3. Método 3: Secante

Código 3: Lenguaje C++.

```

#include <iostream>
#include <ginac/ginac.h>

using namespace std;
using namespace GiNaC;

/**
 * @param funcion: Funcion a evaluar en el metodo
 * @param x0: primer valor inicial
 * @param x1: segundo valor inicial
 * @param MAXIT: cantidad maxima de iteraciones
 * @param TOL: tolerancia del resultado
 * @return tuple<ex, ex>: valor aproximado, error del valor aproximado

```

```

*/
tuple<ex, ex> secante(string funcion, ex x0, ex x1, ex MAXIT, ex TOL)
{
    symbol x;
    symtab table;
    table["x"] = x;
    parser reader(table);
    ex f = reader(funcion);
    ex xk = x1;
    ex xkm1 = x0;
    ex xk1;
    int iter = 0;
    ex err = TOL + 1;

    while (iter < MAXIT)
    {
        xk1 = xk -
            (((xk - xkm1)) / ((evalf(subs(f, x == xk))))) -
            evalf(subs(f, x == xkm1)) * (evalf(subs(f, x == xk)));
        xkm1 = xk;
        xk = xk1;
        err = abs(evalf(subs(f, x == xk)));

        if (err < TOL)
        {
            break;
        }
        else
        {
            iter = iter + 1;
        }
    }
    xk;
    err = abs((evalf(subs(f, x == xk))));
    return make_tuple(xk, err);
}

int main(void)
{
    tuple<ex, ex> testS = secante("exp(-pow(x, 2)) - x", 0, 1, 100, 0.001);
    cout << "Aproximacion: " << get<0>(testS) << endl;
    cout << "Error: " << get<1>(testS) << endl;
    return 0;
}

```

## 1.4. Método 4: Falsa Posición

Código 4: Lenguaje C++.

```

#include <iostream>
#include <ginac/ginac.h>

using namespace std;

```

```

using namespace GiNaC;

/**
 * @param funcion: Funcion a la que se le va a aplicar el metodo
 * @param x0: primer valor inicial
 * @param x1: segundo valor inicial
 * @param TOL: tolerancia
 * @param MAXIT: cantidad maxima de iteraciones
 * @return tuple<ex, ex>: valor aproximado, error del valor encontrado
 */
tuple<ex, ex> falsaPosicion(string funcion, ex x0, ex x1, ex MAXIT, ex TOL)
{
    symbol x("x");
    symlist table;
    table["x"] = x;
    parser reader(table);
    ex f = reader(funcion);
    ex f0 = evalf(subs(f, x == x0));
    ex f1 = evalf(subs(f, x == x1));
    ex fxk;
    ex xk;
    ex error = TOL + 1;
    xk = x1 - ((x1 - x0) / (f1 - f0)) * f1;

    int iter = 1;

    while (iter < MAXIT)
    {
        fxk = evalf(subs(f, x == xk));
        if (f0 * fxk < 0)
        {
            xk = xk - ((xk - x0) / (fxk - evalf(subs(f, x == x0)))) * fxk;
            x1 = xk;
            error = abs(evalf(subs(f, x == xk)));

            if (error < TOL)
            {
                break;
            }
            else
            {
                iter = iter + 1;
            }
        }
        else if (fxk * f1 < 0)
        {
            xk = xk - ((xk - x0) / (fxk - evalf(subs(f, x == x1)))) * fxk;
            x0 = xk;
            error = abs(evalf(subs(f, x == xk)));

            if (error < TOL)
            {
                break;
            }
        }
    }
}

```

```

        }
        else
        {
            iter = iter + 1;
        }
    }
    else
    {
        cout << "No es posible de resolver mediante Falsa Posicion" << endl;
    }
}

xk = evalf(xk);
error = abs(evalf(subs(f, x == xk)));

return make_tuple(xk, error);
}

int main()
{

    tuple<ex, ex> testFP = falsaPosicion("cos(x)-x", 1 / 2, Pi / 4, 100, 0.0001);
    cout << "Aproximacion: " << get<0>(testFP) << endl;
    cout << "Error: " << get<1>(testFP) << endl;
    return 0;
}

```

## 1.5. Método 5: Punto Fijo

Código 5: Lenguaje Python.

```

#####
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
#####

def punto_fijo(funcion, valor_inicial, iteraciones_maximas):
    """
    Metodo del punto fijo
    :param funcion: Funcion por aproximar - funcion lambda
    :param valor_inicial: Valor por el cual se empezara a aproximar
    :param iteraciones_maximas: Numero maximo de itreaciones - int
    :return: aproximacion: aproximacion de la solucion
    """
    lista_error = [] # lista para graficar
    iteracion = 1
    b = funcion(valor_inicial) # valor para obtener error
    error = abs(b - valor_inicial)
    while (iteracion <= iteraciones_maximas): # condicion de parada
        valor_inicial = b # reajuste de valores de error
        b = funcion(valor_inicial)
        error = abs(b - valor_inicial)

```



```

        lista_error.append(error)
        iteracion += 1

aproximacion = b
# Construccion de tabla
plt.plot(lista_error, label='errores por iteracion')
plt.ylabel('Error')
plt.xlabel('Iteracion')
# Los ejes estan limitados por las iteraciones y el error maximo
plt.axis([0, iteraciones_maximas, 0, lista_error[0]])
plt.title('Punto Fijo')
plt.legend()
plt.show()
print('Aproximacion: ' + str(aproximacion) + ', error: ' + str(error))
return aproximacion, error

if __name__ == '__main__':
    # Valor inicial
    x0 = 0
    # Maximo iteraciones
    MAXIT = 100
    # Funcion
    def funcion(x): return np.exp(-x)
    # Llamado de la funcion
    print("#####")
    print("Metodo del Punto Fijo \n")
    punto_fijo(funcion, x0, MAXIT)

```

## 1.6. Método 6: Muller

Código 6: Lenguaje M.

```

%{
Metodo de Muller
Parametros de Entrada
    @param func: funcion a la cual se le aplicara el algoritmo
    @param x0: primer valor inicial
    @param x1: segundo valor inicial
    @param x2: segundo valor inicial
    @param MAXIT: iteraciones maximas
    @param TOL: tolerencia del algoritmo

Parametros de Salida
    @return r: valor aproximado de x
    @return error: porcentaje de error del resultado obtenido
}%

clc;
clear;

function [r, err] = muller(func, x0, x1, x2, MAXIT, TOL)
    iter = 1;

```

```

err = 1;
iterl = []; %Lista que almacena el numero de iteraciones para despues graficar
errl = []; %Lista que almacena el % de error de cada iteracion para despues graficar

while(iter < MAXIT)

    a = ((x1-x2)*[func(x0)-func(x2)]-(x0-x2)*[func(x1)-func(x2)])/((x0-x1)*(x0-x2)*(x1-x2));
    b = (((x0-x2)^2)*[func(x1)-func(x2)]-((x1-x2)^2)*[func(x0)-func(x2)])/((x0-x1)*(x0-x2)*(x1-x2));
    c = func(x2);

    discriminante = b^2 - 4*a*c;

    if(discriminante < 0)
        error("Error, la solucion no es real.");
        return;
    endif

    r = x2 - (2*c) / (b + (sign(b))*(sqrt(discriminante)));
    err = (abs(r - x2)) / (abs(r));
    errl(iter) = err;
    iterl(iter) = iter;
    iter = iter + 1;

    if(err < TOL)
        grafica(iterl, errl);
        return;
    endif

    x0Dist = abs(r - x0);
    x1Dist = abs(r - x1);
    x2Dist = abs(r - x2);

    if (x0Dist > x2Dist && x0Dist > x1Dist)
        x0 = x2;
    elseif (x1Dist > x2Dist && x1Dist > x0Dist)
        x1 = x2;
    endif
    x2 = r;
endwhile

grafica(iterl, errl);
return;
endfunction

%{
    Parametros de Entrada
    @param listaValoresX: valores del eje 'x'
    @param listaValoresY: valores del eje 'y'

    Parametros de Salida
    @return: Grafico de los datos ingresados
%}
function grafica(listaValoresX, listaValoresY)
    plot(listaValoresX, listaValoresY, 'bx');

```

```

    title("Metodo de Muller");
    xlabel("Iteraciones");
    ylabel("% Error");
endfunction

%Valores iniciales
x0 = 2;
x1 = 2.2;
x2 = 1.8;
%Iteraciones maximas
MAXIT = 100;
%Tolerancia
TOL = 0.0000001;
%Funcion
func = @(x) sin(x) - x/2;
%llamado de la funcion
[r, err] = muller(func, x0, x1, x2, MAXIT, TOL);
printf("##### \n");
printf("Metodo de Muller \n");
printf('r = %f\n%Error = %i \n', r, err);

```

## 2. Optimización

### 2.1. Método 1: Descenso Coordinado

Código 7: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo del Descenso Coordinado
    Parametros de Entrada
        @param func: funcion a la cual se le aplicara el algoritmo
        @param vars: variables que oomponen la funcion
        @param xk: valores iniciales
        @param MAXIT: iteraciones maximas

    Parametros de Salida
        @return xAprox: valor aproximado de xk
        @return error: porcentaje de error del resultado obtenido
}%

clc;
clear;

pkg load symbolic;
syms x y;
warning("off","all");

function [xAprox, err] = coordinado(func, vars, xk, MAXIT)
    n = length(vars);
    iter = 0;
    iterl = [];
    err = [];

```

```

while(iter < MAXIT)
    xk_aux = xk;
    v = 1;
    while(v != n + 1)
        ec_k = func;
        j = 1;
        while(j != n + 1)
            if(j != v)
                vars(j);
                xk(j);
                ec_k = subs(ec_k, vars(j), xk(j));
            endif
            j = j + 1;
        endwhile
        fv = matlabFunction(ec_k);
        min = fminsearch(fv, 0);
        xk(v) = min;
        v = v + 1;
    endwhile
    cond = xk - xk_aux;
    norma = norm(cond, 2);
    errl(iter+1) = norma;
    iterl(iter+1) = iter;
    iter = iter + 1;
endwhile
xAprox = xk;
err = norma;
grafica(iterl, errl);
return;
endfunction

%{
    Parametros de Entrada
        @param listaValoresX: valores del eje 'x'
        @param listaValoresY: valores del eje 'y'

    Parametros de Salida
        @return: Grafico de los datos ingresados
%}
function grafica(listaValoresX, listaValoresY)
    plot(listaValoresX, listaValoresY, 'bx');
    title("Metodo del Descenso Coordinado");
    xlabel("Iteraciones");
    ylabel("% Error");
endfunction

%Valores iniciales
xk = [1, 1];
%Variables
vars = [x, y]
%Iteraciones maximas
MAXIT = 9;
%Tolerancia
TOL = 0.000001;

```

```

%Funcion
funct = '(x - 2)**2 + (y + 3)**2 + x * y';
%Llamado de la funcion
[xAprox, err] = coordinado(funct, vars, xk, MAXIT, TOL);
printf("##### \n");
printf("Metodo del Descenso Coordinado \n");
printf('xAprox X = %f\nxAprox Y = %f\n%Error = %d \n', xAprox, err);

```

## 2.2. Método 2: Gradiente Conjugado No Lineal

Código 8: Lenguaje Python.

```

#####
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.misc import derivative
from sympy import sympify, Symbol, diff
from numpy import linalg, array
#####

def gradiente(func, variables, xk, MAXIT):
    """
    Metodo del Gradiente Conjugado No Lineal
    :param func: string con la funcion a evaluar
    :param variables: lista con las variables de la ecuacion
    :param xk: vector con los valores iniciales
    :param MAXIT: es la cantidad de iteraciones maximas a realizar
    :return: xAprox: es la solucion, valor aproximado de x
    :return: error: pocentaje de error del resultado obtenido
    """
    funcion = sympify(func) # Obtenemos la funcion del string
    itera = 0
    iterl = [] # Lista que almacena el numero de iteraciones
    errl = [] # Lista que almacena el % de error de cada iteracion

    if(len(variables) != len(xk)): # Comprueba la cantidad de variables en xk
        return "Variables y xk deben ser del mismo tamano"

    listaSimb = []
    n = len(variables)
    for i in range(0, n):
        # Se crean los Symbol de las variables de la funcion
        listaSimb += [Symbol(variables[i])]

    gradiente = []
    for i in range(0, n): # Se calcula el gradiente de la funcion
        gradiente += [diff(funcion, variables[i])]

    # Se calculan los valores iniciales de gk y dk
    gk = evaluarGradiente(gradiente, variables, xk)
    dk = [i * -1 for i in gk]

```

```

while(itera < MAXIT):
    # Se calcula el alpha
    ak = calcularAlphaK(funcion, variables, xk, dk, gk)
    # Se calcula el nuevo valor del vector:  $x_1 = x_0 + a * d_0$ 
    alphakdk = [i * ak for i in dk]
    vecx = [x1 + x2 for (x1, x2) in zip(xk, alphakdk)]
    # Se calcula el nuevo valor del vector gk
    gkx = evaluarGradiente(gradiente, variables, vecx)
    # Se calcula el vector para encontrar el error
    vecFinal = evaluarGradiente(gradiente, variables, vecx)
    # Se calcula la norma para el error
    norma = linalg.norm(array(vecFinal, dtype='float'), 2)
    bk = calcularBetaK(gkx, gk) # Se calcula el valor de beta
    # Se calcula el nuevo valor del vector dk
    betakdk = [i * bk for i in dk]
    mgk = [i * -1 for i in gkx]
    dk = [x1 + x2 for (x1, x2) in zip(mgk, betakdk)]
    xk = vecx.copy()
    gk = gkx.copy()
    iterl.append(itera)
    errl.append(norma)
    itera += 1
grafica(iterl, errl)
return vecx, norma

```

```

def evaluarGradiente(gradiente, variables, xk):
    """
    Evaluar Gradiente
    :param gradiente: gradiente a evaluar
    :param variables: lista con las variables de la ecuacion
    :param xk: vector con los valores iniciales
    :return: gradResult: resultado de evaluar el vector en el gradiente
    """
    n = len(variables)
    gradResult = []
    # Se recorre cada una de las derivadas parciales en el gradiente
    for i in range(0, n):
        funcion = gradiente[i] # Se obtiene la derivada parcial
        # Se sustituyen cada una de las variables por el valor en el vector
        for j in range(0, n):
            funcion = funcion.subs(variables[j], xk[j])
        gradResult += [funcion.doit()]
    return gradResult

```

```

def calcularAlphaK(func, variables, xk, dk, gk):
    """
    Calcular alpha k
    :param func: funcion en la que se evaluar
    :param variables: lista con las variables de la ecuacion
    :param xk: vector con los valores iniciales
    :param dk:
    :param gk: gradiente a evaluar
    """

```

```

:return: gradResult: resultado de evaluar el vector en el gradiente
'''
a = 1
while 1:
    adk = [i * a for i in dk] # Se calcula la multiplicacion de ak * dk
    # Se calcula la operacion xk + a * dk
    vecadk = [x1 + x2 for (x1, x2) in zip(xk, adk)]
    # Se evalua la funcion f(xk + a * dk)
    refvecadk = evaluarFuncion(func, variables, vecadk)
    # Se evalua la funcion f(xk)
    refvec = evaluarFuncion(func, variables, xk)
    # Se calcula la parte izquierda de la desigualdad
    izquierdaDesigualdad = refvecadk - refvec
    # Se calcula la operacion gk * dk
    multiplicargkdk = [x1 * x2 for (x1, x2) in zip(gk, dk)]
    # Se suman todos los elementos de la multiplicacion anterior
    sumagkdk = sum(multiplicargkdk)
    # Se calcula la multiplicacion de 0.5 * ak * gk * dk (parte derecha)
    derechaDesigualdad = 0.5 * a * sumagkdk
    if(izquierdaDesigualdad < derechaDesigualdad): # Se verifica la desigualdad
        break
    a /= 2
return a

def evaluarFuncion(func, variables, xk):
    '''
    Evaluar en la funcion
    :param func: string con la funcion a evaluar
    :param variables: lista con las variables de la ecuacion
    :param xk: vector con los valores iniciales
    :return: func: resultado de evaluar en la funcion
    '''
    n = len(variables)
    # Se sustituyen cada una de las variables por el valor en el vector
    for i in range(0, n):
        func = func.subs(variables[i], xk[i])
    return func

def calcularBetaK(gk, prevGK):
    '''
    Calcular beta k
    :param gk: vector gk
    :param prevGK: vector gk de la iteracion anterior
    :return: b: valor del Bk calculado
    '''
    # Se calcula la norma 2 del vector actual
    normagk = linalg.norm(array(gk, dtype='float'), 2)
    # Se calcula la norma 2 del vector anterior
    normaprevGK = linalg.norm(array(prevGK, dtype='float'), 2)
    b = (pow(normagk, 2)) / (pow(normaprevGK, 2))
    return b

```

```

def grafica(listaValoresX, listaValoresY):
    '''
    Grafica
    :param listaValoresX: valores que se graficaran en el eje 'x'
    :param listaValoresY: valores que se graficaran en el eje 'y'
    :return: Grafico con lo valores ingresados
    '''

    plt.plot(listaValoresX, listaValoresY, 'bx')
    plt.title("Metodo del Gradiente Conjugado No Lineal")
    plt.xlabel("Iteraciones")
    plt.ylabel("% Error")
    plt.show()

if __name__ == '__main__':
    # Valores iniciales
    xk = [0, 3]
    # Variables de la ecuacion
    variables = ['x', 'y']
    # Maximo iteraciones
    MAXIT = 14
    # Funcion
    func = '(x-2)**4 + (x-2*y)**2'
    # Llamado de la funcion
    xAprox, err = gradiente(func, variables, xk, MAXIT)
    print("#####")
    print("Metodo del Gradiente Conjugado No Lineal \n")
    print('xAprox = {}\n%Error = {}'.format(xAprox, err))

```

### 3. Sistemas de Ecuaciones

#### 3.1. Método 1: Eliminación Gaussiana

Código 9: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo de Eliminacion Gaussiana
    Parametros de Entrada
        @param matrizD: matriz de coeficientes
        @param matrizI: vector de terminos independientes

    Parametros de Salida
        @return vectorResultado: solucion del sistema
}%

clc;
clear;
warning('off', 'all');

function X = gaussiana(matrizD, matrizI)
    [n, m] = size(matrizD);

```



```

if (n ~= m)
    disp("La matrizD debe ser cuadrada");
endif

n = length(matrizD);
X = [matrizD, matrizI];
% Por cada argumento de la matriz
for(i = 1 : n)
    pivot = X(i, i);
    pivotRow = X(i, :);
    % Multiplica los vectores
    M = zeros(1, n - i);
    m = length(M);
    % Obtiene cada fila multiplicada
    for(k = 1 : m)
        M(k) = X(i + k, i) / pivot;
    endfor
    % Modifica cada fila
    for(k = 1 : m)
        X(i + k, :) = X(i + k, :) - pivotRow*M(k);
    endfor
endfor
X = sustitucionAtras(X(1 : n, 1 : n), X(:, n + 1));
endfunction

```

```

%{
    Metodo de Sustitucion Atras
    -Resuelve un sistema del tipo Ax = b
    Parametros de Entrada
        @param matrizA: matriz triangular superior NxN
        @param matrizB: matriz Nx1

    Parametros de Salida
        @return X: solucion de la matriz
%}

```

```

function X = sustitucionAtras(matrizA, matrizB)
    n = length(matrizB);
    X = zeros(n, 1);
    X(n) = matrizB(n)/matrizA(n, n);

    for(k = n-1 : -1 : 1)
        div = matrizA(k, k);
        if (div ~= 0)
            X(k) = (matrizB(k) - matrizA(k, k + 1 : n)*X(k + 1 : n))/matrizA(k, k);
        else
            disp("Error: se ha producido una division por cero");
        end
    endfor
endfunction

```

```

%Matriz de coeficientes
A = [2 -6 12 16 ; 1 -2 6 6; -1 3 -3 -7; 0 4 3 -6];
%Matriz de terminos independientes

```

```

B = [70 26 -30 -26]';
%llamado de la funcion
X = gaussiana(A, B);
printf("##### \n");
printf("Metodo de la Eliminacion Gaussiana \n");
printf('X = %f\n', X);

```

### 3.2. Método 2: Factorización LU

Código 10: Lenguaje Python.

```

#####
import numpy as np
import scipy.linalg as la
#####

def fact_lu(matrizD, matrizI):
    """
    Metodo de la Factorizacion LU
    :param matrizD: matriz de coeficientes
    :param matrizI: matriz de terminos independientes
    :return: X: solucion del sistema
    """
    if(np.linalg.det(matrizD) == 0):
        print("La matriz no es singular")
        return
    else:
        pass
    n = len(matrizD)
    L = np.eye(n)
    U = matrizD

    for i in range(1, n):
        pivot = U[i - 1][i - 1]
        pivotRow = U[i - 1]
        M = np.zeros((1, n - i))
        m = M.size + 1

        for k in range(1, m):
            try:
                M[i - 1][k - 1] = (U[i + k - 1][i - 1]) / pivot
            except:
                M = (U[i + k - 1][i - 1]) / pivot

        for k in range(1, m):
            try:
                U[i + k - 1] = U[i + k - 1] - \
                    (np.multiply(pivotRow, M[i - 1][k - 1]))
                L[i + k - 1][i - 1] = M[i - 1][k - 1]
            except:
                U[i + k - 1] = U[i + k - 1] - (np.multiply(pivotRow, M))
                L[i + k - 1][i - 1] = M

```

```

Y = ((np.linalg.inv(L)).dot(np.transpose(matrizI)))
X = (np.linalg.inv(U)).dot(Y)
return X

if __name__ == '__main__':
    # Matriz de coeficientes
    A = [[4, -2, 1], [20, -7, 12], [-8, 13, 17]]
    # Vector de terminos independientes
    B = [11, 70, 17]
    # Llamado de la funcion
    X = fact_lu(A, B)
    print("#####")
    print("Metodo de la Factorizacion LU\n")
    print('X = {}\n'.format(X))

```

### 3.3. Método 3: Factorización Cholesky

Código 11: Lenguaje C++.

```

#include <iostream>
#include <armadillo>
#include <cmath>

using namespace std;
using namespace arma;

/**
 * @param A: Una matriz A de cualquier tamaño, simétrica y positiva definida
 * @return mat: Una matriz L que es la factorización de la matriz A
 */
mat cholesky(mat A)
{
    mat L(A.n_rows, A.n_cols, fill::zeros);
    for (int i = 0; i < A.n_rows; i++)
    {
        for (int j = 0; j < i + 1; j++)
        {
            double suma = 0;
            if (j == i)
            {
                for (int k = 0; k < j; k++)
                {
                    suma += L(j, k) * L(j, k);
                }
                L(j, j) = sqrt(A(j, j) - suma);
            }
            else
            {
                for (int k = 0; k < j; k++)
                {
                    suma += L(i, k) * L(j, k);
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        }
        L(i, j) = (A(i, j) - suma) / L(j, j);
    }
}
return L;
}

/**
 * @param L: Una matriz L que es la factorizacion de Cholesky de otra matriz
 * @param y: Un vector d que es el vector de terminos independientes
 * @return colvec: Un vector y que es la solucion de este sistema de ecuaciones
 */
colvec sust_atras(mat L, colvec y)
{
    colvec x(L.n_rows, fill::zeros);
    for (int i = L.n_rows - 1; i > -1; i--)
    {
        int suma = 0;
        for (int j = i; j < L.n_rows; j++)
        {
            suma += L(i, j) * x(j);
        }
        x(i) = (y(i) - suma) / L(i, i);
    }
    return x;
}

/**
 * @param L: Una matriz L que es la transpuesta de la factorizacion
 * de Cholesky de otra matriz
 * @param b: Un vector y que es el vector de terminos independientes
 * @return colvec: Un vector x que es la solucion de este sistema de ecuaciones
 */
colvec sust_adelante(mat L, colvec b)
{
    colvec y(L.n_rows, fill::zeros);
    for (int i = 0; i < L.n_rows; i++)
    {
        double suma = 0;
        for (int j = 0; j < i; j++)
        {
            suma += L(i, j) * y(j);
        }
        y(i) = (b(i) - suma) / L(i, i);
    }
    return y;
}

/**
 * @param A: Una matriz A de cualquier tamano
 * @param b: Un vector d que es el vector de terminos independientes
 */
void fact_Cholesky(mat A, colvec b)

```

```

{
    //Revisa si es simetrica positiva definida con una funcion propia de Armadillo
    if (!A.is_sympd())
    {
        A = A * trans(A);
        b = b * trans(A);
    }
    //Llama a las demas funciones y las guarda en variables
    cout << "Matriz: \n"
         << A << endl;
    cout << "Vector: \n"
         << b << endl;
    mat L = cholesky(A);
    cout << "Matriz factorizada: \n"
         << L << endl;
    colvec y = sust_adelante(L, b);
    cout << "Vector independiente: \n"
         << y << endl;
    colvec x = sust_atras(trans(L), y);
    cout << "Solucion del sistema: \n"
         << x << endl;
}

int main()
{
    //Matriz A que es simetrica positiva definida
    mat A = "25 15 -5 -10; 15 10 1 -7; -5 1 21 4; -10 -7 4 18";
    //Vector de terminos independientes
    colvec d = "-25 -19 -21 -5";
    //Realiza la factorizacion de Cholesky
    fact_Cholesky(A, d);
    return 0;
}

```

### 3.4. Método 4: Método de Thomas

Código 12: Lenguaje Python.

```

#####
import numpy as np
#####

def thomas(matrizC, vectorTI):
    """
    Metodo de Thomas
    :param matrizC: matriz de coeficientes
    :param vectorTI: matriz de terminos independientes
    :return: X: solucion del sistema
    """
    A = matrizC
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(A[0])):

```

```

        if (i == j and (matrizC[i][j] == 0)):
            print("La matriz no es tridiagonal 1")
            return
        elif (j == (i + 1) and matrizC[i][j] == 0):
            print("La matriz no es tridiagonal 2")
            return
        elif (j == (i - 1) and matrizC[i][j] == 0):
            print("La matriz no es tridiagonal 3")
            return
        elif ((j > i + 1) and (matrizC[i][j] != 0)):
            print("La matriz no es tridiagonal 4")
            return
        elif (((j < i - 1) and (matrizC[i][j] != 0))):
            print("La matriz no es tridiagonal 5")
            return

xn = []
ci = 0
di = 0
qi = 0
bi = 0
pi = 0
n = len(matrizC)
if (len(matrizC) == len(vectorTI)):
    for i in range(0, n):
        if (i == 0):
            ci = matrizC[i][i + 1]
            bi = matrizC[i][i]
            di = vectorTI[i]
            pi = ci / bi
            qi = di / bi
            xn.append(qi)
        elif (i <= n - 2):
            ai = matrizC[i + 1][i]
            bi = matrizC[i][i]
            di = vectorTI[i]
            ci = matrizC[i][i + 1]
            pi = ci / (bi - pi * ai)
            qi = (di - qi * ai) / (bi - pi * ai)
            xn.append(qi - pi * xn[i - 1])
        else:
            ai = matrizC[i][i - 1]
            bi = matrizC[i][i]
            di = vectorTI[i]
            qi = (di - qi * ai) / (bi - pi * ai)
            xn.append(qi * xn[i - 1])
    return xn
else:
    print("Error: el vector y la matriz deben ser del mismo tamano")

def creaTridiagonal(N, a, b, c):
    '''
    Funcion para crear la matriz tridiagonal
    :param N: tamano de la matriz

```

```

:param a: valor debajo de la diagonal principal
:param b: valor de la diagonal principal
:param c: valor sobre la diagonal principal
:return: matriz: matriz tridiagonal
'''

matriz = np.zeros((N, N))
np.fill_diagonal(matriz, b)
n = N
for i in range(0, n - 1):
    matriz[i][i + 1] = c
    matriz[i + 1][i] = a
return matriz

def creaD(N, ext, inte):
    '''
    Funcion para crear el vector d
    :param N: tamaño del vector
    :param ext: valor en los extremos del vector
    :param inte: valor en el interior del vector
    :return: d: vector d
    '''

    n = N
    d = []
    for i in range(0, n):
        if ((i == 0) or (i == n - 2)):
            d.append(ext)
        else:
            d.append(inte)
    return d

if __name__ == '__main__':
    # Creacion de la matriz tridiagonal
    matrizC = creaTridiagonal(7, 1, 5, 1)
    # Creacion del vector D
    vectorTI = creaD(7, -12, -14)
    # Llamado del metodo
    print("#####")
    print("Metodo de Thomas\n")
    X = thomas(matrizC, vectorTI)
    print('X = {}'.format(X))

```

### 3.5. Método 5: Método de Jacobi

Código 13: Lenguaje C++.

```

#include <iostream>
#include <armadillo>

using namespace std;
using namespace arma;

```

```

/**
 * @param A: matriz de coeficientes
 * @param b: vector de terminos independientes
 * @param xInicial: vector de valores iniciales
 * @param MAXIT: cantidad de iteraciones maximas
 * @param TOL: tolerancia de la respuesta
 * @return tuple<vec, double>: vector solucion, error de la solucion
 */
tuple<vec, double> jacobi(mat A, vec b, vec xInicial, int MAXIT, double TOL)
{
    mat D(size(A), fill::zeros);
    mat U(size(A), fill::zeros);
    mat L(size(A), fill::zeros);

    for (int i = 0; i < A.n_rows; i++)
    {
        for (int j = 0; j < A.n_cols; j++)
        {
            if (j < i)
            {
                L(i, j) = A(i, j);
            }
            else if (j > i)
            {
                U(i, j) = A(i, j);
            }
            else if (i == j)
            {
                D(i, j) = A(i, j);
            }
            else
            {
                cout << "Error" << endl;
            }
        }
    }

    vec xk = xInicial;
    vec xk1;
    int iter = 0;
    double err = TOL + 1;

    while (iter < MAXIT)
    {
        xk1 = ((-D.i()) * (L + U) * (xk)) + ((D.i()) * (b));
        xk = xk1;
        err = norm(A * xk - b);

        if (err < TOL)
        {
            break;
        }
        else
    }
}

```



```

        {
            iter = iter + 1;
        }
    }
    return make_tuple(xk, err);
}

/**
 * Ejemplo numerico
 */
int main()
{
    tuple<vec, double> testJ=jacobi("5 1 1;1 5 1;1 1 5","7 7 7","0 0 0",100,0.000001);
    cout << "Aproximacion: \n"
          << get<0>(testJ) << endl;
    cout << "Error: " << get<1>(testJ) << endl;
    return 0;
}

```

### 3.6. Método 6: Método de Gauss-Seidel

Código 14: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo de Gauss-Seidel
    Parametros de Entrada
        @param matrizD: matriz de coeficientes
        @param matrizI: vector de terminos independientes
        @param x: valor inicial
        @param MAXIT: iteraciones maximas
        @param TOL: tolerancia de la respuesta

    Parametros de Salida
        @return xAprox: valor aproximado de X
        @return error: porcentaje de error del resultado obtenido
}%

clc;
clear;
warning('off', 'all');

function [xAprox, err] = gaussSeidel(matrizD, matrizI, x, MAXIT, TOL)

if(estrDiag(matrizD) == 0)
    disp("La matriz no es estrictamente diagonal dominante");
    return;
else
    L = tril(matrizD, -1);
    D = diag(diag(matrizD));
    U = triu(matrizD, 1);
    b = matrizI';
    iter = 0;
    xAprox = x';

```

```

xAnt = xAprox;
err = TOL + 1;
M = L + D;
inversa = inv(M);
iterl = [];
errl = [];

while(iter < MAXIT)
    xAprox = (-inversa*U*xAnt)+(inversa*b);
    iterl(iter+1) = iter;
    errl(iter+1) = err;
    err = norm(xAprox - xAnt);
    xAnt = xAprox;
    if(err < TOL)
        grafica(iterl, errl);
        return;
    else
        iter = iter + 1;
    endif
endwhile
grafica(iterl, errl);
return;
endif
endfunction

%{
    Parametros de Entrada
    @param A: matriz a determinar si es tridiagonal dominante o no.

    Parametros de Salida
    @return ft: retorna un valor de 1 o 0 si la matriz es dominante o no.
}%}
function ft = estrDiag(A)
    n = length(A);
    m = length(A(1));
    d = 0;

    for(i = 1 : n)
        suma = 0;
        for(j = 1 : m)
            if(i == j)
                d = A(i, j);
            else
                suma = suma + (A(i, j)).^2;
            endif
        endfor

        if abs(d) < sqrt(suma)
            ft = 0;
            return;
        endif
    endfor
    ft = 1;
    return;
endfunction

```

```

endfunction

%{
    Parametros de Entrada
    @param listaValoresX: valores del eje 'x'
    @param listaValoresY: valores del eje 'y'

    Parametros de Salida
    @return: Grafico de los datos ingresados
}%}
function grafica(listaValoresX, listaValoresY)
    plot(listaValoresX, listaValoresY, 'x-');
    title("Metodo de Gauss-Seidel");
    xlabel("Iteraciones");
    ylabel("% Error");
endfunction

%Valor inicial
x = [0 0 0];
%Iteraciones maximas
MAXIT = 10;
%Tolerancia
TOL = 0.000001;
%Matriz de coeficientes
A = [5 1 1; 1 5 1; 1 1 5];
%Vector de terminos independientes
B = [7 7 7];
%llamado de la funcion
[xAprox, err] = gaussSeidel(A, B, x, MAXIT, TOL);
printf("##### \n");
printf("Metodo de Gauss-Seidel \n");
printf('xAprox = %f\nxAprox = %f\nxAprox = %f\n%Error = %d \n', xAprox, err);

```

### 3.7. Método 7: Método de Relajacion

Código 15: Lenguaje Python.

```

#####
import numpy as np
import scipy.linalg as la
import matplotlib.pyplot as plt
#####

def relajacion(A, b, maxI, tol, w):
    """
    Metodo de Relajacion
    :param A: matriz de cofactores
    :param b: matriz de respuestas
    :param maxI: maxima cantidad de iteraciones
    :param tol: tolerancia para calcular error
    :param w: constante por usar en el metodo
    :return:
    """

```

```

'''
# Se debe verificar que la matriz sea definida positiva
if (np.all(np.linalg.eigvals(A) > 0)):
    pass
else:
    print("La matriz no es definida positiva")
    return
# Se debe verificar que la matriz sea tridiagonal
for i in range(len(A)):
    for j in range(len(A[0])):
        i0 = j - 1
        i1 = j + 1
        if (i == j):
            if i0 < 0 or i0 >= len(A[0]):
                if A[i][j] == 0 or A[i1][j] == 0:
                    print(1)
                    print("La matriz no es tridiagonal")
                    return
            elif i1 < 0 or i1 >= len(A[0]):
                if A[i][j] == 0 or A[i0][j] == 0:
                    print(2)
                    print("La matriz no es tridiagonal")
                    return
            else:
                if A[i][j] == 0 or A[i0][j] == 0 or A[i1][j] == 0:
                    print(3)
                    print("La matriz no es tridiagonal")
                    return
        else:
            if abs(i - j) > 1:
                if A[i][j] != 0:
                    print(i)
                    print(j)
                    print("La matriz no es tridiagonal")
                    return

# Calculo de D, L y U
(P, L, U) = la.lu(A)
D = np.diag(np.diag(U))
# k es la iteracion actual
k = 0
# Un requisito es que la matriz D+wL sea invertible
x = D + w * L
try:
    inverse = np.linalg.inv(x)
except np.linalg.LinAlgError:
    print("D+wL no es invertible")
    return
else:
    # lista de errores para graficar
    lista_error = []
    x = []
    for i in A:
        x.append(0)

```

```

x = np.transpose(x)
# iteraciones, esperando que se cumplan las iteraciones
while k < maxI:
    x0 = np.transpose(x)
    M = w ** -1 * (w * L + D)
    N = w ** -1 * ((1 - w) * D - w * U)
    x = np.matmul(np.matmul(np.linalg.inv(M), N), x0) + \
        np.matmul(np.linalg.inv(M), b)
    errorM = b - np.matmul(A, np.transpose(x))
    errorM = np.transpose(errorM)
    error = 0
    # Revisar si el error se cumple, sino se sigue iterando
    for i in errorM:
        error = error + i ** 2
    lista_error.append(error ** 0.5)
    if (error ** 0.5 < tol):
        break
    k = k + 1

# Construccion de tabla
plt.plot(lista_error, label='errores por interacion')
plt.ylabel('Error')
plt.xlabel('Iteracion')
# Los ejes estan limitados por las iteraciones y el error maximo
plt.axis([0, maxI, 0, max(lista_error)])
plt.title('Relajacion')
plt.legend()
plt.show()
print('x: ' + str(x) + ', error: ' + str(error))
return x, error

if __name__ == '__main__':
    # Constante w
    w = 1.24
    # Maximo iteraciones
    MAXIT = 5
    # Tolerancia
    TOL = 0.0001
    # Matriz de cofactores
    A = [[4, 3, 0], [3, 4, -1], [0, -1, 4]]
    # Vector de respuestas
    b = [7, 7, 7]
    # Llamado de la funcion
    print("#####")
    print("Metodo del Punto Fijo \n")
    relajacion(A, b, MAXIT, TOL, w)

```

### 3.8. Método 8: Método de la Pseudoinversa

Código 16: Lenguaje C++.

```
#include <iostream>
```

```

#include <armadillo>

using namespace std;
using namespace arma;

/**
 * @param A: matriz de coeficientes
 * @param b: vector de terminos independientes
 * @param MAXIT: cantidad de iteraciones maximas
 * @param TOL: tolerancia de la respuesta
 * @return tuple<vec, double>: vector solucion, error de la solucion
 */

tuple<vec, double> pseudoinversas(Mat<double> A, vec b, int MAXIT, double TOL)
{
    int iter = 0;
    double err = TOL + 1;

    // Se define el valor de alpha para el metodo iterativo de Schlutz
    double alpha = eig_sym(A * trans(A)).max();
    //Se genera la el vector inicial
    Mat<double> xk = (1 / alpha) * trans(A);
    //matriz identidad
    // vec I = eye(A.n_cols);

    Mat<double> I(A.n_rows, A.n_rows, fill::eye);
    //variable para la interacion
    mat xk1;

    while (iter < MAXIT)
    {
        xk1 = xk * (2 * I - A * xk);
        // cout << xk1 << endl;
        xk = xk1;
        err = norm(A * xk * A - A, 2);

        if (err < TOL)
        {
            break;
        }
        else
        {
            iter = iter + 1;
        }
    }
    mat A_pseudo = xk;
    vec x = A_pseudo * b;

    return make_tuple(x, err);
}

/**
 * Ejemplo numerico

```

```

*/
int main()
{
    Mat<double> A = {{1, 2, -1}, {-3, 1, 5}};
    Col<double> b = {1, 4};
    tuple<vec, double> testP = pseudoinversas(A, b, 100, 0.00001);
    cout << "Aproximacion: \n"
         << get<0>(testP) << endl;
    cout << "Error: " << get<1>(testP) << endl;
    return 0;
}

```

## 4. Polinomio de Interpolación

### 4.1. Método 1: Método de Lagrange

Código 17: Lenguaje C++.

```

#include <iostream>
#include <ginac/ginac.h>
#include <armadillo>
#include <cmath>

using namespace std;
using namespace GiNaC;
using namespace arma;

/**
 * @param xv: Un vector de cualquier tamaño que corresponde al eje X del polinomio
 * @param k: La cantidad de puntos que se han evaluado en el polinomio
 * @return q: La función de Lagrange que se le suma al polinomio de interpolación
 */
ex Lk(vec xv, int k)
{
    //Se carga la variable simbólica
    symbol x("x");
    symtab table;
    table["x"] = x;
    parser reader(table);
    //Se definen las variables
    int m = xv.size();
    ex q = 1;
    for (int i = 0; i < m; i++)
    {
        if (i != k)
        {
            //Se realiza la multiplicación de la función de Lagrange
            q *= (x - xv(i)) / (xv(k) - xv(i));
        }
        else
        {
            continue;
        }
    }
}

```

```

    }
}
return q;
}

/**
 * @param xv: Un vector de cualquier tamaño que corresponde al eje X del polinomio
 * @param yv: Un vector de cualquier tamaño que corresponde al eje Y del polinomio
 * @return p: El polinomio de interpolación del conjunto de puntos
 */
ex lagrange(vec xv, vec yv)
{
    //Se carga la variable simbólica
    symbol x("x");
    symtab table;
    table["x"] = x;
    parser reader(table);
    //Se definen las variables
    int m = xv.size();
    int n = m - 1;
    ex p = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        //Se realiza la sumatoria del polinomio de interpolación
        p += yv(i + 1) * Lk(xv, i + 1);
    }
    return simplify_indexed(expand(p));
}

int main()
{
    //Vectores x y y tomados como ejemplo
    vec xv = "-2 0 1";
    vec yv = "0 1 -1";
    //Se carga la función y se ejecuta el ejemplo
    ex pol_int = lagrange(xv, yv);
    cout << "Polinomio de interpolación : " << pol_int << endl;
    return 0;
}

```

## 4.2. Método 2: Método de Diferencias Divididas de Newton

Código 18: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo de Diferencias Divididas de Newton
    Parametros de Entrada
        @param listaP0: vector con los pares ordenados xk, yk

    Parametros de Salida
        @return polinomio: polinomio de interpolación
}%

```



```

clc;
clear;
pkg load symbolic;
warning("off","all");

function polinomio = dd_newton(listaP0)
    [n, m] = size(listaP0);

    if(m ~= 2)
        disp("Error, la cantidad de puntos ingresada no es correcta");
        return;
    else
        x = sym('x');
        rk = [];
        for(i = 1 : n)
            rk = [rk listaP0(i, 2)];
        endfor

        polinomio = listaP0(1, 2);
        multil = 1;
        m = n - 1;
        for(i = 2 : n)
            multil = multil * (x - listaP0(i - 1, 1));
            rk1 = [];
            for(j = 1: m)
                numerador = rk(j) - rk(j + 1);
                denominador = listaP0(j, 1) - listaP0(j + i - 1, 1);
                rk1 = [rk1 (numerador / denominador)];
            endfor
            m = m - 1;
            polinomio = polinomio + rk1(1) * multil;
            rk = rk1;
        endfor
        polinomio = expand(polinomio);
        return;
    endif
endfunction

%Vector de pares ordenados
listaP0 = [-2 0; 0 1; 1 -1];
% listaP0 = [1 2/3; 3 1; 5 -1; 6 0];
%Llamado de la funcion
polinomio = dd_newton(listaP0);
printf("##### \n");
printf("Metodo Diferencias Divididas de Newton \n");
printf('Polinomio de Lagrange\n');
disp(polinomio);

```

### 4.3. Método 3: Trazador Cúbico Natural

Código 19: Lenguaje Python.

```
#####
```

```

import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy
import numpy as np
from math import *
from sympy import *
import sympy as sym
from sympy import symbols
from Jacobi import jacobi
#####

def traz_cubico(xk, yk):
    '''
    Metodo del Trazador Cubico
    :param xk: valores en x de los pares ordenados
    :param yk: valores en y de los pares ordenados
    :return: Sx: trazadores cubicos
    '''
    points = []
    n = len(xk)
    for i in range(0, n):
        points.append([xk[i], yk[i]])

    points = np.array([np.array(p) for p in points])
    delta_hk = points[1:, 0] - points[:-1, 0]
    delta_yk = points[1:, 1] - points[:-1, 1]
    A, u = [], []
    k = delta_hk.shape[0]
    for i in range(1, k):
        # Primer caso Ms[1] = 0
        if i == 1:
            A.append([2 * (delta_hk[i - 1] + delta_hk[i]),
                      delta_hk[i]] + [0] * (k - 3))
        # Segundo caso Ms[n+1] = 0
        elif i == k - 1:
            A.append([0] * (k - 3) + [delta_hk[i - 1],
                                     2 * (delta_hk[i - 1] + delta_hk[i])])
        else:
            A.append([0] * (i - 2) + [delta_hk[i - 1],
                                     2 * (delta_hk[i - 1] + delta_hk[i]),
                                     delta_hk[i]] + [0] * (k - 2 - i)])
        # Creando el vector u
        u.append(6 * (delta_yk[i] / delta_hk[i] -
                     delta_yk[i - 1] / delta_hk[i - 1]))

    A = np.array([np.array(a) for a in A])
    u = np.array(u)
    # Resolviendo el sistema mediante Jacobi
    x0 = np.zeros(u.shape)
    Ms = jacobi(A, u, u * 0, 0.0000001)
    # Append Ms[1] = 0 and Ms[n+1] = 0
    Ms = np.append(0, np.append(Ms, 0))

```

```

a, b, c, d = [], [], [], []
xk = points[:, 0]
yk = points[:, 1]
# Calculando los coeficientes
for i in range(k):
    a.append((Ms[i + 1] - Ms[i]) / (6 * delta_hk[i]))
    b.append(Ms[i] / 2)
    c.append((yk[i + 1] - yk[i]) / delta_hk[i] -
              (2 * delta_hk[i] * Ms[i] + delta_hk[i] * Ms[i + 1]) / 6)
    d.append(yk[i])
a = np.array(a)
b = np.array(b)
c = np.array(c)
d = np.array(d)

# Polinomio trazador
x = sympy.Symbol('x')
Sx_tabla = []
for i in range(0, len(xk) - 1, 1):
    with evaluate(False):
        pxtramo = a[i] * (x - xk[i]) ** 3 + b[i] * \
                  (x - xk[i]) ** 2 + c[i] * (x - xk[i]) + d[i]
        Sx_tabla.append(pxtramo)

print('Trazadores cubicos por tramos \n')
for tramo in range(1, len(xk), 1):
    print('Sx = [' + str(xk[tramo - 1]) + ', ' + str(xk[tramo]) + ']\n')
    print(str(Sx_tabla[tramo - 1]))

return a, b, c, d, Sx_tabla

if __name__ == '__main__':
    # Valores xk
    xk = [1, 1.05, 1.07, 1.1]
    # Valores yk
    yk = [2.718282, 3.286299, 3.527609, 3.905416]
    # Funcion
    def func(x): return 3*x*(math.pow(math.e, x)) - 2*(math.pow(math.e, x))
    # Llamado de la funcion
    print("#####")
    print("Metodo del Trazador Cubico \n")
    traz_cubico(xk, yk)

```

#### 4.4. Método 4: Cota Error Polinomio de Interpolación

Código 20: Lenguaje M.

```

%{
Cota de Error del Metodo de la Interpolacion
Parametros de Entrada
    @param func: funcion a la cual se le aplicara el algoritmo
    @param puntos: numero de puntos

```

```

    Parametros de Salida
    @return xAprox: valor aproximado de x
    @return error: porcentaje de error del resultado obtenido
%}

% |f(x) - p(x)| <= |f^(n+1)(Ex)*1/(n+1!)*(x-x0)(x-x1)...(x-xn)|
%% fmax = f^(n+1)(Ex) ==> donde la funcion derivada a la n+1 es maxima
%% a = 1/(n+1!) ==> alpha
%% p = (x-x0)(x-x1)...(x-xn)
% Ex pertenece a [a,b]

clc
clear;
%
%Se carga el paquete simbolico%

function [error] = cota_poly_inter(func, puntos)
pkg load symbolic
syms x
%devuelve la cantidad de puntos
n = length(puntos);
puntos = sort(puntos);

a = puntos(1);
b = puntos(n);

m = 1/factorial(n+1);
p = '';

%Haciendo el polinomio p
for i = 1:length(puntos)
    var = int2str(puntos(i))
    class(var)
    if i == 1
        p = [p, '(x-',var,')'];
    else
        p = [p, '*(x-',var,')'];
    end
end

%Se pasa la funcion a simbolico
h = sym(p);
%Se pasa la funcion simbolica a ecuacion
h1=matlabFunction(h);
%se deriva la funcion
hd = diff(h,x)==0;
%puntos criticos
puntos_criticos_h = double(cell2mat(solve(hd,x)));
%Extremos del intervalo

```

```

puntos_a_evaluar_h=[a b puntos_criticos_h'];
valores_evaluados_h= [h1(puntos_a_evaluar_h)];
[pmax,p_max]=max(valores_evaluados_h);

%%Encontrar el maximo de la funcion en un intervalo

%%Para Fmax
%Se pasa la funcion a simbolico
f = sym(func);
%Se pasa la funcion simbolica a ecuacion
f1=matlabFunction(f);
%se deriva la funcion
fd = diff(f,x,n+1)==0;
%puntos criticos
puntos_criticos = double(cell2mat(solve(fd,x)));
%Extremos del intervalo
puntos_a_evaluar=[a b puntos_criticos'];
valores_evaluados= [f1(puntos_a_evaluar)];
[fmax,x_max]=max(valores_evaluados);

error = abs(fmax*m*p);

endfunction

func = 'x^2+4';
puntos = [2, 3, 5];

[error] = cota_poly_inter(func, puntos)

```

#### 4.5. Método 5: Cota Error Trazador Cúbico Natural

Código 21: Lenguaje Python.

```

#####
import numpy as np
import sympy as sym
#####

def cota_tras_cubico(func, S):
    """
    Metodo de Cota de Error del Trazador Cubico
    :param func: funcion con al menos 4ta derivada
    :param S: Lista de puntos
    :return: cota_error: Cota de error
    """
    h = 0

```

```

x = sym.symbols('x')
f = sym.sympify(func)      # La funcion se castea en x
f4 = sym.diff(f, x, 4)     # La 4ta derivada
norm = 0
for i in range(len(S)):    # Norma infinira
    if (f4.subs(x, S[i]) > norm):
        norm = f4.subs(x, S[i])
    else:
        pass

for i in range(len(S) - 1): # Valor h
    if (S[i+1] - S[i] > h):
        h = S[i+1] - S[i]
    else:
        pass
cota_error = 5*h**4 * norm / 384    # Valor cota
return float(cota_error)

if __name__ == '__main__':
    S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
    func = 'x**4 - (1 / x)'
    cota_error = cota_tras_cubico(func, S)
    print("#####")
    print("Metodo de Cota de Error del Trazador Cubico\n")
    print('Cota de error = {}'.format(cota_error))

```

## 5. Integración Numérica

### 5.1. Regla del Trapecio y Cota de Error

Código 22: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo de la Regla del Trapezio
    Parametros de Entrada
        @param func: funcion a la cual se le calculara el area
        @param a: valor inferior
        @param b: valor superior

    Parametros de Salida
        @return xAprox: valor aproximado del area
        @return err: porcentaje de error del resultado obtenido
}%

clc;
clear;
pkg load symbolic;
warning("off","all");

function [xAprox, err] = trapecio(func, a, b)
    syms f(x);

```

```

f(x) = func;
xAprox = ((b - a)/(2))*((func(a)) + (func(b)));
fd = diff(f, 2);
fd = function_handle(fd);
lista = [];
lista(1) = abs(fd(a));
lista(2) = abs(fd(b));
vmax = max(lista);
err = (((b - a)**3)/12)*vmax;
return;
endfunction

%Intervalo inferior
a = 2;
%Intervalo superior
b = 5;
%Funcion
func = @(x) log(x);
%llamado de la funcion
[xAprox, err] = trapecio(func, a, b);
% trapecio(func, a, b);
printf("##### \n");
printf("Metodo de la Regla del Trapecio \n");
printf('xAprox = %f\nError = %f \n', xAprox, err);

```

## 5.2. Regla de Simpson y Cota de Error

Código 23: Lenguaje Python.

```

#####
from numpy import double
from sympy import symbols, sympify, diff
#####

def simpson(funcion, a, b):
    """
    Metodo de la Regla de Simpson
    :param funcion: funcion a la cual se le calculara el area
    :param a: intervalo inferior
    :param b: intervalo superior
    :return: xAprox: aproximacion del area
    :return: error: error de la solucion
    """
    x = symbols('x')
    f = sympify(funcion)
    m = (a + b)/2
    xAprox = double(((b - a)/6)*(f.subs(x, a) + 4*f.subs(x, m) + f.subs(x, b)))
    fdddd = diff(f, x, x, x, x)
    lista = []
    lista.append(abs(double(fdddd.subs(x, a))))
    lista.append(abs(double(fdddd.subs(x, b))))

```

```

vmax = max(lista)
error = double((((b - a)/2)**5)/(90))*(vmax))
return xAprox, error

if __name__ == '__main__':
    # Intervalo inferior
    a = 2
    # Intervalo superior
    b = 5
    # Funcion
    funcion = "ln(x)"
    # Llamado de la funcion
    print("#####")
    print("Metodo de la Regla de Simpson \n")
    xAprox, error = simpson(funcion, a, b)
    print('xAprox = {}\n%Error = {}'.format(xAprox, error))

```

### 5.3. Regla Compuesta del Trapecio y Cota de Error

Código 24: Lenguaje C++.

```

#include <iostream>
#include <ginac/ginac.h>
#include <armadillo>
#include <cmath>

using namespace std;
using namespace GiNaC;
using namespace arma;

/**
 * @param func: La funcion a evaluar en la regla del trapecio
 * @param a: El primer elemento del intervalo a evaluar
 * @param b: El ultimo elemento del intervalo a evaluar
 * @return p: El polinomio de interpolacion del conjunto de puntos
 */
double trapecio(string func, double a, double b)
{
    //Se carga la variable simbolica
    symbol x("x");
    syntab table;
    table["x"] = x;
    parser reader(table);
    ex f = reader(func);
    //Se evalua la variable simbolica en los intervalos
    ex f0 = evalf(subs(f, x == a));
    ex f1 = evalf(subs(f, x == b));
    //Se define la variable h
    ex h = (b - a) / 2;
    //Se calcula la integral
    double I = ex_to<numeric>(h * (f0 + f1)).to_double();
    return I;
}

```



```

}

/**
 * @param func: La funcion a evaluar en la regla del trapecio compuesta
 * @param a: El primer elemento del intervalo a evaluar
 * @param b: El ultimo elemento del intervalo a evaluar
 * @param N: La cantidad de puntos que se le van a pasar al intervalo
 * @return p: El polinomio de interpolacion del conjunto de puntos
 */
tuple<double, double> trapecio_compuesto(string func, double a, double b, int N)
{
    //Se carga la variable simbolica
    symbol x("x");
    syntab table;
    table["x"] = x;
    parser reader(table);
    ex f = reader(func);
    //Se define la variable h
    double h = (b - a) / (N - 1);
    //Se define el vector de puntos sobre el que se va a operar
    vec xv(N, fill::zeros);
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        xv(i) = a;
        a += h;
    }
    //Se realiza el calculo de la integral mediante la regla del trapecio
    double I = 0;
    for (int i = 0; i < N - 1; i++)
    {
        I += trapecio(func, xv(i), xv(i + 1));
    }
    //Se obtiene la segunda derivada de la funcion
    ex fd = f.diff(x, 2);
    vec xd(2, fill::zeros);
    //Se obtiene el alfa maximo a utilizar en la cota de error
    //mediante el maximo de la segunda derivada
    xd(0) = ex_to<numeric>(evalf(subs(fd, x == a))).to_double();
    xd(1) = ex_to<numeric>(evalf(subs(fd, x == b))).to_double();
    double alphaMax = *max_element(xd.begin(), xd.end());
    //Se obtiene la cota de error
    double error = (((b - a) * (h * h)) / 12) * alphaMax;
    return make_tuple(I, error);
}

int main()
{
    //Funcion a integrar
    string f = "log(x)";
    //Regla del trapecio y cota de error
    tuple<double, double> testTrapecio = trapecio_compuesto(f, 2, 5, 1000);
    cout << "Regla del Trapecio: " << get<0>(testTrapecio) << endl;
    cout << "Cota de Error: " << get<1>(testTrapecio) << endl;
    return 0;
}

```

```
}
```

## 5.4. Regla Compuesta de Simpson y Cota de Error

Código 25: Lenguaje Python.

```
#####
import sympy as sym
#####

def simpson_compuesto(funcion, numero_puntos, intervalo):
    '''
    Metodo de Simpson Compuesto para calculo de integrales
    :param funcion: funcion con al menos 4ta deriva
    :param numero_puntos: Cantidad de puntos a utilizar
    :param intervalo: lista con valor inicial a final que define
    los limites de la integral
    :return: integral, error: Resultado de integral y error
    '''
    x = sym.symbols('x')
    f = sym.sympify(funcion)
    suma_pares = 0
    suma_impares = 0
    x0 = intervalo[0]
    h = (intervalo[1]-intervalo[0])/(numero_puntos-1)
    lista_x = []
    lista_x.append(x0)
    k = 1
    while k <= numero_puntos:
        temp = x0+k*h
        lista_x.append(temp)
        k = k+1
    for i in range(len(lista_x)-1):
        if i == 0:
            pass
        else:
            if i % 2 == 0:
                suma_pares = suma_pares+f.subs(x, i)
            else:
                suma_impares = suma_impares+f.subs(x, i)
    integral = h/3 * \
        (f.subs(x, lista_x[0])+2*suma_pares +
         4*suma_impares+f.subs(x, lista_x[-1]))
    integral = float(integral)
    f4 = sym.diff(f, x, 4)
    error = (intervalo[1]-intervalo[0])/180 * abs(f4.subs(x, intervalo[0]))
    print("La integral da como resultado " +
          str(integral)+" con un error de "+str(error))
    return integral, error

if __name__ == '__main__':
```

```

funcion = 'ln(x)',
# Llamado de la funcion
print("#####")
print("Metodo de Simpson Compuesto y Cota de Error \n")
simpson_compuesto(funcion, 7, [2, 5])

```

## 5.5. Cuadratura Gaussiana y Cota de Error

Código 26: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo de Diferencias Divididas de Newton
    Parametros de Entrada
        @param funcion: funcion a calcular la integral
        mediante el metodo de cradraturas gaussianas
        @param a: intervalo inferior de la integral
        @param b: intervalo superior de la integral
        @param n: orden del polinomio

    Parametros de Salida
        @return xAprox: aproximacion de la integral
        @return err: error del calculo
}%

clc;
clear;
warning("off","all");
pkg load miscellaneous;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
# Se utiliza el paquete miscellaneous, este se puede
# instalar utilizando el comando:
# pkg install --forge miscellaneous
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [xAprox, err] = cuad_gaussiana(funcion, a, b, n)
    xAprox = 0;
    i = 1;
    legendrePol = legendrepoly(n);
    cerosPol = roots(legendrePol);
    derPol = polyder(legendrePol);
    while(i <= n)
        xi = cerosPol(i);
        Pi = polyval(derPol, xi);
        wi = 2/((1-(xi^2))*(Pi)^2);
        xAprox = xAprox + wi*funcion(xi);
        i = i + 1;
    endwhile
    q = integral(funcion, a, b);
    xAprox;
    err = abs(xAprox - q);
endfunction

%Intervalos de la integral

```

```

a = -1;
b = 1;
%Grado del polinomio
n = 3;
%Funcion
funct = @(x) exp(x).*cos(x);
%llamado de la funcion
[xAprox, err] = cuad_gaussiana(funct, a, b, n);
printf("##### \n");
printf("Metodo de las Cuadraturas Gaussianas \n");
printf('xAprox = %f\nError = %d \n', xAprox, err);

```

## 6. Diferenciación Numérica

### 6.1. Método de Euler

Código 27: Lenguaje M.

```

%{
    Cota de Error del Metodo de la Interpolacion
    Parametros de Entrada
        @param func: funcion a la cual se le aplicara el algoritmo
        @param a: inicio del intervalo
        @param b: fin del intervalo
        @param h: paso de iteracion

    Parametros de Salida
        @return par: pares ordenados
        @return pol: polinomio de interpolacion
        @return error: porcentaje de error del resultado obtenido
}%
clc;
clear;

function [xn yn] = euler(func,a,b,y0,N)
    pkg load symbolic;
    syms xy
    fs = sym(func);
    fe = matlabFunction(fs);

    h = (b-a)/(N-1);

    xn = a:h:b;
    yn = zeros(1,N);
    yn(1) = y0;

    for n=1:N-1
        yn(n+1)=yn(n)+h*fe(xn(n), yn(n));
        plot(xn,yn);
    end

```

```

        par =(xn, yn)
    endfor
endfunction

%Valores iniciales
a = 0;
b = 2;

y0 = 0.5;
%Numero de iteraciones
N=11;
%Funcion
func = 'y-x^2+1'
%Llamado de la funcion
printf("##### \n");
printf("Metodo de Euler \n");
[xn yn] = euler(func, a, b, y0, N);

```

## 6.2. Método Predictor Corrector

## 6.3. Runge-Kutta de Orden 4

Código 28: Lenguaje M.

```

%{
    Metodo de Runge-Kutta de Orden 4
    Parametros de Entrada
        @param func: funcion a la cual se le aplicara el metodo
        @param a: valor inferior del intervalo
        @param b: valor superior del intervalo
        @param y0: valor inicial de y0
        @param pasoh: paso h

    Parametros de Salida
        @return paresXkYk: pares ordenados con los valores de xk yk
        @return polInter: polinomio de interpolacion
}%

clc;
clear;
pkg load symbolic;
warning("off","all");

function [paresXkYk, polInter] = runge_kutta_4(func, a, b, y0, pasoh)
    sym 'x';
    sym 'y';
    x = [a : pasoh : b]';
    n = size(x)(1);
    y = zeros(1, n)';
    y(1) = y0;
    paresXkYk = zeros(n, 2);
    f = matlabFunction(sym(func));

```

```

for(i = 1 : n - 1)
    k1 = f(x(i), y(i));
    k2 = f(x(i) + pasoh/2, y(i) + pasoh * k1/2);
    k3 = f(x(i) + pasoh/2, y(i) + pasoh * k2/2);
    k4 = f(x(i) + pasoh, y(i) + pasoh * k3);
    y(i+1) = y(i) + pasoh * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;
endfor

for (i = 1 : n)
    paresXkYk(i, :) = [x(i) y(i)];
endfor

paresXkYk;
polInter = dd_newton(paresXkYk);

polGrafica = matlabFunction(polInter);
fplot(polGrafica, [a, b], 'b—');
grid on;
title('Grafica Polinomio de Interpolacion');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
endfunction

%{
Metodo de Diferencias Divididas de Newton
Parametros de Entrada
    @param listaP0: vector con los pares ordenados xk, yk

Parametros de Salida
    @return polinomio: polinomio de interpolacion
%}
function polinomio = dd_newton(listaP0)
    [n, m] = size(listaP0);

    if(m ~= 2)
        disp("Error, la cantidad de puntos ingresada no es correcta");
        return;
    else
        x = sym('x');
        rk = [];
        for(i = 1 : n)
            rk = [rk listaP0(i, 2)];
        endfor

        polinomio = listaP0(1, 2);
        multi1 = 1;
        m = n - 1;
        for(i = 2 : n)
            multi1 = multi1 * (x - listaP0(i - 1, 1));
            rk1 = [];
            for(j = 1: m)
                numerador = rk(j) - rk(j + 1);
                denominador = listaP0(j, 1) - listaP0(j + i - 1, 1);
            endfor
        endfor
    end
endfunction

```

```

        rk1 = [rk1 (numerador / denominador)];
    endfor
    m = m - 1;
    polinomio = polinomio + rk1(1) * multil;
    rk = rk1;
endfor
polinomio = expand(polinomio);
return;
endif
endfunction

%Intervalo inferior
a = 0;
%Intervalo superior
b = 1;
%Paso h
pasoh = 0.1;
%Valor inicial de y0
y0 = 1;
%Funcion
funct = '-x * y + 4 * x/y';
printf("##### \n");
printf("Metodo de Runge-Kutta \n");
%llamado de la funcion
[paresXkYk, polInter] = runge_kutta_4(funct, a, b, y0, pasoh)

```

## 6.4. Adam-Bashford

Código 29: Lenguaje Python.

```

#####
import sympy as sym
import matplotlib.pyplot as plt
#####

def adam_bashford_4(funcion, intervalo, paso_h, y0):
    """
    Adam-Bashford
    :param funcion: f(x,y)=dx/dy
    :param intervalo: lista de dos numeros, rango de estudio
    :param paso_h: entero, cantidad de puntos por usar
    :param y0: valor de y0
    :return: lista de tuplas de la forma {xk,yk}
    """
    x = sym.symbols('x')
    y = sym.symbols('y')
    f = sym.sympify(funcion)
    h = (intervalo[1]-intervalo[0])/(paso_h-1)
    xn = []
    k = 0
    while k < paso_h:
        x_temp = intervalo[0]+k*h

```

```

        xn.append(x_temp)
        k = k+1
yk = [y0]
k = 0
while k < 3:
    yn1 = yk[k]+h*f.subs({x: xn[k], y: yk[k]})
    yk.append(yn1)
    k = k+1

k = 3
while k < paso_h-1:
    yk1 = yk[k]+h/24 * (55 * f.subs({x: xn[k],
        y: yk[k]})-59*f.subs({x: xn[k-1],
        y: yk[k-1]}) + 37*f.subs({x: xn[k-2],
        y: yk[k-2]})-9*f.subs({x: xn[k-3],
        y: yk[k-3]}))
    yk.append(yk1)
    k = k+1
print(xn)
print(yk)
plt.ylabel('yk')
plt.xlabel('xk')
plt.plot(xn, yk)
plt.show()
pares_ordenados = []
for i in range(len(xn)):
    temp = {xn[i], yk[i]}
    pares_ordenados.append(temp)
return temp

if __name__ == '__main__':
    intervalo = [1, 5]
    funcion = 'x**2 - (1 / y)'
    paso = 10
    y0 = 1
    print("#####")
    print("Metodo de Adam-Bashford\n")
    adam_bashford_4(funcion, intervalo, paso, y0)

```

## 7. Valores y Vectores Propios