

# Simulación

## Resumen Primer Parcial

## Índice

<b>UNIDAD 1: Introducción</b>	<b>3</b>
Objetivo de la simulación	3
Distintas formas de estudiar un sistema	4
Clasificación de los Sistemas	4
Cajas blancas, negras y grises	7
Ventajas de la simulación:	7
Desventajas de la simulación:	8
Estructura de los modelos de simulación:	8
Peligros de la Simulación:	9
Tipos de simulación	9
Lenguajes de propósito general VS Lenguajes de Simulación	9
Lenguajes de propósito general	10
Lenguajes de Simulación	10
Etapas del proceso de Simulación	11
Técnicas de Validación del modelo	11
Modelado de componentes	12
Intervalo de confianza	12
Tamaño de la muestra	13
<b>Unidad 2: Generadores de Números Aleatorios</b>	<b>13</b>
Números Pseudoaleatorios	15
Propiedades de los números pseudo aleatorios	15
Métodos para generar estos números pseudoaleatorios	16
Método Congruencial Lineal o Mixto	16
Método Congruencial Multiplicativo	17
Pruebas de bondad de ajuste	17
Prueba de Ji-Cuadrado	17
Prueba de Kolmogorov- Smirnov	20
Pruebas de validación de los generadores aleatorios:	22
<b>Unidad 3: Variables aleatorias</b>	<b>22</b>
Método de la transformada inversa	22
Generación de variables aleatorias	23
Distribución uniforme	23
Distribución exponencial negativa	24
Distribución normal	24
Distribución de Poisson	25
Pruebas de bondad de ajuste de variables aleatorias	26
<b>Unidad 4: Modelos de Simulación Estáticos</b>	<b>26</b>
Pasos de este método	27
Teorema de Bernoulli	27
Pasos	27
Aplicaciones	27

<b>Unidad 5: Modelos de Simulación Dinámicos</b>	<b>28</b>
Teoría de colas - Modelado de sistemas de colas	28
Disposición de los servidores	29
Sistema elemental	30
Medidas de desempeño	31
Ley de Little	32
Modelos	35
Modelo M/M/1	35
Modelo M/M/s (múltiples servidores)	36
<b>Anexo</b>	<b>37</b>
Pro tips de Profe Carena para Montecarlo	37
Modelo de inventario	37
No inventario	39
Pro tips de Profe Carena para modelo de Colas Básicos	39
Funciones de Excel	40

## UNIDAD 1: Introducción

**Modelo:** Es una representación de la realidad. Tenemos un sistema que necesitamos reproducir mediante un modelo: Esquemas, grafos, dibujos, maquetas, modelos físicos, o modelos matemáticos. El propósito de un modelo es ayudarnos a entender , explicar o mejorar un sistema es decir a ayudarnos a organizar y clasificar conceptos confusos e inconsistencias. Los modelos adecuadamente concebidos pueden ayudar a eliminar esta ambigüedad y proporcionan un modelo de comunicación más eficiente y efectivo. Cada modelo puede servir como un medio de comunicación y se lo puede tomar como una forma de simulación.

**Simular:** Hacer evolucionar un Modelo para observar su comportamiento a través del tiempo.

**Simulación:** Es el proceso de construir un programa de computadora que describa el comportamiento del sistema de interés, o refleje el modelo que lo representa, y proceder a experimentar con el programa o modelo para llegar a conclusiones que apoyen la toma de decisiones.

Simular entonces es “fingir”, es llegar a la esencia de algo prescindiendo de la realidad y es la técnica de resolver problemas siguiendo los cambios en el tiempo de un modelo (dinámico o no).

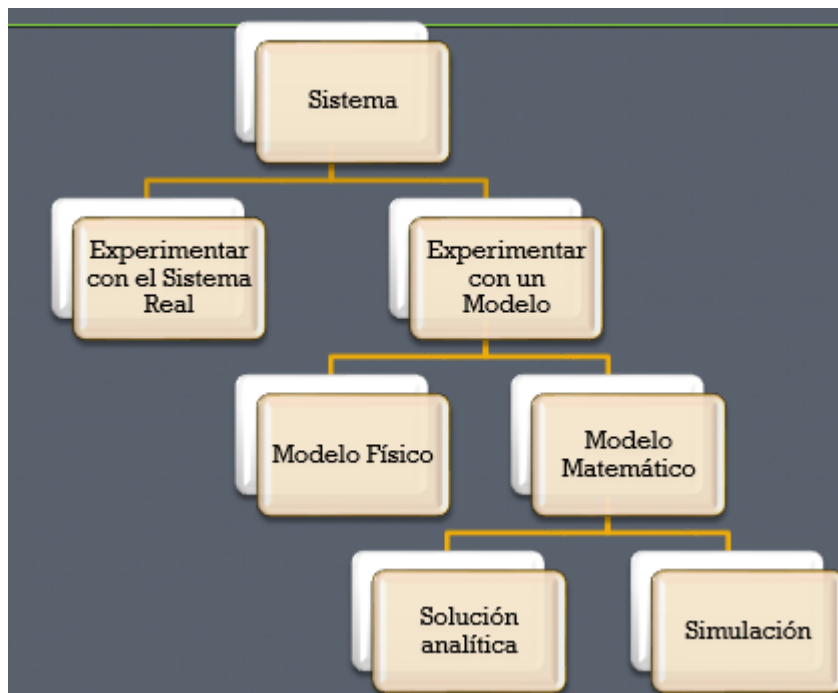
**Definición de Simulación de Robert E.Shannon:** “Es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso, y conducir experimentos con ese modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar estrategias con las cuales se puede operar el sistema.”

**Definición de Simulación de H.Maisel y G.Gnugnoli:** Es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Que involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos períodos de tiempo.

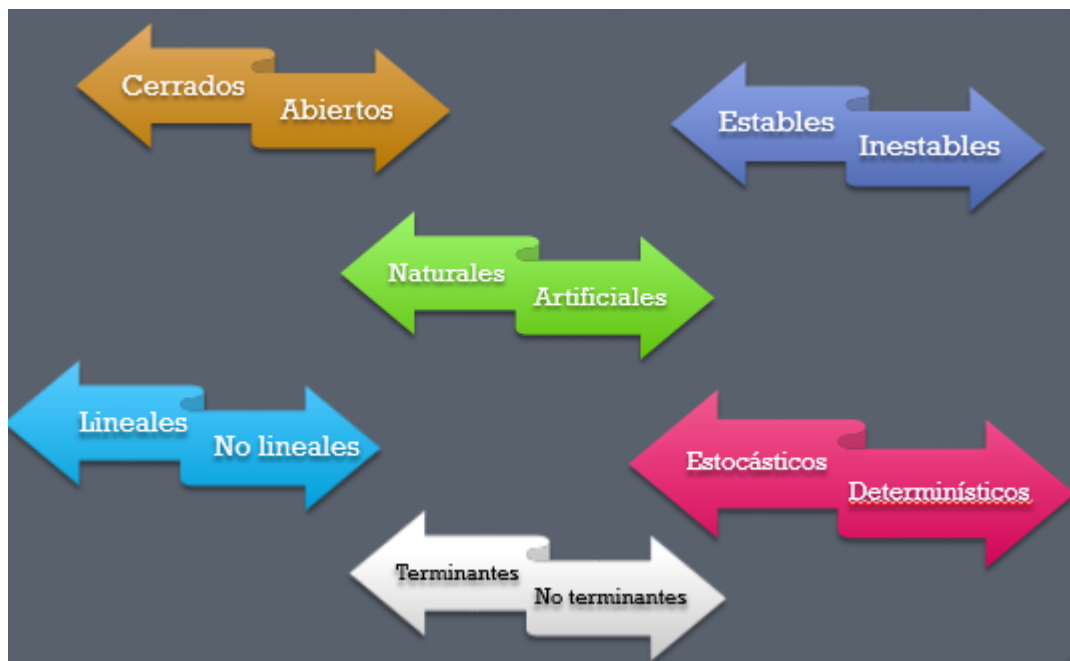
### Objetivo de la simulación

- Describir el comportamiento de sistemas.
- Postular teorías o hipótesis que expliquen el comportamiento observado.
- Usar estas teorías para predecir un comportamiento futuro, es decir, los efectos que se producirán mediante cambios en el sistema o en su método de operación.

## Distintas formas de estudiar un sistema



## Clasificación de los Sistemas

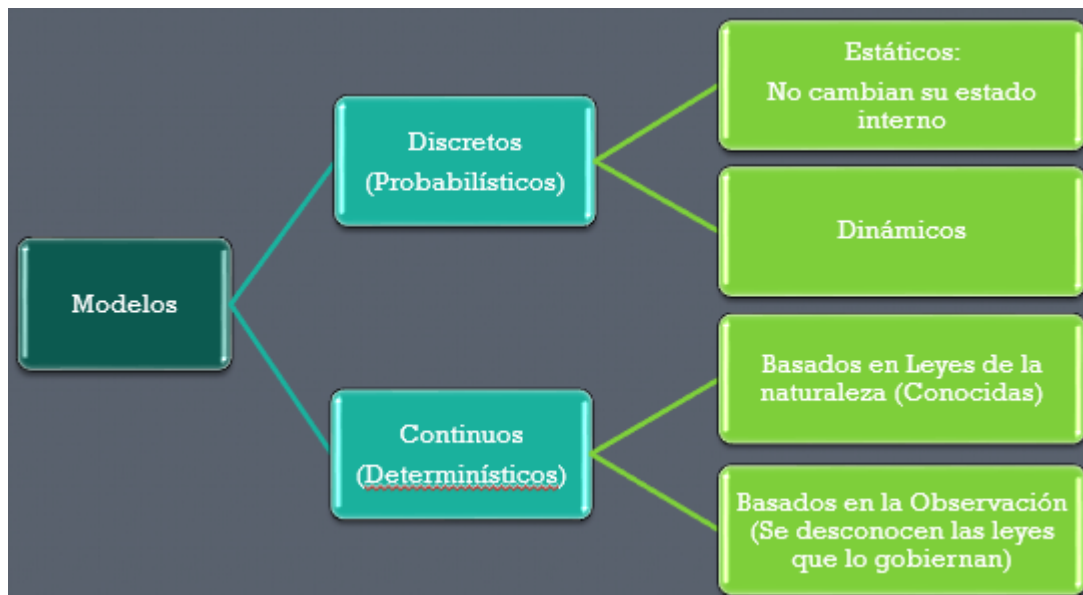


- **Sistemas discretos:** son aquellos en los que los cambios (tanto internos como en las salidas) se manifiestan de manera discreta, es decir, ocurren cambios en un momento  $t_0$ , luego el siguiente cambio ocurre en el momento  $t_1$ , luego el siguiente cambio en otro momento  $t_2$ , etc (no tienen porqué ser equidistantes,  $t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$ ), y si midiéramos las variables del sistema en un momento  $t_0 +$ , siendo  $t_0 < t_0 + < t_1$  los valores serían los mismos que los obtenidos en  $t_0$ . Es decir NO HAY cambios hasta  $t_1$ .

- **Sistemas estocásticos o probabilísticos**: son aquellos en los que intervienen variables aleatorias.
- **Sistemas continuos**: son aquellos en los que los cambios se producen continuamente. (Entre cualquier par de mediciones podemos detectar cambios).
- **Sistemas determinísticos**: son aquellos que se pueden modelar con ecuaciones diferenciales (si se conoce cuáles son las aplicables).
- **Sistemas terminantes**: Por lo general no alcanzan un estado estable. Hay un evento natural que determina el tiempo de simulación. Ejemplos: Oficina/comercio con horarios de apertura y cierre (el cierre determina el fin de la simulación). Confrontación militar que finaliza cuando algún bando pierde el 30% de su fuerza. Una empresa recibe una orden para fabricar una cantidad X de artículos con ciertas especificaciones.
- **Sistemas no terminantes**: Sistemas cuya vida se prolonga en el tiempo. Suelen alcanzar un estado “Estable” o “en Régimen” y al inicio presentan un estado transitorio (**Warm-Up**) pero luego comienzan a estabilizarse. Ejemplos: Central telefónica, Líneas de ensamblaje o de producción continua, Atención en salas de emergencias, Sistemas de redes, etc.

**Supresión del “Estado Transitorio”**: la mayor dificultad es definir cuándo termina. Por esto, existen métodos de supresión los cuales son:

- ❖ Corridas prolongadas
- ❖ Inicialización adecuada
- ❖ Truncamiento
- ❖ Eliminación de datos iniciales (medias globales)
- ❖ Traslado de medias de replicaciones independientes
- ❖ Medias de tandas

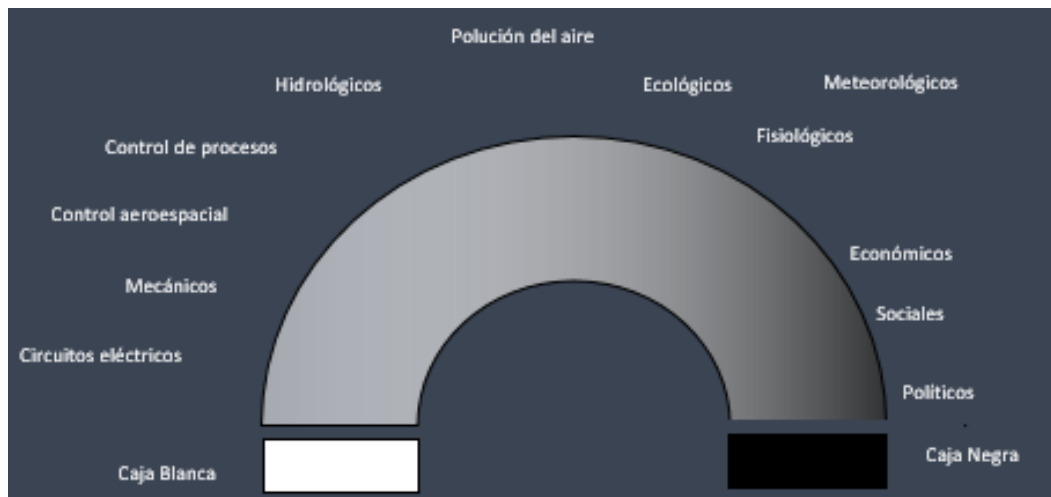


Estáticos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis de Riesgo</li> <li>• Modelos de Inventario</li> </ul>
Dinámicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelos de Línea de Espera o Sistemas de Colas</li> </ul>
Basados en leyes de la Naturaleza	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Térmicos • Mecánicos</li> <li>• Químicos • Electromagnéticos</li> </ul>
Basados en la Observación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Económicos • Biológicos • Meteorológicos</li> <li>• Políticos • Ecológicos • Poblacionales</li> </ul>

Los modelos entonces pueden ser:

- **Discretos (probabilísticos):**
  - **Estáticos:** los modelos físicos estáticos, tales como los modelos arquitectónicos o los modelos de diseño de plantas, ayudan a visualizar las relaciones espaciales. La característica distintiva es que de alguna manera “se asemeja” a la entidad que se está modelando.
  - **Dinámicos:** son una representación de la conducta dinámica del sistema, mientras un modelo estático involucra la aplicación de una sola ecuación, los modelos dinámicos son **reiterativos**. Estos modelos constantemente aplican sus ecuaciones considerando cambios de tiempo.
- **Continuos o determinísticos:** en estos ni las variables exógenas, ni las endógenas se obtienen por medio del azar, debido a que se suponen relaciones exactas para las características de operación. Son variables con valores preestablecidos. Este modelo es aquel en el cual se establecen las condiciones para que al ejecutar el experimento se determine el resultado.
  - Basados en leyes de la naturaleza: Químicos
  - Basados en la observación: Económicos
- **Analógicos:** son aquellos en los que una propiedad del objeto real está representada por una propiedad sustituida, que por lo general se comporta de manera similar.
- **Matemáticos o simbólicos:** son aquellos en los que se usa un símbolo, en vez de un dispositivo físico, para representar una entidad. Estos modelos son siempre una idealización abstracta del problema en el cual se requieren suposiciones que simplifican, si es que el modelo ha de resolverse.

## Cajas blancas, negras y grises



La modelización utilizando la clasificación de caja negra, gris o blanca se utiliza para poder **determinar antes de armar el modelo cuanto se conoce acerca del sistema.**

En el extremo de **caja blanca** se encuentran modelos que aparecen en teoría de circuitos eléctricos ya que se conocen el valor de todos o su gran mayoría de elementos y aplicando leyes y teoremas pueden ser resueltos, sin necesidad de recurrir a datos experimentales si no usando los modelos matemáticos.

En el medio del espectro encontramos los **modelos de caja gris**, donde se encuentran principalmente problemas del tipo mecánicos, en donde algunos de los parámetros deben ser identificados mediante pruebas reales ya que un considerable número de parámetros no puede ser medido o controlado.

En el área de **caja gris-negra** se encuentran los modelos de sistemas ambientales, donde hay una comprensión de los procesos físicos y químicos involucrados, pero las variables del sistema son difíciles de obtener, los fenómenos a ser modelados ocurren en medios cuyas propiedades distribuidas solo son conocidas de manera imprecisa.

En la **caja negra** se encuentran principalmente los modelos sociales, políticos, económicos. donde es difícil encontrar leyes que apliquen a todos y suelen ser abiertos al cuestionamiento y controversia. Se los utiliza para *lograr una comprensión general* y una percepción profunda del comportamiento del modelo.

### Ventajas de la simulación:

Todos los modelos de simulación se llaman modelos de entrada-salida. Es decir, ellos producen la salida del sistema si se les da la entrada a sus subsistemas interactuantes. Por lo tanto, se ha definido que **la simulación se debe utilizar cuando:**

- 1) No existe una formulación completa matemática del problema o los métodos analíticos para resolver el modelo matemático aún no se han desarrollado.
- 2) Los métodos analíticos están disponibles pero los procesos matemáticos son muy complejos o difíciles.
- 3) Las soluciones analíticas existen y son posibles, pero están más allá de la habilidad matemática del personal disponible
- 4) Se desea observar el trayecto histórico simulado del proceso sobre un periodo, además de estimar ciertos parámetros



Entonces, las **ventajas** de la simulación son:

- Permite estimar medidas de desempeño, bajo diferentes escenarios.
- Es útil cuando no hay una formulación matemática.
- Otorga control sobre condiciones experimentales. (Entradas – Condiciones de entorno)
- Manejo arbitrario del tiempo.
- Ayuda a estudiar sistemas inexistentes.
- Permite estudiar sistemas estocásticos.
- Puede ser usado repetidamente una vez construido.
- Una ventaja adicional de la simulación radica en su poderosa aplicación educativa y de entrenamiento. El desarrollo y uso de un modelo de simulación que le permite al experimentador observar y jugar con el sistema.

### Desventajas de la simulación:

- Costos. (Económicos y en tiempo)
- Puede aparentar reflejar con precisión un sistema real, cuando en verdad no lo hace.
- No podemos medir el grado de imprecisión.
- No sirven para encontrar soluciones óptimas. Se limita a dar evaluaciones de posibles soluciones.
- No es sustituto de un análisis detallado.

### Estructura de los modelos de simulación:

Antes de iniciar el proceso de desarrollo de un modelo, se debería comprender la estructura básica a partir de la cual se construyen los modelos. La estructura del modelo es:

$$E = f(X_i, Y_j)$$

Dónde:

E es el efecto del comportamiento del sistema.

$X_i$  son las variables y los parámetros que podemos controlar.

$Y_j$  son las variables y los parámetros que no podemos controlar.

f es la relación entre  $X_i$  y  $Y_j$ , que da origen a E.

Los modelos constan de una serie de **elementos** que son:

- ❖ **Componentes:** son las partes constituyentes que en conjunto forman el sistema.
- ❖ **Variables:** sólo pueden suponer aquellos valores que la forma de la función permite. Existen dos tipos de variables, las exógenas y las endógenas. Las exógenas también llamadas variables de entrada, son aquellas que se originan o se producen fuera del sistema o que surgen debido a causas externas. Las endógenas son aquellas que se producen dentro del sistema y las originan causas internas.
- ❖ **Parámetros:** son cantidades a las cuales el operador del modelo puede asignar valores arbitrarios.
- ❖ **Relaciones funcionales:** describen a las variables y a los parámetros de tal manera que muestran su comportamiento dentro de un componente o entre componentes de

un sistema. Las relaciones determinísticas son identidades o definiciones que relacionan ciertas variables o parámetros, donde una salida de proceso es singularmente determinada por una entrada dada. Las relaciones estocásticas son aquellas en las que el proceso tiene de manera característica una salida indefinida para una entrada determinada.

- ❖ **Restricciones:** son limitaciones impuestas a los valores de las variables o a la manera en la cual los recursos pueden asignarse o consumirse.
- ❖ **Función objetivo:** es una definición explícita de los objetivos o metas del sistema y de cómo se evaluarán.

### Peligros de la Simulación:

- Inferir resultados con una sola corrida, asumiendo independencia.
- Uso arbitrario de distribuciones y suposiciones.
- Impresionarse con el gran volumen de información, pero que no refleje el sistema estudiado.
- Los resultados pueden dar lugar a una excesiva confianza.
- Es posible que se ignoren factores tecnológicos y de índole humana.
- Basar las decisiones en el promedio de estadísticas cuando los resultados son de hecho cíclicos.

### Tipos de simulación

- Simulación Discreta = Modelo probabilístico  
Las variables de estado cambian solo en puntos discretos en el tiempo.
  - Modelos de simulación Estáticos
  - Modelo de Montecarlo: se basa en resolver ensayos independientes,( los resultados que ocurren de un ensayo no afectan a los que ocurren en ensayos subsiguientes)
  - Modelo de Análisis de riesgo
  - Modelo de Control de inventario
  - Modelos de simulación Dinámicos
  - Modelo de líneas de espera (colas)
- Simulación Continuos = Modelos determinísticos  
Permite estudiar la evolución de los modelos en los que varía la velocidad de cambio de las variables de estado en forma suave y continua en el tiempo (definidos mediante ecuaciones diferenciales).
  - Modelos de simulación Basados en la naturaleza
    - Físicos.
    - Químicos.
    - Mecánicos.
  - Modelos de simulación Basados en la observación
    - Económicos
    - Ecológicos.
    - Políticos.

### Lenguajes de propósito general VS Lenguajes de Simulación

Entre las principales diferencias encontramos:

- Organización del tiempo y las actividades.

- Definición y estructuración de las entidades del modelo.
- Prueba de actividades y condiciones sobre los elementos.
- Tipos de pruebas estadísticas posibles sobre los elementos.
- Facilidad para cambiar la estructura del Modelo.

Aunque varios de los **lenguajes especiales de simulación** tienen cualidades muy positivas y útiles, la triste realidad es que la elección acerca de cuál lenguaje usar se debe resolver por el tipo de máquina disponible y los lenguajes que conozca el analista. Pero cuando hay una opción, la mejor elección o la más correcta depende del grado en que el analista conozca la simulación. Para uso ocasional, un lenguaje simple que es fácil de entender y aprender puede ser más valioso que uno de los lenguajes más sofisticados cuyas características y recursos adicionales lo hacen más difícil de usar.

Un **lenguaje de programación** de computadora es un conjunto de símbolos reconocibles por una computadora, mediante el cual un programador le da instrucciones a ésta con referencia a las operaciones que desea llevar a cabo. En el nivel más básico, encontramos la programación de lenguaje de máquina, en la cual se escriben las instrucciones en notación binaria que corresponde directamente a las funciones de la máquina. La codificación de un programa en lenguaje de máquina es una tarea difícil. Debido a las dificultades para escribir y probar un programa de lenguaje de máquina, se han desarrollado varios lenguajes de programación simbólicos. Los lenguajes simbólicos le permiten al programador usar símbolos convenientes o nemónicos.

Los **lenguajes de compilación** son lenguajes orientados a procedimientos o a problemas, estos son denominados de alto nivel, debido a que el programador que los utiliza se aleja considerablemente de las preocupaciones relacionadas con las operaciones de máquina.

Finalmente, **diferenciamos los lenguajes de propósito general y los lenguajes de simulación**. Los primeros se diseñan para resolver una gama muy amplia de problemas. En cambio, los lenguajes de simulación se diseñan para satisfacer o resolver una clase o tipo particular de problemas. Entre ellos se diferencian en cuanto a la organización del tiempo y las actividades, la definición y estructuración de las entidades del modelo, la prueba de actividades y condiciones sobre los elementos, tipos de pruebas estadísticas posibles sobre los elementos y en la facilidad para cambiar la estructura del modelo.

## **Lenguajes de propósito general**

Ventajas:

- ★ No hay restricciones para el formato de salida.
- ★ A menudo se conoce muy bien el lenguaje.
- ★ Menor costo del software.

Desventajas:

- ★ Tiempo de programación más largo. (El costo total del proyecto puede ser mayor).
- ★ Debemos crear las rutinas de detección de errores.

## **Lenguajes de Simulación**

Ventajas:

- ★ Provee la mayoría de las funcionalidades necesarias para construir un modelo.

- ★ Genera automáticamente ciertos datos necesarios.
- ★ Facilita recopilación y despliegue de los datos producidos.
- ★ Controla la administración y asignación del almacenamiento de la computadora, durante la corrida.

Desventajas:

- ★ Debe apegarse a los formatos de salida del lenguaje.
- ★ Flexibilidad reducida y tiempo de ejecución incrementado.
- ★ posee licencias limitadas

## Etapas del proceso de Simulación

1. **Definición del problema:** determinación de los límites o fronteras, restricciones y medidas de efectividad que se usan para definir el sistema que se estudiará
2. **Formulación – Construcción del Modelo:** reducción o abstracción del sistema real a un diagrama de flujo básico
3. **Adquisición y preparación de datos:** identificación de los datos que el modelo requiere y reducción de estos a una forma adecuada.
4. **Traslación – Programación del Modelo:** descripción del modelo en un lenguaje aceptable para la computadora en la que se usará.
5. **Validación:** incremento a un nivel aceptable de confianza de modo que la inferencia obtenida del modelo respecto al sistema real sea correcta.
6. **Planeación táctica y estratégica:** la planeación estratégica consiste en un diseño de un experimento que producirá la información deseada, mientras que la planeación táctica consiste en la determinación de cómo se realizará cada una de las corridas de prueba especificadas en el diseño experimental.
7. **Experimentación:** corrida de la simulación para generar los datos deseados y efectuar el análisis de sensibilidad.
8. **Interpretación y análisis de resultados:** obtención de inferencia con base en datos generados por la simulación
9. **Implantación:** uso del modelo y/o resultados
10. **Documentación:** registro de las actividades del proyecto y los resultados, así como de la documentación del modelo y su uso.

## Técnicas de Validación del modelo

Cuando hablamos de la validación en el proceso de simulación, hablamos de la validación del modelo que representa a dicho sistema de estudio.

Hay que validar tres puntos clave del modelo:

- Supuestos. (Involucrar al cliente en el proceso)
- Valores de entrada y distribuciones, de otra forma la simulación sería errónea
- Valores de salida y conclusiones, súper importante para la etapa subsiguiente, que abarca la planeación táctica y estratégica para la futura toma de decisiones

### Técnicas:

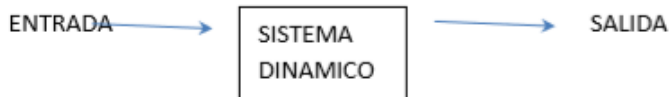
No siempre se pueden aplicar todas

- Intuición de experto
- Mediciones en el sistema real
- Resultados teóricos

- Análisis de sensibilidad (cómo las entradas nos ayudan a predecir posibles resultados)

## Modelado de componentes

Cuando intentamos modelar componentes o elementos individuales de un sistema complejo, encontramos varios tipos de problemas, los cuales clasificamos por lo general como problemas directos o inversas.



Para modelar este componente, deberíamos tener conocimiento de al menos dos de las tres entidades. Si conocemos las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema dinámico, entonces el problema discreto es encontrar la respuesta del sistema para cada entrada determinada. En segundo caso, si se tienen las ecuaciones del sistema dinámico y las entradas lo que se debe determinar son las salidas que se producirán, este tipo de problemas se los denomina **problemas de control**. En caso contrario se conoce como **problema de identificación de la estructura**.

Los componentes del sistema **convierten entradas en salidas**. Existen tres tipos diferentes, los cuales constituyen los bloques de la estructura básica de los sistemas complejos:

- **Elementos de transformación:** donde se opera sobre una o más entradas de alguna manera determinada y se transforman en una o más salidas.
- **Elementos de clasificación:** donde se clasifican una o más entradas en dos o más salidas diferentes.
- **Elementos de retroalimentación:** donde se modifica la entrada de alguna manera como una función de salida.

El proceso de conversión puede ser determinístico (la salida está peculiarmente determinada por una entrada dada) o estocástico (indeterminación de salida para una entrada dada). Si la naturaleza del proceso se desconoce o se entiende muy poco, se llama **problema de identificación de caja negra**. En este caso, usualmente se intenta describirlo por medio de las características generales de transferencia, tales como ecuaciones lineales o curvilíneas. Sin embargo, podemos saber bastante acerca de la naturaleza del proceso y desconocer solo los valores específicos de los parámetros. Algunas veces nos referimos a dicho problema como un problema de caja gris.

## Intervalo de confianza

Simular nos permite obtener estimaciones de la variable de respuesta, pero ¿Cuál es su exactitud?

$$P\{L_{\text{inf}} \leq \bar{X} \leq L_{\text{sup}}\} = 1 - \alpha$$

- ❑ Si asumimos una distribución Normal, para una muestra pequeña ( $N < 30$ ):

```

P = 1;
X = -1;
A = e-λ;
Hacer
{
    Generar U = RND(0,1);
    P = P * U;
    X = X + 1;
} mientras (P >= A);
Devolver X;

```

El único parámetro que requiere este algoritmo es el Lambda (λ) el cual en este caso representa a la media de la distribución de Poisson para la cual se quieren generar variables aleatorias.

## Pruebas de bondad de ajuste de variables aleatorias

Las pruebas de bondad de ajuste pueden ser aplicadas a cualquier distribución estadística, no solo a la distribución uniforme. A continuación se muestra un cuadro con las funciones de densidad y de acumulación (en los casos posibles) y además las fórmulas de cálculo de media y varianza de las distribuciones contempladas. Estas funciones y fórmulas serán necesarias para obtener las frecuencias esperadas de cada distribución.

Distribución	Uniforme	Exponencial	Normal	Poisson
Densidad	$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$	$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$	$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$
Acumulada	$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$		
Media	$\mu = \frac{a+b}{2}$	$\mu = \frac{1}{\lambda}$		$\mu = \lambda$
Varianza	$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$	$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$	$\sigma^2 = \lambda^2$

Tabla 1 – Funciones de densidad y de acumulación

## Unidad 4: Modelos de Simulación Estáticos

El muestreo monte Carlo es fundamental para el concepto de los sistemas de simulación que contienen elementos estocásticos o probabilísticos.

Es empírico (a partir de la observación), se aplica a infinidad de problemas, sobre todo a los que tienen una solución analítica compleja.

**Montecarlo** se le llama a los métodos de simulación utilizados para conocer el comportamiento de los Modelos de Simulación Estáticos que se basan en resolver ensayos independientes (en los que los resultados que ocurren en un ensayo no afectan a los que ocurren en ensayos subsecuentes).

En esta técnica los datos se generan mediante el uso de algún generador de números aleatorios y de la distribución de probabilidad acumulada de interés. La distribución de probabilidad por muestrear puede basarse en datos empíricos que se obtienen de registros anteriores, puede ser el resultado de un experimento reciente, o pueden ser una distribución teórica conocida. El proceso es relativamente simple.

## Pasos de este método

- 1) Graficar o tabular los datos de interés (NO los números aleatorios) como una función de distribución de probabilidad acumulada, como los valores de la variable sobre el eje de las x o abscisa y las probabilidades de 0 a 1 que se trazaron sobre el eje y de la ordenada.
- 2) Seleccione un número decimal aleatorio entre 0 y 1.
- 3) Projete horizontalmente el punto sobre el eje y que corresponda a este número decimal aleatorio.
- 4) Projete hacia abajo de este punto de intersección sobre una curva al eje x.
- 5) Escriba el valor de x correspondiente a este punto de intersección. Después, este valor de x se toma como el valor de la muestra.
- 6) Repita los pasos hasta que se hayan deseado las variables aleatorias como se requieran.

## Teorema de Bernoulli

Con la probabilidad matemática aproximada a 1 (certeza) podemos esperar que la frecuencia relativa de un acontecimiento en serie de ensayos independientes, con probabilidad constante  $p$ , difiera de esa probabilidad en un valor menor que cualquier número dado  $x$  mayor que 0. Si la muestra es suficientemente grande. Esto nos resuelve dos problemas:

- Cuando se conoce la probabilidad de un acontecimiento, podemos conocer su frecuencia relativa esperada.
- Cuando no se conoce la probabilidad, tomamos la frecuencia relativa como un valor aproximado a la probabilidad.

## Pasos

- 1) Representamos gráficamente en un eje coordenado la función.
- 2) De la tabla de números aleatorios sacamos una pareja de dígitos (x;y).
- 3) Dibujamos las coordenadas del punto en la figura
- 4) Repetimos pasos 2 y 3 hasta que vamos llenando de puntos la superficie
- 5) Efectuamos el cociente entre puntos dibujados sobre la gráfica y la cantidad total de puntos. (el valor teórico esperado es 0,333).
- 6) Multiplicamos el número obtenido por la superficie total para obtener finalmente el área buscada.
- 7) Para acercarse más al valor real, podemos repetir el cálculo con diferentes números al azar y luego sacar el promedio.

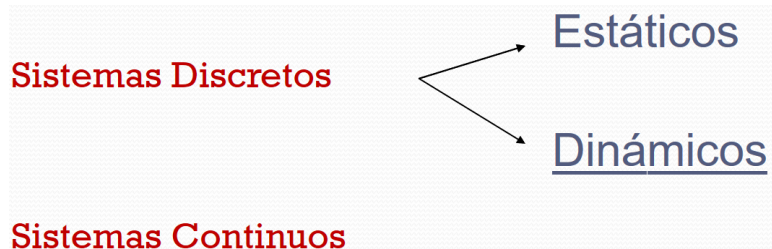
## Aplicaciones

- Obtener el valor de una integral definida
- Medir superficies irregulares
- En el ámbito militar
- En el análisis de riesgo (Proceso de predecir el resultado de una decisión ante una incertidumbre. Ej: la cantidad a producir ante una demanda cambiante.)

## Unidad 5: Modelos de Simulación Dinámicos

La teoría de colas estudia el comportamiento de sistemas donde existe un conjunto limitado de recursos para atender las peticiones generadas por los usuarios.

### Teoría de colas - Modelado de sistemas de colas



### Ejemplos de utilización:

- Una línea de cajas de un supermercado.
- Un aeropuerto.
- Una planta fabril.
- Pacientes que llegan a la guardia médica de un hospital para ser atendidos.

En un sistema de colas se debe identificar:

- **Objetos:** pueden ser:
  - cliente
  - servidorY ambos pueden ser temporarios o permanentes.
- **Eventos** pueden ser:
  - llegada
  - fin de atención
  - eventos temporizados:
    - fin de la simulación
    - interrupción de la atención
    - interrupción de las llegadas
    - tareas programadas (mantenimiento,descanso, etc)
- **Colas:** las características de las colas:
  - FIFO / LIFO
  - Impaciencia
  - Prioridades

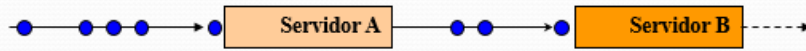
Es necesario establecer:

- ❖ Distribuciones estadísticas asociadas a los tiempos entre llegadas, y a los tiempos de atención
- ❖ Tipos de clientes, estados, atributos.
- ❖ Disciplina del servicio (interrupciones, prioridades).
- ❖ Distribución y cantidad de colas.
- ❖ Disposición de los servidores, estados, atributos.

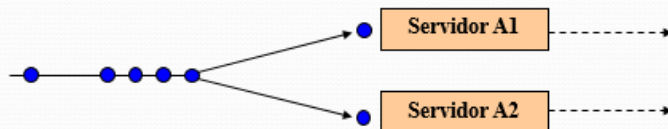


## Disposición de los servidores

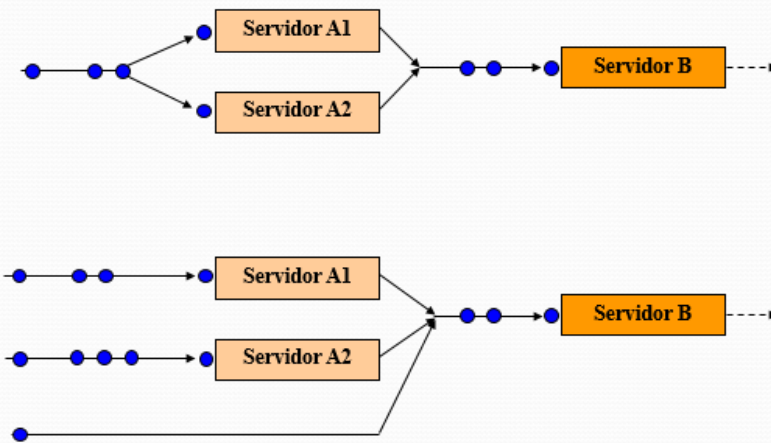
### Serie



### Paralelo

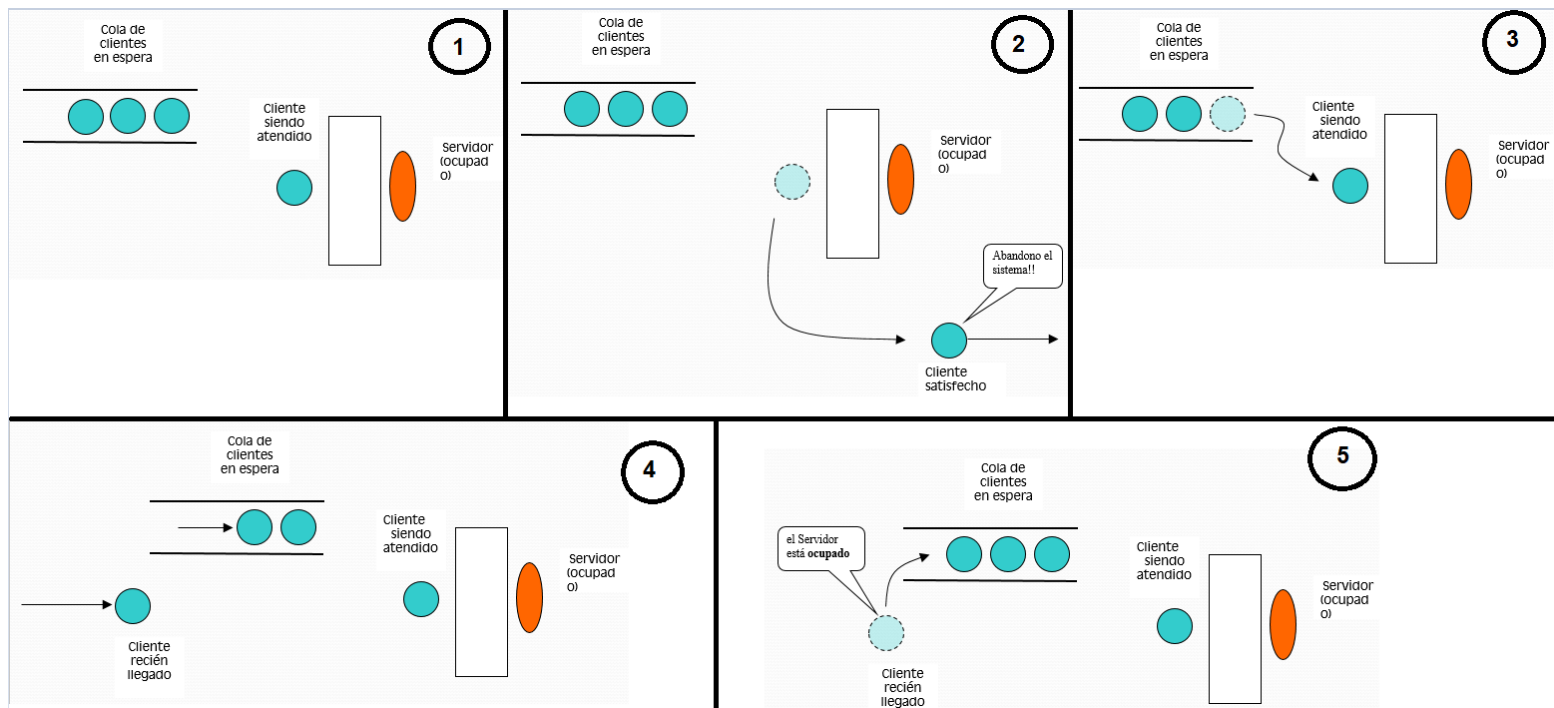


### Combinados



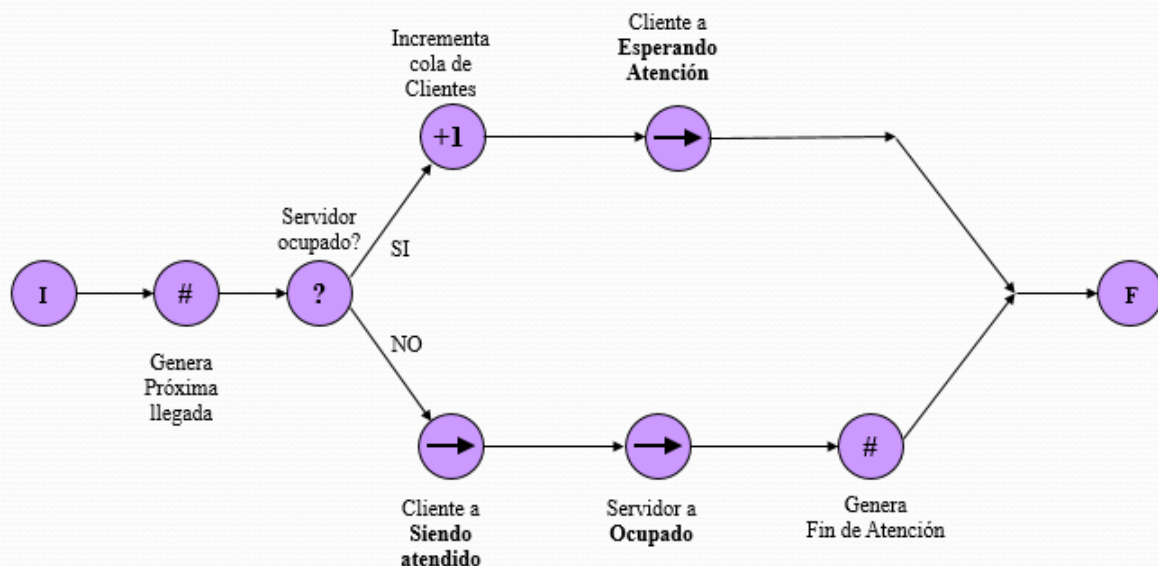
## Sistema elemental

Aquí tenemos un servidor, un solo tipo de cliente y una cola:



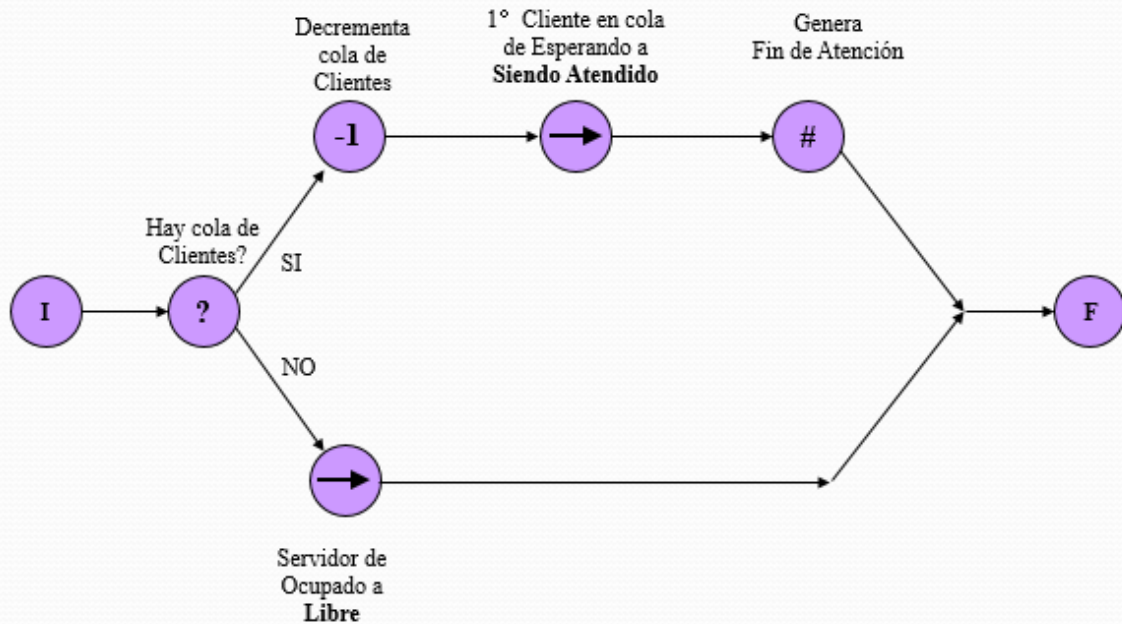
## Llegada al sistema:

Cambios originados por el evento



## Fin de servicio:

### Cambios originados por el evento



## Medidas de desempeño

$$\text{Tiempo promedio en cola (y en sistema)} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$$

$t_i$ : tiempo de permanencia del cliente  $i$  en cola

$n$ : cantidad de clientes posibles de entrar en cola

$$\text{Cantidad promedio de clientes en cola (y en sistema)} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{t_{total}}$$

$t_i$ : tiempo de permanencia del cliente  $i$  en cola

$t_{total}$ : tiempo total de la simulación

$$\text{Porcentaje de ocupación del Servidor} = \frac{\sum t_{ocup}}{t_{total}} \times 100$$

$t_{ocup}$ : intervalo de tiempo en que el servidor está ocupado

$t_{total}$ : tiempo total de la simulación

#### Otras medidas de desempeño:

- Porcentaje de clientes atendido
- Tiempo máximo de permanencia en cola
- Tiempo máximo de permanencia en el sistema
- Tiempo ocioso del servidor
- Probabilidad de que la espera sea mayor a...
- Probabilidad de que no sea atendido.

#### Ley de Little

##### Notación de Kendall:

**A / B / s / k / t / d**

A: distribución de tiempos entre llegadas

B: distribución de tiempos de servicio

s: número de servidores en paralelo (canales)

k: capacidad del sistema

t: tamaño de la fuente de entrada

d: disciplina de la cola

#### Modelos típicos:

## UNIDAD N°6: Simulación de Modelos Continuos

**Sistemas continuos de primer orden:** la variable casi siempre es el tiempo. El modelo está construido con una ecuación diferencial, a veces el dato es la **velocidad** de cambio de algo, que es la derivada primera, la **aceleración** es la derivada segunda (que es la velocidad con que cambia la velocidad instantánea).

Vamos a ver los siguientes casos:

- Ecuación de primer grado
- Sistemas de Ecuaciones de 1er orden
- Ecuación de segundo orden

Hay que tener muy en cuenta lo siguiente, cuando nosotros buscamos la solución de un problema por medio de cualquiera de estos métodos, decimos que la solución está ENTRE valores con un valor de h específico, porque nosotros podemos ir adaptando ese valor según cuan preciso queremos que el resultado sea. Por ejemplo, un valor de  $h=0,1$  es mucho menos preciso que  $h=0,01$ , la única desventaja que tiene usar un h tan chico (en nuestro caso que usamos Excel no tanto) es que el numero de iteraciones se va a incrementar mucho mas que si usáramos un h mas grande.

Entonces, de acuerdo a la cantidad de ceros que tiene el h, son la cantidad de decimales que me van a coincidir con la solución analítica, lo cual quiere decir que mientras mas decimales ponga, va a haber menor error, como se dijo anteriormente (a este análisis lo podemos ver con el cálculo del error absoluto y relativo).

NOTA:

- Si la derivada de la función es positiva, crece mi función
- Si la derivada de la función es negativa, decrece mi función
- Si la derivada de la función es cero, quiere decir que mi función no cambia, es constante (eso se explica con que la derivada de una constante es cero, y esto me indicaría que la tendencia de comportamiento es lineal).
- Si mi valor de h es negativo, lo que estoy haciendo es ver los casos anteriores al de mi condición inicial.

### METODOS NUMERICOS

#### Euler 1er Orden

Dado un punto  $X_0, Y_0$  encuentra la tangente de la curva en el mismo (la cual se desconoce), avanza un cierto valor h y calcula el nuevo punto que es el primer punto aproximado de  $Y(x)$ , este no necesariamente toca la curva, si no la tangente. Es un método de primer orden y su expresión es:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_i$$

Este método tiene un error por truncamiento relativamente grande y es inestable, para que el error no sea tan grande debo achicar h.

## Runge Kutta 4to Orden

$$f(x_i, y_i) = y'_i = y'(x_i, y_i)$$

$$k_1 = h.f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h.f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h.f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h.f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

El error de este método es mucho menor al error producido en Euler

## Población Límite

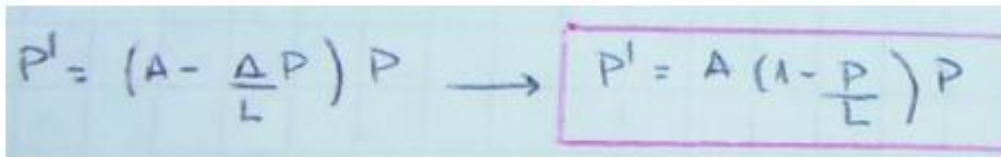
$$P(0) = P_0; \quad P(1) = P_1; \quad P(2) = P_2$$

resulta:

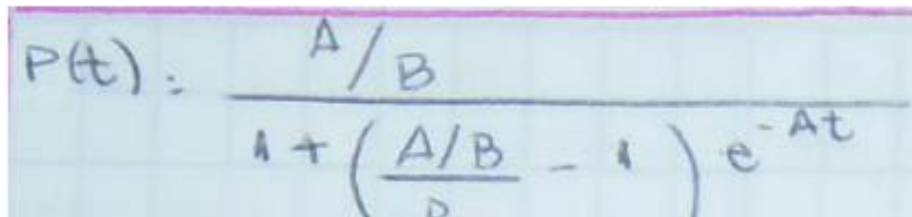
$$e^{-A.t} = \frac{P_0(P_2 - P_1)}{P_2(P_1 - P_0)}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{P_1^2 - P_0P_2}$$

Cuando la población aumente,  $k$  va a disminuir hasta que se haga cero y la población se mantenga, si  $t \rightarrow \infty$ , la población va a aumentar hasta que se haga cero la derivada.  $P'$  será cero cuando  $k = A - BL = 0 \rightarrow L = A/B$  (población límite, valor máximo).


$$P' = \left(A - \frac{A}{L}P\right)P \rightarrow P' = A\left(1 - \frac{P}{L}\right)P$$

Ecuación que usamos si conocemos el valor máximo de la población.


$$P(t) = \frac{A/B}{1 + \left(\frac{A/B}{P} - 1\right)e^{-At}}$$

**Sistemas continuos de ecuaciones diferenciales de orden superior:** Forma de reducir un sistema de orden superior a un sistema de ED de primer orden. Si se pasa desde un sistema de segundo orden, el nuevo sistema tendrá dos ecuaciones. Si se hace desde un sistema de 3° orden, tendrá 3 ecuaciones, etc...

Las ecuaciones se hacen evolucionar juntas en el tiempo. El orden de la ecuación es igual a la cantidad de condiciones iniciales, se resuelven aplicando Euler.

## Como simular Modelos Continuos basados en ecuaciones diferenciales de primer orden

Llamaremos Sistemas Continuos a los sistemas cuyas variables evolucionan continuamente en el tiempo. Los sistemas continuos se describen típicamente mediante ecuaciones diferenciales. La simulación permite estudiar la evolución de los modelos que son descritos mediante ecuaciones diferenciales, las cuales definen la velocidad de cambio de las variables de estado.

- 1) La tasa de crecimiento de enfermos de cólera es proporcional a la población de enfermos con una tasa de proporción igual a 0,2. Si en un momento dado ( $t = 0$ ) la población contagiada asciende a 200,

$$\frac{dE}{dt} = 0,2 \cdot E \quad E(t = 0) = 200$$

**a. Resolver analítica y numéricamente el problema.**

Implica resolver la ecuación diferencial planteada. Para esta ecuación diferencial puntual podemos utilizar variables separables.

$$\frac{dE}{dt} = 0,2 \cdot E$$

$$\ln \frac{E}{E_0} = 0,2 \cdot (t - t_0)$$

$$\frac{dE}{E} = 0,2 \cdot dt$$

$$\frac{E}{E_0} = e^{0,2 \cdot (t - t_0)}$$

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E} = 0,2 \int_{t_0}^t dt$$

$$E = E_0 \cdot e^{0,2 \cdot (t - t_0)}$$

Aplicando condiciones  
iniciales se obtiene:

$$\ln E - \ln E_0 = 0,2(t - t_0)$$

$$E = 200 \cdot e^{0,2 \cdot t}$$

- b. ¿En cuántas unidades de integración se duplica la población?** Vamos a hacerlo de las dos maneras, de manera analítica y de manera numérica.

Para obtener en cuántas unidades de integración se duplica la población de enfermos, de manera analítica, podemos igualar la solución particular al valor objetivo (400) y luego despejar la variable del tiempo:

$$400 = 200 \cdot e^{0,2 \cdot t}$$

$$2 = e^{0,2 \cdot t}$$

$$\ln(2) = 0,2 \cdot t$$

$$\frac{\ln(2)}{0,2} = t$$

La población se duplica en  $t=3,465735$   
unidades de integración.

El método numérico es el que realizamos en clases, con el siguiente vector:

t	E	dE/dt	t(i+1)	E(i+1)
---	---	-------	--------	--------

- c. Calcular el error absoluto y relativo hasta este instante.

El cálculo del error absoluto y relativo implica conocer ambas soluciones: la analítica y la numérica. El error absoluto es la diferencia en valor absoluto entre las mencionadas soluciones. El error relativo es el cociente entre el error absoluto y la solución analítica

$$EA = |\text{Solución Analítica} - \text{Solución Numérica}|$$

$ER = EA / \text{Solución analítica}$  (este error es más exacto que el error absoluto, debido a que es como comparar el margen de error con la solución que debería darme)

**d. ¿Cuál será la tendencia de la enfermedad?**

Para establecer la tendencia de la enfermedad, se puede utilizar tanto la solución analítica como los datos de la solución numérica.



2. La siguiente ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = -p$$

describe la tasa de ingreso de bedeles a una universidad estatal. El ingreso de alumnos a esa institución está representado por:

$$\frac{da}{dt} = 5000 - a$$

a) **Analizar la evolución de ambas poblaciones a través de su solución numérica, sabiendo que la unidad de tiempo es igual a 10 años. Considerar  $p(0) = 50$  y  $a(0) = 500$ .**

Cuando me dice eso de la solución numérica hay que tener mucho cuidado, porque eso es lo mismo que decir que si el valor de  $h$  es 1, tenemos 10 años en el análisis, pero si  $h=0,1$  es lo mismo decir que eso equivale a 1 año, y así sucesivamente, por lo que la unidad de tiempo es un valor muy importante durante el desarrollo de cualquiera de los métodos que utilices, porque vamos a tener sus equivalencias.

El vector nos queda de la siguiente manera:

(Creo que es necesario mencionar que aunque tengamos dos variables, o sea  $P$  y  $A$ , en ambas voy a usar Euler para su cálculo de crecimiento, es decir para las 2 últimas columnas)

t	P	A	dP/dt	dA/dt	t(i+1)	P(i+1)	A(i+1)
---	---	---	-------	-------	--------	--------	--------

b) **Se desea saber la cantidad de alumnos atendidos por cada bedel (por año), a lo largo de 10 años. Graficar esa variable.**

Lo que hacemos es una función debido a que asociamos el valor de un año con el valor de la cantidad de alumnos que ese bedel atendió en el año

c) **La universidad desea saber si debe poner cupo en el ingreso de alumnos, ya que se prevé que debería haber un máximo de 100 alumnos por cada bedel. A qué valor límite llega el número de alumnos. Justifique.**

El valor límite puede ser obtenido tanto de manera numérica como analítica en este caso en particular. Teniendo en cuenta que un valor "límite" implica que la función se hace constante, y que por lo tanto la derivada de dicha función a partir de ese momento es cero, mediante la siguiente equiparación se puede obtener el valor límite de forma analítica.

$$\frac{da}{dt} = 5000 - a$$

$$0 = 5000 - a$$

$$a = 5000$$

Cuando la derivada de " $a$ " se hace cero, la función " $a$ " se hace constante, llega a un límite.

3. El disco duro de la computadora de una empresa va aumentando su espacio ocupado en función de la información que ingresa, según la ley siguiente:

$$\frac{d^2e}{di^2} + 2.i.\frac{de}{di} - 4.e = 0 \quad \text{donde } e = \text{espacio ocupado; } i = \text{información que ingresa}$$

# ANEXO

## TIPS DE PROFE CARENA PARA MODELO DE COLAS BÁSICOS

Antes de largarnos a escribir la resolución del ejercicio tenemos que hacer el **planteo del mismo**, ya que esto nos sirve para ejercicios más extensos o que tienen eventos que no son tan explícitos. Primero entonces vamos a listar los eventos y objetos del sistema, antes de hacer el vector de estados obvio.

**EVENTO:** todo hecho o suceso capaz de modificar algún atributo (el estado por ejemplo) de un objeto del sistema. Para definir el evento debemos saber a qué distribución pertenece el evento, es decir, cada cuanto ocurre el evento (debemos asociar un tiempo al evento, ya sea constante o calculado con una distribución).

Al listar el evento, si queremos podemos agregar a qué distribución asociamos dicho evento y la fórmula del generador para simular esa distribución.

Ejemplo:

Eventos

- llegada\_cliente                      Exp.Neg.(15')                       $X = -15 \cdot \ln(1 - \text{RND})$

Los objetos (el cliente o el servidor) **pueden ser:**

- **OBJETO TEMPORAL:** estos ingresan al sistema, hacen un recorrido en el sistema (normalmente para obtener un servicio) y luego salen del sistema. En general suele ser el objeto cliente y se crea una instancia cuando entra al sistema y se destruye cuando sale del mismo.  
¿Cuáles son los estados que puede tener este objeto? No se especifican los estados instantáneos como la instanciación o la destrucción del objeto porque solo son estados por los que pasa, pero NO se queda esperando en ese estado. Así, solo se tienen en cuenta los estados en los que permanece el cliente en un tiempo mayor a 0. Por ejemplo: un cliente está en el estado “siendo atendido”, “esperando atendido”.
- **OBJETO PERMANENTE:** este objeto ni entra ni sale del sistema, pero no es esta característica lo que lo convierte en objeto permanente. El objeto permanente está siempre, no es que haya una instanciación y luego se destruye. Ej: el vendedor está en dos estados “libre” y “ocupado”.

Ejemplo:

- OBJETOS:
  - Cliente (Temporal)                      {siendo atendido (SA) | esperando atención (EA)}
  - Peluquero (Permanente)                      {libre | ocupado}

En cada ejercicio se debe identificar bien cuáles son los estados de cada objeto. Y luego se debe efectuar el **vector de estados** que es la simulación propiamente dicha.

Para el **vector de estado** no tenemos una plantilla fija como en montecarlo, pero el profe nos tira tips para armar las columnas:

- **Columna del nombre del evento**, esta es una columna optativa pero nos sirve para identificar errores en nuestra resolución (por las dudas)
- La primera columna en general es **el reloj**. El reloj avanza a intervalos irregulares ( a diferencia de don montecarlo, que era regular) y depende de a qué hora ocurre el siguiente evento. Lo que nos conviene es que este en decimal por el tema de cálculos.
- **Eventos:** ¿Cada cuanto ocurre el evento? No hay fórmula fija para esta columna, depende del ejercicio.
- **Objetos permanentes** y sus atributos, acá es obligatorio el atributo de estado y de cola en este objeto. El único lugar donde NO se pone el atributo cola es cuando el cliente o el objeto temporal NO SE QUEDA ESPERANDO.
- **Variables estadísticas:** toda columna que me haga falta para responder el objetivo del ejercicio. Ej: si es un promedio tengo que tener un acumulador y después dividirlo por un

contador. Otro ejemplo: Porcentaje: cantidad parcial contra una cantidad total. (regla de tres simple).

- **Objetos temporales** y atributos donde al menos se debe colocar el estado de forma OBLIGATORIA y el id si me pinta (o sea el id sale porque los tengo que enumerar).

Las columnas dentro de estas 6 secciones, dependen del enunciado del ejercicio. Atentis muchachos.

LOS ESTADOS PUEDO COLOCARLOS CON ABREVIATURA EN EL EXCEL, PERO DEBE ESTAR ACLARADO EN EL PLANTEO DEL PROBLEMA.

El tiempo de permanencia coincide con el tiempo de atención cuando el cliente llega y se atiende, o sea, el cliente no espera. Siempre ante un evento de llegada, calculo la próxima llegada. Siempre que tengo un estado de “siendo atendido” entonces calculo el fin\_atención. Si el servidor está ocupado, debe estar alguien siendo atendido.

Crear línea de inicialización siempre y si me dicen algún evento de finalización (o sea donde corta la simulación) puedo hacer una línea de finalización.

## FUNCIONES DE EXCEL

- **TRUNCAR(ALEATORIO());2)** → Esta función me genera un número aleatorio (el RND) y me lo trunca a dos decimales. Ojo que truncar no es lo mismo que redondear. Si yo uso en el excel el “formato de celdas” y especifico que sean dos decimales ahí me los estaría redondeando y no nos conviene eso.
- **SI(prueba\_lógica;[valor\_si\_verdadero];[valor\_si\_falso])** Esta función es como el if, else que vimos en python y en cualquier lenguaje xd.
  - En “**prueba\_lógica**” va la condición lógica que queremos evaluar.
  - En “**[valor\_si\_verdadero]**” va lo que sucede si la condición se cumple.
  - En “**[valor\_si\_falso]**” va lo que sucede si la condición no se cumple.
- Para **fijar una celda**, es decir, que el valor no cambie cuando arrastramos los valores debemos seleccionar la celda y luego presionar “F4”.
- Cada vez que **presionamos “F9”** los valores de la función **ALEATORIO()** cambian, al igual que cada vez que hacemos un cambio en alguna celda, los valores de la función ALEATORIO() cambian.