

Razonamiento bajo incertidumbre

Razonamiento bajo incertidumbre

Vamos a ver:

- Modelos bayesianos (después de las vacaciones)
- Lógica difusa

Razonamiento bajo incertidumbre

Cuando hablamos de incertidumbre, generalmente nos referimos a situaciones donde el agente no tiene acceso a toda la *verdad* sobre su ambiente.

Entonces, se puede hablar de que los eventos son verdaderos o falsos con cierta probabilidad.

Razonamiento bajo incertidumbre

Cuando hablamos de incertidumbre, **generalmente** nos referimos a situaciones donde el agente no tiene acceso a toda la *verdad* sobre su ambiente.

Entonces, se puede hablar de que los eventos son verdaderos o falsos con cierta probabilidad.

Ojo, no es el caso de la lógica difusa (LD)!! En LD, un evento puede ser cierto en distinto grado.

Lógica Difusa

Lógica Difusa



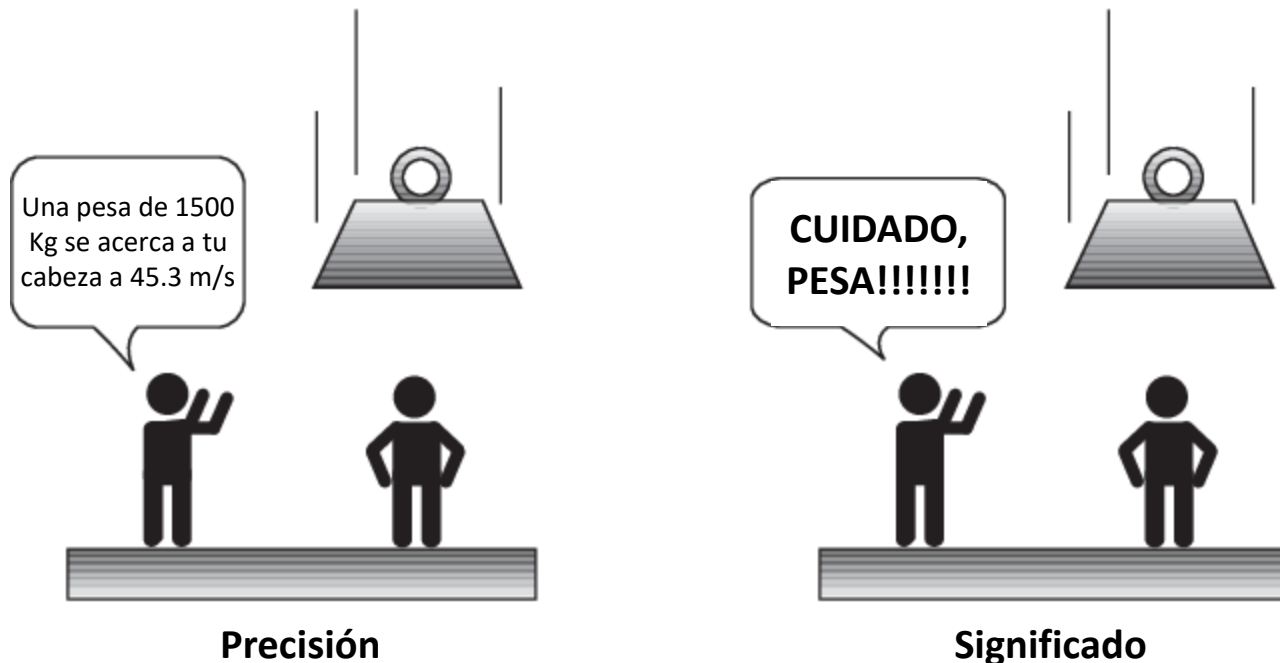
Fue creada por Lotfi Zadeh en 1964

Motivación

- La teoría básica de los sistemas expertos está referida a la evaluación de sistemas binarios.
- En los problemas reales, el razonamiento considera grados de certeza.

Motivación

- La LD se adapta al razonamiento humano, el cual busca un balance entre la precisión y el significado.



Lógica Difusa

Lógica Difusa

- Es un tipo de lógica multivaluada.
- Utiliza conjuntos difusos y reglas de producción con la forma:

SI antecedente ENTONCES consecuente
- Aunque los valores utilizados varían entre 0 y 1, en el caso más general no se pueden tomar como probabilidades.
- Se utilizan en campos como
 - Control automático
 - Clasificación
 - Soporte de decisión
 - Sistemas expertos
- Fuzzy = Difuso

Visión general

- La LD mapea un espacio de entrada en uno de salida.
- El mecanismo principal es un sistema basado en reglas.
- Las reglas se evalúan en paralelo.
- Las reglas se refieren a variables y adjetivos que afectan a las variables.
- Antes de construir las reglas se definen los rangos de las variables y la forma en la que las afectan los adjetivos.

Reglas

- La primera parte de la regla es el antecedente o premisa y la segunda es el consecuente o conclusión.

SI antecedente ENTONCES consecuente

- El antecedente es una **interpretación** que retorna un valor entre 0 y 1.
- El consecuente asigna un conjunto difuso a la variable de salida.

Ejemplo:

“si el servicio es bueno, la propina es media”

Aplicación de las reglas

- En lógica binaria, si el antecedente es verdadero, el consecuente es verdadero.
- En lógica difusa, si el antecedente es verdadero en **cierto grado**, el consecuente es verdadero en el **mismo grado**.

$$0,3 A \rightarrow 0,3 B$$

- Los antecedentes pueden estar compuestos por múltiples partes.
“si el cielo está gris y el viento es fuerte y la presión es baja,
entonces...”

En este caso, las partes del antecedente se calculan simultáneamente y se resuelven como un escalar.

Aplicación de las reglas

- El consecuente especifica un conjunto difuso para la salida. La función de implicación modifica el conjunto en el grado de cumplimiento del antecedente.

Pasos de aplicación de las reglas

- 1) Fuzzificación
- 2) Aplicación de operadores difusos
- 3) Aplicación del método de implicación
- 4) Agregación
- 5) Defuzzificación

Ejemplo

- Objetivo: estimación de riesgo en un proyecto.
- Reglas:
 - I. Si el presupuesto es adecuado o el staff es pequeño, entonces el riesgo es bajo.
 - II. Si el presupuesto es marginal y el staff es grande, el riesgo es medio.
 - III. Si el presupuesto es inadecuado, el riesgo es grande.
- Valores de entrada:
 - Presupuesto: USD 25000
 - Staff: 13 personas

Conjuntos difusos

- Se definen conjuntos (difusos) para cada variable.
- Los conjuntos se definen mediante funciones de membresía.
- Cada función indica el grado de pertenencia de la variable a dicho conjunto.
- Cada elemento puede pertenecer, en cierto grado, a más de un conjunto definido sobre la misma variable.
- Las funciones más comunes son:
 - Triangular
 - Trapezoidal
 - Gaussiana
 - Singleton

Conjuntos difusos

Presupuesto (para x en escala x 1000):

Inadecuado: $\mu_{P_1}(x) = -\frac{x}{30} + 1$ para $0 \leq x \leq 30$

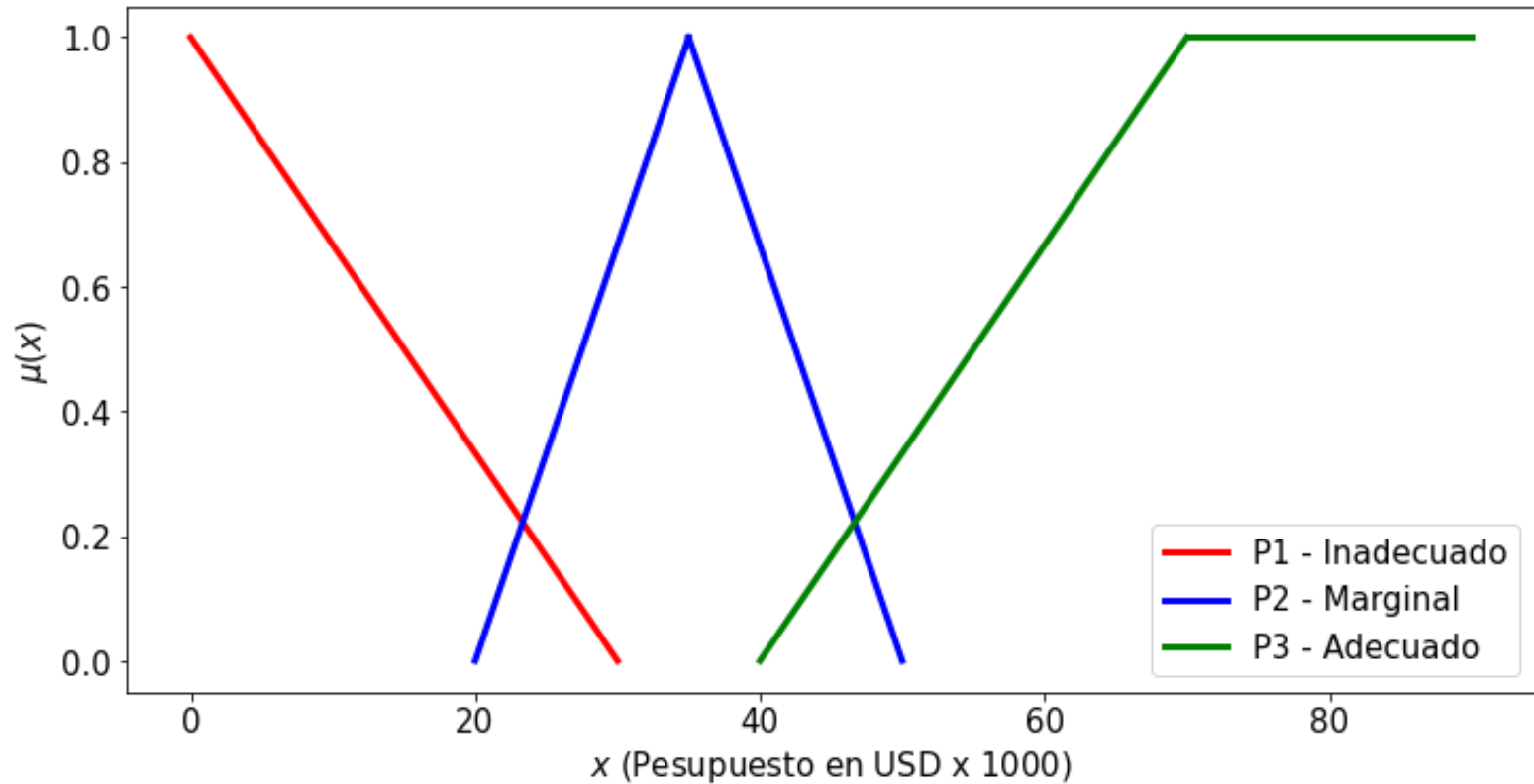
Marginal: $\mu_{P_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} - \frac{4}{3} & \text{para } 20 \leq x \leq 35 \\ -\frac{x}{15} + \frac{50}{15} & \text{para } 35 \leq x \leq 50 \end{cases}$

Adecuado: $\mu_{P_3}(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} - \frac{4}{3} & \text{para } 40 \leq x \leq 70 \\ 1 & \text{para } 70 \leq x \leq 90 \end{cases}$

Lógica Difusa

Conjuntos difusos

Presupuesto:



Conjuntos difusos

Staff:

Pequeño:

$$\mu_{S1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 6 \\ -\frac{x}{8} + \frac{7}{4} & \text{para } 6 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

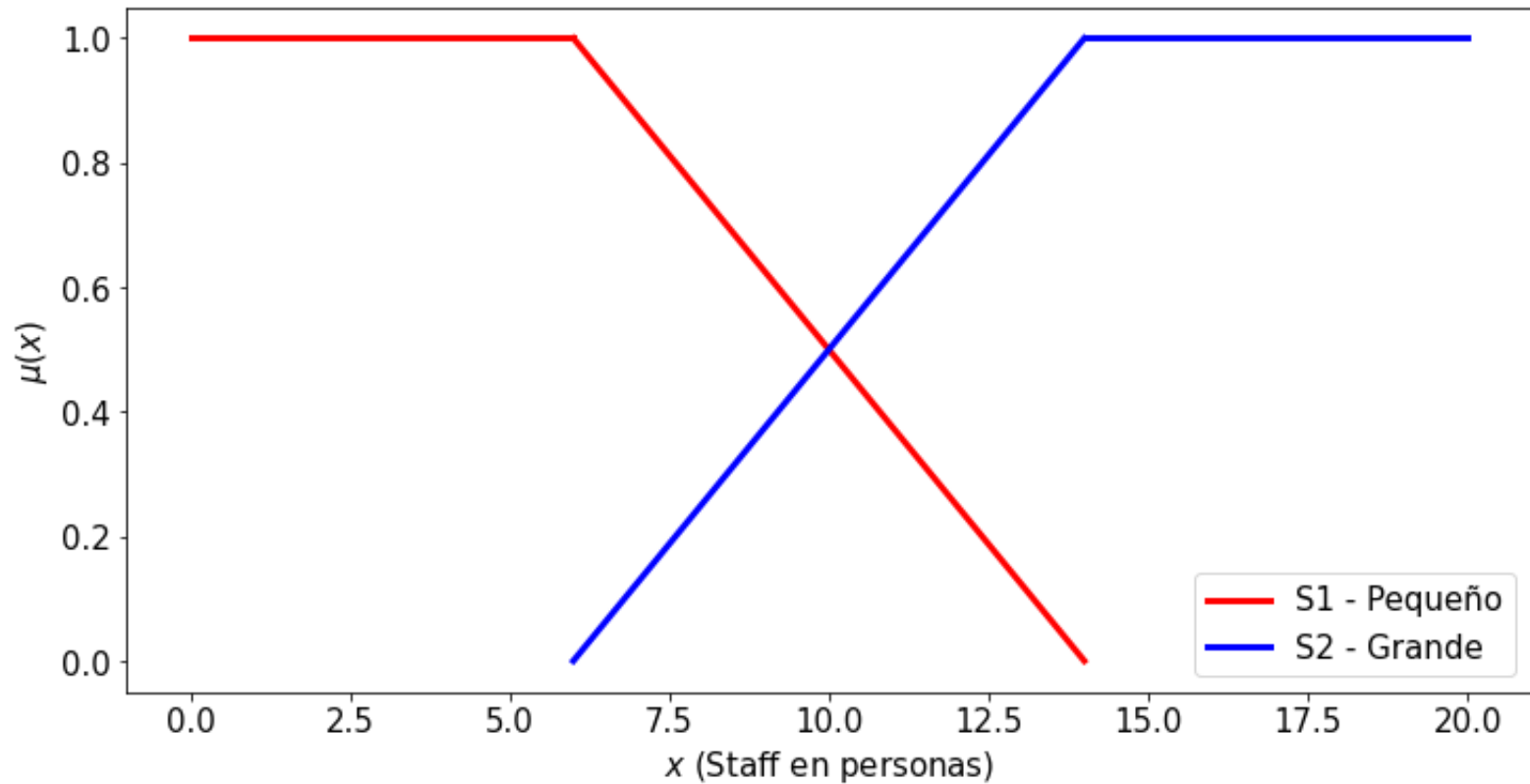
Grande:

$$\mu_{S2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{3}{4} & \text{para } 6 \leq x \leq 14 \\ 1 & \text{para } 14 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

Lógica Difusa

Conjuntos difusos

Staff:



Conjuntos difusos

Riesgo:

Bajo:

$$\mu_{R1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 30 \\ -\frac{x}{10} + 4 & \text{para } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Medio:

$$\mu_{R2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} + 3 & \text{para } 30 \leq x \leq 40 \\ 1 & \text{para } 40 \leq x \leq 60 \\ -\frac{x}{10} + 7 & \text{para } 60 \leq x \leq 70 \end{cases}$$

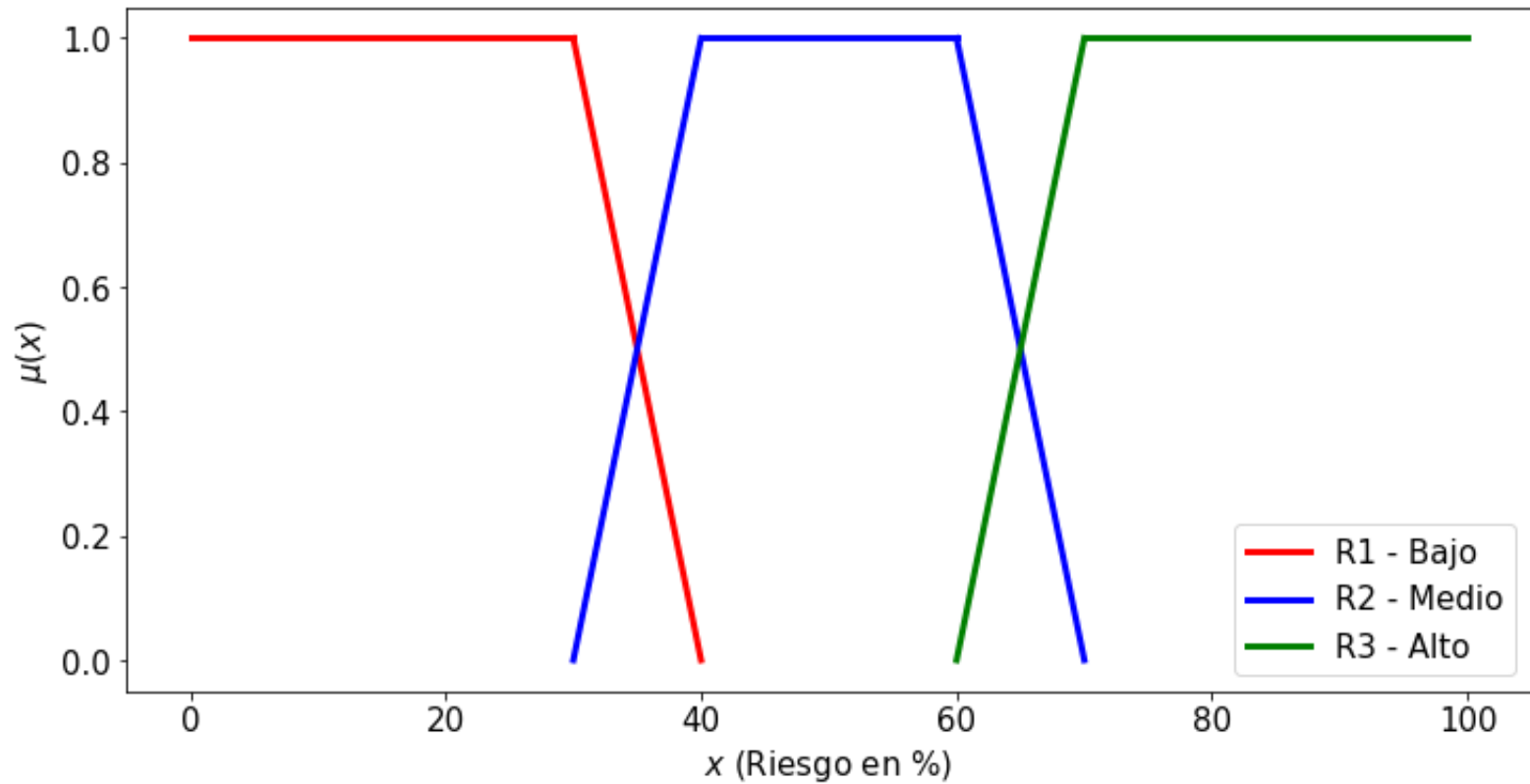
Alto:

$$\mu_{R3}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} - 6 & \text{para } 60 \leq x \leq 70 \\ 1 & \text{para } 70 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

Lógica Difusa

Conjuntos difusos

Riesgo:



Paso 1 - Fuzzificación

- Se determina el grado en el que cada entrada pertenece a cada uno de los conjuntos difusos.
- Se evalúan las funciones de membresía.

Paso 1 - Fuzzificación

Presupuesto:

Inadecuado: $\mu_{P_1}(25) = -\frac{25}{30} + 1 = \frac{1}{6}$

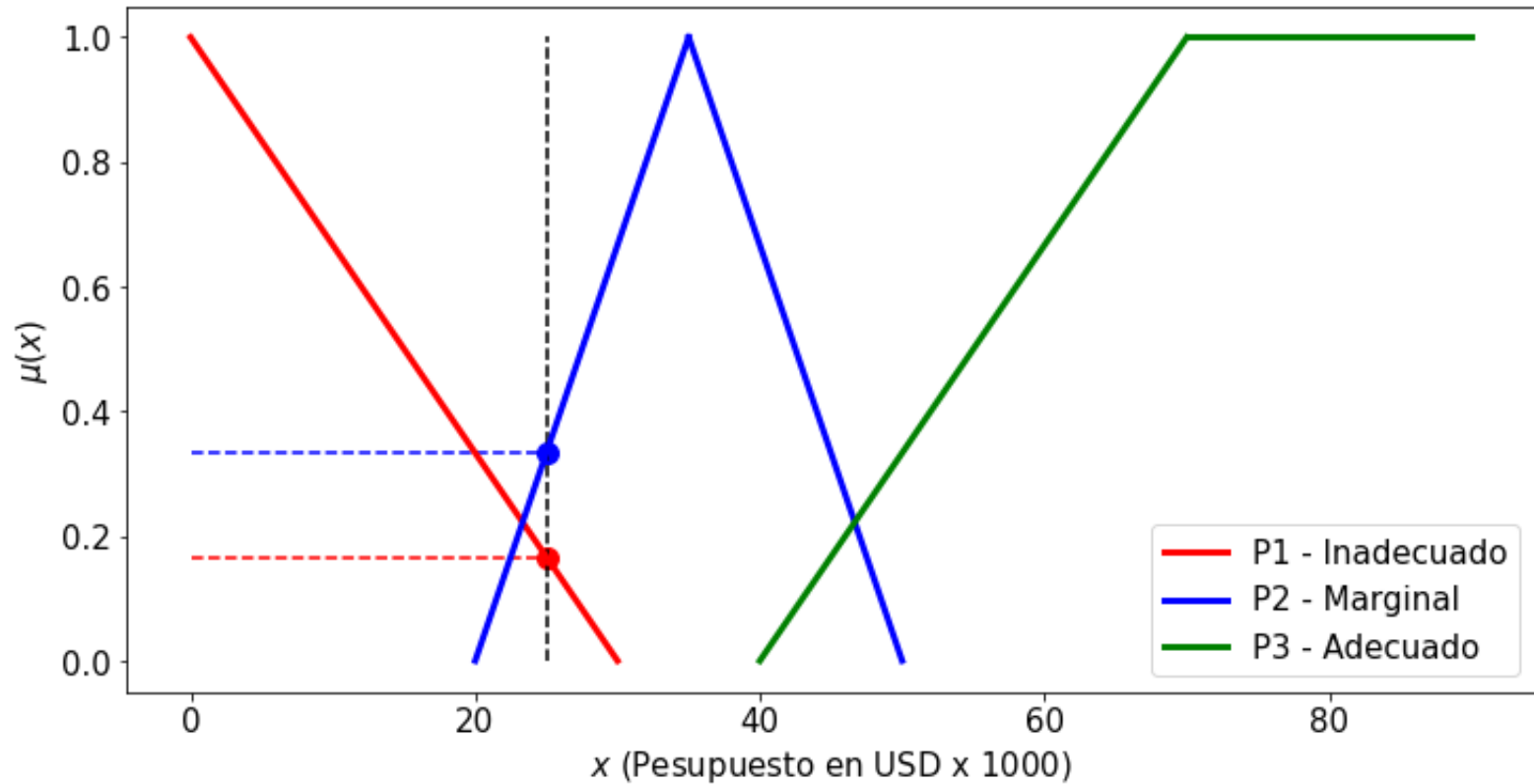
Marginal: $\mu_{P_2}(25) = \frac{1}{3}$

Adecuado: $\mu_{P_3}(25) = 0$

Lógica Difusa

Paso 1 - Fuzzificación

Presupuesto:



Paso 1 - Fuzzificación

Staff:

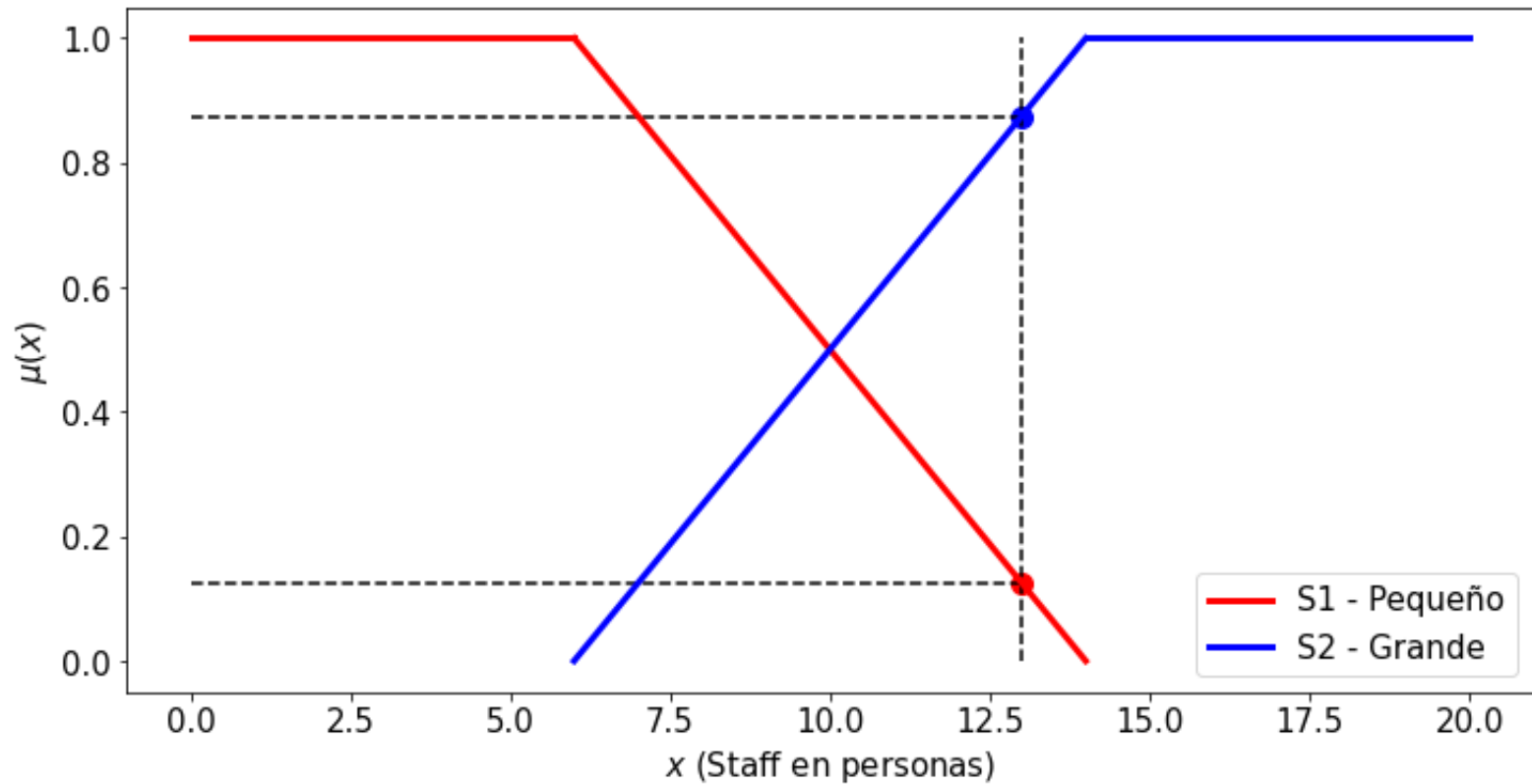
Pequeño: $\mu_{S1}(13) = \frac{1}{8}$

Grande: $\mu_{S2}(13) = \frac{7}{8}$

Lógica Difusa

Paso 1 - Fuzzificación

Staff:



Paso 2 – Aplicación de operadores difusos

- Si alguna regla tiene un antecedente compuesto se deben aplicar los operadores para obtener un único número que representa el antecedente.
- Cada operador difuso recibe uno o más valores y devuelve un único valor de verdad.

Paso 2 – Aplicación de operadores difusos

Operador	Método	Expresión
$P \text{ y } Q$	Mínimo	$\min(P, Q)$
“	Producto	$P * Q$
“	Truncamiento	$\max((P + Q - 1), 0)$
$P \text{ o } Q$	Máximo	$\max(P, Q)$
“	Amplificación	$P + Q * (1 - P)$
“	Adición	$\min(P + Q, 1)$
no P	Complemento	$1 - P$

Paso 2 – Aplicación de operadores difusos

Si el presupuesto es adecuado
o el staff es pequeño,
entonces el riesgo es bajo.

if p is P_3
or s is S_1
Then r is R_1

Si el presupuesto es marginal
y el staff es grande,
el riesgo es medio.

if p is P_2
and s is S_2
Then r is R_2

Si el presupuesto es inadecuado,
el riesgo es grande.

if p is P_1
Then r is R_3

Paso 2 – Aplicación de operadores difusos

Regla I:

$$p \text{ is } P_3 \textbf{ or } s \text{ is } S_1 = \max(\mu_{P_3}(p), \mu_{S_1}(s)) = \max\left(0, \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

Regla II:

$$p \text{ is } P_2 \textbf{ and } s \text{ is } S_2 = \min(\mu_{P_2}(p), \mu_{S_2}(s)) = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{3}$$

Regla III:

$$p \text{ is } P_1 = \frac{1}{6}$$

Paso 3 – Implicación

- Conformar el consecuente (conjunto difuso) para cada regla.
- El resultado es proporcional al valor del antecedente.

Paso 2 – Aplicación de operadores difusos

Regla I (...Then r is R_1)

$$\text{resultado: } \frac{1}{8} R_1$$

Regla II (...Then r is R_2)

$$\text{resultado: } \frac{1}{3} R_2$$

Regla III (...Then r is R_3)

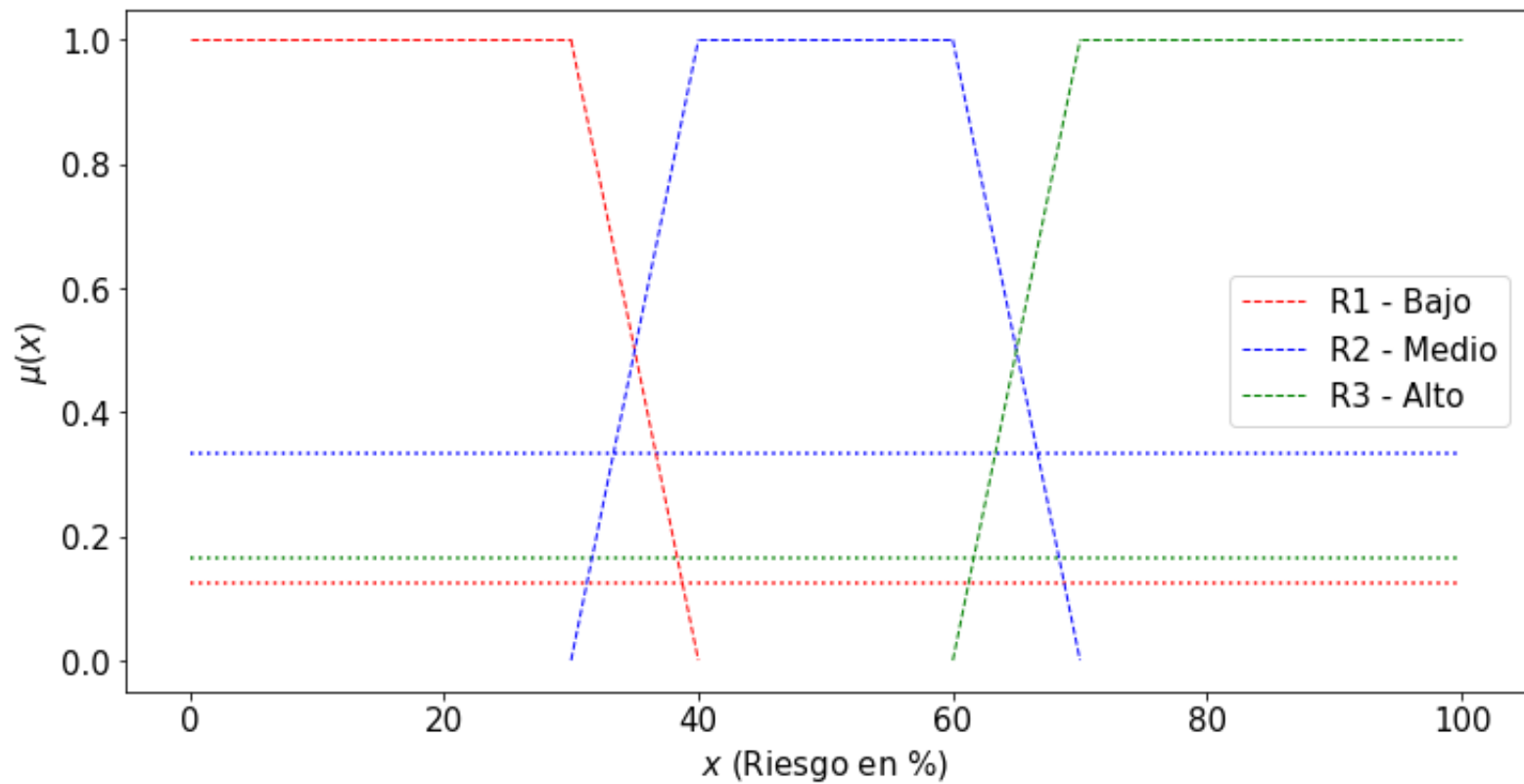
$$\text{resultado: } \frac{1}{6} R_3$$

Paso 4 – Agregación

- Se unifican las salidas uniando los procesos paralelos.
- Se combinan las salidas en un único conjunto difuso.
- La entrada del proceso es la lista de las salidas truncadas según el resultado de la implicación.
- La salida es un único conjunto difuso para cada variable de salida.
- Algunos métodos son máx, prob OR y sum.

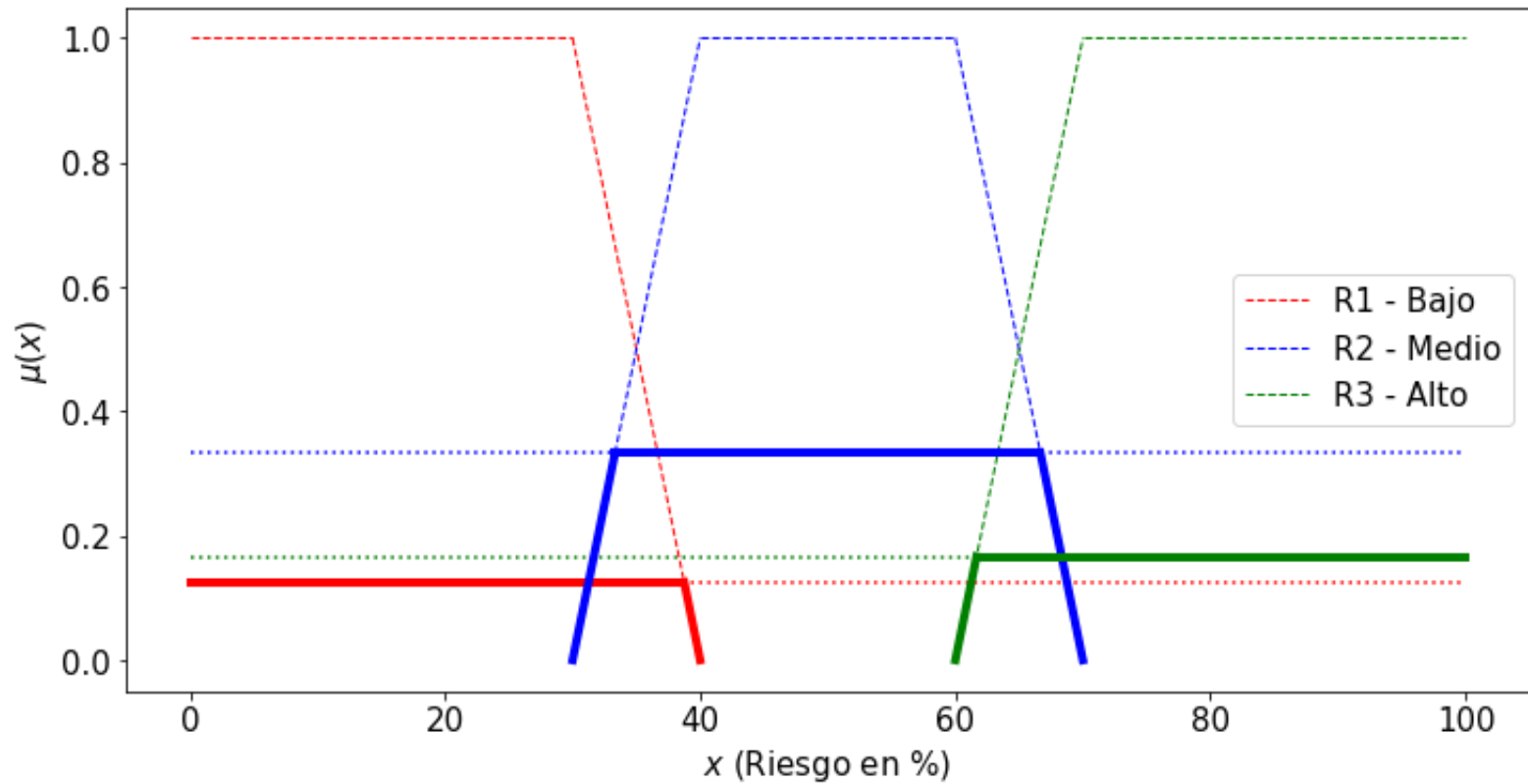
Lógica Difusa

Paso 4 – Agregación



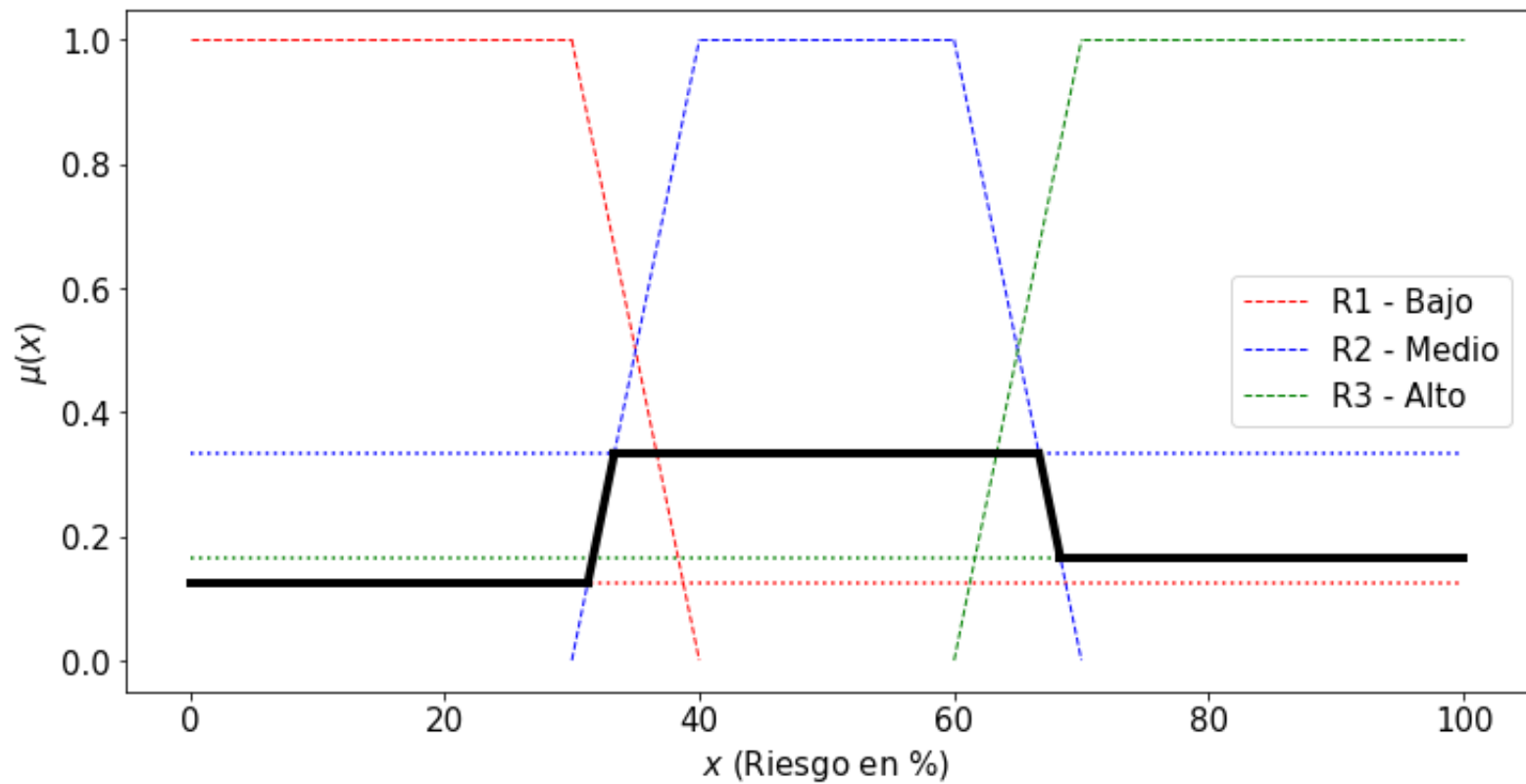
Lógica Difusa

Paso 4 – Agregación



Lógica Difusa

Paso 4 – Agregación



Paso 5 – Defuzzificación

- Devuelve la salida final del modelo, un único número por variable.
- La entrada es el conjunto logrado en el paso de agregación.
- El método más popular es el cálculo del centroide:

$$CG = \frac{\sum_{x=a}^b \mu_A(x)x}{\sum_{x=a}^b \mu_A(x)}$$

Paso 5 – Defuzzificación

$$CG = \frac{\sum_{x=a}^b \mu_A(x)x}{\sum_{x=a}^b \mu_A(x)}$$

$$\begin{aligned} num = & (0 + 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30) \frac{1}{8} \\ & + (35 + 40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65) \frac{1}{3} \\ & + (70 + 75 + 80 + 85 + 90 + 95 + 100) \frac{1}{6} = 228,958 \end{aligned}$$

$$den = 7 \frac{1}{8} + 7 \frac{1}{3} + 7 \frac{1}{6} = 4,375$$

$$\frac{num}{den} = 52,33$$

Paso 5 – Defuzzificación

$$\frac{num}{den} = 52,33$$

El riesgo del proyecto es 52,33 %