MOMENTOS E INVARIANTES

Momentos son características de objetos utilizados también en otras áreas de la ciencia, por ejemplo en la física se usan los momentos estáticos o de inercia; en la teoría de probabilidad se conocen el valor medio o la desviación. En el procesamiento de imágenes se aplican momentos "geométricos" para describir y reconocer objetos en imágenes. Nosotros nos dedicaremos sólo al caso 2-dimensional.

El momento de un objeto B en una imagen "continua" (sin éstas discretizada) de orden p+q está definido como:

$$M_{p,q} = \iint_B x^p y^q dxdy.$$

En una imagen discreta eso se ve como:

$$M_{p,q} = \sum_{(x,y)\in B}\sum x^p y^q.$$

Obviamente   es el número de pixeles de B, así que $M_{0,0}$ es interpretada como el área geométrica del objeto B. Además, resulta que $\frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}$ y $\frac{M_{0,1}}{M_{0,0}}$ son las coordenadas del punto centro de B. Se considera también un conjunto de puntos (x_M, y_M) descrito por la ecuación:

$$M_{2,0}x_M^2 + 2M_{1,1}x_M y_M + M_{0,2}y_M^2 = 1$$

La cual representa una curva de segundo orden en el plano. Como se puede demostrar que $M_{0,2}M_{2,0} \geq M_{1,1}^2$ resulta que esa curva es siempre una elipse. Así, los momentos $M_{2,0}$, $M_{0,2}$, $M_{1,1}$ se interpretan como los datos de una elipse llamada "elipse de inercia" de B.

EJEMPLOS:

```
*****
*
***                       ********
*
*
```

Momentos calculados con respecto al punto centro de B se llaman momentos centrales; se calculan como:

$$M_{p,q} = \sum_{(x,y)\in B}\sum \left(x - \bar{x}\right)^p \left(y - \bar{y}\right)^q$$

donde ($\bar{x}$, $\bar{y}$) es el punto centro de B ("centroide"!), es decir:

$$\bar{x} = \frac{M_{1,0}}{M_{0,0}} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{0,1}}{M_{0,0}}$$

Obviamente $m_{0,0} = m_{0,0}$; pues durante una traslación de B su área no cambia. Nótese que: $m_{0,1} = m_{0,1} = 0$. De allí vemos que la consideración de los momentos centrales $m_{p,q}$, es equivalente a la consideración de los $m_{p,q}$, siempre y cuando B fue un traslado de tal manera que ($\bar{x}$, $\bar{y}$) quede en el origen (0 , 0). Nosotros calcularemos siempre primer $M_{1,0}$, $M_{0,1}$, $M_{0,0}$, para realizar esta transformación de coordenadas (traslación de B) llamada "normalización del centroide", para que todos los $m_{p,q}$ se conviertan en los $m_{p,q}$; en particular $m_{1,0} = m_{0,1} = 0$, $m_{0,0} = m_{0,0}$.

Si queremos describir el objeto B con la idea en mente de reconocerlo después, necesitamos características de B que son invariantes bajo ciertas transformaciones que B puede sufrir. Por ejemplo, es natural pedir, que éstas características de B se mantengan igual, cuando B aparece de forma rotada en la imagen.

Dr. Voss discutió este problema con respecto a los momentos como posibles características de B de manera general, analizando qué pasa con los momentos $m_{p,q}$ cuando se aplica una transformación afín homogénea a B. Resulta que los $m_{p,q}$ sí se cambian!!, es decir, que no invariantes afines. La idea es entonces desarrollar nuevos momentos los cuales sí son invariantes afines, quitando a los $m_{p,q}$ paso a paso su "sensibilidad" a las transformaciones afines.

Base para eso es la fórmula general de un transformación afín homóloga

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se deduce primero que $m_{0,1}^1 = m_{1,0}^1 = 0$ pasa los momentos centrales DESPUÉS de la transformación A, así que el punto centroide se queda en el origen. Recordamos que A es separable de la forma:

A = R * S * X

es decir, A se realiza por un "enchuecamiento" (skewing) X seguido por un escalamiento anisotrópico S y una rotación alrededor del origen R, en formulas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\zeta & -sen\zeta \\ sen\zeta & \cos\zeta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se deduce fácilmente que el enchuecamiento X tiene el siguiente efecto sobre los momentos $m_{p,q}$:

$$m_{p,q}^{1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-q} m_{k_1 p+q-k}$$

En particular se sigue

$$m_{1,1}^{1} = m_{1,1} + \alpha \cdot m_{0,2} = 0 \quad ,$$

lo cual permite calcular el parámetro α de X como

$$\alpha = -\frac{m_{1,1}}{m_{0,2}}$$

Fíjense que la normalización del centroide tiene el resultado que los momentos CENTRALES $m_{p,q}$ (en contraste a los $m_{p,q}$) ya son invariantes bajo traslación. Ahora la idea es transformar todos los $m_{p,q}$ de tal manera que los NUEVOS momentos $m_{p,q}^{x}$ sean invariantes bajo X. Lo lograremos substituyendo el parámetro α por $-\left(\frac{m_{1,1}}{m_{0,2}}\right)$ por en la transformación de los $m_{p,q}$:

$$m_{p,q}^{x} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(-\frac{m_{1,1}}{m_{0,2}}\right)^{p-k} m_{k_1 p+q-k}$$

El siguiente paso es la realización del escalamiento S. Aprendemos de los últimos dos pasos que la "regla de normas" en la normalización del centroide era $m_{1,0}^{1} = m_{0,1}^{1} = 0$ (dos reglas para dos parámetros de la traslación); la regla normalizada con respecto a X es $m_{1,1}^{1} = 0$ (UNA regla por el parámetro α).

Ahora se proponen las (dos, pues tenemos dos parámetros β , γ) reglas de normalización

$$m_{2,0}^{1} = 1$$
$$m_{0,2}^{1} = 1$$

Como se puede deducir que la aplicación de S produce el efecto

$$m_{p,q}^{1} = \beta^{p+1} \gamma^{q+1} m_{p,q} \quad ,$$

tenemos entonces como ecuaciones para β , γ :

$$\beta^{3} \gamma m_{2,0} = 1 \Rightarrow \beta = \sqrt[\infty]{\frac{m_{0,2}}{m_{2,0}^{3}}}$$

$$\beta \gamma^{3} m_{0,2} = 1 \Rightarrow \gamma = \sqrt[\infty]{\frac{m_{2,0}}{m_{0,2}^{3}}}$$

así que se llega a un conjunto de momentos "insensibles" al escalamiento (y a X!);

$$m_{p,q}^{SX} = \sqrt[\infty]{\left(m_{0,2}^{X}\right)^{p-3q-2}\left(m_{2,0}^{X}\right)^{q-3p-2}}\, m_{p,q}$$

Nótese que la normalización con respecto a X_1 $m_{1,1} = 0_1$ se mantiene aquí. La misma idea se aplica con respecto a la rotación R. Dr. Voss utilizó la regla de normalización y llega después d unos cálculos y discusiones a

$$m_{p,q}^{RSX} = \left[\left(m_{3,0}^{SX} + m_{1,2}^{SX}\right)^2 + \left(m_{0,3}^{SX} + m_{2,1}^{SX}\right)^2\right] \bullet \sum_{k=0}^{p}\sum_{l=0}^{q}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{q}{l}\left(m_{0,3}^{SX} + m_{2,1}^{SX}\right)^{p+l-k}\left(m_{3,0}^{SX} + m_{2,1}^{SX}\right)^{q+k-l} \bullet m_{p+q-k-l,k+l}^{SX}$$

Así, que los momentos calculados con esa fórmula nos dan para $m_{3,0}$, $m_{2,1}$, $m_{1,2}$, $m_{0,3}$, $m_{4,0}$, $m_{3,1}$, ... *
características interesantes y afín-invariantes. Para cálculos propios no se aplicará necesariamente esta complicada fórmula, sino se calcularán los momentos de interés en cada paso de transformación inmediatamente.

Por las normalizaciones

$$* \quad \left(m_{1,0} = 0 \;, m_{0,1} = 0, m_{2,0} = 1, m_{1,1} = 0, m_{0,2} = 0, m_{3,0} + m_{1,2} = 0\right)$$

|||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

TAREA V

Obtener los momentos invariantes a la traslación.

Los momentos son, características de objetos, en el procesamiento de imágenes se aplican momentos "geométricos" para describir y reconocer objetos en imágenes.

El momento de un objeto de una imagen "continua" de orden p+q está definida como:

$$M_{p,q} = \iint_B x^p y^q \, dx dy$$

Una imagen discreta se ve como:

$$M_{p,q} = \sum_{(x,y)\in Objeto} \sum x^p y^q$$

$$m_{0,0} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x)^0 (y)^0 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Observamos que $M_{0,0}$ es el número de pixeles del objeto, así que $M_{0,0}$ es interpretada como el área geométrica del objeto.

$$m_{1,0} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x)^1 (y)^0 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x f(x,y)$$

Observamos que si m_{10}/m_{00} es el punto centro del objeto sobre el eje X.

$$m_{01} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x)^0 (y)^1 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y f(x,y)$$

Observemos que si m_{01}/m_{00} es el punto centro del objeto sobre el eje Y.

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

*

$$m_{20} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x)^2 (y)^0 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x^2 f(x,y)$$

$$m_{02} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x)^0 (y)^2 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y^2 f(x,y)$$

$$m_{21} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x)^2 (y)^1 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x^2 y f(x,y)$$

$$m_{12} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x)^1(y)^2 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xy^2 f(x,y)$$

El momento central es llamado así, al cálculo del momento con respecto al punto centro del objeto, y es expresado de la siguiente forma:

$$M_{p,q} = \sum_{(x,y)\in Objeto}\sum (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q$$

En donde ($\bar{x}$, $\bar{y}$) es el punto centro de "B" objeto (centroide), es decir:

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

$$\mu_{00} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x-\bar{x})^0(y-\bar{y})^0 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \Rightarrow m_{0,0} = M_{0,0}$$

$$\mu_{10} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x-\bar{x})^1(y-\bar{y})^0 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xf(x,y) - \bar{x}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = m_{10} - \left(\frac{m_{10}}{m_{00}} m_{00}\right) = 0$$

$$\mu_{01} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x-\bar{x})^0(y-\bar{y})^1 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} yf(x,y) - \bar{y}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = m_{01} - \left(\frac{m_{01}}{m_{00}} m_{00}\right) = 0$$

**

$$\mu_{20} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}(x-\bar{x})^2(y-\bar{y})^0 f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2\right] f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x^2 - 2\left(\frac{m_{10}}{m_{00}}\right)\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x + \bar{x}^2 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y$$

$$= m_{20} - 2\frac{m_{10}}{m_{00}} m_{10} + \frac{m_{10^2}}{m_{00^2}} m_{00} = m_{20} - \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{10} = m_{20} - \bar{x} m_{10}$$

$$\mu_{02} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(x-\bar{x}\right)^0\left(y-\bar{y}\right)^2 f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[y^2 - 2y\bar{y} + \bar{y}^2\right] f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y^2 f\left(x,y\right) - 2\bar{y}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y f\left(x,y\right) + \bar{y}^2 \sum$$

$$= m_{02} - 2\frac{m_{01}}{m_{00}} m_{10} + \frac{m_{01^2}}{m_{00^2}} m_{00} = m_{02} - \bar{y} m_{01}$$

$$\mu_{11} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(x-\bar{x}\right)^1\left(y-\bar{y}\right)^1 f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[xy\right] f\left(x,y\right) - \bar{y}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x f\left(x,y\right) - \bar{x}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y f\left(x,y\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xy f\left(x,y\right) - \bar{y}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x f\left(x,y\right) - \bar{x}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{n-1} y f\left(x,y\right) + \overline{xy}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f\left(x,y\right)$$

$$= m_{11} - \frac{m_{01}}{m_{00}} m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{01} + \frac{m_{01}}{m_{00}}\frac{m_{10}}{m_{00}} m_{00} = m_{11} - \bar{y} m_{10}$$

***

$$\mu_{30} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(x-\bar{x}\right)^3\left(y-\bar{y}\right)^0 f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[x^3 - 3x^2\bar{x} + 3x\bar{x}^2 - \bar{x}^3\right] f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x^3 f\left(x,y\right) - 3\bar{x}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x^2 f\left(x,y\right)$$

$$+3\bar{x}^2 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x f\left(x,y\right) - \bar{x}^3 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f\left(x,y\right) = m_{30} - 3\frac{m_{10}}{m_{00}} m_{20} + 3\frac{m_{10}}{m_{00}} m_{10} - \frac{m_{10^3}}{m_{00^3}} = m_{30} - 3\bar{x} m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}$$

$$\mu_{12} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(x-\bar{x}\right)^1\left(y-\bar{y}\right)^2 f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[x-\bar{x}\right]\left[y^2 - 2y\bar{y} + \bar{y}^2\right] f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[xy^2 - x2y\bar{y} + x\bar{y}^2 - \bar{x}y^2 + \bar{x}2y\bar{y} - \overline{xy}\right.$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xy^2 f\left(x,y\right) - 2\bar{y} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xyf\left(x,y\right) + \bar{y}^2 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xf\left(x,y\right) - \bar{x}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y^2 + 2\overline{xy}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} yf\left(x,y\right) - \overline{xy}^2 \sum\sum f\left(x,y\right)$$

$$= m_{12} - 2\bar{y}m_{11} + \bar{y}^2 m_{10} - \bar{x}m_{02} + 2\overline{xy}m_{01} - \overline{xy}^2 m_{00} = m_{12} - 2\bar{y}m_{11} + \frac{m_{01^2}}{m_{00^2}} m_{10} - \bar{x}m_{02} + 2\frac{m_{10}}{m_{00}}\frac{m_{01}}{m_{00}} m_{01} - \frac{m_{10}}{m_{00}}\frac{m_{01^2}}{m_{00^2}} m_{00}$$

$$= m_{12} - 2\bar{y}m_{11} + \bar{y}^2 m_{10} - \bar{x}m_{02} + 2\frac{m_{10}m_{01^2}}{m_{00^2}} - \frac{m_{10}m_{01^2}}{m_{00^2}} = m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}$$

* * * *

$$\mu_{21} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(x-\bar{x}\right)^2\left(y-\bar{y}\right)^1 f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[y-\bar{y}\right]\left[x^2-2x\bar{x}+\bar{x}^2\right]f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[yx^2-y2x\bar{x}+y\bar{x}^2-\bar{y}x^2+\bar{y}2x\bar{x}-\overline{yx}\right.$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} yx^2 f\left(x,y\right) - 2\bar{x} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xyf\left(x,y\right) + \bar{x}^2 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} yf\left(x,y\right) - \bar{y}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} x^2 f\left(x,y\right) + 2\overline{xy}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} xf\left(x,y\right) - \overline{yx}^2 \sum\sum f\left(x,y\right.$$

$$= m_{21} - 2\bar{x}m_{11} + \bar{x}^2 m_{01} - \bar{y}m_{20} + 2\overline{xy}m_{10} - \overline{yx}^2 m_{00} = m_{21} - 2\bar{x}m_{11} + \bar{x}^2 m_{01} - \bar{y}m_{20} + 2\frac{m_{10}}{m_{00}}\frac{m_{01}}{m_{00}} m_{10} - \frac{m_{01}}{m_{00}}\frac{m_{10^2}}{m_{00^2}} m_{00}$$

$$= m_{21} - 2\bar{x}m_{11} + \bar{x}^2 m_{01} - \bar{y}m_{02} + 2\frac{m_{01}m_{10^2}}{m_{00^2}} - \frac{m_{01}m_{10^2}}{m_{00^2}} = m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01}$$

$$\mu_{03} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(x-\bar{x}\right)^0\left(y-\bar{y}\right)^3 f\left(x,y\right) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[y^3 - 3y^2\bar{y} + 3y\bar{y}^2 - \bar{y}^3\right]f\left(x,y\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y^3 f\left(x,y\right) - 3\bar{y}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} y^2 f\left(x,y\right) + 3\bar{y}^2 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} yf\left(x,y\right) - \bar{y}^3 \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f\left(x,y\right)$$

$$= m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 3\bar{y}^2 m_{01} - \bar{y}^3 m_{00} = m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 3\frac{m_{01^2}}{m_{00^2}} m_{01} - \frac{m_{01^3}}{m_{00^3}} m_{00}$$

$$= m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 3\frac{m_{01^3}}{m_{00^2}} - \frac{m_{01^3}}{m_{00^2}} = m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}$$

*****
