Ejercicio 7

Sea $v_{(t)}$ una función periódica con periodo T_0, definida por la repetición de la función $z_{(t)}$ entre $-T_0/2$ y $T_0/2$:

$$z_{(t)} = 1 + \cos(\pi / T_0 \cdot t)$$

Se pide hallar la serie de Fourier, expresada en formato exponencial.

Sea la función:

$z(t) = 1 + \cos(\frac{\pi}{T_0}.t) = 1 + \cos(\frac{\omega_0}{2}.t)$

Se puede expresar la función $v(t)$ utilizando la serie de Fourier en formato exponencial como:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n.e^{j.n.\omega_0.t}$$

donde:

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_0}{2}.t\right)\right).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{\omega_0}{2}.t\right).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

Analizando la primer integral para los casos de $n = 0$ y $n \neq 0$.

Cuando $n = 0$:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{0}.dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1.dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\left[t\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\left[\frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2}\right)\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\left[\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2}\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.T_0 = 1$$

Cuando $n \neq 0$:

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\left[\frac{e^{-j.n.\omega_0.t}}{(-j).n.\omega_0}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.(-1).\frac{e^{-j.n.\omega_0.\frac{T_0}{2}} - e^{-j.n.\omega_0.(-\frac{T_0}{2})}}{j.n.\omega_0}$$

$$\frac{\omega_0.T_0}{2} = \pi$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\frac{e^{j.n.\pi} - e^{-j.n\pi}}{j.n.\omega_0}$$

$$C_n = \frac{1}{T_0.n.\omega_0}.\frac{e^{j.n.\pi} - e^{-j.n\pi}}{j}$$

Reemplazando la expresión de Euler por su forma senoidal:

$$C_n = \frac{1}{T_0.n.\omega_0}.2.\sin(n.\pi)$$

De esta expresión se puede deducir que $\sin(n.\pi) = 0$ para cualquier valor de n, por lo tanto, $C_n = 0$ para cualquier valor de n.

Analizando la segunda integral para los casos de $n = 0$ y $n \neq 0$.

Cuando $n = 0$:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{\omega_0}{2}.t\right).e^0.dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{T_0}.t\right).1.dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_0}.t\right)}{\frac{\pi}{T_0}}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}.\left[\sin\left(\frac{\pi}{T_0}.\frac{T_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{T_0}.\left(-\frac{T_0}{2}\right)\right)\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}.\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}.[1 - (-1)]$$

$$C_0 = \frac{2}{\pi}$$

Cuando $n \neq 0$:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{\omega_0}{2}.t\right).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

Reemplazando el coseno por su expresión de Euler:

$$\cos\left(\frac{\omega_0}{2}.t\right) = \frac{e^{j.\frac{\omega_0}{2}.t} + e^{-j.\frac{\omega_0}{2}.t}}{2}$$

La expresión de C_n queda:

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{e^{j.\frac{\omega_0}{2}.t} + e^{-j.\frac{\omega_0}{2}.t}}{2}\right).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{2.T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(e^{j.\frac{\omega_0}{2}.t} + e^{-j.\frac{\omega_0}{2}.t}\right).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{2.T_0}.\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j.\frac{\omega_0}{2}.t}.e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.\frac{\omega_0}{2}.t}.e^{-j.n.\omega_0.t}.dt\right)$$

$$C_n = \frac{1}{2.T_0}.\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.(\frac{1}{2}-n).\omega_0.t}.dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.(\frac{1}{2}+n).\omega_0.t}.dt\right)$$

Resolviendo la integral de forma genérica, se puede expresar que:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-a.t}.dt = \frac{e^{\frac{a.T_0}{2}} - e^{-\frac{a.T_0}{2}}}{a}$$

$$C_n = \frac{1}{2.T_0}.\left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.(\frac{1}{2}-n).\omega_0.t}.dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.(\frac{1}{2}+n).\omega_0.t}.dt\right)$$

$$C_n = \frac{1}{2.T_0}.\left(\frac{e^{-j.(\frac{1}{2}-n).\omega_0.\frac{T_0}{2}} - e^{j.(\frac{1}{2}-n).\omega_0.\frac{T_0}{2}}}{-j.(\frac{1}{2}-n).\omega_0} + \frac{e^{-j.(\frac{1}{2}+n).\omega_0.\frac{T_0}{2}} - e^{j.(\frac{1}{2}+n).\omega_0.\frac{T_0}{2}}}{-j.(\frac{1}{2}+n).\omega_0}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{T_0.\omega_0}.\left(\frac{e^{j.(\frac{1}{2}-n).\pi} - e^{-j.(\frac{1}{2}-n).\pi}}{2.j.(\frac{1}{2}-n)} + \frac{e^{j.(\frac{1}{2}+n).\pi} - e^{-j.(\frac{1}{2}+n).\pi}}{2.j.(\frac{1}{2}+n)}\right)$$

$$C_n = \frac{1}{2.\pi}.\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - n.\pi)}{(\frac{1}{2}-n)} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n.\pi)}{(\frac{1}{2}+n)}\right)$$

Considerando que:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm n.\pi\right) = (-1)^n$$

La expresión queda:

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2.\pi}.\left(\frac{1}{(\frac{1}{2}-n)} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+n)}\right)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2.\pi}.\left(\frac{1}{(\frac{1}{2}-n)} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+n)}\right)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2.\pi}.\left(\frac{(\frac{1}{2}+n)+(\frac{1}{2}-n)}{(\frac{1}{2}-n).(\frac{1}{2}+n)}\right)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2.\pi}.\left(\frac{1}{\frac{1}{4}-n^2}\right)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2.\pi}.4.\left(\frac{1}{1-4.n^2}\right)$$

$$C_n = \frac{2.(-1)^n}{\pi}.\left(\frac{1}{1-4.n^2}\right)$$

$$C_n = \frac{2.(-1)^n}{\pi}.(-1).\frac{1}{4.n^2-1}$$

Finalmente, considerando los términos C_0 (proveniente de ambas integrales) y C_n para $n \neq 0$ (provenientes de la segunda integral), la expresión queda:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n.e^{j.n.\omega_0.t}$$

$$v(t) = C_0.e^{j.n.\omega_0.t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n.e^{j.n.\omega_0.t}$$

$$v(t) = \left(1+\frac{2}{\pi}\right).e^{j.n.\omega_0.t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-2).(-1)^n}{\pi}.\frac{1}{4.n^2-1}.e^{j.n.\omega_0.t}$$

$$v(t) = \frac{\pi+2}{\pi}.e^{j.n.\omega_0.t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-2).(-1)^n}{\pi}.\frac{1}{4.n^2-1}.e^{j.n.\omega_0.t}$$