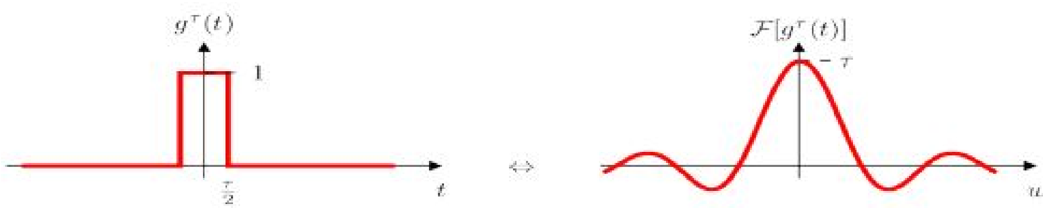
Ejercicio 9

Sea una señal pulso unitario de 1 seg de duración y amplitud de 5 Volts. Se pide, usando algún software de ayuda (octave, Matlab, etc):

a) Graficar la transformada de Fourier.
b) Calcular la energía normalizada de la señal.
c) Repita los ítems a y b considerando la duración en 4 seg y la amplitud de 2,5 Volt.
d) Repita los ítems a y b considerando la duración en 0,25 seg y la amplitud de 10 Volts.
e) ¿Qué sucede en todos los casos con la energía? Compare la energía calculada en el tiempo con la energía calculada en la frecuencia ¿Qué nota?
f) ¿Qué ancho de banda debería tener un filtro pasabajos RC de primer orden para dejar pasar el pulso rectangular con rise times de 1useg y de 1miliseg?

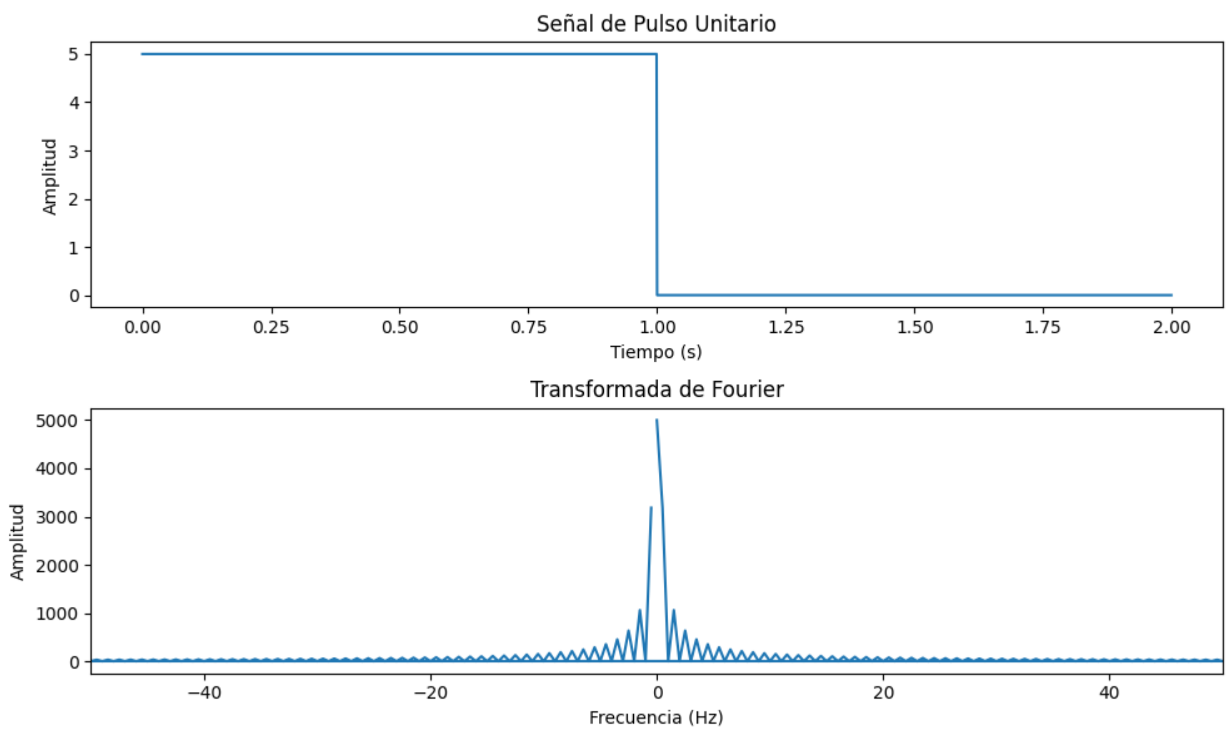


a)

Señal pulso unitario y su correspondiente Transformada de Fourier

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.fft import fft

# Parámetros de la señal
duration = 1.0  # Duración en segundos
amplitude = 5.0  # Amplitud en Volts
sampling_rate = 1000  # Frecuencia de muestreo en Hz
num_samples = int(sampling_rate * duration*2)

# Generar la señal de pulso unitario
signal = np.zeros(num_samples)
signal[0:int(num_samples/2)] = amplitude

# Realizar la transformada de Fourier
frequency_axis = np.fft.fftfreq(num_samples, d=1/sampling_rate)
fourier_transform = fft(signal)

# Gráfico de la señal de pulso unitario
plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(np.arange(num_samples) / sampling_rate, signal)
plt.title('Señal de Pulso Unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Amplitud')

# Gráfico de la transformada de Fourier
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(frequency_axis, np.abs(fourier_transform))
plt.title('Transformada de Fourier')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.xlim(-50, 50)  # Mostrar solo hasta la mitad de la frecuencia de muestreo
plt.tight_layout()

plt.show()
```



b)

Energía normalizada

Siendo $s(t) = 5$ para $0 < t < 1$ y $s(t) = 0$ para cualquier otro valor de t.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2.dt$$

$$E = \int_{0}^{1} (5)^2.dt$$

$$E = 25.\int_{0}^{1} dt$$

$$E = 25.[t]_0^1$$

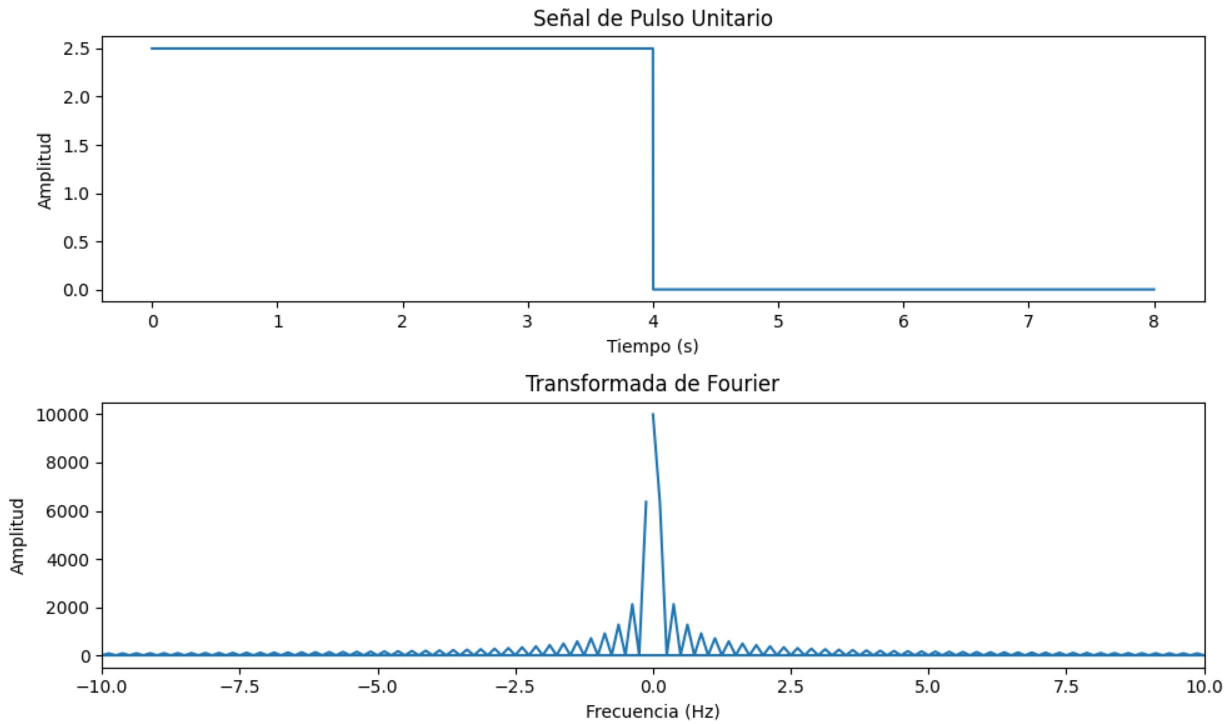
$$E = 25[J]$$

c)

Señal pulso unitario y su correspondiente transformada de Fourier

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.fft import fft

# Parámetros de la señal
duration = 4.0  # Duración en segundos
amplitude = 2.5  # Amplitud en Volts
sampling_rate = 1000  # Frecuencia de muestreo en Hz
num_samples = int(sampling_rate * duration*2)

# Generar la señal de pulso unitario
signal = np.zeros(num_samples)
signal[0:int(num_samples/2)] = amplitude

# Realizar la transformada de Fourier
frequency_axis = np.fft.fftfreq(num_samples, d=1/sampling_rate)
fourier_transform = fft(signal)

# Gráfico de la señal de pulso unitario
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(np.arange(num_samples) / sampling_rate, signal)
plt.title('Señal de Pulso Unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Amplitud')

# Gráfico de la transformada de Fourier
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(frequency_axis, np.abs(fourier_transform))
plt.title('Transformada de Fourier')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
```

```python
plt.ylabel('Amplitud')
plt.xlim(-10, 10)  # Mostrar solo hasta la mitad de la frecuencia de muestreo
plt.tight_layout()

plt.show()
```



Energía normalizada

Siendo $s(t) = 2.5$ para $0 < t < 4$ y $s(t) = 0$ para cualquier otro valor de t.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2.dt$$

$$E = \int_{0}^{4} (2.5)^2.dt$$

$$E = 6,25. \int_{0}^{4} dt$$

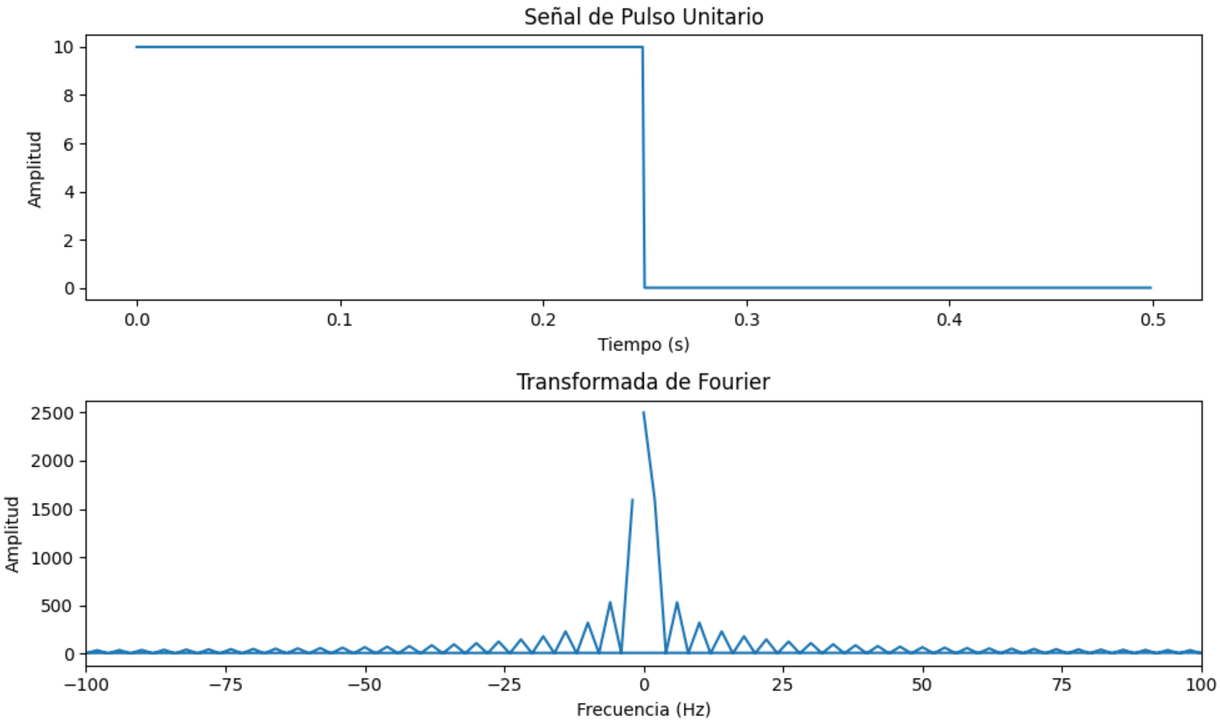
$$E = 6,25.[t]_0^4$$

$$E = 25[J]$$

d)

Señal pulso unitario y su correspondiente transformada de Fourier

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.fft import fft

# Parámetros de la señal
duration = 0.25  # Duración en segundos
amplitude = 10  # Amplitud en Volts
sampling_rate = 1000  # Frecuencia de muestreo en Hz
num_samples = int(sampling_rate * duration*2)

# Generar la señal de pulso unitario
signal = np.zeros(num_samples)
signal[0:int(num_samples/2)] = amplitude

# Realizar la transformada de Fourier
frequency_axis = np.fft.fftfreq(num_samples, d=1/sampling_rate)
fourier_transform = fft(signal)

# Gráfico de la señal de pulso unitario
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(np.arange(num_samples) / sampling_rate, signal)
plt.title('Señal de Pulso Unitario')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Amplitud')

# Gráfico de la transformada de Fourier
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(frequency_axis, np.abs(fourier_transform))
plt.title('Transformada de Fourier')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.xlim(-100, 100)  # Mostrar solo hasta la mitad de la frecuencia de muestreo
plt.tight_layout()

plt.show()
```



Energía normalizada

Siendo $s(t) = 10$ para $0 < t < 0,25$ y $s(t) = 0$ para cualquier otro valor de t.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2.dt$$

$$E = \int_{0}^{0,25} (10)^2.dt$$

$$E = 100.\int_{0}^{0,25} dt$$

$$E = 100.[t]_0^{0,25}$$

$$E = 25[J]$$

e)

La energía es la misma para los 3 casos. Al aumentar/disminuir el ancho del pulso y disminuir/aumentar la amplitud (respectivamente) se conserva la energía con una relación constante proporcional.

Al calcular la energía en la frecuencia:

$$|S(f)|^2 = A^2.T^2.\frac{\sin(\pi.T.f)}{(\pi.T.f)}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 .df$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 .T^2 .\frac{\sin{(\pi.T.f)}}{(\pi.T.f)}.df$$

$$E = A^2 .T^2 .\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin{(\pi.T.f)}}{(\pi.T.f)}.df$$

Por tabla:

$$E = A^2 .\left(\frac{T}{\pi}.\left[\int_0^x \sin{(2\pi.f.T)}.dx + \frac{T}{\pi}.\frac{\cos{(2\pi.f.T)}}{2\pi.f.T} - \frac{1}{2\pi^2.f}\right]_{-\infty}^{\infty}\right)$$

Los terminos tienden de la siguiente forma:

$$\int_0^x \sin{(2\pi.f.T)}.dx \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\cos{(2\pi.f.T)}}{2\pi.f.T} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2\pi^2.f} \rightarrow 0$$

Por lo tanto:

$$E = A^2 .\left(\frac{T}{\pi}.\frac{\pi}{2}\right) - A^2 .\left(\frac{T}{\pi}.\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$E = A^2 .\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) = A^2 .T$$

- Siendo: $A = 5$ y $T = 1 \rightarrow E = 25$
- Siendo: $A = 2,5$ y $T = 4 \rightarrow E = 25$
- Siendo: $A = 10$ y $T = 0,25 \rightarrow E = 25$

Es el mismo resultado que cuando se lo calcula para el tiempo.

f)

Las frecuencias que debe dejar pasar el filtro para cada caso son:

- $T_1 = 1\mu S \rightarrow f_1 = 1MHz$
- $T_2 = 1mS \rightarrow f_2 = 1KHz$

Para ambos casos el ancho de banda debe ser mayor al valor de f_c: $f_c < B$