Ejercicio 3

Una señal modulada en FM está representada matemáticamente por:

s(t) = 15.cos [2.π.fc.t + 2.sen (2.π.2.10³.t) + 4.sen (2.π.11.10³.t + ø)]

Donde, Kf=20Khz/Volt (constante del modulador), fc=95.10⁶ Hz (frecuencia de portadora) y ø es una variable aleatoria entre -π/2 y π/2.

Determine:

a) La potencia de la señal modulada sobre una impedancia de 1ohm.
b) El ancho de banda de la señal modulada en FM.
c) La expresión matemática del mensaje con sus respectivos valores.
d) Que sucede si a la expresión del mensaje calculada en c) se le suma una continua de valor 2v. Escriba la nueva s(t).
e) Calcule la máxima desviación de frecuencia, Δf y máxima desviación de fase, Δφ.
f) La expresión matemática del módulo de S(f).

a)

Potencia de la señal modulada sobre una impedancia de 1Ω:

$$\langle S_{(t)} \rangle = \frac{A_c^2}{2} = \frac{15^2}{2} = 112,5W$$

b)

Ancho de banda de la señal modulada en FM:

$BW = 2.(\beta + 1).f_m$

$BW_1 = 2.(\beta_1 + 1).f_{m1} = 2.(2+1).2KHz = 12KHz$

$BW_2 = 2.(\beta_2 + 1).f_{m2} = 2.(4+1).11KHz = 110KHz$

$BW \gtrapprox BW_2 = 110KHz$

c)

Expresión matemática del mensaje con sus respectivos valores:

$\theta_i = 2\pi.f_c.t + 2.\sin(2\pi.2000.t) + 4.\sin(2\pi.11000.t + \phi)$

$\omega_i = 2\pi.f_c.t + 2.2\pi.2000Hz.\cos(2\pi.2000.t) + 4.2\pi.11000.\cos(2\pi.11000.t + \phi)$

$f_i = f_c.t + 2.2000Hz.\cos(2\pi.2000.t) + 4.11000.\cos(2\pi.11000.t + \phi)$

$f_i = f_c.t + 4000Hz. \cos(2\pi.2000.t) + 44000. \cos(2\pi.11000.t + \phi)$

$m_{(t)} = 0,2V. \cos(2\pi.2000.t) + 2,2V. \cos(2\pi.11000.t + \phi)$

d)

Si a la expresión del mensaje calculada en **c)** se le suma una continua de valor $2V$, la nueva $s_{(t)}$ será:

$m_{(t)} = 2V + 0,2V. \cos(2\pi.2000.t) + 2,2V. \cos(2\pi.11000.t + \phi)$

$$s_{(t)} = A_c. \cos\left(2\pi.f_c + 2\pi.k_f \int m_{(t)}.dt\right)$$

$$s_{(t)} = 15V. \cos\left(2\pi.f_c + 2\pi.k_f. \left(2V + \frac{0,2V. \sin(2\pi.2000.t)}{2\pi.2000Hz} + \frac{2,2V. \sin(2\pi.11000.t + \phi)}{2\pi.11000Hz}\right)\right)$$

$$s_{(t)} = 15V. \cos\left(2\pi.f_c + 2\pi.k_f.2V + 2\pi.k_f.\frac{0,2V. \sin(2\pi.2000.t)}{2\pi.2000Hz} + 2\pi.k_f.\frac{2,2V. \sin(2\pi.11000.t + \phi)}{2\pi.11000Hz}\right)$$

$$s_{(t)} = 15V. \cos\left(2\pi.f_c + 2\pi.k_f.2V + \frac{k_f.0,2V}{2000Hz}. \sin(2\pi.2000.t) + \frac{k_f.2,2V}{11000Hz}. \sin(2\pi.11000.t + \phi)\right)$$

$$s_{(t)} = 15V. \cos\left(2\pi.(f_c + k_f.2V) + \frac{k_f.0,2V}{2000Hz}. \sin(2\pi.2000.t) + \frac{k_f.2,2V}{11000Hz}. \sin(2\pi.11000.t + \phi)\right)$$

$$s_{(t)} = 15V. \cos\left(2\pi.\left(95x10^6Hz + 20x10^3\frac{Hz}{V}.2V\right) + 2. \sin(2\pi.2000.t) + 4. \sin(2\pi.11000.t + \phi)\right)$$

$$s_{(t)} = 15V. \cos(2\pi.95,04MHz + 2. \sin(2\pi.2000.t) + 4. \sin(2\pi.11000.t + \phi))$$

Sumarle una componente de continua de $2V$ al mensaje provoca un corrimiento de la frecuencia de portadora de $40KHz$ que, en términos porcentuales, representa un $27,5$ de la frecuencia máxima del mensaje.

e)

La máxima desviación de frecuencia (ΔF) es:

$$\Delta F = \max\left[\frac{1}{2\pi}.\frac{d\theta_{(t)}}{dt}\right] = k_f.(A_{m_1} + A_{m_2}) = 48KHz$$

La máxima desviación de fase $(\Delta\phi)$ es:

$$\Delta\phi = \max[\theta_{(t)}] = \beta_1 + \beta_2 = 4 + 2 = 6rad$$

f)

Expresión matemática del módulo de $S_{(f)}$:

$$S_{(f)} = \frac{A_c}{2}.\left(\left[\delta_{(f-f_c)} + \delta_{(f+f_c)}\right] + j\left[\Phi_{(f-f_c)} + \Phi_{(f+f_c)}\right]\right)$$

$$S_{(f)} = \frac{A_c}{2}.\left(\left[\delta_{(f-f_c)} + \delta_{(f+f_c)}\right] + j\left[\frac{k_f}{j.f}.M_{(f-f_c)} + \frac{k_f}{j.f}.M_{(f+f_c)}\right]\right)$$

$$S_{(f)} = \frac{A_c}{2}.\left(\delta_{(f-f_c)} + \delta_{(f+f_c)} + \frac{k_f}{f}.M_{(f-f_c)} + \frac{k_f}{f}.M_{(f+f_c)}\right)$$

$$S_{(f)} = \frac{A_c}{2}.\left(\delta_{(f-f_c)} + \delta_{(f+f_c)} + \frac{k_f}{f}.(A_{m_1}.\cos\left(2\pi.(f_1 - f_c).t\right) + A_{m_2}.\cos\left(2\pi.(f_2 - f_c).t + \phi\right)) + \frac{k_f}{f}.(A_{m_1}.\cos\left(2\pi.(f_1 + f_c).t\right) + A\right.$$

$$S_{(f)} = \frac{A_c}{2}.\left(\delta_{(f-f_c)} + \delta_{(f+f_c)} + \frac{k_f}{f}.A_{m_1}.\cos\left(2\pi.(f_1 - f_c).t\right) + \frac{k_f}{f}.A_{m_2}.\cos\left(2\pi.(f_2 - f_c).t + \phi\right) + \frac{k_f}{f}.A_{m_1}.\cos\left(2\pi.(f_1 + f_c).t\right) + \right.$$

Considerando que:

$s_{(t)} = 15V.\cos\left(2\pi.f_c.t + 2.\sin\left(2\pi.2000.t\right) + 4.\sin\left(2\pi.11000.t + \phi\right)\right)$

$\beta_1 = 2$ y $f_1 = 2KHz$

$\beta_2 = 4$ y $f_2 = 11KHz$

Si:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f.A_m}{f_m} \rightarrow A_m = \frac{\beta.f_m}{k_f}$$

$$\beta_1 = \frac{k_f.A_{m_1}}{f_{max1}} = \frac{20\frac{KHz}{V}.2V}{2KHz} = 20$$

$$\beta_2 = \frac{k_f.A_{m_2}}{f_{max2}} = \frac{20\frac{KHz}{V}.4V}{11KHz} = 7,27$$

$\Delta F_1 = 2.(\beta_1 + 1).f_m ax_1 = 2.(20 + 1).2000Hz = 84KHz$

$\Delta F_2 = 2.(\beta_2 + 1).f_m ax_2 = 2.(7,27 + 1).11000Hz = 181,94KHz$

$\Delta F_1 < \Delta F_2 \rightarrow \Delta F \approx \Delta F_2$