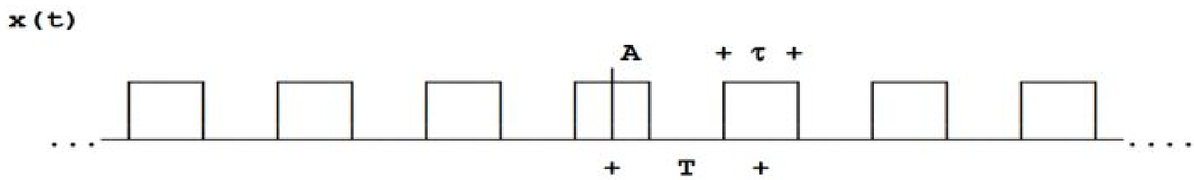
Ejercicio 4 (Obligatorio)

Dado el tren de pulsos de la figura:



Se pide:

a) Grafique el espectro de amplitudes en frecuencias genérico para los siguientes casos:

	1	2	3	4	
A	1	1	0.5	1	
T	50	50	50	250	[mSg]
t	25	10	25	25	[mSg]

b) En base a lo anterior ($x_{(t)}$) explique qué sucede para los siguientes casos límite:

I. $T \rightarrow \infty$ **t** = cte. A = cte.
II. T = cte. **t** $\rightarrow 0$ A = cte.
III. T = cte. **t** $\rightarrow 0$ $A \rightarrow \infty$ de manera que A* **t** = cte.

c) Para el caso "a.2", calcule en el dominio del tiempo la potencia normalizada total de la señal y en el dominio de la frecuencia la potencia y el valor cuadrático medio de cada una de las componentes significativas. Identifique y verifique una identidad definida en la teoría.

Para una señal de tipo:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} A, t < \left|\frac{\tau}{2}\right| \\ 0, t > \left|\frac{\tau}{2}\right| \end{array} \right\}$$

$\tau = \delta.T$

Los coeficientes C_n son:

$$C_n = \frac{1}{T}.\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A.e^{-j.n.\frac{2\pi}{T}.t}.dt$$

$$C_n = \frac{A}{T}.\left(\frac{e^{-j.n.\frac{2\pi}{T}.t}}{-j.n.\frac{2\pi}{T}}\right)_{t=-\frac{\tau}{2}=-\frac{\delta.T}{2}}^{t=\frac{\tau}{2}=\frac{\delta.T}{2}}$$

$$C_n = A.\delta.\frac{e^{-j.n.\frac{2\pi}{T}.\frac{\delta.T}{2}} - e^{-j.n.\frac{2\pi}{T}.(\frac{-\delta.T}{2})}}{-j.n.2\pi.\delta}$$

$$C_n = A.\delta.\frac{e^{j.n.\pi.\delta} - e^{-j.n.\pi.\delta}}{j.n.2\pi.\delta}$$

Considerando que:

$$\sin(x) = \frac{e^{j.x} - e^{-j.x}}{2j}$$

Se puede reemplazar tal que:

$$C_n = A.\delta.\frac{\sin(n.\pi.\delta)}{n.\pi.\delta}$$

Considerando que:

$$sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Finalmente, se puede reemplazar tal que:

$$C_n = A.\delta.sinc(n.\pi.\delta)$$

$$C_0 = \frac{1}{T}.\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A.dt = A.\frac{1}{T}.(t)_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A}{T}.\left(\frac{\delta.T}{2} - \left(\frac{-\delta.T}{2}\right)\right) = \frac{A}{T}.\delta.T = A.\delta$$

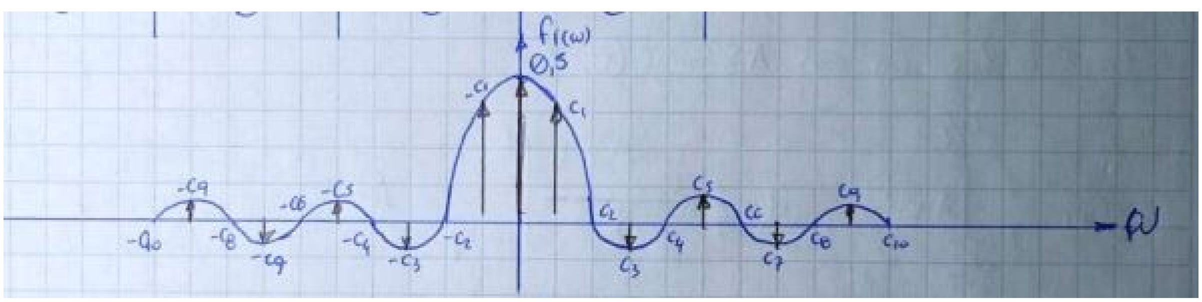
a)

Calculando los coeficientes para los diferentes casos:

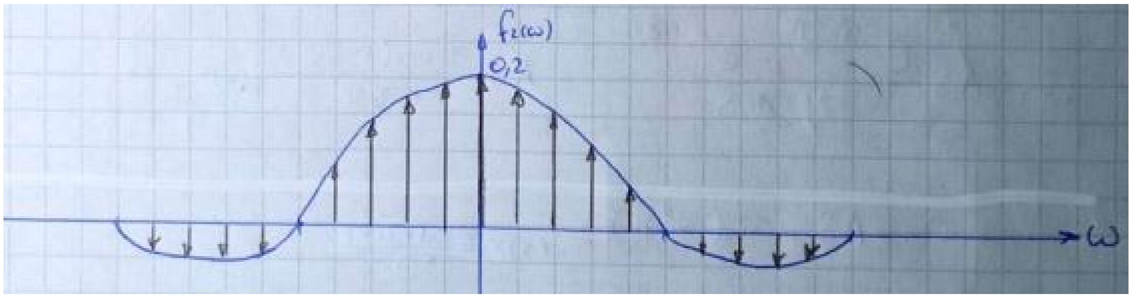
	1	2	3	4
C_0	0,5	0,2	0,25	0,1
C_1	0,3183	0,1871	0,1591	0,0984
C_2	0	0,1514	0	0,0935
C_3	-0,1061	0,1009	-0,0530	0,0858
C_4	0	0,0468	0	0,0757
C_5	0,0637	0.	0,0318	0,0637
C_6	0	-0,0312	0	0,0504
C_7	-0,0455	-0,0432	-0,0227	0,0368
C_8	0	-0,0378	0	0,0234
C_9	0,0354	-0,0208	0,0177	0,0109
C_{10}	0	0	0	0

Siendo el trazo en azul una guía de la forma de onda aproximada y el trazo en negro los componentes de la transformada de Fourier de las diferentes funciones, se graficó cada caso:

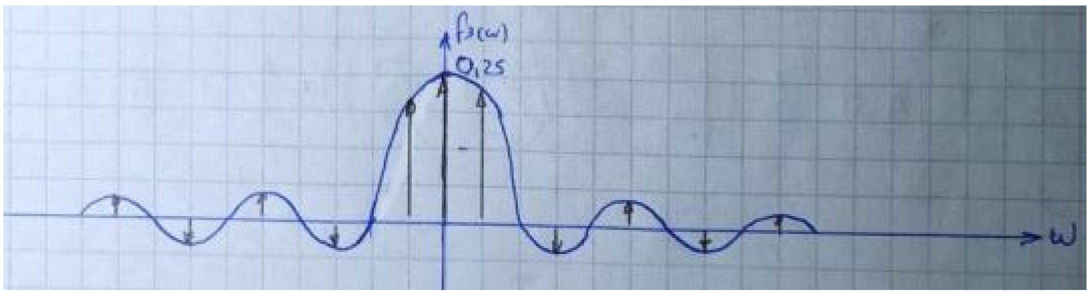
A1



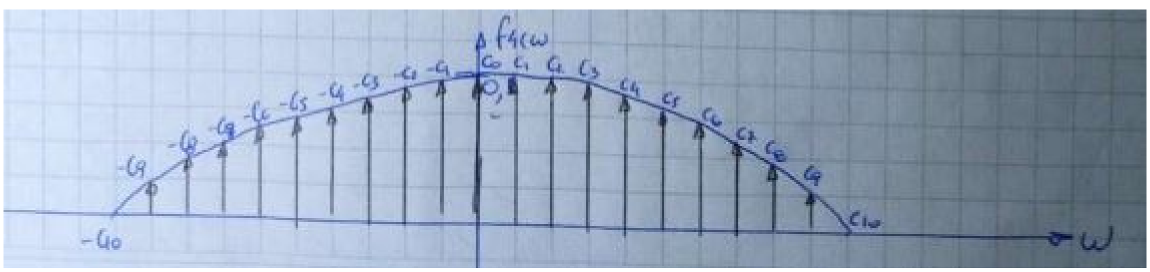
A2



A3



A4



b)

I.

Para el caso en el que:

$T \rightarrow \infty$

$t = cte$

$A = cte$

El periodo tiende a infinito, la duración y la amplitud son constantes. En este caso, es un único escalon de duración t y amplitud A.

Su transformada de Fourier se corresponde con la función sync.

II.

Para el caso en el que:

$T = cte$

$t \to 0$

$A = cte$

El periodo y la amplitud son constantes y la duración tiende a cero. En este caso, sería un tren de deltas de amplitud A distanciadas entre sí por un periodo T.

III.

Para el caso en el que:

$T = cte$

$t \to 0$

$A \to \infty$ de manera que $A * t = cte$

El periodo se mantiene constante y la amplitud tiende a infinito conforme la duración tiende a cero. En este caso también se trata de un tren de deltas distanciadas entre sí por un periodo T, pero a diferencia del caso anterior, la amplitud de cada delta tiende a infinito, de manera que la potencia en este tren de deltas se mantendrá constante mientras que en el caso anterior la potencia se reducía conforme la duración t tendía a cero.

c)

Calculamos la potencia normalizada total de la señal en el dominio temporal como:

$$P = \langle x^2_{(t)} \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 .dt$$

$$P = \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^t A^2 .dt + \int_t^T 0.dt \right)$$

$$P = \frac{1}{T} . (A^2 . (t - 0))$$

$$P = \frac{A^2 .t}{T}$$

$$P = \frac{1^2 .10.10^{-3}}{50.10^{-3}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

En el dominio de la frecuencia, podemos calcular la potencia como la integral de la densidad espectral de potencia (PSD). Se puede averiguar la PSD a partir de la transformada de fourier de la función autocorrelación de la señal.