Ejercicio 7

Sea $v_{(t)}$ una función periódica con periodo T_0, definida por la repetición de la función $z_{(t)}$ entre $-T_0/2$ y $T_0/2$:

$$z_{(t)} = 1 + \cos(\pi / T_0 \cdot t)$$

Se pide hallar la serie de Fourier, expresada en formato exponencial.

Sea la función:

$z(t) = 1 + \cos(\frac{\pi}{T_0}.t)$

Se puede expresar la función $v(t)$ utilizando la serie de Fourier en formato exponencial como:

$$v(t) = \sum_{n=\infty}^{n=-\infty} C_n.e^{j.n.\omega_0.t}$$

donde:

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (1 + \cos(\frac{\pi}{T_0}.t)).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} \cos(\frac{\pi}{T_0}.t).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt)$$

Reemplazando el coseno por su expresión de Euler:

$$\cos(\frac{\pi}{T_0}.t) = \frac{e^{j.\frac{\pi}{T_0}.t} + e^{-j.\frac{\pi}{T_0}.t}}{2}$$

La expresión de C_n queda:

$$C_n = \frac{1}{T_0}.(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} (\frac{e^{j.\frac{\pi}{T_0}.t} + e^{-j.\frac{\pi}{T_0}.t}}{2}).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt)$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \frac{1}{2}.\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} (e^{j.\frac{\pi}{T_0}.t} + e^{-j.\frac{\pi}{T_0}.t}).e^{-j.n.\omega_0.t}.dt)$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \frac{1}{2}.(\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} e^{j.\frac{\pi}{T_0}.t}.e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} e^{-j.\frac{\pi}{T_0}.t}.e^{-j.n.\omega_0.t}.dt))$$

$$C_n = \frac{1}{T_0}.(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j.n.\omega_0.t}.dt + \frac{1}{2}.(\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} e^{-j.(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0}).t}.dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} e^{-j.(\frac{\pi}{T_0} + n.\omega_0).t}.dt))$$

Resolviendo la integral de forma genérica, se puede expresar que:

$\int_{\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} e^{-a.t}.dt = \frac{e^{\frac{a.T_0}{2}} - e^{-\frac{a.T_0}{2}}}{a}$

$$C_n = (-j).\frac{1}{T_0}.(\frac{e^{\frac{j.n.\omega_0.T_0}{2}} - e^{-\frac{j.n.\omega_0.T_0}{2}}}{n.\omega_0} + \frac{1}{2}.(\frac{e^{\frac{j.(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}} - e^{-\frac{j.(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}}}{(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0})} + \frac{e^{\frac{j.(n.\omega_0 + \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}} - e^{-\frac{j.(n.\omega_0 + \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}}}{(n.\omega_0 + \frac{\pi}{T_0})}))$$

Finalmente, la función $v(t)$ queda:

$$v(t) = \sum_{n=\infty}^{n=-\infty} (-j).\frac{1}{T_0}.(\frac{e^{\frac{j.n.\omega_0.T_0}{2}} - e^{-\frac{j.n.\omega_0.T_0}{2}}}{n.\omega_0} + \frac{1}{2}.(\frac{e^{\frac{j.(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}} - e^{-\frac{j.(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}}}{(n.\omega_0 - \frac{\pi}{T_0})} + \frac{e^{\frac{j.(n.\omega_0 + \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}} - e^{-\frac{j.(n.\omega_0 + \frac{\pi}{T_0}).T_0}{2}}}{(n.\omega_0 + \frac{\pi}{T_0})})).e^{j.n.\omega_0.t}$$