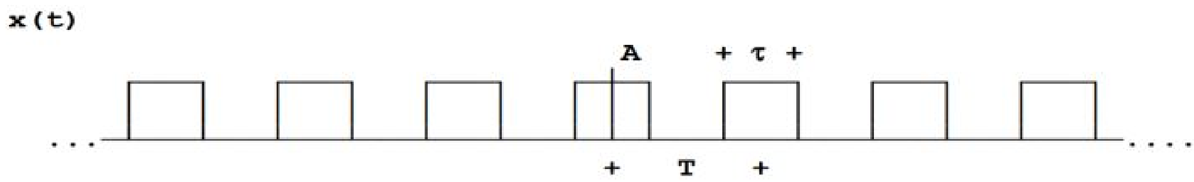
Ejercicio 4 (Obligatorio)

Dado el tren de pulsos de la figura:



Se pide:

a) Grafique el espectro de amplitudes en frecuencias genérico para los siguientes casos:

	1	2	3	4	
A	1	1	0.5	1	
T	50	50	50	250	[mSg]
t	25	10	25	25	[mSg]

b) En base a lo anterior ($x_{(t)}$) explique qué sucede para los siguientes casos límite:

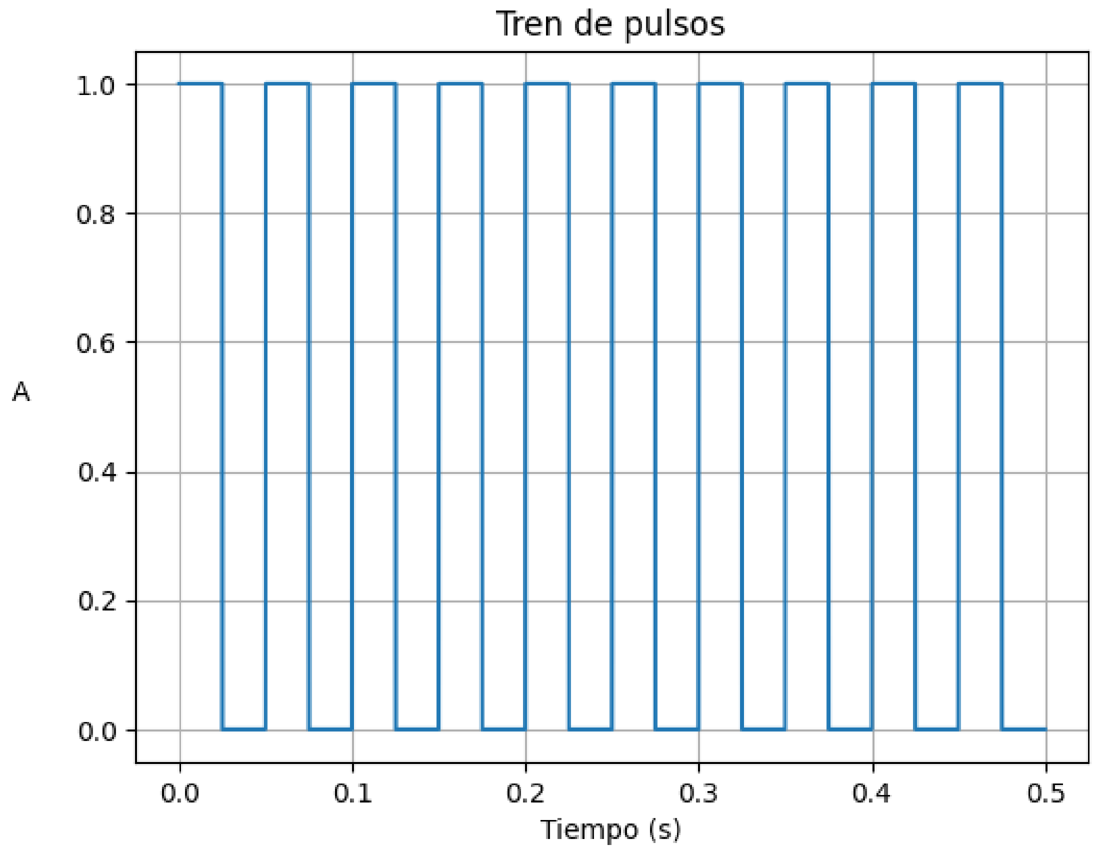
I. $T \to \infty$ **t** = cte. A = cte.
II. T = cte. **t** $\to 0$ A = cte.
III. T = cte. **t** $\to 0$ $A \to \infty$ de manera que A* **t** = cte.

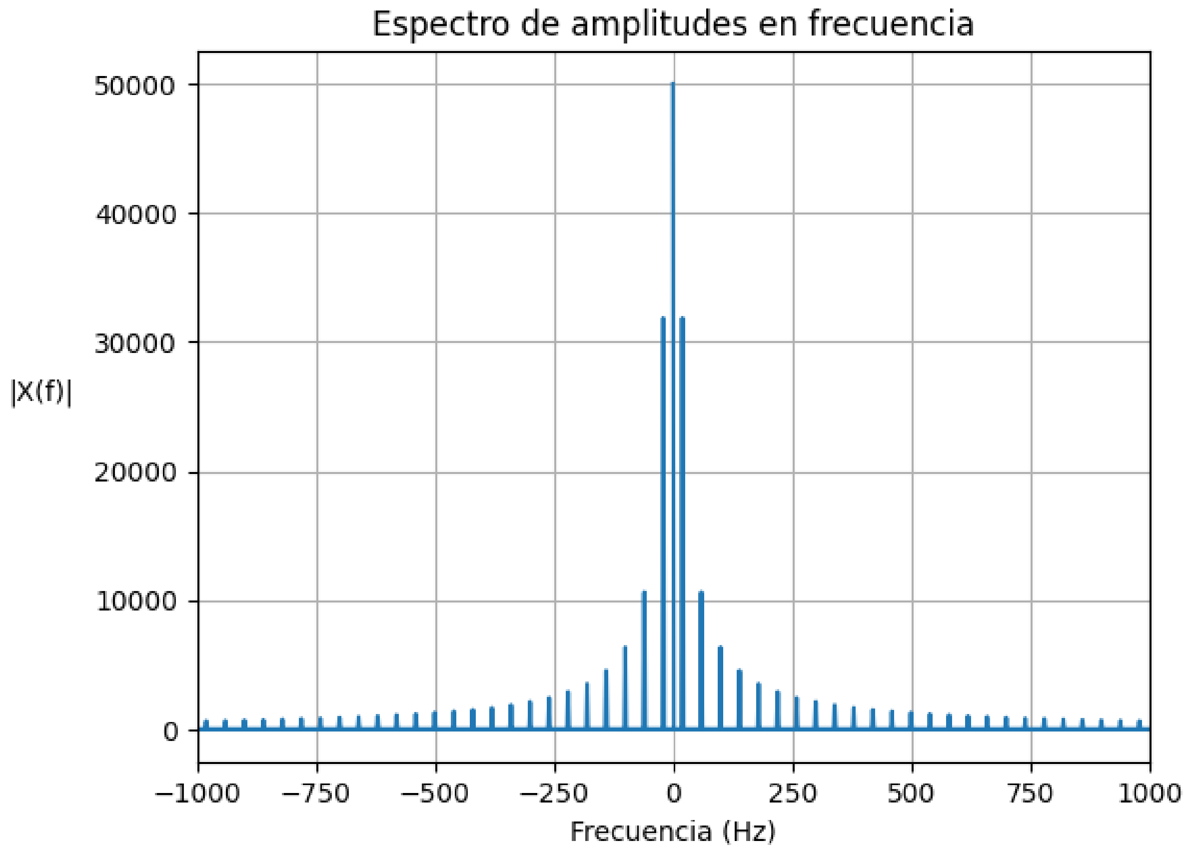
c) Para el caso "a.2", calcule en el dominio del tiempo la potencia normalizada total de la señal y en el dominio de la frecuencia la potencia y el valor cuadrático medio de cada una de las componentes significativas. Identifique y verifique una identidad definida en la teoría.

a.1)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definimos las constantes
A = 1 # Amplitud de cada pulso
T = 50e-3 # Periodo entre el centro de cada pulso (en segundos)
D = 25e-3 # Duración de cada pulso (en segundos)
M = 10000 # Cantidad de muestras por periodo

# Creamos el vector de tiempo
t = np.linspace(0, 10*T, 10*M)

# Creamos el vector de la señal
x = np.zeros_like(t)
```

```python
# Generamos los pulsos
for i in range(len(t)):
    if i % int(T*(int(M/T))) < int(D*(int(M/T))):
        x[i] = A

# Graficamos la señal
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Tren de pulsos')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('A', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()

# Calculamos la transformada de Fourier y su espectro de amplitudes
X = np.fft.fft(x)
X_amp = np.abs(X)

# Creamos el vector de frecuencias
freq = np.fft.fftfreq(len(t), t[1] - t[0])

# Graficamos el espectro de amplitudes
plt.figure()
plt.plot(freq, X_amp)
plt.xlim(-1000,1000)
plt.title('Espectro de amplitudes en frecuencia')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.ylabel('|X(f)|', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()
```

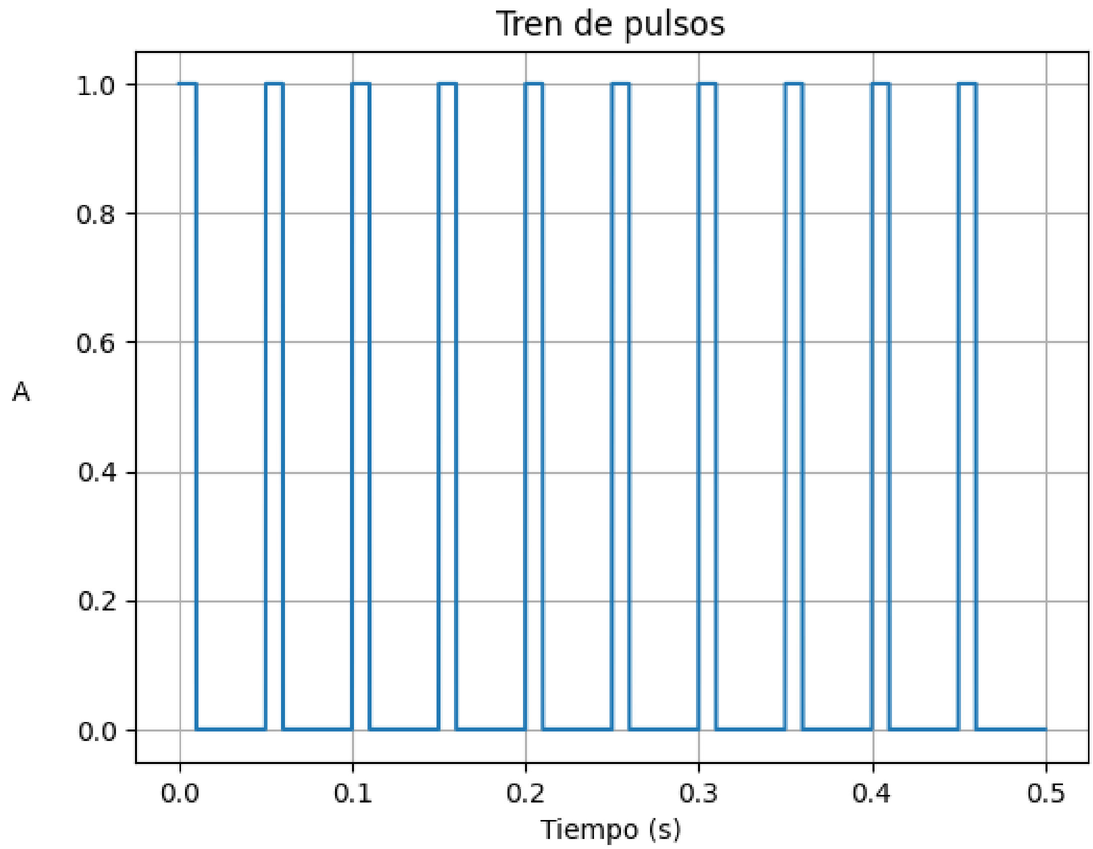

Tren de pulsos
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
A
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Tiempo (s)

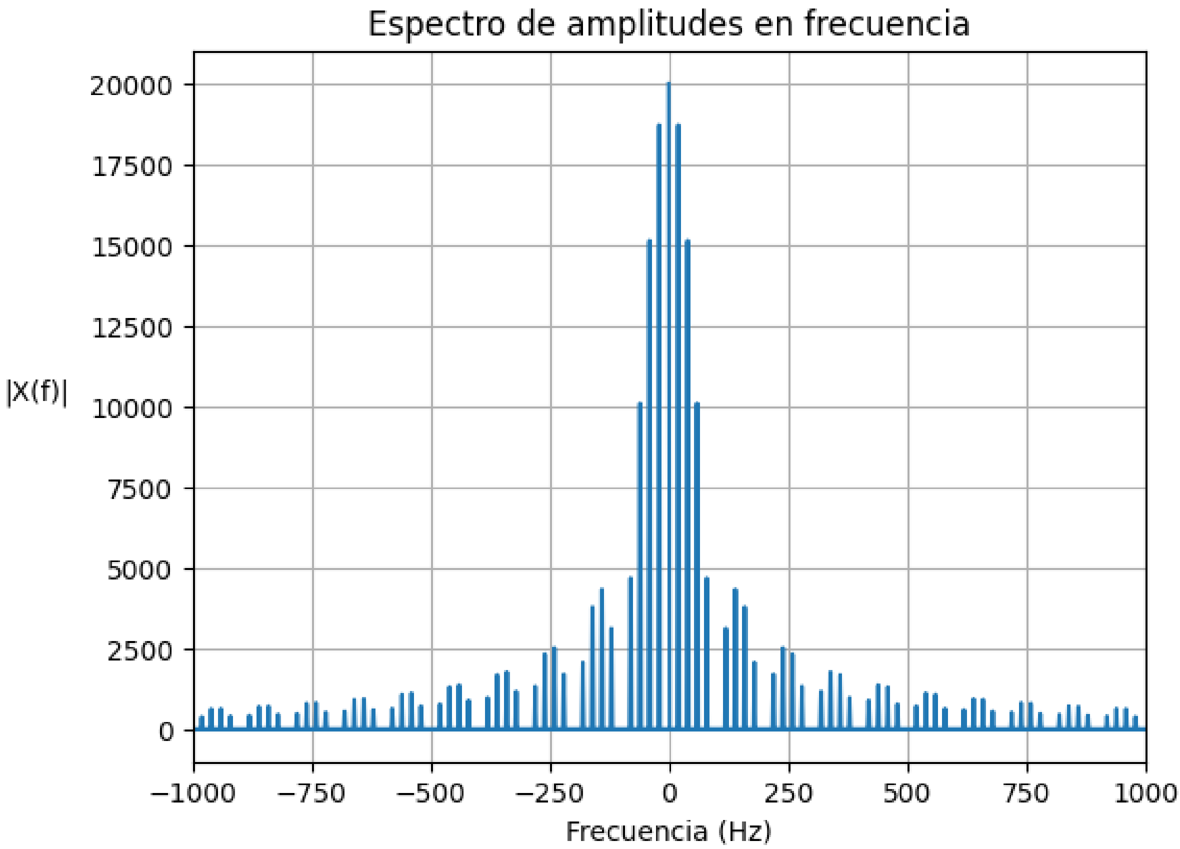


a.2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definimos las constantes
A = 1 # Amplitud de cada pulso
T = 50e-3 # Periodo entre el centro de cada pulso (en segundos)
D = 10e-3 # Duración de cada pulso (en segundos)
M = 10000 # Cantidad de muestras por periodo

# Creamos el vector de tiempo
t = np.linspace(0, 10*T, 10*M)

# Creamos el vector de la señal
x = np.zeros_like(t)

# Generamos los pulsos
```

```python
for i in range(len(t)):
    if i % int(T*(int(M/T))) < int(D*(int(M/T))):
        x[i] = A

# Graficamos la señal
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Tren de pulsos')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('A', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()

# Calculamos la transformada de Fourier y su espectro de amplitudes
X = np.fft.fft(x)
X_amp = np.abs(X)

# Creamos el vector de frecuencias
freq = np.fft.fftfreq(len(t), t[1] - t[0])

# Graficamos el espectro de amplitudes
plt.figure()
plt.plot(freq, X_amp)
plt.xlim(-1000,1000)
plt.title('Espectro de amplitudes en frecuencia')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.ylabel('|X(f)|', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()
```

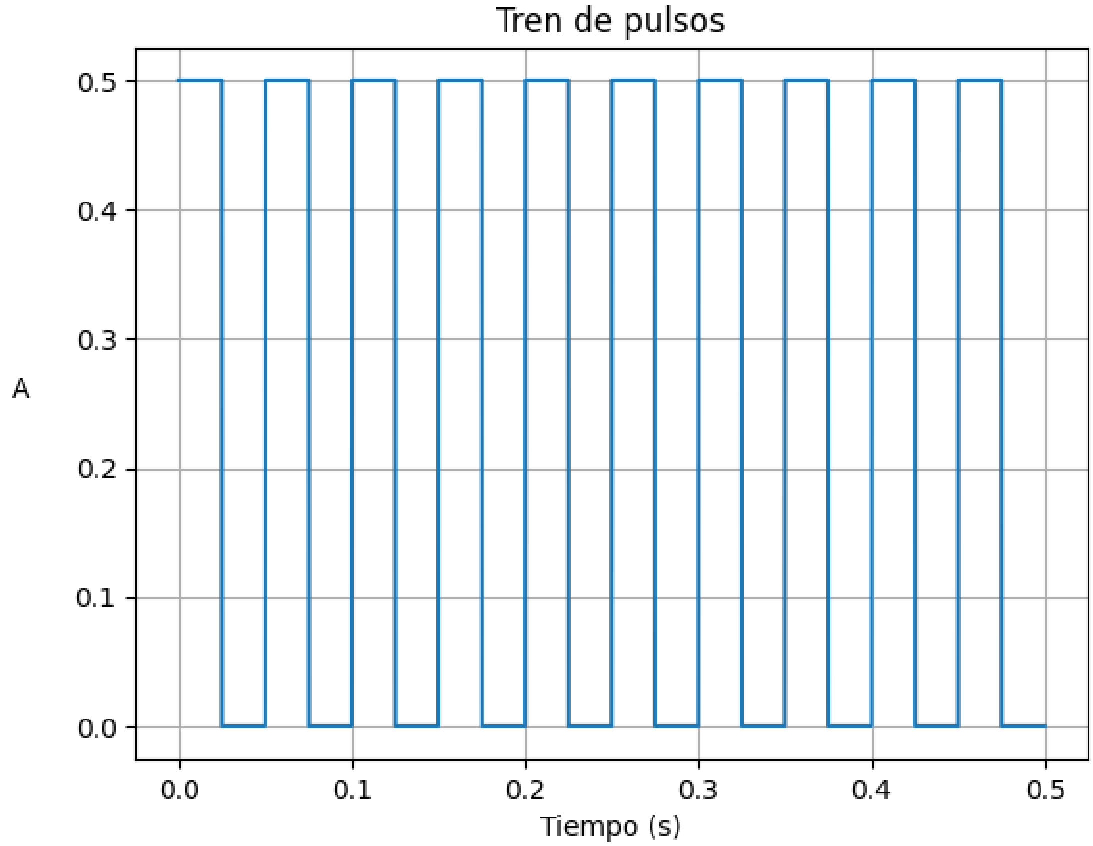

Tren de pulsos
A
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Tiempo (s)



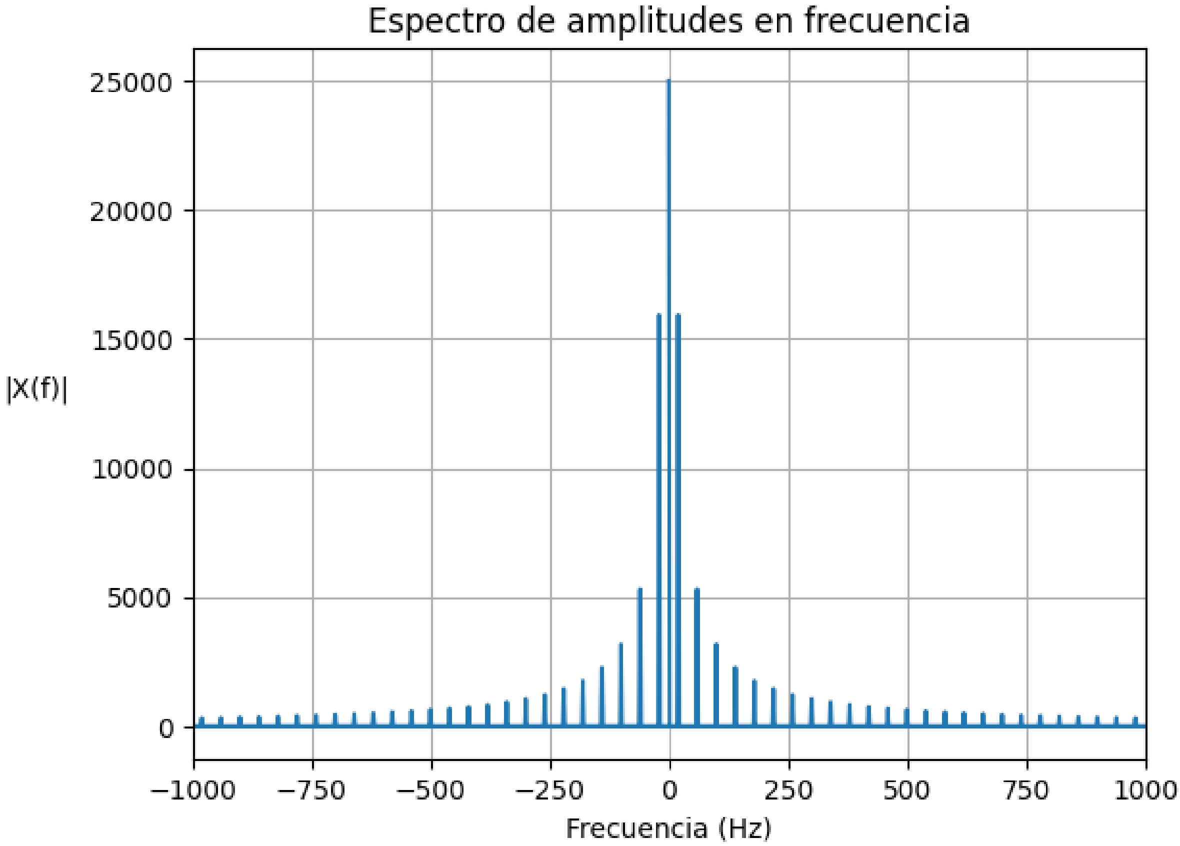
a.3)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definimos las constantes
A = 0.5 # Amplitud de cada pulso
T = 50e-3 # Periodo entre el centro de cada pulso (en segundos)
D = 25e-3 # Duración de cada pulso (en segundos)
M = 10000 # Cantidad de muestras por periodo

# Creamos el vector de tiempo
t = np.linspace(0, 10*T, 10*M)

# Creamos el vector de la señal
x = np.zeros_like(t)

# Generamos los pulsos
```

```python
for i in range(len(t)):
    if i % int(T*(int(M/T))) < int(D*(int(M/T))):
        x[i] = A

# Graficamos la señal
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Tren de pulsos')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('A', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()

# Calculamos la transformada de Fourier y su espectro de amplitudes
X = np.fft.fft(x)
X_amp = np.abs(X)

# Creamos el vector de frecuencias
freq = np.fft.fftfreq(len(t), t[1] - t[0])

# Graficamos el espectro de amplitudes
plt.figure()
plt.plot(freq, X_amp)
plt.xlim(-1000,1000)
plt.title('Espectro de amplitudes en frecuencia')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.ylabel('|X(f)|', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()
```



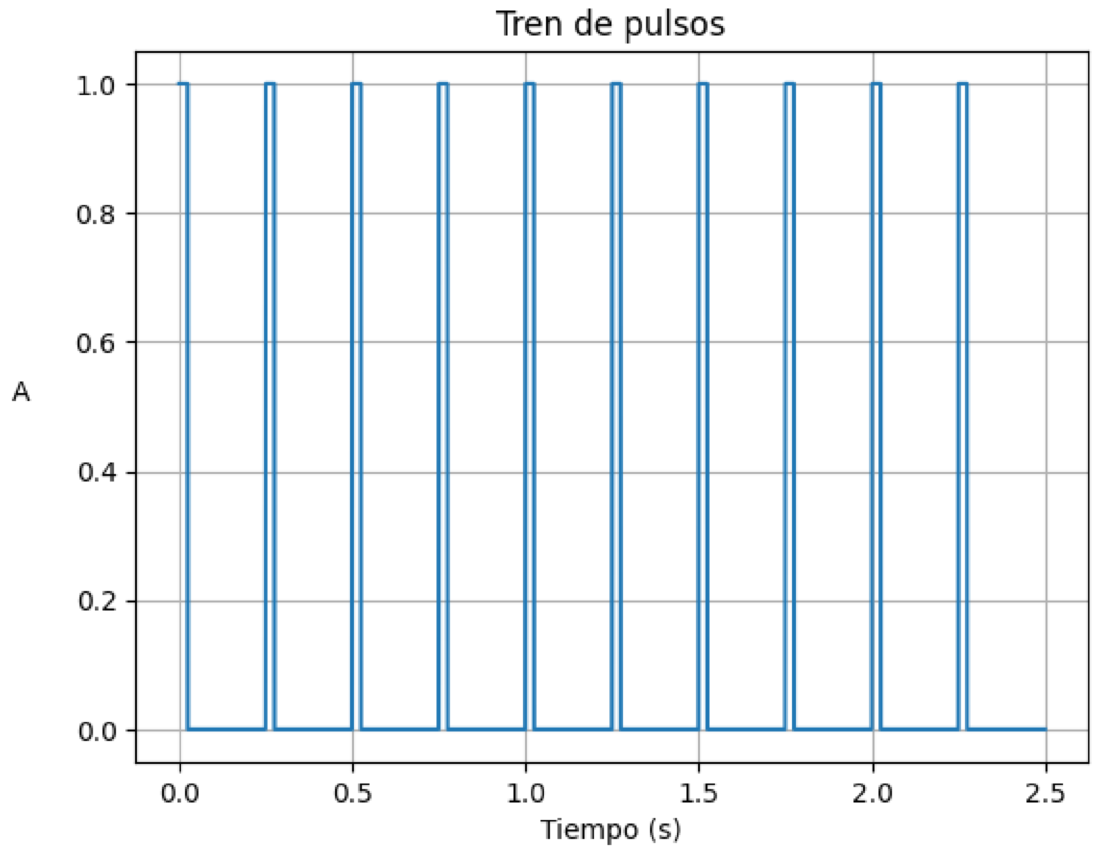
Tren de pulsos
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
A
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Tiempo (s)

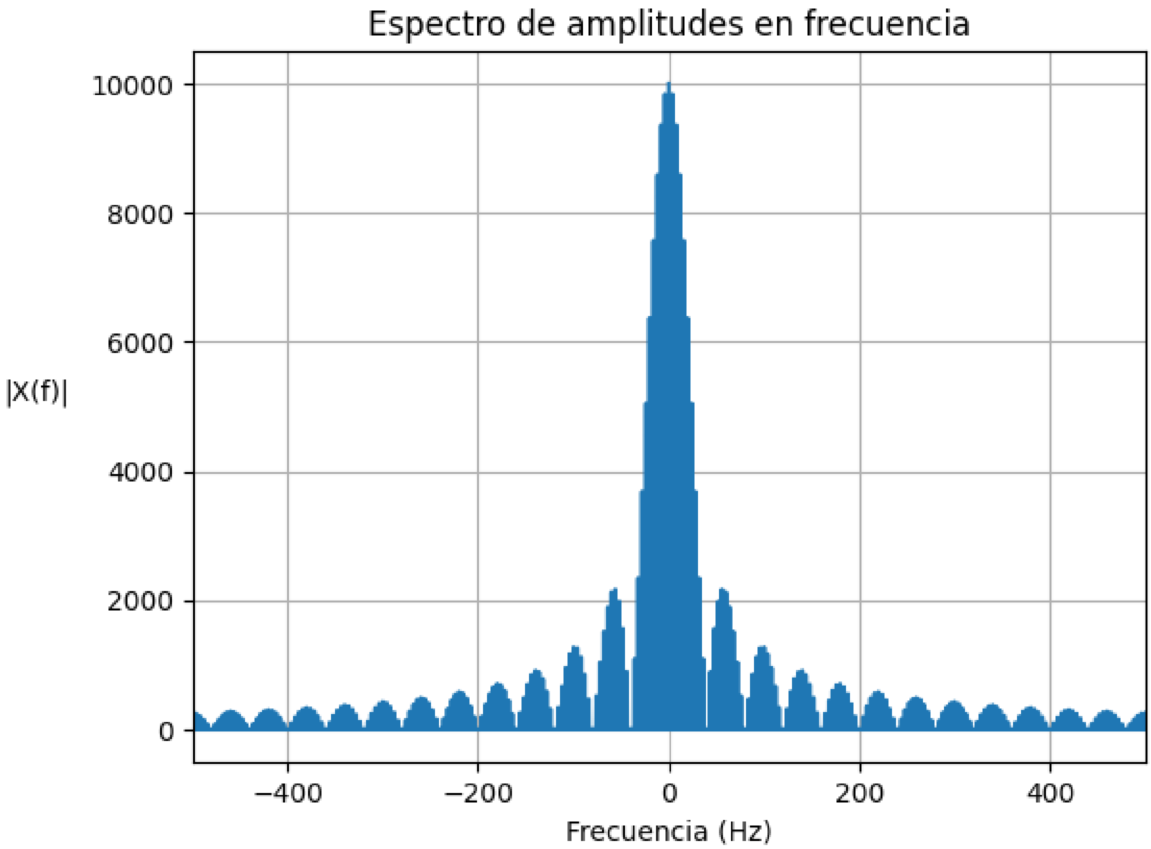


a.4)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definimos las constantes
A = 1 # Amplitud de cada pulso
T = 250e-3 # Periodo entre el centro de cada pulso (en segundos)
D = 25e-3 # Duración de cada pulso (en segundos)
M = 10000 # Cantidad de muestras por periodo

# Creamos el vector de tiempo
t = np.linspace(0, 10*T, 10*M)

# Creamos el vector de la señal
x = np.zeros_like(t)

# Generamos los pulsos
```

```
for i in range(len(t)):
    if i % int(T*(int(M/T))) < int(D*(int(M/T))):
        x[i] = A

# Graficamos la señal
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Tren de pulsos')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('A', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()

# Calculamos la transformada de Fourier y su espectro de amplitudes
X = np.fft.fft(x)
X_amp = np.abs(X)
# Y_amp = Y.real

# Creamos el vector de frecuencias
freq = np.fft.fftfreq(len(t), t[1] - t[0])

# Graficamos el espectro de amplitudes
plt.figure()
plt.plot(freq, X_amp)
plt.xlim(-500,500)
plt.title('Espectro de amplitudes en frecuencia')
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.ylabel('|X(f)|', rotation=0, labelpad=20)
plt.grid(True)
plt.show()
```


Tren de pulsos
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
A
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
Tiempo (s)



b)

I.

Para el caso en el que:

$T \to \infty$

$t = cte$

$A = cte$

El periodo tiende a infinito, la duración y la amplitud son constantes. En este caso, es un único escalon de duración t y amplitud A.

Su transformada de Fourier se corresponde con la función sync.

II.

Para el caso en el que:

$T = cte$

$t \to 0$

$A = cte$

El periodo y la amplitud son constantes y la duración tiende a cero. En este caso, sería un tren de deltas de amplitud A distanciadas entre sí por un periodo T.

III.

Para el caso en el que:

$T = cte$

$t \to 0$

$A \to \infty$ de manera que $A * t = cte$

El periodo se mantiene constante y la amplitud tiende a infinito conforme la duración tiende a cero. En este caso también se trata de un tren de deltas distanciadas entre sí por un periodo T, pero a diferencia del caso anterior, la amplitud de cada delta tiende a infinito, de manera que la potencia en este tren de deltas se mantendrá constante mientras que en el caso anterior la potencia se reducía conforme la duración t tendía a cero.

c)

Calculamos la potencia normalizada total de la señal en el dominio temporal como:

$P =< x^2_{(t)} >= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2.dt$

$P = \frac{1}{T}.(\int_0^t A^2.dt + \int_t^T 0.dt)$

$P = \frac{1}{T}.(A^2.(t-0))$

$P = \frac{A^2.t}{T}$

$P = \frac{1^2.10x10^{-3}}{50x10^{-3}} = \frac{1}{5} = 0.2$

En el dominio de la frecuencia, podemos calcular la potencia como la integral de la densidad espectral de potencia (PSD). Se puede averiguar la PSD a partir de la transformada de fourier de la función autocorrelación de la señal.