Следующая теорема верна для любого распределения радиусов и для любой нормы.

Теорема 1. *Пусть* $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$ *и* $n \gg a^d$. *Предположим, что*

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n\log n + n\log\lambda + O(n)\right), \ n \to \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), \ n, a \to \infty.$$

Доказательство. Разобьем куб $[0,a]^d$ на такие ячейки:

$$\prod_{m=1}^{d}\left[\frac{k_m a}{\lfloor a\rfloor}, \frac{(k_m+1)a}{\lfloor a\rfloor}\right],$$

где $k_m \in \{0, 1, \ldots, \lfloor a\rfloor - 1\}$. Пусть это ячейки $V_1, \ldots, V_l$, где $l = \lfloor a\rfloor^d$. Определим картинку, образованную ячейкой V_j, следующим образом:

$$S^j = \bigcup_{\substack{i\in\{1,\ldots,N\}:\\ \xi_i\in V_j}} B(\xi_i, R_i)\cap V_j.$$

Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке V_j следующую величину:

$$K^j = \min\{s \geqslant 1 \mid \exists i_1, \ldots i_s \in \{1, \ldots, N\} \colon \xi_{i_t} \in V_j, \ t = 1, \ldots, s; \ S^j = \bigcup_{t=1}^{s} B(\xi_{i_t}, R_1)\cap V_j\}.$$

Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{\substack{\{n_1,\ldots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0 \ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \bigcap_{s=1}^{l}\{K^s \geqslant n_s\}.$$

Заметим, что из события $\{K_a \geqslant n\}$ следует событие E. Действительно, если $K_a \geqslant n$, то и $\sum K^s \geqslant n$. Тогда существует набор $\{n_1, \ldots n_l\}$ с $n_s \geqslant 0$ $\forall s$ и $\sum n_s = n$, для которого выполнено $K^s \geqslant n_s$ для всех $s = 1, \ldots l$. Это и есть событие E.

Вычислим вероятность события $\{K^s \geqslant n_s\}$. С точностью до гомотетии это то же самое, что $\widetilde{K}_1 \geqslant n_s$, где $\widetilde{K}_1$ обозначает минимальное число видимых шаров в кубе $[0,1]^d$, рассматриваемое раньше, но с интенсивностью пуассоновского поля $\widetilde{\lambda} = \lambda(a/\lfloor a\rfloor)^d$.

Заметим также, что события $\{K^s \geqslant n_s\}$ независимы для различных s.

Таким образом,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[E] \leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \mathbb{P}[K^s \geqslant n_s] = \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \mathbb{P}[\widetilde{K}_1 \geqslant n_s] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \exp(-\beta \cdot n_s \log n_s + n_s \log \widetilde{\lambda} + O(n_s)) =$$

$$= \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^{l} n_s \log n_s + n \log \widetilde{\lambda} + \sum_{s=1}^{l} O(n_s)\right).$$

Нетрудно убедиться, что минимум выражения $\sum_{s=1}^{l} n_s \log n_s$ достигается на наборе $\{n/l, \dots, n/l\}$. Также заметим, что $n \log \widetilde{\lambda} = n \log \lambda + O(n)$ и $\sum_{s=1}^{l} O(n_s) = O(n)$. Получим, что

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^{l} \frac{n}{l} \log \frac{n}{l} + n \log \lambda + O(n)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right).$$

Посчитаем количество способов разбиения числа n на $\lfloor a \rfloor^d$ неотрицательных слагаемых:

$$\binom{n + \lfloor a \rfloor^d - 1}{\lfloor a \rfloor^d - 1} \leqslant \frac{(n + a^d)^{a^d}}{(\lfloor a \rfloor^d - 1)!} = \exp\left(a^d + a^d \log\left(\frac{n}{a^d} + 1\right) - \frac{d}{2} \log a + o(n)\right) = \exp(o(n)).$$

Объединяя все полученные неравенства, получаем, что

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right).$$

□