Идея, как сделать из исходных нижних оценок новые.

Разобьём наш куб $[0,1]^d$ на a^d маленьких кубов следующим образом: по каждому направлению поделим на a частей, то есть проведем $a-1$ гиперплоскость.

Теперь эти гиперплоскости сделаем "толстыми": шириной хотя бы $2r/a$. (Тут есть детали про то, чтобы они поместились. Ну, если $r < 1/2$, то поместятся. Но можно будет взять не a, а $const \cdot a$, и ничего асимптотически не испортится. Так что дальше я все выражения буду иметь в виду с точностью до константы.) Наша картинка такая: $d(a-1)$ толстые гиперплоскости и a^d маленьких кубов со стороной $1/a$ (тут надо будет подобрать константы, чтобы все получилось). Причем шары из маленьких кубиков между собой не пересекаются.

А теперь наше событие $K \geqslant n$ следует из такого: что в объединении толстых гиперплоскостей нет центров шаров и в каждом маленьком кубике минимальное необходимое количество шаров, чтобы закодировать картинку, хотя бы n/a^d. Причем эти события независимы, так как шары из маленьких кубиков не пересекаются.

Вероятность того, что в объединении толстых гиперплоскостей нет центров, – это $e^{-a^d \lambda \operatorname{vol}_d(U)}$, где U – то самое объединение. Его объем порядка $2r$, то есть константа.

Вероятность того, что в кубике со стороной $1/a$ шариков с радиусом r/a потребуется хотя бы n/a^d, – это с точностью до гомотетии наша исходная оценка для n/a^d (а интенсивность здесь как раз λ).

То есть наша итоговая вероятность оценивается снизу так:

$$\mathbb{P}(K_a \geqslant n) \geqslant e^{-a^d \lambda \cdot const} \cdot \left(\mathbb{P}(K \geqslant n/a^d)\right)^{a^d}.$$

(На самом деле, вроде будет так: $e^{-a^d \lambda \cdot const} \cdot \left(\mathbb{P}(K \geqslant n/(const \cdot a^d))\right)^{const \cdot a^d}$.)

Когда возьмем экспоненту, получится

$$\exp\left(-bn(\log n - \log a^d)(1+o(1))\right).$$

В случае l_1 сходится с тем, что Вы посоветовали сделать, а заодно и с полученной уже верхней оценкой. И кажется, это работает для всех норм сразу, поэтому не придется что-то выдумывать отдельно для l_∞.