

Следующая теорема верна для любой нормы.

Теорема 1. Пусть $d \geq 2$, $n \gg a^d \lambda$ и $n \gg a^d$. Предположим, что неравенство

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + n \log \lambda + O(n)), \quad n \rightarrow \infty$$

верно радиусов R_1 с некоторым распределением и для радиусов $\tilde{R}_1 = R_1(\lfloor a \rfloor / a)$ одновременно. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Разобьем куб $[0, a]^d$ на такие ячейки:

$$\prod_{m=1}^d \left[\frac{k_m a}{\lfloor a \rfloor}, \frac{(k_m + 1)a}{\lfloor a \rfloor} \right],$$

где $k_m \in \{0, 1, \dots, \lfloor a \rfloor - 1\}$. Пусть это ячейки V_1, \dots, V_l , где $l = \lfloor a \rfloor^d$. Определим картинку, образованную ячейкой V_j , следующим образом:

$$S^j = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, N\}: \\ \xi_i \in V_j}} B(\xi_i, R_i) \cap V_j.$$

Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке V_j следующую величину:

$$K^j = \min\{s \geq 1 \mid \exists i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, N\}: \xi_{i_t} \in V_j, \quad t = 1, \dots, s; \quad S^j = \bigcup_{t=1}^s B(\xi_{i_t}, R_{i_t}) \cap V_j\}.$$

Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \quad \forall s, \\ \sum n_s = n}} \bigcap_{s=1}^l \{K^s \geq n_s\}.$$

Заметим, что из события $\{K_a \geq n\}$ следует событие E . Действительно, если $K_a \geq n$, то и $\sum K^s \geq n$. Тогда существует набор $\{n_1, \dots, n_l\}$ с $n_s \geq 0 \quad \forall s$ и $\sum n_s = n$, для которого выполнено $K^s \geq n_s$ для всех $s = 1, \dots, l$. Это и есть событие E .

Вычислим вероятность события $\{K^s \geq n_s\}$. С точностью до гомотетии это то же самое, что $\tilde{K}_1 \geq n_s$, где \tilde{K}_1 обозначает минимальное число видимых шаров в кубе $[0, 1]^d$, рассматриваемое раньше, но с интенсивностью пуассоновского поля $\tilde{\lambda} = \lambda(a/\lfloor a \rfloor)^d$ и радиусами $\tilde{R}_1 = R_1(\lfloor a \rfloor / a)$.

Заметим также, что события $\{K^s \geq n_s\}$ независимы для различных s . Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[E] \leq \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^l \mathbb{P}[K^s \geq n_s] = \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^l \mathbb{P}[\tilde{K}_1 \geq n_s] \leq \\
&\leq \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^l \exp(-\beta \cdot n_s \log n_s + n_s \log \tilde{\lambda} + O(n_s)) = \\
&= \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^l n_s \log n_s + n \log \tilde{\lambda} + \sum_{s=1}^l O(n_s)\right).
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что минимум выражения $\sum_{s=1}^l n_s \log n_s$ достигается на наборе $\{n/l, \dots, n/l\}$. Также заметим, что $n \log \tilde{\lambda} = n \log \lambda + O(n)$ и $\sum_{s=1}^l O(n_s) = O(n)$. Получим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^l \frac{n}{l} \log \frac{n}{l} + n \log \lambda + O(n)\right) = \\
&= \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)).
\end{aligned}$$

Посчитаем количество способов разбиения числа n на $[a]^d$ неотрицательных слагаемых:

$$\binom{n + [a]^d - 1}{[a]^d - 1} \leq \frac{(n + a^d)^{a^d}}{([a]^d - 1)!} = \exp\left(a^d + a^d \log\left(\frac{n}{a^d} + 1\right) - \frac{d}{2} \log a + o(n)\right) = \exp(o(n)).$$

Объединяя все полученные неравенства, получаем, что

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)).$$

□

Следствие 1. Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1 -норме, $d \geq 2$, $n \gg a^d \lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Следствие 2. Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_2 -норме, $d \geq 2$, $n \gg a^d \lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$