Санкт-Петербургский государственный университет

Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью

Дипломная работа
студентки 4 курса
направление «Математика»
01.03.01.
группы 16.Б01−мм
очной формы обучения
Давыденковой Марии Сергеевны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Пусть S – случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$. Средней ошибкой дискретизации S называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#\mathcal{C}\leqslant e^r} \mathbb{E} \min_{A\in\mathcal{C}} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Скорость ее убывания при стремлении r к бесконечности характеризует сложность распределения S. Общие свойства величины $D^{(q)}(r)$ изучены в [6, 4, 7]. В последние два десятилетия ошибки дискретизации исследовались, в основном, для траекторий случайных процессов, рассматриваемых как случайный элемент функционального пространства, см., например, [1, 5].

В работе [2] изучалась ошибка дискретизации для случайного множества, рассматриваемого как случайный элемент пространства компактов, снабжённого метрикой Хаусдорфа $d_H(A, B) := \max(\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|, \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \|a - b\|)$. В качестве случайного множества была взята стандартная Булева модель (Boolean model, см. [3, 8]), которая устроена следующим образом.

Рассмотрим куб $[0, a]^d$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, и случайный набор шаров с центрами в этом кубе, определенный следующим образом: пусть центры шаров ξ_i — случайные величины, распределенные равномерно в $[0, a]^d$, радиусы R_i — некоторые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, а количество шаров N — пуассоновская случайная величина с параметром $a^d\lambda$, где $\lambda = \lambda(a)$ – положительный параметр, зависящий от a. Все эти случайные величины независимы. Отметим, что при таком построении множество $(\xi_i)_{i\leqslant N}$ — это пуассоновский точечный процесс с интенсивностью λ.

Обозначим через $B(\xi_i, R_i)$ шар с центром в ξ_i радиуса R_i (пока что мы не фиксируем норму в $\mathbb{R}^d$). Мы будем рассматривать “картинку”, образованную этим наборов шаров:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, R_i) \cap [0, a]^d.$$

Определенная таким образом картинка называется *Булевой моделью случайного множества*. Заметим, что свойства S_a будут зависеть от рассматриваемой нормы.

В работе [2] исследовался случай $a = 1$ с постоянной интенсивностью λ. Результаты основаны на изучении вероятностей больших уклонений величины

$$K_1 = \min\{r \geqslant 1 | \exists i_1, \dots, i_r \subset \{1, \dots, N\} : S_1 = \bigcup_{l=1}^{r} B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0, a]^d\},$$

называемой *минимальным числом видимых шаров*, то есть на нахождении асимптотики $\mathbb{P}[K_1 \geqslant n]$ при n, стремящемся к бесконечности.

В настоящей работе некоторые из этих оценок распространяются на случай, когда параметр a стремится к бесконечности, причем $n \gg a^d\lambda$.

Заметим, что тривиальная оценка, вытекающая из свойств пуассоновского распределения, такова:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[N \geqslant n] \sim \mathbb{P}[N = n] =$$
$$= \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \sim \left(\frac{ea^d\lambda}{n}\right)^n e^{-a^d\lambda}\sqrt{2\pi n} = \exp(-n\log n + n\log(a^d\lambda) + O(n)) =$$
$$= \exp((-n\log n + dn\log a + n\log\lambda + O(n))), \; n \to \infty, a \to \infty.$$

Условие $n \gg a^d\lambda$ гарантирует, что вероятность больших уклонений стремится к нулю, так как $-n\log(n/a^d\lambda)$ стремится к минус бесконечности с ростом n и a.

1.2 Полученные результаты

Получены (*пока что :)*) более точные оценки вероятности больших уклонений для ℓ_1- и ℓ_2-нормы. А именно, что существует число $\beta > 1$, для которого

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp((-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a + n\log\lambda + O(n))), \; n \to \infty, a \to \infty.$$

Число β зависит от размерности d, используемой нормы и распределения радиусов R_i.

2 Нижние оценки для вероятности больших уклонений

2.1 Постоянный радиус

Рассмотрим случай, когда радиусы – это константа $r > 0$ п.н.

Теорема 1. *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1-норме, $d \geqslant 2$, и $n \gg a^d\lambda$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n\log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), \; n, a \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{a^{d/(d-1)}(k_m+1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m+3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right]\times$$
$$\times\left[l\left(\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right), l\left(\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}\right],$$

где $k_m\in\{0,\dots,\lfloor(8rn/a)^{1/(d-1)}\rfloor-1\}$, $l\in\{0,\dots,\lfloor a/4r\rfloor\}$, $c_1=2^{-(2+3/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0,a]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r}\cdot\left(\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}=\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{r(rn)^{1/(d-1)}}\cdot\left(\frac{a}{4}+r\right)+\frac{a}{2}<a$$

при достаточно больших a и n.

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i,r)$, $B(\xi_j,r)$ лежат в разных “рядах”, то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы $2r$. Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i=\xi_i+(0,\dots,0,r)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0,a]^d$. Итак, при $j\neq i$

$$\|x_i-\xi_j\|_1=|\xi_i^{(d)}+r-\xi_j^{(d)}|+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|\geqslant$$
$$\geqslant r-|\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)}|+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|\geqslant r-\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+\frac{1/2\cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}>r.$$

Мы построили порядка $8rn/a\cdot a/4r=2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать n из них. Назовем их $V_1,\dots,V_n$ и рассмотрим событие

$$E=\{N=n\}\cap\bigcup_{\pi\text{ – перестановка }\{1,\dots,n\}}\{\xi_i\in V_{\pi(i)}, i=1,\dots,n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $\{K\geqslant n\}$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a\geqslant n]\geqslant\mathbb{P}[E]=\frac{(a^d\lambda)^n}{n!}e^{-a^d\lambda}\cdot n!\cdot\left(\frac{1}{a^d}\cdot\left(\frac{1/2\cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1}\cdot\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}\right)^n=$$
$$=\exp\left(dn\log a+n\log\lambda-a^d\lambda-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n+\frac{d}{d-1}n\log a+O(n)\right)=$$
$$=\exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n+\left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a+n\log\lambda+O(n)\right).$$

□

Теорема 2. *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_2-норме, $d \geqslant 2$, и $n \gg a^d\lambda$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{2}{d-1}\right)dn\log a + O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

Доказательство теоремы аналогично случаю ℓ_1-нормы, и отличается только размером ячеек.

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{a^{d/(d-1)}(k_m+1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m+3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right]\times$$
$$\times\left[l\left(\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}+2r\right), l\left(\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}\right],$$

где $k_m \in \{0,\dots,\lfloor(8rn/a)^{1/(d-1)}\rfloor-1\}$, $l\in\{0,\dots,\lfloor a/4r\rfloor\}$, $c_2 = 2^{-(4+6/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0,a]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r}\left(\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} = \frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r^2(rn)^{2/(d-1)}}\cdot\left(\frac{a}{4}+r\right)+\frac{a}{2} < a$$

при достаточно больших a и n.

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i,r)$, $B(\xi_j,r)$ лежат в разных “рядах”, то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы $2r$. Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i = \xi_i + (0,\dots,0,r)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0,a]^d$. Итак, при $j\neq i$

$$\|x_i-\xi_j\|_2^2 = |\xi_i^{(d)}+r-\xi_j^{(d)}|^2+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|^2 \geqslant$$
$$\geqslant r^2-2r|\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)}|+(\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)})^2+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|^2\geqslant$$
$$\geqslant r^2-\frac{2c_2a^{2+2/(d-1)}}{(rn)^{2/(d-1)}}+\left(\frac{1/2a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right)^2\geqslant r^2.$$

Мы построили порядка $8rn/a\cdot a/4r = 2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать n из них. Назовем их $V_1,\dots,V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N=n\}\cap\bigcup_{\pi\text{ -- перестановка }\{1,\dots,n\}}\{\xi_i\in V_{\pi(i)}, i=1,\dots,n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $\{K \geqslant n\}$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{a^d} \cdot \left(\frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right)^n =$$

$$= \exp\left(dn\log a + n\log\lambda - a^d\lambda - \left(2 + \frac{2}{d-1}\right) n\log n + \left(2 + \frac{2}{d-1}\right) n\log a + O(n) \right) =$$

$$= \exp\left(-\left(1 + \frac{2}{d-1}\right) n\log n + \left(1 + \frac{2}{d-1}\right) dn\log a + n\log\lambda + O(n) \right).$$

□

2.2 Радиус с плотностью

Теорема 3. *Пусть распределение R_1 имеет плотность p относительно меры Лебега, причем $p(z) \geqslant cz^{\alpha-1}$ для малых z и некоторых $c, \alpha > 0$, $d \geqslant 1$, и $n \gg a^d\lambda$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-(1+\alpha/d)\, n\log n + (1+\alpha/d) dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), \ n, a \to \infty.$$

Замечание. Утверждение теоремы верно для произвольной нормы в $\mathbb{R}^d$.

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d} \left[\frac{a(k_m + 1/4)}{(2n)^{1/d}},\ \frac{a(k_m + 3/4)}{(2n)^{1/d}} \right],$$

где $k_m \in \{0, \dots \lfloor (2n)^{1/d} \rfloor - 1\}$.

Мы построили порядка $2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать n из них. Назовем их $V_1, \dots, V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcup_{\pi\text{ -- перестановка } \{1,\dots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, R_i \in [c_1 a n^{-1/d}, c_2 a n^{-1/d}], i = 1, \dots, n\},$$

где $c_2 > c_1 > 0$ – некоторые константы, которые могут зависеть от нормы и размерности, причем c_2 выбирается так, чтобы для $i \neq j$ шары $B(\xi_i, R_i), B(\xi_j, R_j)$ не пересекались. В этом случае событие E влечет $[K_a \geqslant n]$.

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{a^d} \left(\frac{1/2a}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} p(z) dz \right)^n \geqslant$$

$$\geqslant (a^d\lambda)^n e^{-a^d\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a^d} \left(\frac{1/2a}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} z^{\alpha-1} dz \right)^n =$$

$$= (a^d\lambda)^n e^{-a^d\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a^d} \left(\frac{1/2a}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c(c_2^\alpha - c_1^\alpha)/\alpha \cdot a^\alpha n^{-\alpha/d} \right)^n =$$

$$= \exp\left(-(1+\alpha/d) n \log n + (1+\alpha/d) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right).$$

□

3 Верхние оценки для вероятности больших уклонений

Теорема 4. *Пусть $R_1 \equiv r$ п.н., где $r > 0$, шары берутся в l_1-норме, и $d \geqslant 2$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right), n, a \to \infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Объединение шаров в группы. Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{K_a} B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$$

обозначает неуменьшаемое представление картинки S. Тогда для каждого числа $i \leqslant K_a$ существует точка $\nu_i \in B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$, которая не лежит ни в каком другом шаре $B(\xi_j, r), j \neq i$. Зафиксируем такие $\nu_i, i = 1, 2, \dots K_a$. Обозначим $\Delta_i := \nu_i - \xi_i$.

Объединим шары в группы $J_0, J_1^+, J_1^-, \dots J_d^+, J_d^-$ следующим образом. Определим $J_0 := \{i\colon \|\Delta_i\|_1 \leqslant r/2\}$. Оценим мощность этого множества. Для любых $i, j \in J_0$ выполнено:

$$r < \|\nu_j - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\nu_i - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\Delta_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + r/2.$$

То есть $\|\nu_j - \nu_i\| > r/2$, а значит, $\# J_0 \leqslant c_1 r^{-d} a^d$, где константа $c_1 = 2^d / \operatorname{vol}_d B(0, 1)$.

Теперь пусть $i \notin J_0$. Значит,

$$\|\Delta_i\|_\infty \geqslant c_2 \|\Delta_i\|_1 > c_2 r/2,$$

где c_2 – контанта, зависящаятолько от нормы. Поэтому i принадлежит одному из $2d$ множеств вида:

$$J_m^+ := \{i\colon \Delta_i^{(m)} > c_2 r/2\}, \quad J_m^- := \{i\colon \Delta_i^{(m)} < -c_2 r/2\}.$$

Шаг 2. Оценка расстояний между центрами. Пусть $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – проекция, определенная таким образом:

$$\sigma x := (x^{(1)}, \ldots x^{(d-1)}, 0).$$

Лемма 1 (см. [2], Lemma 20). *Пусть $i, j \in J_d^+$, $i \neq j$, и пусть $c_3 := c_2 r/2$. Тогда*

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1, c_3].$$

Шаг 3. Подсчет ячеек, содержащих центры шаров. Зафиксируем большое число $A > 0$ и покроем куб $[0, a]^d$ следующим набором ячеек:

$$V_{\bar{k}, k_d} := \prod_{m=1}^{d} \left[\frac{Ak_m}{(na^{-d})^{1/(d-1)}}, \frac{A(k_m+1)}{(na^{-d})^{1/(d-1)}}\right],$$

где $k_m \in \{0, \ldots, \lfloor A^{-1}(na^{-1})^{1/(d-1)} \rfloor\}$ для $1 \leqslant m \leqslant d$ и мульти-индекса $\bar{k} := (k_1, \ldots, k_{d-1})$.

Зафиксируем некоторый индекс $\bar{k}$ и оценим количество ячеек, содержащих центры шаров:

$$N(\bar{k}, d, +) := \#\{k\colon \xi_i \in V_{\bar{k},k} \text{ для некоторого } i \in J_d^+\}.$$

Заметим, что если $\xi_i \in V_{\bar{k},\kappa_i}$ и $\xi_j \in V_{\bar{k},\kappa_j}$ для некоторых $i, j \in J_d^+$, то

$$\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1 \ \leqslant \ (d-1)A(a^d n^{-1})^{1/(d-1)}.$$

Поэтому по лемме

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [(d-1)A(a^d n^{-1})^{1/(d-1)}, c_3].$$

Замечание. *При достаточно больших a, n этот интервал корректно определен.*

Исходя из этого, разобъем $[0, a]$ на $\lceil c_3^{-1} \rceil$ частей длины не более c_3, и заметим, что если $\xi_i^{(d)}, \xi_j^{(d)}$ лежат в одной части, то $|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \leqslant (d-1)A(a^d n^{-1})^{1/(d-1)}$. Поэтому тогда $|\kappa_i - \kappa_j| \leqslant ad$. Отсюда получаем искомую оценку:

$$N(\bar{k}, d, +) \leqslant ad\lceil c_3^{-1} \rceil =: ac_4.$$

Теперь мы можем получить общее число ячеек, содержащих центры:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{m=1}^{d} (N(\bar{k}, m, +) + N(\bar{k}, m, -)) \leqslant (2d) \cdot (ac_4) \cdot (na^{-1}A^{-(d-1)}) =: \frac{c_5 n}{A^{d-1}}.$$

Пусть $\mathcal{U}$ – семейство всех возможных объединений из $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек. Их количество – число способов выбрать $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек из $\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rceil$. Поэтому можно выписать следующую простую оценку:

$$\#\mathcal{U} \leqslant \exp\left(\frac{c_5 n}{A^{d-1}} \log\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rceil\right) =$$
$$= \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d\right)(1 + o(1))\right).$$

Для каждого $U \in \mathcal{U}$ объем можно оценить так:

$$\mathrm{vol}_d(U) \leqslant \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \left(\frac{A a^{d/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}} \right)^d = \frac{A c_5 a^{d^2/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}.$$

Шаг 4. Оценка вероятности. Напомним, что

$$K_a = \#J_0 + \# \left(\bigcup_{m=1}^{d} (J_m^+ \cup J_m^-) \right) =: K^{(0)} + K^{(\pm)}.$$

Заметим, что для некоторого случайного множества $U \in \mathcal{U}$ выполнено:

$$N_U := \#\{i \colon \xi_i \in U\} \geqslant K^{(\pm)}.$$

Пусть $c_6 := c_1 r^{-d}$. Тогда, как мы помним, $K^{(0)} \leqslant c_6 a^d$.

Поэтому, пользуясь тем, что случайная величина N_U имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $\lambda \,\mathrm{vol}_d(U)$, получаем следующую оценку:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[K^{(\pm)} \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \#\mathcal{U} \cdot \max_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right) \left(\frac{\lambda \,\mathrm{vol}_d(U) e}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\lambda A c_5 a^{d^2/(d-1)} e n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} =$$

$$= \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} - 1 - \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} + 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right).$$

Здесь использовалось следующее равенство:

$$n \log(n - c_6 a^d) = n \log(n - c_6 a^d) - n \log n + n \log n = n \log(1 - c_6 a^d / n) + n \log n = n \log n + o(n).$$

Так как константа A может быть выбрана сколь угодно большой, получаем:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right).$$

$\square$

Список литературы

[1] F. Aurzada, S. Dereich, M. Scheutzow, C. Vormoor, High resolution quantization and entropy coding of jump processes, J. Complexity 25 (2) (2009) 163–187.

[2] F. Aurzada, M. Lifshits, How complex is a random picture? Journal of Complexity 53 (2019) 133–161.

[3] S.N. Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, Wiley Series in Probability and Statistics, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2013, p. xxvi+544.

[4] T.M. Cover, J.A. Thomas, Elements of Information Theory, second ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006, p. xxiv+748.

[5] S. Dereich, The coding complexity of diffusion processes under supremum norm distortion, Stochastic Process. Appl. 118 (6) (2008) 917–937.

[6] S. Graf, H. Luschgy, Foundations of Quantization for Probability Distributions, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1730, Springer-Verlag, Berlin, 2000, p. x+230.

[7] A.N. Kolmogorov, Three approaches to the quantitative definition of information, Int. J. Comput. Math. 2 (1968) 157–168.

[8] R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, 2008, p. xii+693.