

Санкт-Петербургский государственный университет

*ДАВЫДЕНКОВА Мария Сергеевна*

Выпускная квалификационная работа

*Кодирование случайных множеств в булевой модели  
с переменной интенсивностью*

Уровень образования:

Направление 01.03.01 «Математика»

Основная образовательная программа Шифр «Нагшенование»

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. профессор

Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:

пппваап

впвро

Санкт-Петербург

2020 год

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>2</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	2
1.2 Полученные результаты . . . . .	3
<b>2 Поведение <math>K_a</math> при малых <math>\lambda</math></b>	<b>4</b>
<b>3 Нижние оценки для вероятности больших уклонений</b>	<b>4</b>
3.1 Постоянный радиус . . . . .	4
3.2 Радиус с плотностью . . . . .	7
<b>4 Верхние оценки для вероятности больших уклонений</b>	<b>8</b>
<b>5 Связь с задачей постоянного размера куба</b>	<b>11</b>
5.1 Нижние оценки . . . . .	11
5.2 Верхние оценки . . . . .	14
<b>6 Вероятность больших уклонений в одномерном случае</b>	<b>16</b>

## 1 Введение

### 1.1 Постановка задачи

Пусть  $S$  — случайный элемент некоторого метрического пространства  $(X, dist)$ . Средней ошибкой дискретизации  $S$  называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#C \leq e^r} \mathbb{E} \min_{A \in C} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Скорость ее убывания при стремлении  $r$  к бесконечности характеризует сложность распределения  $S$ . Общие свойства величины  $D^{(q)}(r)$  изучены в [6, 4, 7]. В последние два десятилетия ошибки дискретизации исследовались, в основном, для траекторий случайных процессов, рассматриваемых как случайный элемент функционального пространства, см., например, [1, 5].

В работе [2] изучалась ошибка дискретизации для случайного множества, рассматриваемого как случайный элемент пространства компактов, снабжённого метрикой Хаусдорфа  $d_H(A, B) := \max(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|)$ . В качестве случайного множества была взята стандартная Булева модель (Boolean model, см. [3, 8]), которая устроена следующим образом.

Рассмотрим куб  $[0, a]^d$  в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , и случайный набор шаров с центрами в этом кубе, определенный следующим образом: пусть центры шаров  $\xi_i$  — случайные величины, распределенные равномерно в  $[0, a]^d$ , радиусы  $R_i$  — некоторые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, а количество шаров  $N$  — пуассоновская случайная величина с параметром  $a^d \lambda$ , где  $\lambda = \lambda(a)$  — положительный параметр, зависящий

от  $a$ . Все эти случайные величины независимы. Отметим, что при таком построении множество  $(\xi_i)_{i \leq N}$  — это пуассоновский точечный процесс с интенсивностью  $\lambda$ .

Обозначим через  $B(\xi_i, R_i)$  шар с центром в  $\xi_i$  радиуса  $R_i$  (пока что мы не фиксируем норму в  $\mathbb{R}^d$ ). Мы будем рассматривать “картинку”, образованную этим набором шаров:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^N B(\xi_i, R_i) \cap [0, a]^d.$$

Определенная таким образом картинка называется *Булевой моделью случайного множества*. Заметим, что свойства  $S_a$  будут зависеть от рассматриваемой нормы.

В работе [2] исследовался случай  $a = 1$  с постоянной интенсивностью  $\lambda$ . Результаты основаны на изучении вероятностей больших уклонений величины

$$K_1 = \min\{r \geq 1 \mid \exists i_1, \dots, i_r \subset \{1, \dots, N\} : S_1 = \bigcup_{l=1}^r B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0, 1]^d\},$$

называемой *минимальным числом видимых шаров*, то есть на нахождении асимптотики  $\mathbb{P}[K_1 \geq n]$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности.

В настоящей работе некоторые из этих оценок распространяются на случай, когда параметр  $a$  стремится к бесконечности, причем  $n \gg a^d \lambda$ .

Заметим, что тривиальная оценка, вытекающая из свойств пуассоновского распределения, такова:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[N \geq n] \sim \mathbb{P}[N = n] = \\ &= \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \sim \left( \frac{ea^d \lambda}{n} \right)^n e^{-a^d \lambda} \sqrt{2\pi n} = \exp(-n \log n + n \log(a^d \lambda) + O(n)) = \\ &= \exp((-n \log n + dn \log a + n \log \lambda + O(n))), \quad n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Условие  $n \gg a^d \lambda$  гарантирует, что вероятность больших уклонений стремится к нулю, так как  $-n \log(n/a^d \lambda)$  стремится к минус бесконечности с ростом  $n$  и  $a$ .

## 1.2 Полученные результаты

Получены более точные оценки вероятности больших уклонений для случаев постоянно-го радиуса и для радиусов с плотностью  $p(z) \approx z^{\alpha-1}$  для  $z \rightarrow 0$ . Запись  $p(z) \approx q(z)$ ,  $z \rightarrow 0$  обозначает, что  $p(z)/q(z)$  ограничено вне любой окрестности нуля и бесконечно для достаточно малых  $z$ . Показано, что существует число  $\beta > 1$ , для которого

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp((- \beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n))), \quad n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty.$$

Число  $\beta$  зависит от размерности  $d$ , используемой нормы и распределения радиусов  $R_i$ .

## 2 Поведение $K_a$ при малых $\lambda$

В этом разделе речь пойдет о случае, когда  $a^d \lambda \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda = \lambda(a)$  таково, что  $a^d \lambda^2 \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ , и случайная величина  $R_1$  имеет  $d$ -й момент,  $d \geq 1$ . Тогда  $\mathbb{P}[K_a < N] \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, N\}: \\ j \neq i}} \{\xi_i \in B(\xi_j, R_j)\}.$$

Так как центры шаров распределены равномерно в  $[0, a]^d$  и величины  $R_i$  независимы и одинаково распределены, выполнено равенство:

$$\mathbb{P}[\xi_i \in B(\xi_j, R_j)] = \frac{1}{a^d} \mathbb{E} \text{vol}_d B(\xi_j, R_j) = \frac{1}{a^d} \mathbb{E} \text{vol}_d B(0, R_1) = \frac{c}{a^d}$$

в силу того, что у  $R_1$  существует  $d$ -й момент.

Заметим, что если  $K_a < N$ , то событие  $E$  выполняется, так как есть шар, лежащий в объединении других шаров. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a < N] &\leq \mathbb{P}[E] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[E|N=k] \mathbb{P}[N=k] \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{1 \leq k} \sum_{\substack{1 \leq j \leq k: \\ j \neq i}} \mathbb{P}[\xi_i \in B(\xi_j, R_j)] \right) \mathbb{P}[N=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{c}{a^d} \cdot \frac{(a^d \lambda)^k}{k!} e^{-a^d \lambda} = \\ &= \frac{c}{a^d} (a^d \lambda)^2 = ca^d \lambda^2 \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

**Следствие 1.** Если последовательность  $a^d \lambda$  ограничена и случайная величина  $R_1$  имеет  $d$ -й момент, то  $\mathbb{P}[K_a < N] \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow \infty$ .

Так как в данном случае величина  $K_a$  асимптотически ведет себя как  $N$ , при оценке вероятности больших отклонений мы не будем рассматривать случай  $\lambda \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ .

## 3 Нижние оценки для вероятности больших отклонений

### 3.1 Постоянный радиус

Рассмотрим случай, когда радиусы — это константа  $r > 0$  п.н.

**Теорема 2.** Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_1$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1} \left[ \frac{a^{d/(d-1)}(k_m + 1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m + 3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right] \times \\ \times \left[ l \left( \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + 2r \right), l \left( \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + 2r \right) + \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} \right],$$

где  $k_m \in \{0, \dots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$ ,  $l \in \{0, \dots, \lfloor a/4r \rfloor\}$ ,  $c_1 = 2^{-(2+3/(d-1))}$ .

Все эти ячейки лежат в кубе  $[0, a]^d$ . По первым  $d-1$  координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r} \cdot \left( \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + 2r \right) + \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} = \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{r(rn)^{1/(d-1)}} \cdot \left( \frac{a}{4} + r \right) + \frac{a}{2} < a$$

при достаточно больших  $a$  и  $n$  в силу того, что  $n \gg a^d$ .

Заметим, что если центры шаров  $B(\xi_i, r)$ ,  $B(\xi_j, r)$  лежат в разных “рядах”, то есть  $\xi_i^{(d)}$  и  $\xi_j^{(d)}$  лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы  $2r$ . Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку  $x_i = \xi_i + (0, \dots, 0, r)$ . Заметим, что для достаточно больших  $n$  и  $a$  эта точка действительно лежит в кубе  $[0, a]^d$ . Итак, при  $j \neq i$

$$\|x_i - \xi_j\|_1 = |\xi_i^{(d)} + r - \xi_j^{(d)}| + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}| \geq \\ \geq r - |\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}| \geq r - \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} > r.$$

Мы построили порядка  $8rn/a \cdot a/4r = 2n$  непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать  $n$  из них. Назовем их  $V_1, \dots, V_n$  и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi - \text{перестановка } \{1, \dots, n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что событие  $E$  влечет событие  $\{K \geq n\}$  в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geq n] &\geq \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \cdot n! \cdot \left( \frac{1}{a^d} \cdot \left( \frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} \right)^n = \\
&= \exp \left( dn \log a + n \log \lambda - a^d \lambda - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \frac{d}{d-1} n \log a + O(n) \right) = \\
&= \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right).
\end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  н.н., где шары берутся в  $\ell_2$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp \left( - \left( 1 + \frac{2}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{2}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы аналогично случаю  $\ell_1$ -нормы, и отличается только размером ячеек.

*Доказательство.* Рассмотрим набор ячеек:

$$\begin{aligned}
&\prod_{m=1}^{d-1} \left[ \frac{a^{d/(d-1)}(k_m + 1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m + 3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right] \times \\
&\quad \times \left[ l \left( \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + 2r \right), l \left( \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + 2r \right) + \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right],
\end{aligned}$$

где  $k_m \in \{0, \dots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$ ,  $l \in \{0, \dots, \lfloor a/4r \rfloor\}$ ,  $c_2 = 2^{-(4+6/(d-1))}$ .

Все эти ячейки лежат в кубе  $[0, a]^d$ . По первым  $d-1$  координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r} \left( \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + 2r \right) + \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} = \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r^2(rn)^{2/(d-1)}} \cdot \left( \frac{a}{4} + r \right) + \frac{a}{2} < a$$

при достаточно больших  $a$  и  $n$  в силу того, что  $n \gg a^d$ .

Заметим, что если центры шаров  $B(\xi_i, r)$ ,  $B(\xi_j, r)$  лежат в разных “рядах”, то есть  $\xi_i^{(d)}$  и  $\xi_j^{(d)}$  лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы  $2r$ . Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку  $x_i = \xi_i + (0, \dots, 0, r)$ . Заметим, что для достаточно больших  $n$  и  $a$  эта точка

действительно лежит в кубе  $[0, a]^d$ . Итак, при  $j \neq i$

$$\begin{aligned} \|x_i - \xi_j\|_2^2 &= |\xi_i^{(d)} + r - \xi_j^{(d)}|^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geq \\ &\geq r^2 - 2r|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + (\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)})^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geq \\ &\geq r^2 - \frac{2c_2 a^{2+2/(d-1)}}{(rn)^{2/(d-1)}} + \left( \frac{1/2 a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^2 \geq r^2. \end{aligned}$$

Мы построили порядка  $8rn/a \cdot a/4r = 2n$  непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать  $n$  из них. Назовем их  $V_1, \dots, V_n$  и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi - \text{перестановка } \{1, \dots, n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что событие  $E$  влечет событие  $\{K \geq n\}$  в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\geq \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \cdot n! \cdot \left( \frac{1}{a^d} \cdot \left( \frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right)^n = \\ &= \exp \left( dn \log a + n \log \lambda - a^d \lambda - \left( 2 + \frac{2}{d-1} \right) n \log n + \left( 2 + \frac{2}{d-1} \right) n \log a + O(n) \right) = \\ &= \exp \left( - \left( 1 + \frac{2}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{2}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right). \end{aligned}$$

□

## 3.2 Радиус с плотностью

Утверждение следующей теоремы верно для произвольной нормы в  $\mathbb{R}^d$ .

**Теорема 4.** Пусть распределение  $R_1$  имеет плотность  $p$  относительно меры Лебега, причем  $p(z) \geq cz^{\alpha-1}$  для малых  $z$  и некоторых  $c, \alpha > 0$ . Предположим, что  $d \geq 1$  и  $n \gg a^d \lambda$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp \left( - (1 + \alpha/d) n \log n + (1 + \alpha/d) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^d \left[ \frac{a(k_m + 1/4)}{(2n)^{1/d}}, \frac{a(k_m + 3/4)}{(2n)^{1/d}} \right],$$

где  $k_m \in \{0, \dots, \lfloor (2n)^{1/d} \rfloor - 1\}$ .

Мы построили порядка  $2n$  непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать  $n$  из них. Назовем их  $V_1, \dots, V_n$  и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi - \text{перестановка } \{1, \dots, n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, R_i \in [c_1 a n^{-1/d}, c_2 a n^{-1/d}], i = 1, \dots, n\},$$

где  $c_2 > c_1 > 0$  — некоторые константы, которые могут зависеть от нормы и размерности, причем  $c_2$  выбирается так, чтобы для  $i \neq j$  шары  $B(\xi_i, R_i)$  и  $B(\xi_j, R_j)$  не пересекались. В этом случае событие  $E$  влечет  $\{K_a \geq n\}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K \geq n] &\geq \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \cdot n! \cdot \left( \frac{1}{a^d} \left( \frac{1/2 \cdot a}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} p(z) dz \right)^n \geq \\ &\geq (a^d \lambda)^n e^{-a^d \lambda} \cdot \left( \left( \frac{1/2}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} z^{\alpha-1} dz \right)^n = \\ &= (a^d \lambda)^n e^{-a^d \lambda} \cdot \left( \left( \frac{1/2}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c(c_2^\alpha - c_1^\alpha)/\alpha \cdot a^\alpha n^{-\alpha/d} \right)^n = \\ &= \exp(-(1 + \alpha/d)n \log n + (1 + \alpha/d)dn \log a + n \log \lambda + O(n)). \end{aligned}$$

□

## 4 Верхние оценки для вероятности больших уклонений

**Теорема 5.** Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_1$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство. Шаг 1. Объединение шаров в группы.* Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{K_a} B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$$

обозначает неубывающее представление картинки  $S$ . Тогда для каждого числа  $i \leq K_a$  существует точка  $\nu_i \in B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$ , которая не лежит ни в каком другом шаре  $B(\xi_j, r), j \neq i$ . Зафиксируем такие  $\nu_i, i = 1, 2, \dots, K_a$ . Обозначим  $\Delta_i := \nu_i - \xi_i$ .



Объединим шары в группы  $J_0, J_1^+, J_1^-, \dots, J_d^+, J_d^-$  следующим образом. Определим  $J_0 := \{i: \|\Delta_i\|_1 \leq r/2\}$ . Оценим мощность этого множества. Для любых  $i, j \in J_0$  выполнено:

$$r < \|\nu_j - \xi_i\| \leq \|\nu_j - \nu_i\| + \|\nu_i - \xi_i\| \leq \|\nu_j - \nu_i\| + \|\Delta_i\| \leq \|\nu_j - \nu_i\| + r/2.$$

То есть  $\|\nu_j - \nu_i\| > r/2$ , а значит,  $\#J_0 \leq c_1 r^{-d} a^d$ , где константа  $c_1 = 2^d / \text{vol}_d B(0, 1)$ .

Теперь пусть  $i \notin J_0$ . Значит,

$$\|\Delta_i\|_\infty \geq c_2 \|\Delta_i\|_1 > c_2 r/2.$$

Поэтому  $i$  принадлежит одному из  $2d$  множеств вида:

$$J_m^+ := \{i: \Delta_i^{(m)} > c_2 r/2\}, \quad J_m^- := \{i: \Delta_i^{(m)} < -c_2 r/2\}, \quad 1 \leq m \leq d.$$

*Шаг 2. Оценка расстояний между центрами.* Пусть  $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  — проекция, определенная таким образом:

$$\sigma x := (x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}, 0).$$

**Лемма 1** (см. [2], Lemma 20). Пусть  $i, j \in J_d^+$ ,  $i \neq j$ , и пусть  $c_3 := c_2 r/2$ . Тогда

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [\|\sigma \xi_i - \sigma \xi_j\|_1, c_3].$$

*Шаг 3. Подсчет ячеек, содержащих центры шаров.* Зафиксируем большое число  $A > 0$  и покроем куб  $[0, a]^d$  следующим набором ячеек:

$$V_{\bar{k}, k_d} := \prod_{m=1}^d \left[ \frac{A k_m}{(na^{-d})^{1/(d-1)}}, \frac{A(k_m + 1)}{(na^{-d})^{1/(d-1)}} \right],$$

где  $k_m \in \{0, \dots, \lfloor A^{-1}(na^{-1})^{1/(d-1)} \rfloor\}$  для  $1 \leq m \leq d$  и мульти-индекса  $\bar{k} := (k_1, \dots, k_{d-1})$ .

Зафиксируем некоторый индекс  $\bar{k}$  и оценим количество ячеек, содержащих центры шаров:

$$N(\bar{k}, d, +) := \#\{k: \xi_i \in V_{\bar{k}, k} \text{ для некоторого } i \in J_d^+\}.$$

Заметим, что если  $\xi_i \in V_{\bar{k}, \kappa_i}$  и  $\xi_j \in V_{\bar{k}, \kappa_j}$  для некоторых  $i, j \in J_d^+$ , то

$$\|\sigma \xi_i - \sigma \xi_j\|_1 \leq (d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}.$$

Поэтому по лемме

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [(d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}, c_3].$$

**Замечание.** При достаточно больших  $a, n$  этот интервал корректно определен.

Исходя из этого, разобьем  $[0, a]$  на  $a \lceil c_3^{-1} \rceil$  частей длины не более  $c_3$ , и заметим, что если  $\xi_i^{(d)}, \xi_j^{(d)}$  лежат в одной части, то  $|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \leq (d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}$ . Поэтому тогда  $|\kappa_i - \kappa_j| \leq d$ . Отсюда получаем искомую оценку:

$$N(\bar{k}, d, +) \leq ad \lceil c_3^{-1} \rceil =: ac_4.$$

Теперь мы можем получить общее число ячеек, содержащих центры:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{m=1}^d (N(\bar{k}, m, +) + N(\bar{k}, m, -)) \leq (2d) \cdot (ac_4) \cdot (na^{-1}A^{-(d-1)}) =: \frac{c_5 n}{A^{d-1}}.$$

Пусть  $\mathcal{U}$  — семейство всех возможных объединений из  $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$  ячеек. Их количество — число способов выбрать  $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$  ячеек из  $\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)}A^d} \right\rceil$ . Поэтому можно выписать следующую простую оценку:

$$\begin{aligned} \#\mathcal{U} &\leq \exp \left( \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \log \left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)}A^d} \right\rceil \right) = \\ &= \exp \left( \frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n) \right). \end{aligned}$$

Для каждого  $U \in \mathcal{U}$  объем можно оценить так:

$$\text{vol}_d(U) \leq \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \left( \frac{Aa^{d/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}} \right)^d = \frac{Ac_5 a^{d^2/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}.$$

*Шаг 4. Оценка вероятности.* Напомним, что

$$K_a = \#J_0 + \# \left( \bigcup_{m=1}^d (J_m^+ \cup J_m^-) \right) =: K^{(0)} + K^{(\pm)}.$$

Заметим, что для некоторого случайного множества  $U \in \mathcal{U}$  выполнено:

$$N_U := \#\{i: \xi_i \in U\} \geq K^{(\pm)}.$$

Пусть  $c_6 := c_1 r^{-d}$ . Тогда, как мы помним,  $K^{(0)} \leq c_6 a^d$ .

Поэтому, пользуясь тем, что случайная величина  $N_U$  имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием  $\lambda \text{vol}_d(U)$ , получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[K^{(\pm)} \geq n - c_6 a^d] \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geq n - c_6 a^d] \leq \#\mathcal{U} \cdot \max_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geq n - c_6 a^d] \leq \\ &\leq \exp \left( \frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n) \right) \left( \frac{\lambda \text{vol}_d(U) e}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} \leq \\ &\leq \exp \left( \frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( \frac{\lambda A c_5 a^{d^2/(d-1)} e n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} \end{aligned}$$

Распишем отдельно последнюю скобку:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\lambda A c_5 a^{d^2/(d-1)} e n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} = \\ & = \exp \left( n \log \lambda + d^2/(d-1) n \log a - 1/(d-1) n \log n - n \log(n - c_6 a^d) - \right. \\ & \quad \left. - c_6 a^d \log \lambda - c_6 a^d d^2/(d-1) \log a + c_6 a^d/(d-1) \log n + c_6 a^d \log(n - c_6 a^d) + O(n) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что  $\log(n - c_6 a^d) = \log n + o(1)$ .

Слагаемое  $c_6 a^d \log \lambda = o(n)$ , и  $-c_6 a^d d^2/(d-1) \log a - c_6 a^d(1 + 1/(d-1)) \log n < 0$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp & \left( \left( \frac{c_5 d}{(d-1) A^{d-1}} - 1 - \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \right. \\ & \left. + \left( \frac{c_5}{(d-1) A^{d-1}} + 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right). \end{aligned}$$

Так как константа  $A$  может быть выбрана сколь угодно большой, получаем:

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right).$$

□

## 5 Связь с задачей постоянного размера куба

В этом разделе мы покажем, как получить оценки вероятности больших уклонений с параметром  $a \rightarrow \infty$  из соответствующих оценок для случая  $a = 1$ .

### 5.1 Нижние оценки

Утверждение следующей теоремы выполнено для произвольной нормы.

**Теорема 6.** Пусть  $R_1 \leq r$  п.н. для некоторого  $r > 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Предположим, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \geq \exp(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Пусть  $h = h(a, r) = \left\lfloor \frac{a-1}{2r+1} \right\rfloor$ . Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{ \prod_{m=1}^d \left[ k_m \left( \frac{a-2rh}{h+1} + 2r \right), k_m \left( \frac{a-2rh}{h+1} + 2r \right) + \frac{a-2rh}{h+1} \right] \right\},$$

где  $k_m \in \{0, 1, \dots, h\}$ .

Заметим, что для точек  $x$  и  $y$ , лежащих в разных ячейках,  $\min_{1 \leq m \leq d} |x^{(m)} - y^{(m)}| \geq 2r$ , поэтому шары с центрами в разных ячейках не пересекаются.

Мы построили ячейки  $V_1, \dots, V_l$ , где  $l = (h+1)^d$ . Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке  $V_j$  следующую величину:

$$K^j = \min\{s \mid \exists i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, N\} : S \cap V_j = \bigcup_{t=1}^s B(\xi_{i_t}, R_1) \cap V_j\}.$$

Обозначим  $V = \bigcup_{j=1}^l V_j$ . Определим следующее событие:

$$E = \{\xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\} \cap \bigcap_{j=1}^l \{K^j \geq n/(h+1)^d\}.$$

Заметим, что для различных  $j$  события  $\{K^j \geq n/(h+1)^d \mid \xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\}$  независимы.

Докажем, что событие  $E$  влечет событие  $\{K_a \geq n\}$ . Действительно, если все центры лежат в наших ячейках, то шары с центрами в разных ячейках не пересекаются. Тогда если в каждой ячейке минимальное число видимых шаров хотя бы  $n/(h+1)^d$ , то минимальное число видимых шаров во всей картинке хотя бы  $n$ .

Так как количество центров шаров в  $[0, a]^d \setminus V$  – пуассоновская случайная величина с параметром  $\lambda \text{vol}_d([0, a]^d \setminus V)$ , можно выписать следующую оценку:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\} = \exp(-\lambda \cdot \text{vol}_d([0, a]^d \setminus V)) \geq \exp(-\lambda \cdot (2ra^{d-1}) \cdot dh) \geq \exp(-\lambda \cdot da^d).$$

Заметим, что при условии, что центры шаров лежат только в выбранных ячейках, события  $\{K^j \geq n/(h+1)^d\}$  – это с точностью до гомотетии то же самое, что событие  $\{\tilde{K}_1 \geq n/(h+1)^d\}$ , где  $\tilde{K}_1$  – минимальное необходимое количество шаров для задачи в единичном кубе с постоянными радиусами  $\tilde{R}_1 = R_1 \cdot \left(\frac{a-2rh}{h+1}\right)^{-1}$  и интенсивностью

$$\tilde{\lambda} = \lambda \cdot \left(\frac{a-2rh}{h+1}\right)^d. \text{ Таким образом,}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{K^j \geq n/(h+1)^d \mid \xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\} &= \mathbb{P}\{\tilde{K}_1 \geq n/(h+1)^d\} \geq \\ &\geq \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d \log(n/(h+1)^d) + \gamma \cdot n/(h+1)^d \log \tilde{\lambda} + O(n/(h+1)^d)\right) \geq \\ &\geq \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d (\log n - d \log a) + \gamma \cdot n/(h+1)^d \log \lambda + O(n/(h+1)^d)\right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что  $n \log \tilde{\lambda} = n \log \lambda + O(n)$ . Также, используя то, что  $(h + 1)^d \cdot O(n/(h + 1)^d) = O(n)$ , получаем

$$\mathbb{P}\{K_a \geq n\} \geq \exp(-\lambda d a^d - \beta \cdot n(\log n - d \log a) + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)) = \\ \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot d n \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)).$$

□

**Следствие 2** (теорема 2). Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_1$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) d n \log a + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 10 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

**Следствие 3** (теорема 3). Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_2$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{2}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{2}{d-1}\right) d n \log a + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 9 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{2}{d-1}\right) n \log n + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

**Следствие 4.** Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_\infty$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) d n \log a + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 11 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

## 5.2 Верхние оценки

Следующая теорема верна для любой нормы.

**Теорема 7.** Пусть  $d \geq 1$ ,  $n \gg a^d \lambda$  и  $n \gg a^d$ . Предположим, что неравенство

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n \rightarrow \infty$$

верно для радиусов  $R_1$  с некоторым распределением и для радиусов  $\tilde{R}_1 = R_1 \cdot b$  одновременно для любых  $b \in (0, 1]$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Разобьем куб  $[0, a]^d$  на такие ячейки:

$$\prod_{m=1}^d \left[ \frac{k_m a}{[a]}, \frac{(k_m + 1)a}{[a]} \right],$$

где  $k_m \in \{0, 1, \dots, [a] - 1\}$ . Пусть это ячейки  $V_1, \dots, V_l$ , где  $l = [a]^d$ . Определим картинку, образованную ячейкой  $V_j$ , следующим образом:

$$S^j = \bigcup_{\substack{i \in \{1, \dots, N\}: \\ \xi_i \in V_j}} B(\xi_i, R_i).$$

Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке  $V_j$  следующую величину:

$$K^j = \min\{s \geq 1 \mid \exists i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, N\}: \xi_{i_t} \in V_j, \quad t = 1, \dots, s; \quad S^j = \bigcup_{t=1}^s B(\xi_{i_t}, R_{i_t}) \cap V_j\}.$$

Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \quad \forall s, \\ \sum n_s = n}} \bigcap_{s=1}^l \{K^s \geq n_s\}.$$

Заметим, что из события  $\{K_a \geq n\}$  следует событие  $E$ . Действительно, если  $K_a \geq n$ , то и  $\sum K^s \geq n$ . Тогда существует набор  $\{n_1, \dots, n_l\}$  с  $n_s \geq 0 \quad \forall s$  и  $\sum n_s = n$ , для которого выполнено  $K^s \geq n_s$  для всех  $s = 1, \dots, l$ . Это и есть событие  $E$ .

Вычислим вероятность события  $\{K^s \geq n_s\}$ . С точностью до гомотетии это то же самое, что  $\tilde{K}_1 \geq n_s$ , где  $\tilde{K}_1$  обозначает минимальное число видимых шаров в кубе  $[0, 1]^d$ , рассматриваемое раньше, но с интенсивностью пуассоновского поля  $\tilde{\lambda} = \lambda(a/[a])^d$  и радиусами  $\tilde{R}_1 = R_1([a]/a)$ .

Заметим также, что события  $\{K^s \geq n_s\}$  независимы для различных  $s$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[E] \leq \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^l \mathbb{P}[K^s \geq n_s] = \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^l \mathbb{P}[\tilde{K}_1 \geq n_s] \leq \\
&\leq \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^l \exp(-\beta \cdot n_s \log n_s + \gamma \cdot n_s \log \tilde{\lambda} + O(n_s)) = \\
&= \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^l n_s \log n_s + \gamma \cdot n \log \tilde{\lambda} + \sum_{s=1}^l O(n_s)\right).
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что минимум выражения  $\sum_{s=1}^l n_s \log n_s$  достигается на наборе  $\{n/l, \dots, n/l\}$ . Также заметим, что  $n \log \tilde{\lambda} = n \log \lambda + o(n)$  и  $\sum_{s=1}^l O(n_s) = O(n)$ . Получим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^l \frac{n}{l} \log \frac{n}{l} + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right) = \\
&= \sum_{\substack{\{n_1, \dots, n_l\}: \\ n_s \geq 0 \ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)).
\end{aligned}$$

Посчитаем количество способов разбиения числа  $n$  на  $[a]^d$  неотрицательных слагаемых:

$$\binom{n + [a]^d - 1}{[a]^d - 1} \leq \frac{(n + a^d)^{a^d}}{([a]^d - 1)!} = \exp\left(a^d + a^d \log\left(\frac{n}{a^d} + 1\right) - \frac{d}{2} \log a + o(n)\right) = \exp(o(n)).$$

Объединяя все полученные неравенства, получаем, что

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)).$$

□

**Следствие 5** (теорема 5). Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_1$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 19 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \leq \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое.  $\square$

**Следствие 6.** Пусть  $R_1 \equiv r > 0$  п.н., где шары берутся в  $\ell_2$ -норме,  $d \geq 2$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 21 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \leq \exp \left( - \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое.  $\square$

**Следствие 7.** Пусть распределение  $R_1$  таково, что  $\sup_{x>0} \mathbb{P}[R_1 \in [x, x+r]] \leq cr^\alpha$  для некоторых  $c > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  и всех  $r > 0$ . Предположим, что  $d \geq 1$ ,  $n \gg a^d$  и  $n \gg a^d \lambda$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp \left( - (1 + \alpha/d) n \log n + (1 + \alpha/d) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Написать доказательство!!! Для этого надо вытащить лямбду из предложения 18 из статьи.  $\square$

## 6 Вероятность больших уклонений в одномерном случае

Доказательства дальнейших оценок основаны на следующей лемме.

**Лемма 2** (см. [2], Lemma 23). Пусть

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^K [x_i - r_i, x_i + r_i] \cap [0, 1]$$

является неубывающим представлением одномерной картинки  $S_1$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^K \min\{r_i, 1\} \leq 2.$$



**Теорема 8.** Пусть  $d = 1$ . Предположим, что распределение  $R_1$  имеет плотность  $p(z) \approx z^{\alpha-1}$  для  $z \rightarrow 0$  и некоторого  $\alpha > 0$ . Пусть  $n \gg a, n \gg a\lambda$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp(-(1+\alpha)n \log n + (1+\alpha)dn \log a + n \log \lambda + O(n)), n, a \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Нижняя оценка доказана в теореме 4. Для получения верхней оценки зафиксируем большое число  $M > 0$  и разобьем число  $K_a$  на следующие слагаемые:

$$K_a = \#\{i: r_i > 2aM/n\} + \#\{i: r_i \leq 2aM/n\} = K_a^+ + K_a^-.$$

С помощью гомотетии переведем отрезок  $[0, a]$  в  $[0, 1]$ . Теперь радиусы шаров будут равны  $\tilde{r}_i = r_i/a$ , и будет выполнена лемма 2 для новой картинки. Так как количество шаров при гомотетии не изменилось, получим, что  $K_a^+ \leq n/M$  при  $n \geq 2M$ . Заметим, что  $K_a^+ \leq N^-$ , где  $N^-$  — количество шаров радиуса не больше  $2aM/n$  в первоначальном представлении картинки  $S_a$ . Случайная величина  $N^-$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\Lambda = a\lambda \int_0^{2aM/n} p(z) \leq ca\lambda(aM/n)^\alpha$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[K_a^- \geq n - n/M] \leq \mathbb{P}[N^- \geq (1 - 1/M)n] \sim \\ &\sim \frac{\Lambda^{(1-1/M)n}}{((1-1/M)n)!} e^{-\Lambda} \leq \frac{\Lambda^{(1-1/M)n}}{((1-1/M)n)!} \sim \\ &\sim \frac{\Lambda^{(1-1/M)n} e^{(1-1/M)n}}{\sqrt{2\pi(1-1/M)n} ((1-1/M)n)^{(1-1/M)n}} \leq \frac{(ca\lambda(aM/n)^\alpha)^{(1-1/M)n} e^{(1-1/M)n}}{((1-1/M)n)^{(1-1/M)n}} = \\ &= \exp((1-1/M)[-(1+\alpha)n \log n + (1+\alpha)n \log a + n \log \lambda + O(n)]). \end{aligned}$$

Так как  $M$  — произвольное положительное число, устремим  $M \rightarrow \infty$  и получим требуемое.  $\square$

**Теорема 9.** Пусть  $d = 1$ . Предположим, что  $R_1 \equiv r > 0$  п.н.,  $n \gg a$ . Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = 0$$

для достаточно больших  $n$  и  $a$ .

*Доказательство.* Применим гомотетию, переводящую  $[0, a]$  в  $[0, 1]$ . При этом радиусы уменьшаются в  $a$  раз. По лемме 2 получаем, что  $\mathbb{P}\left[K_a \leq \frac{2}{\min\{r/a, 1\}}\right] = 1$ . Следовательно, так как  $n \gg a$ , начиная с некоторого момента верно

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \mathbb{P}\left[K_a > \frac{2a}{r}\right] = 0.$$

$\square$

*Замечание.* Утверждение теоремы верно для любого распределения радиусов, отделенного от нуля. То есть если  $R_i \geq r$  п.н. для некоторого  $r > 0$ , то  $\mathbb{P}[K_a \geq n] = 0$ , начиная с некоторого момента.

## Список литературы

- [1] F. Aurzada, S. Dereich, M. Scheutzow, C. Vormoor, High resolution quantization and entropy coding of jump processes, *J. Complexity* 25 (2) (2009) 163–187.
- [2] F. Aurzada, M. Lifshits, How complex is a random picture? *Journal of Complexity* 53 (2019) 133–161.
- [3] S.N. Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications*, Wiley Series in Probability and Statistics, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2013, p. xxvi+544.
- [4] T.M. Cover, J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*, second ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006, p. xxiv+748.
- [5] S. Dereich, The coding complexity of diffusion processes under supremum norm distortion, *Stochastic Process. Appl.* 118 (6) (2008) 917–937.
- [6] S. Graf, H. Luschgy, *Foundations of Quantization for Probability Distributions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1730, Springer-Verlag, Berlin, 2000, p. x+230.
- [7] A.N. Kolmogorov, Three approaches to the quantitative definition of information, *Int. J. Comput. Math.* 2 (1968) 157–168.
- [8] R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, 2008, p. xii+693.