

# Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью

Давыденкова Мария Сергеевна

Научный руководитель: Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент: Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербургский государственный университет

18 июня 2020 г.

## Средняя ошибка дискретизации

Пусть  $S$  — случайный элемент некоторого метрического пространства  $(X, dist)$ .

### Определение

Средней ошибкой дискретизации  $S$  называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#C \leq e^r} \mathbb{E} \min_{A \in C} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Важной характеристикой распределения  $S$  является оценка скорости убывания этой величины при стремлении  $r$  к бесконечности.

## Булева модель

В данной задаче в качестве случайного элемента пространства компактов с метрикой Хаусдорфа выступает *Булева модель случайного множества*.

Рассмотрим куб  $[0, a]^d$  в  $\mathbb{R}^d$  и случайный набор шаров:

- ▶ центры шаров  $\xi_i \sim \mathcal{U}[0, a]^d$ ;
- ▶ радиусы  $R_i \geq 0$  одинаково распределены;
- ▶ количество шаров  $N \sim \mathcal{P}(a^d \lambda)$ , где  $\lambda = \lambda(a)$ .

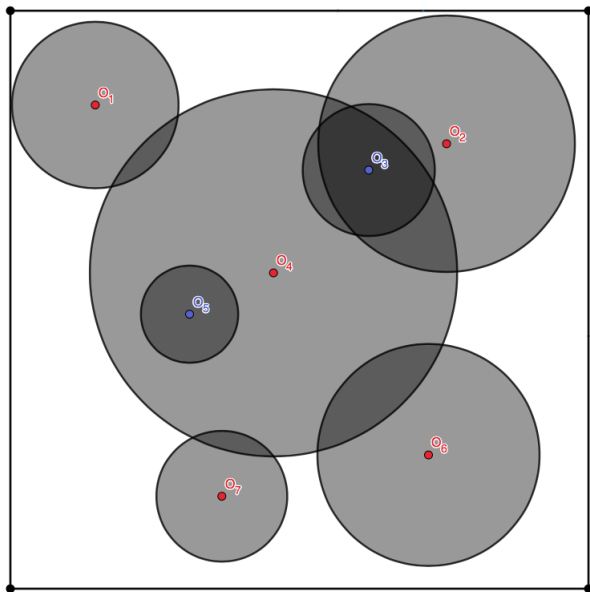
Все эти случайные величины независимы.

### Определение

Булева модель случайного множества:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^N B(\xi_i, R_i) \cap [0, a]^d.$$

Минимальное число видимых шаров  $K_a$



## Вероятности больших уклонений $K_a$

Будем предполагать, что  $n \gg a^d \lambda$ .

► Тривиальная оценка:

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-n \log n + dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

► Ф. Аурзада, М. Лифшиц (2019, *J. Complexity*) изучали случай  $a = 1$ ,  $\lambda = \text{const}$  и показали, что для некоторых распределений  $R_i$  выполнено

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] = \exp(-\beta \cdot n \log n \cdot (1 + o(1))), \quad n \rightarrow \infty.$$

Константа  $\beta > 1$  зависит от размерности  $d$ , нормы в  $\mathbb{R}^d$  и распределения радиусов.

## Полученные результаты: многомерный случай

Рассмотрим случай  $d \geq 2$ .

### Теорема

Пусть  $n \gg a^d \lambda$ ,  $n \gg a^d$ . Тогда

- ▶ если распределение  $R_1$  имеет плотность  $p(z) \approx z^{\alpha-1}$  для  $z \rightarrow 0$  и некоторого  $\alpha > 0$ :

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp(-(1+\alpha/d) \cdot n \log n + (1+\alpha/d) \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

- ▶ если  $R_1 \equiv r > 0$  п.н.:

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

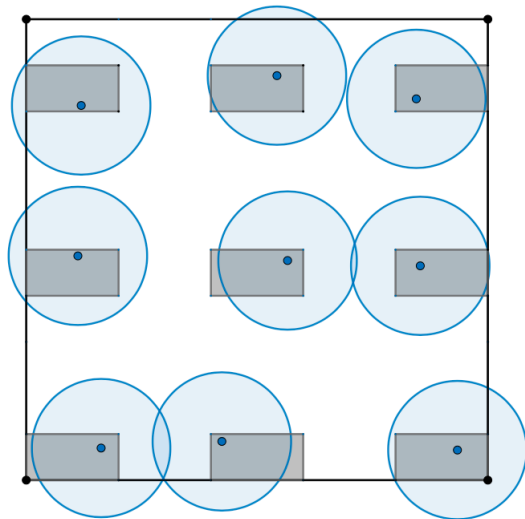
для достаточно больших  $n$  и  $a$ .

## Два подхода к решению задачи

Первый подход: для некоторых распределений были найдены события  $E_1$  и  $E_2$ :

$$\mathbb{P}[E_1] \leq \mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \mathbb{P}[E_2].$$

Пример:



## Два подхода к решению задачи

*Второй подход:* сведение к задаче для куба постоянного размера. Были доказаны теоремы, позволяющие получить из оценок для случая  $a = 1$  оценки для параметра  $a$ , стремящегося к бесконечности.



## Сведение к задаче для куба постоянного размера

### Теорема (Нижняя оценка)

Пусть  $R_1 \leq r$  п.н. для некоторого  $r > 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $n \gg a^d \lambda$ , и  $n \gg a^d$ . Предположим, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \geq \exp(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)),$$

$$n, a \rightarrow \infty.$$

## Сведение к задаче для куба постоянного размера

### Теорема

Пусть  $d \geq 1$ ,  $n \gg a^d \lambda$  и  $n \gg a^d$ . Обозначим через  $K_a^{(b)}$  минимальное число видимых шаров в картинке с радиусами, увеличенными в  $b$  раз. Предположим, что для любого числа  $b \in (0, 1)$  верно следующее:

$$\mathbb{P}[K_1^{(b)} \geq n] = \mathbb{P}[K_1 \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)),$$

$$n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)),$$

$$n, a \rightarrow \infty.$$

## Поведение $K_a$ при малых $\lambda$

Отдельно изучался случай, когда  $n \gg a^d \lambda$ , но неверно, что  $n \gg a^d$ . Было доказано следующее утверждение.

### Теорема

*Пусть  $\lambda = \lambda(a)$  таково, что  $a^d \lambda^2 \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$ , и случайная величина  $R_1$  имеет  $d$ -й момент,  $d \geq 1$ . Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a < N] \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty.$$

То есть для достаточно быстро убывающих  $\lambda$  выполнено  $K_a \sim N$  при  $a \rightarrow \infty$ .

Спасибо за внимание.