

Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью

Давыденкова Мария Сергеевна

Научный руководитель: Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент: Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербургский государственный университет

18 июня 2020 г.

Средняя ошибка дискретизации

Пусть S — случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$.

Определение

Средней ошибкой дискретизации S называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#C \leq e^r} \mathbb{E} \min_{A \in C} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Важной характеристикой распределения S является оценка скорости убывания этой величины при стремлении r к бесконечности.

Булева модель

В данной задаче в качестве случайного элемента пространства компактов с метрикой Хаусдорфа выступает *Булева модель случайного множества*.

Рассмотрим куб $[0, a]^d$ в \mathbb{R}^d и случайный набор шаров:

- ▶ центры шаров $\xi_i \sim \mathcal{U}[0, a]^d$;
- ▶ радиусы $R_i \geq 0$ одинаково распределены;
- ▶ количество шаров $N \sim \mathcal{P}(a^d \lambda)$, где $\lambda = \lambda(a)$.

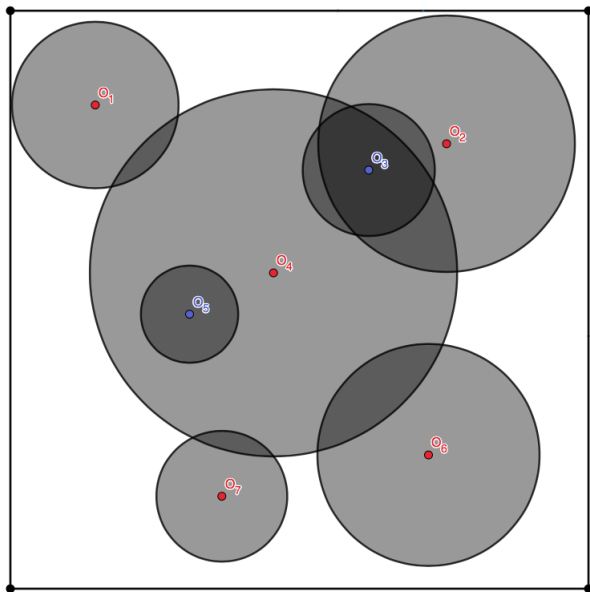
Все эти случайные величины независимы.

Определение

Булева модель случайного множества:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^N B(\xi_i, R_i) \cap [0, a]^d.$$

Минимальное число видимых шаров K_a



Вероятности больших уклонений K_a

Будем предполагать, что $n \gg a^d \lambda$.

► Тривиальная оценка:

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-n \log n + dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

► Ф. Аурзада, М. Лифшиц (2019, *J. Complexity*) изучали случай $a = 1$, $\lambda = \text{const}$ и показали, что для некоторых распределений R_i выполнено

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] = \exp(-\beta \cdot n \log n \cdot (1 + o(1))), \quad n \rightarrow \infty.$$

Константа $\beta > 1$ зависит от размерности d , нормы в \mathbb{R}^d и распределения радиусов.

Полученные результаты

Рассмотрим случай $d \geq 2$.

Теорема

Пусть $n \gg a^d \lambda$, $n \gg a^d$. Тогда

- ▶ если распределение R_1 имеет плотность $p(z) \approx z^{\alpha-1}$ для $z \rightarrow 0$ и некоторого $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp(-(1 + \alpha/d) \cdot n \log n + (1 + \alpha/d) \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

- ▶ если $R_1 \equiv r > 0$ п.н.:

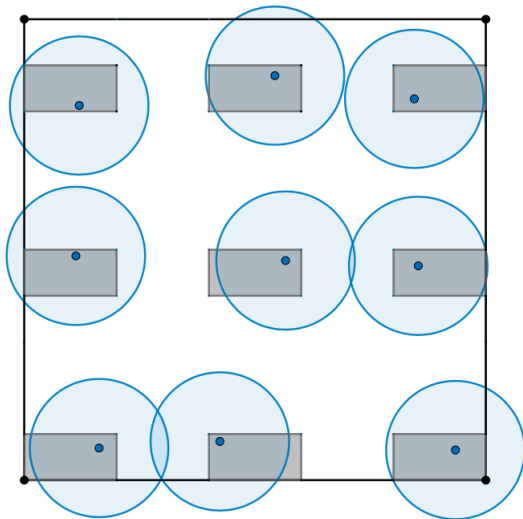
$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Два подхода к решению задачи

Первый подход: для некоторых распределений были найдены события E_1 и E_2 :

$$\mathbb{P}[E_1] \leq \mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \mathbb{P}[E_2].$$

Пример:



Два подхода к решению задачи

Второй подход: сведение к задаче для куба постоянного размера. Были доказаны теоремы, позволяющие получить из оценок для случая $a = 1$ оценки для параметра a , стремящегося к бесконечности.

Сведение к задаче для куба постоянного размера

Теорема (Нижняя оценка)

Пусть $R_1 \leq r$ п.н. для некоторого $r > 0$, $d \geq 1$, $n \gg a^d \lambda$, и $n \gg a^d$. Предположим, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geq n] \geq \exp(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Сведение к задаче для куба постоянного размера

Теорема (Верхняя оценка)

Пусть $d \geq 1$, $n \gg a^d \lambda$ и $n \gg a^d$. Обозначим через $K_a^{(b)}$ минимальное число видимых шаров в картинке с радиусами, увеличенными в b раз. Предположим, что для любого числа $b \in (0, 1)$ верно следующее:

$$\mathbb{P}[K_1^{(b)} \geq n] = \mathbb{P}[K_1 \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Поведение K_a при малых λ

Отдельно изучался случай, когда $n \gg a^d \lambda$, но неверно, что $n \gg a^d$. Было доказано следующее утверждение.

Теорема

Пусть $\lambda = \lambda(a)$ таково, что $a^d \lambda^2 \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, и случайная величина R_1 имеет d -й момент, $d \geq 1$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a < N] \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \infty.$$

То есть для достаточно быстро убывающих λ выполнено $K_a \sim N$ при $a \rightarrow \infty$.

Спасибо за внимание.