Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью

Давыденкова Мария Сергеевна

Научный руководитель: Лифшиц Михаил Анатольевич
Рецензент: Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербургский государственный университет

18 июня 2020 г.

Средняя ошибка дискретизации

Пусть S — случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$.

Определение

Средней ошибкой дискретизации S называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#\mathcal{C} \leqslant e^r} \mathbb{E} \min_{A \in \mathcal{C}} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Важной характеристикой распределения S является оценка скорости убывания этой величины при стремлении r к бесконечности.

Булева модель

Рассмотрим куб $[0, a]^d$ в $\mathbb{R}^d$ и случайный набор шаров:

- центры шаров $\xi_i \sim \mathcal{U}[0, a]^d$;
- радиусы $R_i \geqslant 0$ одинаково распределены;
- количество шаров $N \sim \mathcal{P}(a^d \lambda)$, где $\lambda = \lambda(a)$.

Все эти случайные величины независимы.

Определение

Булева модель случайного множества:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, R_i) \cap [0, a]^d.$$

Минимальное число видимых шаров

Определение

Минимальным числом видимых шаров называется следующая величина:

$$K_a = \min\{r \geqslant 1 | \exists i_1, \ldots, i_r \subset \{1, \ldots, N\} : \\ S_a = \bigcup_{l=1}^{r} B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0, a]^d\}.$$

Вероятности больших уклонений этой величины играют важную роль в оценке скорости убывания средней ошибки дискретизации.

Вероятности больших уклонений K_a

Будем предполагать, что $n \gg a^d \lambda$.

- Тривиальная оценка:

  $$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp(-n \log n + dn \log a + n \log \lambda + O(n)), \; n, a \to \infty.$$

- *Ф. Аурзада, М. Лифшиц (2019, J. Complexity)* изучали случай $a = 1, \; \lambda = const$ и показали, что для некоторых распределений R_i выполнено

  $$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] = \exp(-\beta \cdot n \log n \cdot (1 + o(1))), \quad n \to \infty.$$

  Константа $\beta > 1$ зависит от размерности d, нормы в $\mathbb{R}^d$ и распределения радиусов.

Полученные результаты: одномерный случай

Отдельно рассматривается случай $d = 1$.

Теорема

Пусть $n \gg a\lambda, n \gg a$. Тогда

- *если распределение R_1 имеет плотность $p(z) \approx z^{\alpha-1}$ для $z \to 0$ и некоторого $\alpha > 0$:*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp(-(1+\alpha)n \log n + (1+\alpha)n \log a + n \log \lambda + O(n)),$$
$$n, a \to \infty.$$

- *если $R_1 \equiv r > 0$ п.н.:*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = 0$$

для достаточно больших n и a.

Полученные результаты: многомерный случай

Рассмотрим случай $d \geqslant 2$.

Теорема

Пусть $n \gg a^d \lambda, n \gg a^d$. *Тогда*

- *если распределение* R_1 *имеет плотность* $p(z) \approx z^{\alpha-1}$ *для* $z \to 0$ *и некоторого* $\alpha > 0$*:*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp(-\beta n \log n + \beta n \log a + n \log \lambda + O(n)), \quad n, a \to \infty.$$

- *если* $R_1 \equiv r > 0$ *п.н.:*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = 0$$

для достаточно больших n *и* a.

Два подхода к решению задачи

Первый подход: для некоторых распределений были найдены события E_1 и E_2:

$$\mathbb{P}[E_1] \leqslant \mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[E_2].$$

Второй подход: сведение к задаче для куба постоянного размера. Были доказаны теоремы, позволяющие получить из оценок для случая $a = 1$ оценки для параметра a, стремящегося к бесконечности.

Сведение к задаче для куба постоянного размера

Теорема (Нижняя оценка)

Пусть $R_1 \leqslant r$ п.н. для некоторого $r > 0$, $d \geqslant 1$, $n \gg a^d \lambda$, и $n \gg a^d$. Предположим, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right), \;\; n \to \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \to \infty.$$

Сведение к задаче для куба постоянного размера

Теорема

Пусть $d \geqslant 1$, $n \gg a^d \lambda$ *и* $n \gg a^d$. *Обозначим через* $K_a^{(b)}$ *минимальное число видимых шаров в картинке с радиусами, увеличенными в* b *раз. Предположим, что для любого числа* $b \in (0, 1)$ *верно следующее:*

$$\mathbb{P}[K_1^{(b)} \geqslant n] = \mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right), \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right), \quad n, a \to \infty.$$

Поведение K_a при малых λ

Отдельно изучался случай, когда $n \gg a^d \lambda$, но неверно, что $n \gg a^d$. Было доказано следующее утверждение.

Теорема

Пусть $\lambda = \lambda(a)$ таково, что $a^d \lambda^2 \to 0$ при $a \to \infty$, и случайная величина R_1 имеет d-й момент, $d \geqslant 1$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a < N] \to 0, \ a \to \infty.$$

То есть для достаточно быстро убывающих λ выполнено $K_a \sim N$ при $a \to \infty$.

Спасибо за внимание.