Теорема 1. *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1-норме, $d \geqslant 2$ и $n \gg a^d\lambda$. Предположим, что*

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n\log n + n\log\lambda + O(n)\right), \ n \to \infty.$$

Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), \ n, a \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $h = h(a,r) = \left\lfloor \dfrac{a-1}{2r+1} \right\rfloor$. Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{ \prod_{m=1}^{d} \left[k_m \left(\frac{a-2rh}{h+1} + 2r \right), k_m \left(\frac{a-2rh}{h+1} + 2r \right) + \frac{a-2rh}{h+1} \right] \right\},$$

где $k_m \in \{0, 1, \ldots, h\}$.

Заметим, что для точек x и y, лежащих в разных ячейках, $\min_{1\leqslant m\leqslant d} |x^{(m)} - y^{(m)}| \geqslant 2r$, поэтому шары с центрами в разных ячейках не пересекаются.

Также заметим, что длина стороны ячейки удовлетворяет следующей оценке:

$$\frac{a-2rh}{h+1} \geqslant \frac{a - 2r \cdot \frac{a-1}{2r+1}}{\frac{a-1}{2r+1} + 1} = 1.$$

Мы построили ячейки $V_1, \ldots, V_l$, где $l = (h+1)^d$. Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке V_j следующую величину:

$$K^j = \min\{s \mid \exists i_1, \ldots i_s \in \{1, \ldots n\} \colon S \cap V_j = \bigcup_{t=1}^{s} B(\xi_{i_t}, R_1)\}.$$

Введем еще одно обозначение: $U = [0,a]^d \setminus (\bigcup_{j=1}^{l} V_j)$.

Определим следующее событие:

$$E = \{\xi_i \notin U \text{ для } i = 1, \ldots, N\} \cap \bigcup_{j=1}^{l} \{K^j \geqslant n/(h+1)^d\}.$$

Заметим, что для различных j события $\{K^j \geqslant n/(h+1)^d\}$ независимы.

Докажем, что событие E влечет событие $\{K_a \geqslant n\}$. Действительно, если все центры лежат в наших ячейках, то шары с центрами в разных ячейках не пересекаются. Тогда если в каждой ячейке минимальное число видимых шаров хотя бы $n/(h+1)^d$, то минимальное число видимых шаров во всей картинке удовлетворяет неравенству:

$$K_a \geqslant l \cdot n/(h+1)^d = (h+1)^d \cdot n/(h+1)^d = n.$$

Вычислим вероятности искомых событий:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \notin U \text{ для } i = 1, \ldots, N\} = \exp(-\lambda \cdot \mathrm{vol}_d(U)) \geqslant \exp(-\lambda \cdot (2ra^{d-1}) \cdot dh) \geqslant \exp(-\lambda \cdot da^d).$$

Заметим, что так как сторона ячеек хотя бы 1, то выполнено неравенство:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{K^j \geqslant n/(h+1)^d\} \geqslant \mathbb{P}\{K_1 \geqslant n/(h+1)^d\} \geqslant \\
&\quad \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d \log(n/(h+1)^d) + n/(h+1)^d \log\lambda + O(n/(h+1)^d)\right) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d (\log n - d\log a) + n/(h+1)^d \log\lambda + O(n/(h+1)^d)\right).
\end{aligned}$$

Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{K_a \geqslant n\} \geqslant \exp\left(-d\lambda a^d - \beta \cdot n(\log n - d\log a) + n\log\lambda + O(n)\right) = \\
\exp\left(-\beta \cdot n\log n - \beta \cdot dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right).
\end{aligned}$$

$\square$