Санкт-Петербургский государственный университет

*ДАВЫДЕНКОВА Мария Сергеевна*

**Выпускная квалификационная работа**

# *Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью*

Уровень образования:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программаШифр «Нагшенование»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:
пипваап
впровро

Санкт-Петербург
2020 год

# Содержание


**1 Введение** **2**

1.1 Постановка задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.2 Полученные результаты . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

**2 Поведение $K_a$ при малых $\lambda$** **4**

**3 Нижние оценки для вероятности больших уклонений** **5**

3.1 Постоянный радиус . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

3.2 Радиус с плотностью . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**4 Верхние оценки для вероятности больших уклонений** **9**

**5 Связь с задачей постоянного размера куба** **12**

5.1 Нижние оценки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

5.2 Верхние оценки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

**6 Вероятность больших уклонений в одномерном случае** **18**


# 1 Введение

## 1.1 Постановка задачи

Пусть $S$ — случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$. Средней ошибкой дискретизации $S$ называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#\mathcal{C}\leqslant e^r} \mathbb{E} \min_{A\in\mathcal{C}} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Скорость ее убывания при стремлении $r$ к бесконечности характеризует сложность распределения $S$. Общие свойства величины $D^{(q)}(r)$ изучены в [6, 4, 7]. В последние два десятилетия ошибки дискретизации исследовались, в основном, для траекторий случайных процессов, рассматриваемых как случайный элемент функционального пространства, см., например, [1, 5].

В работе [2] изучалась ошибка дискретизации для случайного множества, рассматриваемого как случайный элемент пространства компактов, снабжённого метрикой Хаусдорфа $d_H(A, B) := \max(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|)$. В качестве случайного множества была взята стандартная Булева модель (Boolean model, см. [3, 8]), которая устроена следующим образом.

Рассмотрим куб $[0, a]^d$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, и случайный набор шаров с центрами в этом кубе, определенный следующим образом: пусть центры шаров $\xi_i$ — случайные величины, распределенные равномерно в $[0, a]^d$, радиусы $R_i$ — некоторые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, а количество шаров $N$ — пуассоновская случайная величина с параметром $a^d\lambda$, где $\lambda = \lambda(a)$ — положительный параметр, зависящий от $a$. Все эти случайные величины независимы. Отметим, что при таком построении множество $(\xi_i)_{i\leqslant N}$ — это пуассоновский точечный процесс с интенсивностью $\lambda$.

Обозначим через $B(\xi_i, R_i)$ шар с центром в $\xi_i$ радиуса $R_i$ (пока что мы не фиксируем норму в $\mathbb{R}^d$). Мы будем рассматривать "картинку", образованную этим наборов шаров:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, R_i) \cap [0,a]^d.$$

Определенная таким образом картинка называется *Булевой моделью случайного множества*. Заметим, что свойства $S_a$ будут зависеть от рассматриваемой нормы.

В работе [2] исследовался случай $a = 1$ с постоянной интенсивностью $\lambda$. Результаты основаны на изучении вероятностей больших уклонений величины

$$K_1 = \min\{r \geqslant 1 | \exists i_1, \ldots, i_r \subset \{1, \ldots, N\} : S_1 = \bigcup_{l=1}^{r} B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0,a]^d\},$$

называемой *минимальным числом видимых шаров*, то есть на нахождении асимптотики $\mathbb{P}[K_1 \geqslant n]$ при $n$, стремящемся к бесконечности.

В настоящей работе некоторые из этих оценок распространяются на случай, когда параметр $a$ стремится к бесконечности, причем $n \gg a^d\lambda$.

Заметим, что тривиальная оценка, вытекающая из свойств пуассоновского распределения, такова:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[N \geqslant n] \sim \mathbb{P}[N = n] = \\
&\quad = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \sim \left(\frac{ea^d\lambda}{n}\right)^n e^{-a^d\lambda}\sqrt{2\pi n} = \exp(-n\log n + n\log(a^d\lambda) + O(n)) = \\
&\qquad = \exp((-n\log n + dn\log a + n\log\lambda + O(n))), \ n \to \infty, a \to \infty.
\end{aligned}$$

Условие $n \gg a^d\lambda$ гарантирует, что вероятность больших уклонений стремится к нулю, так как $-n\log(n/a^d\lambda)$ стремится к минус бесконечности с ростом $n$ и $a$.

## 1.2 Полученные результаты

В данной работе получены более точные оценки вероятности больших уклонений для некоторых распределений $R_1$:

- Для $R_1 \equiv const$ п.н. получена оценка

  $$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp((-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a + n\log\lambda + O(n))), \ n \to \infty, a \to \infty,$$

  если $n \gg a^d\lambda$ и $n \gg a^d$. Число $\beta > 1$ зависит от размерности и нормы, в которой рассматриваются шары.

- Для радиусов с плотностью $p(z) \approx z^{\alpha-1}$ для $z \to 0$ получена оценка

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp((-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + n \log \lambda + O(n))), \; n \to \infty, a \to \infty,$$

если $n \gg a^d\lambda$ и $n \gg a^d$. Запись $p(z) \approx q(z), z \to 0$ обозначает, что $p(z)/q(z)$ ограничено вне любой окрестности нуля и бесконечно для достаточно малых $z$. Как и в предыдущем случае, $\beta > 1$ зависит от размерности и нормы, в которой рассматриваются шары.

Во второй главе изучены вероятности больших уклонений $K_a$ в том особом случае, когда $n \gg a^d\lambda$, но неверно, что $n \gg a^d$. А именно, показано, что если $a^d\lambda^2 \to 0$ при $a \to \infty$, то $K_a \sim N$ при $a \to \infty$. В третьей и далее главах предполагается, что $n \gg a^d\lambda$ и $n \gg a^d$.

В главах 3 и 4 приведены оценки вероятностей больших уклонений $K_a$ для некоторых распределений радиусов.

В пятой главе приведены результаты, позволяющие получить оценки вероятности больших уклонений при $a \to \infty$, если известны аналогичные оценки для случая $a = 1$. Также приведены оценки, получающиеся из этих теорем для известных асимптотик в задаче с постоянным размером куба (см. [2]). Однако, по сравнению с результатами третьей и четвертой главы, результаты не дают понимания, как устроена структура получаемых оценок.

В последней, шестой, главе отдельно рассмотрены вероятности больших уклонений в одномерном случае.

# 2 Поведение $K_a$ при малых $\lambda$

В этом разделе речь пойдет о случае, когда $a^d\lambda \to 0$ при $a \to \infty$.

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda = \lambda(a)$ таково, что $a^d\lambda^2 \to 0$ при $a \to \infty$, и случайная величина $R_1$ имеет $d$-й момент, $d \geqslant 1$. Тогда $\mathbb{P}[K_a < N] \to 0$ при $a \to \infty$.*

*Доказательство.* Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{i \in \{1,\dots N\}} \bigcup_{\substack{j \in \{1,\dots,N\}: \\ j \neq i}} \{\xi_i \in B(\xi_j, R_j)\}.$$

Так как центры шаров распределены равномерно в $[0,a]^d$ и величины $R_i$ независимы и одинаково распределены, выполнено равенство:

$$\mathbb{P}[\xi_i \in B(\xi_j, R_j)] = \frac{1}{a^d}\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_d\, B(\xi_j, R_j) = \frac{1}{a^d}\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_d\, B(0, R_1) = \frac{c}{a^d}$$

в силу того, что у $R_1$ существует $d$-й момент.

Заметим, что если $K_a < N$, то событие $E$ выполняется, так как есть шар, лежащий в объединении других шаров. Поэтому

$$\mathbb{P}[K_a < N] \leqslant \mathbb{P}[E] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[E|N=k]\mathbb{P}[N=k] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{1 \leqslant k} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k: \\ j \neq i}} \mathbb{P}[\xi_i \in B(\xi_j, R_j)] \right) \mathbb{P}[N=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{c}{a^d} \cdot \frac{(a^d\lambda)^k}{k!} e^{-a^d\lambda} =$$

$$= \frac{c}{a^d}(a^d\lambda)^2 = ca^d\lambda^2 \to 0,\ a \to \infty.$$

□

**Следствие 1.** Если последовательность $a^d\lambda$ ограничена и случайная величина $R_1$ имеет $d$-й момент, то $\mathbb{P}[K_a < N] \to 0,\ a \to \infty$.

Так как в данном случае величина $K_a$ асимптотически ведет себя как $N$, при оценке вероятности больших уклонений мы не будем рассматривать случай $\lambda \to 0$ при $a \to \infty$.

# 3 Нижние оценки для вероятности больших уклонений

## 3.1 Постоянный радиус

Рассмотрим случай, когда радиусы — это константа $r > 0$ п.н.

**Теорема 2.** *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_1$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{a^{d/(d-1)}(k_m+1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m+3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right] \times$$

$$\times \left[l\left(\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right), l\left(\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}\right],$$

где $k_m \in \{0, \ldots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$, $l \in \{0, \ldots, \lfloor a/4r \rfloor\}$, $c_1 = 2^{-(2+3/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0,a]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r}\cdot\left(\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}=\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{r(rn)^{1/(d-1)}}\cdot\left(\frac{a}{4}+r\right)+\frac{a}{2}<a$$

при достаточно больших $a$ и $n$ в силу того, что $n\gg a^d$.

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i,r)$, $B(\xi_j,r)$ лежат в разных "рядах", то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между "рядами" хотя бы $2r$. Если же центры лежат в одном "ряду", то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i=\xi_i+(0,\ldots,0,r)$. Заметим, что для достаточно больших $n$ и $a$ эта точка действительно лежит в кубе $[0,a]^d$. Итак, при $j\neq i$

$$\begin{aligned}\|x_i-\xi_j\|_1&=|\xi_i^{(d)}+r-\xi_j^{(d)}|+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|\geqslant\\&\geqslant r-|\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)}|+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|\geqslant r-\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+\frac{1/2\cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}>r.\end{aligned}$$

Мы построили порядка $8rn/a\cdot a/4r=2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать $n$ из них. Назовем их $V_1,\ldots,V_n$ и рассмотрим событие

$$E=\{N=n\}\cap\bigcap_{\pi\text{ — перестановка }\{1,\ldots,n\}}\{\xi_i\in V_{\pi(i)},i=1,\ldots,n\}.$$

Заметим, что событие $E$ влечет событие $\{K\geqslant n\}$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[K_a\geqslant n]\geqslant\mathbb{P}[E]&=\frac{(a^d\lambda)^n}{n!}e^{-a^d\lambda}\cdot n!\cdot\left(\frac{1}{a^d}\cdot\left(\frac{1/2\cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1}\cdot\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}\right)^n=\\&=\exp\left(dn\log a+n\log\lambda-a^d\lambda-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n+\frac{d}{d-1}n\log a+O(n)\right)=\\&=\exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n+\left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a+n\log\lambda+O(n)\right).\end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** *Пусть $R_1\equiv r>0$ п.н., где шары берутся в $\ell_2$-норме, $d\geqslant 2$, $n\gg a^d\lambda$, и $n\gg a^d$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a\geqslant n]\geqslant\exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n+\left(1+\frac{2}{d-1}\right)dn\log a+n\log\lambda+O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

Доказательство теоремы аналогично случаю $\ell_1$-нормы, и отличается только размером ячеек.

*Доказательство.* Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{a^{d/(d-1)}(k_m+1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}},\frac{a^{d/(d-1)}(k_m+3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right]\times$$
$$\times\left[l\left(\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}+2r\right),l\left(\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}\right],$$

где $k_m\in\{0,\ldots,\lfloor(8rn/a)^{1/(d-1)}\rfloor-1\}$, $l\in\{0,\ldots,\lfloor a/4r\rfloor\}$, $c_2=2^{-(4+6/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0,a]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r}\left(\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}=\frac{c_2a^{2+2/(d-1)}}{r^2(rn)^{2/(d-1)}}\cdot\left(\frac{a}{4}+r\right)+\frac{a}{2}<a$$

при достаточно больших $a$ и $n$ в силу того, что $n\gg a^d$.

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i,r)$, $B(\xi_j,r)$ лежат в разных “рядах”, то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы $2r$. Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i=\xi_i+(0,\ldots,0,r)$. Заметим, что для достаточно больших $n$ и $a$ эта точка действительно лежит в кубе $[0,a]^d$. Итак, при $j\neq i$

$$\|x_i-\xi_j\|_2^2=|\xi_i^{(d)}+r-\xi_j^{(d)}|^2+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|^2\geqslant$$
$$\geqslant r^2-2r|\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)}|+(\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)})^2+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|^2\geqslant$$
$$\geqslant r^2-\frac{2c_2a^{2+2/(d-1)}}{(rn)^{2/(d-1)}}+\left(\frac{1/2a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right)^2\geqslant r^2.$$

Мы построили порядка $8rn/a\cdot a/4r=2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать $n$ из них. Назовем их $V_1,\ldots,V_n$ и рассмотрим событие

$$E=\{N=n\}\cap\bigcap_{\pi\text{ — перестановка }\{1,\ldots,n\}}\{\xi_i\in V_{\pi(i)},i=1,\ldots,n\}.$$

Заметим, что событие $E$ влечет событие $\{K\geqslant n\}$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left( \frac{1}{a^d} \cdot \left( \frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right)^n =$$

$$= \exp\left( dn\log a + n\log\lambda - a^d\lambda - \left(2 + \frac{2}{d-1}\right) n\log n + \left(2 + \frac{2}{d-1}\right) n\log a + O(n) \right) =$$

$$= \exp\left( -\left(1 + \frac{2}{d-1}\right) n\log n + \left(1 + \frac{2}{d-1}\right) dn\log a + n\log\lambda + O(n) \right).$$

□

## 3.2 Радиус с плотностью

Утверждение следующей теоремы верно для произвольной нормы в $\mathbb{R}^d$.

**Теорема 4.** *Пусть распределение $R_1$ имеет плотность $p$ относительно меры Лебега, причем $p(z) \geqslant cz^{\alpha-1}$ для малых $z$ и некоторых $c, \alpha > 0$. Предположим, что $d \geqslant 1$ и $n \gg a^d\lambda$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1 + \alpha/d\right) n\log n + (1+\alpha/d) dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), \ n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d} \left[ \frac{a(k_m + 1/4)}{(2n)^{1/d}}, \ \frac{a(k_m + 3/4)}{(2n)^{1/d}} \right],$$

где $k_m \in \{0, \dots \lfloor (2n)^{1/d} \rfloor - 1\}$.

Мы построили порядка $2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать $n$ из них. Назовем их $V_1, \dots, V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi \text{ — перестановка } \{1,\dots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, R_i \in [c_1 a n^{-1/d}, c_2 a n^{-1/d}], i = 1, \dots, n\},$$

где $c_2 > c_1 > 0$ — некоторые константы, которые могут зависеть от нормы и размерности, причем $c_2$ выбирается так, чтобы для $i \neq j$ шары $B(\xi_i, R_i)$ и $B(\xi_j, R_j)$ не пересекались. В этом случае событие $E$ влечет $\{K_a \geqslant n\}$. Следовательно,

$$\mathbb{P}[K \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left( \frac{1}{a^d} \left( \frac{1/2 \cdot a}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} p(z)dz \right)^n \geqslant$$

$$\geqslant (a^d\lambda)^n e^{-a^d\lambda} \cdot \left( \left( \frac{1/2}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} z^{\alpha-1} dz \right)^n =$$

$$= (a^d\lambda)^n e^{-a^d\lambda} \cdot \left( \left( \frac{1/2}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c(c_2^\alpha - c_1^\alpha)/\alpha \cdot a^\alpha n^{-\alpha/d} \right)^n =$$

$$= \exp\left(-(1+\alpha/d) n\log n + (1+\alpha/d) dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right).$$

□

# 4 Верхние оценки для вероятности больших уклонений

**Теорема 5.** *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_1$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), n, a \to \infty.$$

*Доказательство. Шаг 1. Объединение шаров в группы.* Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{K_a} B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$$

обозначает неуменьшаемое представление картинки $S$. Тогда для каждого числа $i \leqslant K_a$ существует точка $\nu_i \in B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$, которая не лежит ни в каком другом шаре $B(\xi_j, r), j \neq i$. Зафиксируем такие $\nu_i, i = 1, 2, \dots K_a$. Обозначим $\Delta_i := \nu_i - \xi_i$.

Объединим шары в группы $J_0, J_1^+, J_1^-, \dots J_d^+, J_d^-$ следующим образом. Определим $J_0 := \{i\colon \|\Delta_i\|_1 \leqslant r/2\}$. Оценим мощность этого множества. Для любых $i, j \in J_0$ выполнено:

$$r < \|\nu_j - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\nu_i - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\Delta_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + r/2.$$

То есть $\|\nu_j - \nu_i\| > r/2$, а значит, $\#J_0 \leqslant c_1 r^{-d} a^d$, где константа $c_1 = 2^d/\operatorname{vol}_d B(0, 1)$.

Теперь пусть $i \notin J_0$. Значит,

$$\|\Delta_i\|_\infty \geqslant c_2 \|\Delta_i\|_1 > c_2 r/2.$$

Поэтому $i$ принадлежит одному из $2d$ множеств вида:

$$J_m^+ := \{i\colon \Delta_i^{(m)} > c_2 r/2\}, \quad J_m^- := \{i\colon \Delta_i^{(m)} < -c_2 r/2\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant d.$$

*Шаг 2. Оценка расстояний между центрами.* Пусть $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — проекция, определенная таким образом:

$$\sigma x := (x^{(1)}, \dots x^{(d-1)}, 0).$$

**Лемма 1** (см. [2], Lemma 20)**.** *Пусть $i, j \in J_d^+$, $i \neq j$, и пусть $c_3 := c_2 r/2$. Тогда*

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1, c_3].$$

*Шаг 3. Подсчет ячеек, содержащих центры шаров.* Зафиксируем большое число $A > 0$ и покроем куб $[0, a]^d$ следующим набором ячеек:

$$V_{\bar{k}, k_d} := \prod_{m=1}^{d} \left[\frac{Ak_m}{(na^{-d})^{1/(d-1)}}, \frac{A(k_m+1)}{(na^{-d})^{1/(d-1)}}\right],$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor A^{-1}(na^{-1})^{1/(d-1)} \rfloor\}$ для $1 \leqslant m \leqslant d$ и мульти-индекса $\bar{k} := (k_1, \dots, k_{d-1})$.

Зафиксируем некоторый индекс $\bar{k}$ и оценим количество ячеек, содержащих центры шаров:

$$N(\bar{k}, d, +) := \#\{k \colon \xi_i \in V_{\bar{k},k} \text{ для некоторого } i \in J_d^+\}.$$

Заметим, что если $\xi_i \in V_{\bar{k},\kappa_i}$ и $\xi_j \in V_{\bar{k},\kappa_j}$ для некоторых $i, j \in J_d^+$, то

$$\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1 \ \leqslant \ (d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}.$$

Поэтому по лемме

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [(d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}, c_3].$$

**Замечание.** *При достаточно больших $a, n$ этот интервал корректно определен.*

Исходя из этого, разобъем $[0, a]$ на $a\lceil c_3^{-1} \rceil$ частей длины не более $c_3$, и заметим, что если $\xi_i^{(d)}, \xi_j^{(d)}$ лежат в одной части, то $|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \leqslant (d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}$. Поэтому тогда $|\kappa_i - \kappa_j| \leqslant d$. Отсюда получаем искомую оценку:

$$N(\bar{k}, d, +) \leqslant ad\lceil c_3^{-1} \rceil =: ac_4.$$

Теперь мы можем получить общее число ячеек, содержащих центры:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{m=1}^{d} (N(\bar{k}, m, +) + N(\bar{k}, m, -)) \leqslant (2d) \cdot (ac_4) \cdot (na^{-1}A^{-(d-1)}) =: \frac{c_5 n}{A^{d-1}}.$$

Пусть $\mathcal{U}$ — семейство всех возможных объединений из $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек. Их количество — число способов выбрать $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек из $\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)}A^d} \right\rceil$. Поэтому можно выписать следующую простую оценку:

$$\begin{aligned}\#\mathcal{U} \leqslant \exp\left(\frac{c_5 n}{A^{d-1}} \log\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rceil\right) = \\ = \exp\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n)\right).\end{aligned}$$

Для каждого $U \in \mathcal{U}$ объем можно оценить так:

$$\mathrm{vol}_d(U) \leqslant \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \left(\frac{Aa^{d/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}\right)^d = \frac{Ac_5 a^{d^2/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}.$$

*Шаг 4. Оценка вероятности.* Напомним, что

$$K_a = \#J_0 + \#\left(\bigcup_{m=1}^{d} (J_m^+ \cup J_m^-)\right) =: K^{(0)} + K^{(\pm)}.$$

Заметим, что для некоторого случайного множества $U \in \mathcal{U}$ выполнено:

$$N_U := \#\{i\colon \xi_i \in U\} \geqslant K^{(\pm)}.$$

Пусть $c_6 := c_1 r^{-d}$. Тогда, как мы помним, $K^{(0)} \leqslant c_6 a^d$.

Поэтому, пользуясь тем, что случайная величина $N_U$ имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $\lambda \operatorname{vol}_d(U)$, получаем следующую оценку:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[K^{(\pm)} \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \#\mathcal{U} \cdot \max_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n)\right) \left(\frac{\lambda \operatorname{vol}_d(U) e}{n - c_6 a^d}\right)^{n - c_6 a^d} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\lambda A c_5 a^{d^2/(d-1)} e n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d}\right)^{n - c_6 a^d}$$

Распишем отдельно последнюю скобку:

$$\left(\frac{\lambda A c_5 a^{d^2/(d-1)} e n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d}\right)^{n - c_6 a^d} =$$

$$= \exp\big(n \log \lambda + d^2/(d-1) n \log a - 1/(d-1) n \log n - n \log(n - c_6 a^d) -$$

$$- c_6 a^d \log \lambda - c_6 a^d d^2/(d-1) \log a + c_6 a^d/(d-1) \log n + c_6 a^d \log(n - c_6 a^d) + O(n)\big).$$

Заметим, что $\log(n - c_6 a^d) = \log n + o(1)$. Слагаемое $c_6 a^d \log \lambda \ll c_6 n$, и $-c_6 a^d d^2/(d - 1) \log a - c_6 a^d (1 + 1/(d-1)) \log n < 0$.

Итак,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} - 1 - \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} + 1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right).$$

Так как константа $A$ может быть выбрана сколь угодно большой, получаем:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right).$$

□

# 5 Связь с задачей постоянного размера куба

В этом разделе мы покажем, как получить оценки вероятности больших уклонений с параметром $a \to \infty$ из соответствующих оценок для случая $a = 1$.

## 5.1 Нижние оценки

Утверждение следующей теоремы выполнено для произвольной нормы.

**Теорема 6.** *Пусть $R_1 \leqslant r$ п.н. для некоторого $r > 0$, $d \geqslant 1$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Предположим, что*

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right),\ n \to \infty.$$

*Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Пусть $h = h(a, r) = \left\lfloor \dfrac{a-1}{2r+1} \right\rfloor$. Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{ \prod_{m=1}^{d} \left[ k_m \left( \frac{a - 2rh}{h+1} + 2r \right), k_m \left( \frac{a - 2rh}{h+1} + 2r \right) + \frac{a - 2rh}{h+1} \right] \right\},$$

где $k_m \in \{0, 1, \ldots, h\}$.

Заметим, что для точек $x$ и $y$, лежащих в разных ячейках, $\min_{1 \leqslant m \leqslant d} |x^{(m)} - y^{(m)}| \geqslant 2r$, поэтому шары с центрами в разных ячейках не пересекаются.

Мы построили ячейки $V_1, \ldots, V_l$, где $l = (h+1)^d$. Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке $V_j$ следующую величину:

$$K^j = \min\{s \mid \exists i_1, \ldots i_s \in \{1, \ldots N\} \colon S \cap V_j = \bigcup_{t=1}^{s} B(\xi_{i_t}, R_1) \cap V_j\}.$$

Обозначим $V = \bigcup_{j=1}^{l} V_j$. Определим следующее событие:

$$E = \{\xi_i \in V \text{ для } i = 1, \ldots, N\} \cap \bigcap_{j=1}^{l} \{K^j \geqslant n/(h+1)^d\}.$$

Заметим, что для различных $j$ события $\{K^j \geqslant n/(h+1)^d \mid \xi_i \in V \text{ для } i = 1, \ldots, N\}$ независимы.

Докажем, что событие $E$ влечет событие $\{K_a \geqslant n\}$. Действительно, если все центры лежат в наших ячейках, то шары с центрами в разных ячейках не пересекаются. Тогда если в каждой ячейке минимальное число видимых шаров хотя бы $n/(h+1)^d$, то минимальное число видимых шаров во всей картинке хотя бы $n$.

Так как количество центров шаров в $[0,a]^d \setminus V$ – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda \operatorname{vol}_d([0,a]^d \setminus V)$, можно выписать следующую оценку:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in V \text{ для } i=1,\ldots,N\} = \exp(-\lambda \cdot \operatorname{vol}_d([0,a]^d \setminus V)) \geqslant \exp(-\lambda \cdot (2ra^{d-1}) \cdot dh) \geqslant \exp(-\lambda \cdot da^d).$$

Заметим, что при условии, что центры шаров лежат только в выбранных ячейках, события $\{K^j \geqslant n/(h+1)^d\}$ – это с точностью до гомотетии то же самое, что событие $\{\widetilde{K}_1 \geqslant n/(h+1)^d\}$, где $\widetilde{K}_1$ – минимальное необходимое количество шаров для задачи в единичном кубе с постоянными радиусами $\widetilde{R}_1 = R_1 \cdot \left(\dfrac{a-2rh}{h+1}\right)^{-1}$ и интенсивностью $\widetilde{\lambda} = \lambda \cdot \left(\dfrac{a-2rh}{h+1}\right)^d$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{K^j \geqslant n/(h+1)^d \mid \xi_i \in V \text{ для } i=1,\ldots,N\} = \mathbb{P}\{\widetilde{K}_1 \geqslant n/(h+1)^d\} \geqslant \\
&\quad \geqslant \exp\Big(-\beta \cdot n/(h+1)^d \log(n/(h+1)^d) + \gamma \cdot n/(h+1)^d \log \widetilde{\lambda} + O(n/(h+1)^d)\Big) \geqslant \\
&\qquad \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d (\log n - d\log a) + \gamma \cdot n/(h+1)^d \log \lambda + O(n/(h+1)^d)\right).
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $n\log\widetilde{\lambda} = n\log\lambda + O(n)$. Также, используя то, что $(h+1)^d \cdot O(n/(h+1)^d) = O(n)$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{K_a \geqslant n\} &\geqslant \exp\left(-\lambda da^d - \beta \cdot n(\log n - d\log a) + \gamma \cdot n\log\lambda + O(n)\right) = \\
&\qquad \exp\left(-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a + \gamma \cdot n\log\lambda + O(n)\right).
\end{aligned}$$

□

**Следствие 2** (теорема 2)**.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_1$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 10 в [2]. При доказательстве этого утверждения получена следующая оценка (см. неравенство (3)):

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \lambda^n e^{-\lambda}\left(\left(\frac{1/2}{(2n)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1} \cdot c_2 n^{-1/(d-1)}\right)^n$$

для некоторой константы $c_2 = c_2(d)$. Из этого неравенства получаем, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

**Следствие 3** (теорема 3)**.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_2$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{2}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 9 в [2]. При доказательстве этого утверждения получена следующая оценка:

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \lambda^n e^{-\lambda}\left(\left(\frac{1/2}{(2n)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1} \cdot c_1 n^{-2/(d-1)}\right)^n$$

для некоторой константы $c_1 = c_1(d)$. Из этого неравенства получаем, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n \to \infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

**Следствие 4.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_\infty$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 11 в [2]. При доказательстве этого утверждения получена следующая оценка:

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \lambda^n e^{-\lambda}\left(c_2 n^{-1/(d-1)}\right)^{dn}$$

для некоторой константы $c_2 = c_2(d)$. Из этого неравенства получаем, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n \to \infty.$$

применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

**Следствие 5.** Пусть $R_1 \in [0, 1]$ имеет ограниченную плотность. Тогда

- для шаров в $\ell_1$-норме выполнено

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty;$$

- для шаров в $\ell_2$-норме выполнено

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{2}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 13 в [2]. При доказательстве этого утверждения получена следующая оценка (см. неравенство (10)):

- для $\ell_1$-нормы
$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \left(\frac{\lambda}{2^{d+5}c}\right)^n e^{-\lambda} n^{-n} (\varepsilon_n/2)^n,$$
где $\varepsilon_n = (2n)^{-1/(d-1)}/2$, а константа $c = \operatorname{esssup}_{x\in[0,1]} p(x) \leqslant c < \infty$. Из этого неравенства получаем, что
$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty;$$

- для $\ell_2$-нормы
$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \left(\frac{\lambda}{2^{d+5}c}\right)^n e^{-\lambda} n^{-n} (\varepsilon_n^2/3)^n,$$
где $\varepsilon_n = (2n)^{-1/(d-1)}/2$, а константа $c = \operatorname{esssup}_{x\in[0,1]} p(x) \leqslant c < \infty$. Из этого неравенства получаем, что
$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right) n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

## 5.2 Верхние оценки

Следующая теорема верна для любой нормы.

**Теорема 7.** *Пусть $d \geqslant 1$, $n \gg a^d\lambda$ и $n \gg a^d$. Предположим, что неравенство*
$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta\cdot n\log n + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty$$
*верно для радиусов $R_1$ с некоторым распределением и для радиусов $\widetilde{R}_1 = R_1\cdot b$ одновременно для любых $b\in(0,1]$. Тогда*
$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta\cdot n\log n + \beta\cdot dn\log a + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

*Доказательство.* Разобьем куб $[0,a]^d$ на такие ячейки:
$$\prod_{m=1}^{d}\left[\frac{k_m a}{\lfloor a\rfloor}, \frac{(k_m+1)a}{\lfloor a\rfloor}\right],$$
где $k_m \in \{0,1,\ldots,\lfloor a\rfloor-1\}$. Пусть это ячейки $V_1,\ldots,V_l$, где $l = \lfloor a\rfloor^d$. Определим картинку, образованную ячейкой $V_j$, следующим образом:
$$S^j = \bigcup_{\substack{i\in\{1,\ldots,N\}:\\ \xi_i\in V_j}} B(\xi_i,R_i)\cap V_j.$$

Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке $V_j$ следующую величину:

$$K^j = \min\{s \geqslant 1 \mid \exists i_1, \dots i_s \in \{1, \dots, N\} \colon \xi_{i_t} \in V_j,\ t = 1, \dots, s;\ S^j = \bigcup_{t=1}^{s} B(\xi_{i_t}, R_1) \cap V_j\}.$$

Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{\substack{\{n_1, \dots n_l\}\colon \\ n_s \geqslant 0\ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \bigcap_{s=1}^{l} \{K^s \geqslant n_s\}.$$

Заметим, что из события $\{K_a \geqslant n\}$ следует событие $E$. Действительно, если $K_a \geqslant n$, то и $\sum K^s \geqslant n$. Тогда существует набор $\{n_1, \dots n_l\}$ с $n_s \geqslant 0$ $\forall s$ и $\sum n_s = n$, для которого выполнено $K^s \geqslant n_s$ для всех $s = 1, \dots l$. Это и есть событие $E$.

Вычислим вероятность события $\{K^s \geqslant n_s\}$. С точностью до гомотетии это то же самое, что $\widetilde{K}_1 \geqslant n_s$, где $\widetilde{K}_1$ обозначает минимальное число видимых шаров в кубе $[0,1]^d$, рассматриваемое раньше, но с интенсивностью пуассоновского поля $\widetilde{\lambda} = \lambda(a/\lfloor a \rfloor)^d$ и радиусами $\widetilde{R}_1 = R_1(\lfloor a \rfloor / a)$.

Заметим также, что события $\{K^s \geqslant n_s\}$ независимы для различных $s$.
Таким образом,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[E] \leqslant \sum_{\substack{\{n_1, \dots n_l\}\colon \\ n_s \geqslant 0\ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \mathbb{P}[K^s \geqslant n_s] = \sum_{\substack{\{n_1, \dots n_l\}\colon \\ n_s \geqslant 0\ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \mathbb{P}[\widetilde{K}_1 \geqslant n_s] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\{n_1, \dots n_l\}\colon \\ n_s \geqslant 0\ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \exp(-\beta \cdot n_s \log n_s + \gamma \cdot n_s \log \widetilde{\lambda} + O(n_s) =$$

$$= \sum_{\substack{\{n_1, \dots n_l\}\colon \\ n_s \geqslant 0\ \forall s, \\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^{l} n_s \log n_s + \gamma \cdot n \log \widetilde{\lambda} + \sum_{s=1}^{l} O(n_s)\right).$$

Нетрудно убедиться, что минимум выражения $\sum_{s=1}^{l} n_s \log n_s$ достигается на наборе $\{n/l, \dots, n/l\}$. Также заметим, что $n \log \widetilde{\lambda} = n \log \lambda + o(n)$ и $\sum_{s=1}^{l} O(n_s) = O(n))$. Получим, что

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta\cdot\sum_{s=1}^{l}\frac{n}{l}\log\frac{n}{l} + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s\geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta\cdot n\log n + \beta\cdot dn\log a + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right).$$

Посчитаем количество способов разбиения числа $n$ на $\lfloor a\rfloor^d$ неотрицательных слагаемых:

$$\binom{n+\lfloor a\rfloor^d - 1}{\lfloor a\rfloor^d - 1} \leqslant \frac{(n+a^d)^{a^d}}{(\lfloor a\rfloor^d-1)!} = \exp\left(a^d + a^d\log\left(\frac{n}{a^d}+1\right) - \frac{d}{2}\log a + o(n)\right) = \exp(o(n)).$$

Объединяя все полученные неравенства, получаем, что

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta\cdot n\log n + \beta\cdot dn\log a + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right).$$

□

**Следствие 6** (теорема 5)**.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_1$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a\to\infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 19 в [2]. При доказательстве этого утверждения получена следующая оценка:

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(\frac{c_5 dn}{A^{d-1}(d-1)}\log n(1+o(1))\right)\left(\frac{(\lambda A c_5 e)n^{-1/(d-1)}}{n-c_6}\right)^{n-c_6}$$

для некоторых констант $c_5 = c_5(d), c_6 = c_6(d)$ и произвольного числа $A > 0$. Из этого неравенства получаем, в силу произвольности выбора $A$, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

**Следствие 7.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в $\ell_2$-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a\to\infty.$$

*Доказательство.* Эта оценка следует из proposition 21 в [2]. При доказательстве этого утверждения аналогично случаю

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(\frac{c_5 dn}{A^{d-1}(d-1)} \log n(1+o(1))\right)\left(\frac{(\lambda A c_5 e) n^{-1/(d-1)}}{n-c_6}\right)^{n-c_6}$$

для некоторых констант $c_5 = c_5(d), c_6 = c_6(d)$ и произвольного числа $A > 0$. Из этого неравенства получаем, что

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n \log n + n \log \lambda + O(n)\right),\ n \to \infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

# 6 Вероятность больших уклонений в одномерном случае

Доказательства дальнейших оценок основаны на следующей лемме.

**Лемма 2** (см. [2], Lemma 23). *Пусть*

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{K} [x_i - r_i, x_i + r_i] \cap [0,1]$$

*является неуменьшаемым представлением одномерной картинки $S_1$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{K} \min\{r_i, 1\} \leqslant 2.$$

**Теорема 8.** *Пусть $d = 1$. Предположим, что распределение $R_1$ имеет плотность $p(z) \approx z^{\alpha-1}$ для $z \to 0$ и некоторого $\alpha > 0$. Пусть $n \gg a, n \gg a\lambda$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp(-(1+\alpha) n \log n + (1+\alpha) dn \log a + n \log \lambda + O(n)), n, a \to \infty.$$

*Доказательство.* Нижняя оценка доказана в теореме 4. Для получения верхней оценки зафиксируем большое число $M > 0$ и разобьем число $K_a$ на следующие слагаемые:

$$K_a = \#\{i\colon r_i > 2aM/n\} + \#\{i\colon r_i \leqslant 2aM/n\} = K_a^+ + K_a^-.$$

С помощью гомотетии переведем отрезок $[0, a]$ в $[0, 1]$. Теперь радиусы шаров будут равны $\widetilde{r_i} = r_i/a$, и будет выполнена лемма 2 для новой картинки. Так как количество шаров при гомотетии не изменилось, получим, что $K_a^+ \leqslant n/M$ при $n \geqslant 2M$. Заметим, что $K_a^+ \leqslant N^-$, где $N^-$ — количество шаров радиуса не больше $2aM/n$ в первоначальном представлении картинки $S_a$. Случайная величина $N^-$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda = a\lambda \int_0^{2aM/n} p(z) \leqslant ca\lambda(aM/n)^\alpha$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[K_a^- \geqslant n - n/M] \leqslant \mathbb{P}[N^- \geqslant (1-1/M)n] \sim \\ \sim \frac{\Lambda^{(1-1/M)n}}{((1-1/M)n)!} e^{-\Lambda} \leqslant \frac{\Lambda^{(1-1/M)n}}{((1-1/M)n)!} \sim \\ \sim \frac{\Lambda^{(1-1/M)n} e^{(1-1/M)n}}{\sqrt{2\pi(1-1/M)n}((1-1/M)n)^{(1-1/M)n}} \leqslant \frac{(ca\lambda(aM/n)^\alpha)^{(1-1/M)n} e^{(1-1/M)n}}{((1-1/M)n)^{(1-1/M)n}} = \\ = \exp((1-1/M)[-(1+\alpha)n\log n + (1+\alpha)n\log a + n\log\lambda + O(n)]).\end{aligned}$$

Так как $M$ — произвольное положительное число, устремим $M \to \infty$ и получим требуемое. □

**Теорема 9.** *Пусть $d = 1$. Предположим, что $R_1 \equiv r > 0$ п.н., $n \gg a$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = 0$$

*для достаточно больших $n$ и $a$.*

*Доказательство.* Применим гомотетию, переводящую $[0, a]$ в $[0, 1]$. При этом радиусы уменьшатся в $a$ раз. По лемме 2 получаем, что $\mathbb{P}\left[K_a \leqslant \frac{2}{\min\{r/a, 1\}}\right] = 1$. Следовательно, так как $n \gg a$, начиная с некоторого момента верно

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}\left[K_a > \frac{2a}{r}\right] = 0.$$

□

*Замечание.* Утверждение теоремы верно для любого распределения радиусов, отделенного от нуля. То есть если $R_i \geqslant r$ п.н. для некоторого $r > 0$, то $\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = 0$, начиная с некоторого момента.

# Список литературы


[1] F. Aurzada, S. Dereich, M. Scheutzow, C. Vormoor, High resolution quantization and entropy coding of jump processes, J. Complexity 25 (2) (2009) 163–187.

[2] F. Aurzada, M. Lifshits, How complex is a random picture? Journal of Complexity 53 (2019) 133–161.

[3] S.N. Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, Wiley Series in Probability and Statistics, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2013, p. xxvi+544.

[4] T.M. Cover, J.A. Thomas, Elements of Information Theory, second ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006, p. xxiv+748.

[5] S. Dereich, The coding complexity of diffusion processes under supremum norm distortion, Stochastic Process. Appl. 118 (6) (2008) 917–937.

[6] S. Graf, H. Luschgy, Foundations of Quantization for Probability Distributions, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1730, Springer-Verlag, Berlin, 2000, p. x+230.

[7] A.N. Kolmogorov, Three approaches to the quantitative definition of information, Int. J. Comput. Math. 2 (1968) 157–168.

[8] R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, 2008, p. xii+693.