

Санкт-Петербургский государственный университет

Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью

Дипломная работа
студента 4 курса
направление «Математика»
01.03.01.
группы 16.Б01—мм
очной формы обучения
Давыденковой Марии Сергеевны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1	Введение	2
1.1	Постановка задачи	2
1.2	Полученные результаты	3
2	Нижние оценки для вероятности больших уклонений	3
3	Верхние оценки для вероятности больших уклонений	7

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Пусть S — случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$. Средней ошибкой дискретизации S называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#C \leq e^r} \mathbb{E} \min_{A \in C} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Скорость ее убывания при стремлении r к бесконечности характеризует сложность распределения S . *Тут надо добавить ссылки на существующие результаты.*

В работе [1] рассматривалась ошибка дискретизации для случайного множества, рассматриваемого как случайный элемент пространства компактов, снабжённого метрикой Хаусдорфа $d_H(A, B) := \max(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|)$. В качестве случайного множества была взята стандартная Булева модель (Boolean model), которая устроена следующим образом.

Рассмотрим куб $[0, a]^d$ в \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Рассмотрим случайный набор шаров с центрами в этом кубе, определенный следующим образом: пусть центры шаров ξ_i — случайные величины, распределенные равномерно в $[0, a]^d$, радиусы R_i — некоторые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, а количество шаров N — пуассоновская случайная величина с параметром $a^d \lambda > 0$. Все эти случайные величины независимы. Отметим, что при таком построении множество $(\xi_i)_{i \leq N}$ — это пуассоновский точечный процесс с интенсивностью λ .

Обозначим через $B(\xi_i, R_i)$ шар с центром в ξ_i радиуса R_i (пока что мы не фиксируем норму в \mathbb{R}^d). Мы будем рассматривать “картинку”, образованную этим набором шаров:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^N B(\xi_i, R_i) \cap [0, a]^d.$$

Таким образом определенная S_a называется *Булевой моделью случайного множества*. Заметим, что свойства S_a будут зависеть от рассматриваемой нормы.

В работе [1] изучался случай $a = 1$. Результаты основаны на изучении вероятностей больших уклонений величины

$$K_1 = \min\{r \geq 1 | \exists i_1, \dots, i_r \subset \{1, \dots, N\} : S_1 = \bigcup_{l=1}^r B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0, a]^d\},$$

называемой *минимальным числом видимых шаров*, то есть на нахождении асимптотики $\mathbb{P}[K_1 \geq n]$ при n , стремящемся к бесконечности.

В настоящей работе некоторые из этих оценок распространяются на случай, когда параметр a стремится к бесконечности, причем $n \gg a^d$.

Заметим, что тривиальная оценка, вытекающая из свойств пуассоновского распределения, такова:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[N \geq n] \sim \mathbb{P}[N = n] = \\ &= \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \sim \left(\frac{e a^d \lambda}{n} \right)^n e^{-a^d \lambda} \sqrt{2\pi n} = \exp(-n \log n + n \log(a^d \lambda) + O(n)) = \\ &= \exp((-n \log n + dn \log a + O(n))), \quad n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Условие $n \gg a^d$ гарантирует, что вероятность больших уклонений стремится к нулю, так как $-n \log(n/a^d)$ стремится к минус бесконечности с ростом n и a .

1.2 Полученные результаты

Получены (*пока что* :) более точные оценки вероятности больших уклонений в случае ℓ_1 -нормы, а именно, что существует число $\beta > 1$, для которого

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] = \exp((- \beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + O(n))), \quad n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty.$$

Число β зависит от размерности d , используемой нормы и распределения радиусов R_i .

2 Нижние оценки для вероятности больших уклонений

Рассмотрим случай, когда радиусы – это константа $r > 0$ п.н.

Теорема 1. Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1 -норме, $d \geq 2$ и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right)n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right)dn \log a + O(n)\right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Для удобства рассмотрим гомотеию, переводящую куб $[0, a]^d$ в куб $[0, 1]^d$. Тогда радиусы уменьшатся в a раз, их количество сохранится. Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{ \prod_{m=1}^{d-1} \left[\frac{a^{1/(d-1)}(k_m + 1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{1/(d-1)}(k_m + 3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right] \right\} \times \\ \left\{ \left[l \left(\frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{2r}{a} \right), l \left(\frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{2r}{a} \right) + \frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} \right] \right\},$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$, $l \in \{0, \dots, \lfloor a/4r \rfloor\}$, $c_1 = 2^{-(2+3/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0, 1]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r} \left(\frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{2r}{a} \right) + \frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} = \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{4r(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{1}{2} < 1$$

при достаточно больших a и n .

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i, R_1)$, $B(\xi_j, R_1)$ лежат в разных “рядах”, то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы $2R_1$. Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i = \xi_i + (0, \dots, 0, R_1)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0, 1]^d$. Итак, при $j \neq i$

$$\|x_i - \xi_j\|_1 = |\xi_i^{(d)} + R_1 - \xi_j^{(d)}| + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}| \geq \\ \geq R_1 - |\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}| \geq R_1 - \frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{1/2 \cdot a^{1/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} > R_1.$$

Мы получили порядка $8rn/a \cdot a/4r = 2n$ ячеек, поэтому можно выбрать из них n непересекающихся. Назовем их V_1, \dots, V_n и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcup_{\pi - \text{перестановка } \{1, \dots, n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $K \geq n$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geq n] &\geq \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \cdot n! \cdot \left(\left(\frac{1/2 \cdot a^{1/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_1 a^{1/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} \right)^n = \\
&= \exp \left(dn \log a - a^d \lambda - \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log a + O(n) \right) = \\
&= \exp \left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) dn \log a + O(n) \right).
\end{aligned}$$

□

Теорема 2. Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_2 -норме, $d \geq 2$ и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \geq \exp \left(- \left(1 + \frac{2}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{2}{d-1} \right) dn \log a + O(n) \right), \quad n, a \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Для удобства рассмотрим гомотетию, переводящую куб $[0, a]^d$ в куб $[0, 1]^d$. Тогда радиусы уменьшатся в a раз, их количество сохранится. Рассмотрим набор ячеек:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \prod_{m=1}^{d-1} \left[\frac{a^{1/(d-1)}(k_m + 1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{1/(d-1)}(k_m + 3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right] \right\} \times \\
&\quad \left\{ \left[l \left(\frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + \frac{2r}{a} \right), l \left(\frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + \frac{2r}{a} \right) + \frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$, $l \in \{0, \dots, \lfloor a/4r \rfloor\}$, $c_2 = 2^{-(4+6/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0, 1]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r} \left(\frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + \frac{2r}{a} \right) + \frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} = \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{4r^2(rn)^{2/(d-1)}} + \frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + \frac{1}{2} < 1$$

при достаточно больших a и n .

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i, R_1)$, $B(\xi_j, R_1)$ лежат в разных “рядах”, то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы $2R_1$. Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i = \xi_i + (0, \dots, 0, R_1)$. Заметим, что для достаточно больших n и a

эта точка действительно лежит в кубе $[0, 1]^d$. Итак, при $j \neq i$

$$\begin{aligned} \|x_i - \xi_j\|_2^2 &= |\xi_i^{(d)} + R_1 - \xi_j^{(d)}|^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geqslant \\ &\geqslant R_1^2 + 2R_1|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + (\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)})^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geqslant \\ &\geqslant R_1^2 - \frac{2c_2 a^{2/(d-1)}}{(rn)^{2/(d-1)}} + \left(\frac{1/2 a^{1/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^2 \geqslant R_1^2. \end{aligned}$$

Мы получили порядка $8rn/a \cdot a/4r = 2n$ ячеек, поэтому можно выбрать из них n непересекающихся. Назовем их V_1, \dots, V_n и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcup_{\pi - \text{перестановка } \{1, \dots, n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $K \geqslant n$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geqslant n] &\geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d \lambda)^n}{n!} e^{-a^d \lambda} \cdot n! \cdot \left(\left(\frac{1/2 \cdot a^{1/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_2 a^{1+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right)^n = \\ &= \exp \left(dn \log a - a^d \lambda - \left(1 + \frac{2}{d-1} \right) n \log n + \left(2 + \frac{2}{d-1} \right) n \log a + O(n) \right) = \\ &= \exp \left(- \left(1 + \frac{2}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{2}{d-1} \right) dn \log a + O(n) \right). \end{aligned}$$

□

Теорема 3. Пусть $R_1 \equiv \frac{r}{a}$ н.н., где $r < 1$, шары берутся в l_∞ -норме, и $d \geqslant 2$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp \left(\left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + dn \log a \right) (1 + o(1)) \right), n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем ρ_1, ρ_2 , такие, что $r < \rho_1 < \rho_2 < 1$. Заметим, что тогда $r/a < \rho_1 < \rho_2 < 1$ для любого $a \geqslant 1$. Далее сделаем все то же самое, что в статье. Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \left\{ x \in [0, 1]^d : \sum_{m=1}^d x^{(m)} = d\rho_2, \min_{1 \leqslant m \leqslant d} x^{(m)} > \rho_1 \right\}.$$

Для достаточно малой константы c_1 выберем n точек β_1, \dots, β_n из H , чтобы выполнялось $\|\beta_i - \beta_j\|_1 > c_1 n^{1/(d-1)}$ для всех $i \neq j$. Теперь рассмотрим ячейки $V_i = B(\beta_i, c_2 n^{-1/(d-1)})$, где $c_2 < c_1/(4d)$. И определим следующее событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcup_{\pi - \text{перестановка } \{1, \dots, n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}.$$

Затем показывается, что из события E следует событие $K_a \geq n$. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\geq \mathbb{P}[E] = \frac{a^d \lambda}{n!} e^{-a^d \lambda} \cdot n! \cdot (c_2 n^{-1/(d-1)})^d n = \\ &= \exp \left(\left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + dn \log a \right) (1 + o(1)) \right). \end{aligned}$$

□

3 Верхние оценки для вероятности больших уклонений

Теорема 4. Пусть $R_1 \equiv \frac{r}{a}$ н.н., где $r < 1$, шары берутся в l_1 -норме, и $d \geq 2$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left(\left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right), n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Объединение шаров в группы. Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{K_a} B(\xi_i, R_1) \cap [0, 1]^d$$

обозначает неубывающее представление картинки S . Тогда для каждого числа $i \leq K_a$ существует точка $\nu_i \in B(\xi_i, R_1) \cap [0, 1]^d$, которая не лежит ни в каком другом шаре $B(\xi_j, R_1), j \neq i$. Зафиксируем такие $\nu_i, i = 1, 2, \dots, K_a$. Обозначим $\Delta_i := \nu_i - \xi_i$.

Объединим шары в группы $J_0, J_1^+, J_1^-, \dots, J_d^+, J_d^-$ следующим образом. Определим $J_0 := \{i: \|\Delta_i\|_1 \leq R_1/2\}$. Оценим мощность этого множества. Для любых $i, j \in J_0$ выполнено:

$$R_1 < \|\nu_j - \xi_i\| \leq \|\nu_j - \nu_i\| + \|\nu_i - \xi_i\| \leq \|\nu_j - \nu_i\| + \|\Delta_i\| \leq \|\nu_j - \nu_i\| + R_1/2.$$

То есть $\|\nu_j - \nu_i\| > R_1/2$, а значит, $\#J_0 \leq c_1(R_1)^{-d} = c_1 r^{-d} a^d$, где константа $c_1 = 2^d / \text{vol}_d B(0, 1)$.

Теперь пусть $i \notin J_0$. Значит,

$$\|\Delta_i\|_\infty \geq c_2 \|\Delta_i\|_1 > c_2 R_1/2,$$

где c_2 – константа, зависящая только от нормы. Поэтому i принадлежит одному из $2d$ множеств вида:

$$J_m^+ := \{i: \Delta_i^{(m)} > c_2 R_1/2\}, \quad J_m^- := \{i: \Delta_i^{(m)} < -c_2 R_1/2\}.$$

Шаг 2. Оценка расстояний между центрами. Пусть $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – проекция, определенная таким образом:

$$\sigma x := (x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}, 0).$$

Лемма 1 (Лемма 20 из статьи.). Пусть $i, j \in J_d^+$, $i \neq j$, и пусть $c_3 := c_2 r/2$. Тогда

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [|\sigma \xi_i - \sigma \xi_j|_1, c_3/a].$$

Доказательство. См. статью. □

Шаг 3. Подсчет ячеек, содержащих центры шаров. Зафиксируем большое число $A > 0$ и покроем куб $[0, 1]^d$ следующим набором ячеек:

$$V_{\bar{k}, k_d} := \prod_{m=1}^d \left[\frac{A k_m}{(n a^{-1})^{1/(d-1)}}, \frac{A(k_m + 1)}{(n a^{-1})^{1/(d-1)}} \right],$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor A^{-1}(n a^{-1})^{1/(d-1)} \rfloor\}$ для $1 \leq m \leq d$ и мульти-индекса $\bar{k} := (k_1, \dots, k_{d-1})$.

Зафиксируем некоторый индекс \bar{k} и оценим количество ячеек, содержащих центры шаров:

$$N(\bar{k}, d, +) := \#\{k: \xi_i \in V_{\bar{k}, k} \text{ для некоторого } i \in J_d^+\}.$$

Заметим, что если $\xi_i \in V_{\bar{k}, \kappa_i}$ и $\xi_j \in V_{\bar{k}, \kappa_j}$ для некоторых $i, j \in J_d^+$, то

$$\|\sigma \xi_i - \sigma \xi_j\|_1 \leq (d-1)A(an^{-1})^{1/(d-1)}.$$

Поэтому по лемме

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [(d-1)A(an^{-1})^{1/(d-1)}, c_3/a].$$

Замечание. При достаточно больших a, n этот интервал определен (то есть левый конец меньше правого).

Исходя из этого, разобьем $[0, 1]$ на $\lceil ac_3^{-1} \rceil$ частей длины не более c_3/a , и заметим, что если $\xi_i^{(d)}, \xi_j^{(d)}$ лежат в одной части, то $|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \leq (d-1)A(an^{-1})^{1/(d-1)}$. Поэтому тогда $|\kappa_i - \kappa_j| \leq d$. Отсюда получаем искомую оценку:

$$N(\bar{k}, d, +) \leq d \lceil ac_3^{-1} \rceil =: ac_4.$$

Теперь мы можем получить общее число ячеек, содержащих центры:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{m=1}^d (N(\bar{k}, m, +) + N(\bar{k}, m, -)) \leq (2d) \cdot (ac_4) \cdot (n a^{-1} A^{-(d-1)}) =: \frac{c_5 n}{A^{d-1}}.$$

Замечание. Размер ячеек специально выбирался так, чтобы общее количество ячеек, содержащих центры, не зависело от a . Иначе в финальном рассуждении мы не смогли бы избавиться от громоздкого множителя, взяв достаточно большое A . Чтобы все было хорошо (хотя бы с членом $n \log n$ в финальной асимптотике), надо чтобы этот множитель был $O(n)$. Из всех таких степеней a я выбрала ту, которая дает наилучшую оценку.

Пусть \mathcal{U} – семейство всех возможных объединений из $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек. Их количество – число способов выбрать $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек из $\left\lfloor \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rfloor$. Поэтому можно выписать следующую простую оценку:

$$\#\mathcal{U} \leq \exp \left(\frac{c_5 n}{A^{d-1}} \log \left\lfloor \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rfloor \right) = \exp \left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right).$$

Для каждого $U \in \mathcal{U}$ объем можно оценить так:

$$\text{vol}_d(U) \leq \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \left(\frac{A a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}} \right)^d = \frac{A c_5 a^{d/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}.$$

Шаг 4. Оценка вероятности. Напомним, что

$$K_a = \#J_0 + \# \left(\bigcup_{m=1}^d (J_m^+ \cup J_m^-) \right) =: K^{(0)} + K^{(\pm)}.$$

Заметим, что для некоторого случайного множества $U \in \mathcal{U}$ выполнено:

$$N_U := \#\{i: \xi_i \in U\} \geq K^{(\pm)}.$$

Пусть $c_6 := c_1 r^{-d}$. Тогда, как мы помним, $K^{(0)} \leq c_6 a^d$.

Поэтому, пользуясь тем, что случайная величина N_U имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $a^d \lambda \text{vol}_d(U)$, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[K_a \geq n] &\leq \mathbb{P}[K^{(\pm)} \geq n - c_6 a^d] \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geq n - c_6 a^d] \leq \#\mathcal{U} \cdot \max_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geq n - c_6 a^d] \leq \\ &\leq \exp \left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right) \left(\frac{a^d \lambda \text{vol}_d(U) e}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} \leq \\ &\leq \exp \left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right) \left(\frac{(a^d \lambda A c_5 a^{d/(d-1)} e) n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d} \right)^{n - c_6 a^d} = \\ &= \exp \left(\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} - 1 - \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(\frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} + 1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right). \end{aligned}$$

Здесь использовался тот факт, что $a^d = o(n)$, а также следующее равенство:

$$n \log(n - c_6 a^d) = n \log(n - c_6 a^d) - n \log n + n \log n = n \log(1 - c_6 a^d/n) + n \log n = n \log n + o(n).$$

Так как A может быть выбрана сколь угодно большой, получаем:

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left(\left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right).$$

□

% Интересно, является какая-нибудь из этих оценок точной?

Теорема 5. Пусть $R_1 \equiv \frac{c}{a}$ п.н., где $c < 1$, шары берутся в l_2 -норме, и $d \geq 2$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geq n] \leq \exp \left(\left(- \left(1 + \frac{1}{d-1} \right) n \log n + (d+2)n \log a \right) (1 + o(1)) \right), n \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty.$$

% Как-то тут совсем все не сходится.

Доказательство. Аналогично случаю l_1 , как и в статье.

□

Список литературы

- [1] F. Aurzada, M. Lifshits, How complex is a random picture? Journal of Complexity 53 (2019) 133–161.