Санкт-Петербургский государственный университет

Кодирование случайных множеств в булевой модели с переменной интенсивностью

Дипломная работа
студентки 4 курса
направление «Математика»
01.03.01.
группы 16.Б01—мм
очной формы обучения
Давыденковой Марии Сергеевны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Пусть S – случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$. Средней ошибкой дискретизации S называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#\mathcal{C} \leqslant e^r} \mathbb{E} \min_{A \in \mathcal{C}} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Скорость ее убывания при стремлении r к бесконечности характеризует сложность распределения S. Общие свойства величины $D^{(q)}(r)$ изучены в [6, 4, 7]. В последние два десятилетия ошибки дискретизации исследовались, в основном, для траекторий случайных процессов, рассматриваемых как случайный элемент функционального пространства, см., например, [1, 5].

В работе [2] изучалась ошибка дискретизации для случайного множества, рассматриваемого как случайный элемент пространства компактов, снабжённого метрикой Хаусдорфа $d_H(A, B) := \max(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|)$. В качестве случайного множества была взята стандартная Булева модель (Boolean model, см. [3, 8]), которая устроена следующим образом.

Рассмотрим куб $[0, a]^d$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, и случайный набор шаров с центрами в этом кубе, определенный следующим образом: пусть центры шаров ξ_i — случайные величины, распределенные равномерно в $[0, a]^d$, радиусы R_i — некоторые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, а количество шаров N — пуассоновская случайная величина с параметром $a^d \lambda$, где $\lambda = \lambda(a)$ – положительный параметр, зависящий от a. Все эти случайные величины независимы. Отметим, что при таком построении множество $(\xi_i)_{i \leqslant N}$ — это пуассоновский точечный процесс с интенсивностью λ.

Обозначим через $B(\xi_i, R_i)$ шар с центром в ξ_i радиуса R_i (пока что мы не фиксируем норму в $\mathbb{R}^d$). Мы будем рассматривать "картинку", образованную этим наборов шаров:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, R_i) \cap [0,a]^d.$$

Определенная таким образом картинка называется *Булевой моделью случайного множества.* Заметим, что свойства S_a будут зависеть от рассматриваемой нормы.

В работе [2] исследовался случай $a = 1$ с постоянной интенсивностью λ. Результаты основаны на изучении вероятностей больших уклонений величины

$$K_1 = \min\{r \geqslant 1 | \exists i_1, \ldots, i_r \subset \{1, \ldots, N\} : S_1 = \bigcup_{l=1}^{r} B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0,a]^d\},$$

называемой *минимальным числом видимых шаров*, то есть на нахождении асимптотики $\mathbb{P}[K_1 \geqslant n]$ при n, стремящемся к бесконечности.

В настоящей работе некоторые из этих оценок распространяются на случай, когда параметр a стремится к бесконечности, причем $n \gg a^d\lambda$.

Заметим, что тривиальная оценка, вытекающая из свойств пуассоновского распределения, такова:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[N \geqslant n] \sim \mathbb{P}[N = n] = \\
&\quad = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \sim \left(\frac{ea^d\lambda}{n}\right)^n e^{-a^d\lambda}\sqrt{2\pi n} = \exp(-n\log n + n\log(a^d\lambda) + O(n)) = \\
&\qquad = \exp((-n\log n + dn\log a + n\log\lambda + O(n))), \ n \to \infty, a \to \infty.
\end{aligned}$$

Условие $n \gg a^d\lambda$ гарантирует, что вероятность больших уклонений стремится к нулю, так как $-n\log(n/a^d\lambda)$ стремится к минус бесконечности с ростом n и a.

1.2 Полученные результаты

Получены (*пока что :)*) более точные оценки вероятности больших уклонений для ℓ_1- и ℓ_2-нормы. А именно, что существует число $\beta > 1$, для которого

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp((-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a + n\log\lambda + O(n))), \ n \to \infty, a \to \infty.$$

Число β зависит от размерности d, используемой нормы и распределения радиусов R_i.

2 Нижние оценки для вероятности больших уклонений

2.1 Постоянный радиус

Рассмотрим случай, когда радиусы – это константа $r > 0$ п.н.

Теорема 1. *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n, a \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{a^{d/(d-1)}(k_m+1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m+3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right] \times \\ \times \left[l\left(\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right), l\left(\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}\right],$$

где $k_m \in \{0, \ldots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$, $l \in \{0, \ldots, \lfloor a/4r \rfloor\}$, $c_1 = 2^{-(2+3/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0, a]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r}\cdot\left(\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}}+2r\right)+\frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} = \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{r(rn)^{1/(d-1)}}\cdot\left(\frac{a}{4}+r\right)+\frac{a}{2} < a$$

при достаточно больших a и n в силу того, что $n \gg a^d$.

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i, r)$, $B(\xi_j, r)$ лежат в разных "рядах", то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между "рядами" хотя бы $2r$. Если же центры лежат в одном "ряду", то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i = \xi_i + (0, \ldots, 0, r)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0, a]^d$. Итак, при $j \neq i$

$$\|x_i - \xi_j\|_1 = |\xi_i^{(d)} + r - \xi_j^{(d)}| + \sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}| \geqslant \\ \geqslant r - |\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + \sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}| \geqslant r - \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} + \frac{1/2\cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} > r.$$

Мы построили порядка $8rn/a \cdot a/4r = 2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать n из них. Назовем их $V_1, \ldots, V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi\text{ – перестановка }\{1,\ldots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $\{K \geqslant n\}$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{a^d} \cdot \left(\frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right)^{d-1} \cdot \frac{c_1 a^{d/(d-1)}}{(rn)^{1/(d-1)}} \right)^n =$$

$$= \exp\left(dn \log a + n \log \lambda - a^d\lambda - \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \frac{d}{d-1} n \log a + O(n) \right) =$$

$$= \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + O(n) \right).$$

□

Теорема 2. *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_2-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{2}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{2}{d-1}\right) dn \log a + O(n) \right), \; n, a \to \infty.$$

Доказательство теоремы аналогично случаю ℓ_1-нормы, и отличается только размером ячеек.

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d-1} \left[\frac{a^{d/(d-1)}(k_m + 1/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{d/(d-1)}(k_m + 3/4)}{(8rn)^{1/(d-1)}} \right] \times$$
$$\times \left[l \left(\frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + 2r \right), l \left(\frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + 2r \right) + \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} \right],$$

где $k_m \in \{0, \ldots, \lfloor (8rn/a)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$, $l \in \{0, \ldots, \lfloor a/4r \rfloor\}$, $c_2 = 2^{-(4+6/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0, a]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{4r} \left(\frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} + 2r \right) + \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}} = \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r^2(rn)^{2/(d-1)}} \cdot \left(\frac{a}{4} + r \right) + \frac{a}{2} < a$$

при достаточно больших a и n в силу того, что $n \gg a^d$.

Заметим, что если центры шаров $B(\xi_i, r)$, $B(\xi_j, r)$ лежат в разных “рядах”, то есть $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных выбранных нами интервалах, то эти шары не пересекаются, так как расстояние между “рядами” хотя бы $2r$. Если же центры лежат в одном “ряду”, то в каждом из шаров есть точка, не покрытая другим шаром. Действительно, рассмотрим точку $x_i = \xi_i + (0, \ldots, 0, r)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0,a]^d$. Итак, при $j \neq i$

$$\|x_i - \xi_j\|_2^2 = |\xi_i^{(d)} + r - \xi_j^{(d)}|^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geqslant$$

$$\geqslant r^2 - 2r|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + (\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)})^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geqslant$$

$$\geqslant r^2 - \frac{2c_2 a^{2+2/(d-1)}}{(rn)^{2/(d-1)}} + \left(\frac{1/2a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right)^2 \geqslant r^2.$$

Мы построили порядка $8rn/a \cdot a/4r = 2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать n из них. Назовем их $V_1, \ldots, V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi \text{ -- перестановка } \{1,\ldots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $\{K \geqslant n\}$ в силу свойств выбранных ячеек, показанных выше.

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{a^d} \cdot \left(\frac{1/2 \cdot a^{d/(d-1)}}{(8rn)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1} \cdot \frac{c_2 a^{2+2/(d-1)}}{r(rn)^{2/(d-1)}}\right)^n =$$

$$= \exp\left(dn\log a + n\log\lambda - a^d\lambda - \left(2 + \frac{2}{d-1}\right) n\log n + \left(2 + \frac{2}{d-1}\right) n\log a + O(n)\right) =$$

$$= \exp\left(-\left(1 + \frac{2}{d-1}\right) n\log n + \left(1 + \frac{2}{d-1}\right) dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right).$$

□

2.2 Радиус с плотностью

Утверждение следующей теоремы верно для произвольной нормы в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 3. *Пусть распределение R_1 имеет плотность p относительно меры Лебега, причем $p(z) \geqslant cz^{\alpha-1}$ для малых z и некоторых $c, \alpha > 0$. Предположим, что $d \geqslant 1$, и $n \gg a^d\lambda$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-(1+\alpha/d)\, n\log n + (1+\alpha/d) dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right), \ n, a \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\prod_{m=1}^{d} \left[\frac{a(k_m + 1/4)}{(2n)^{1/d}}, \ \frac{a(k_m + 3/4)}{(2n)^{1/d}}\right],$$

где $k_m \in \{0, \dots \lfloor (2n)^{1/d} \rfloor - 1\}$.

Мы построили порядка $2n$ непересекающихся ячеек, поэтому можно выбрать n из них. Назовем их $V_1, \dots, V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcap_{\pi \text{ -- перестановка } \{1,\dots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, R_i \in [c_1 a n^{-1/d}, c_2 a n^{-1/d}], i = 1, \dots, n\},$$

где $c_2 > c_1 > 0$ – некоторые константы, которые могут зависеть от нормы и размерности, причем c_2 выбирается так, чтобы для $i \neq j$ шары $B(\xi_i, R_i)$ и $B(\xi_j, R_j)$ не пересекались. В этом случае событие E влечет $\{K_a \geqslant n\}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[K \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{a^d} \left(\frac{1/2 \cdot a}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} p(z) dz \right)^n \geqslant \\ \geqslant (a^d\lambda)^n e^{-a^d\lambda} \cdot \left(\left(\frac{1/2}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c \int_{c_1 a n^{-1/d}}^{c_2 a n^{-1/d}} z^{\alpha-1} dz \right)^n = \\ = (a^d\lambda)^n e^{-a^d\lambda} \cdot \left(\left(\frac{1/2}{(2n)^{1/d}} \right)^d \cdot c(c_2^\alpha - c_1^\alpha)/\alpha \cdot a^\alpha n^{-\alpha/d} \right)^n = \\ = \exp\left(-(1+\alpha/d) n \log n + (1+\alpha/d) dn \log a + n \log \lambda + O(n)\right).\end{aligned}$$

□

3 Верхние оценки для вероятности больших уклонений

Теорема 4. *Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + o(n \log n) \right), n, a \to \infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Объединение шаров в группы. Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{K_a} B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$$

обозначает неуменьшаемое представление картинки S. Тогда для каждого числа $i \leqslant K_a$ существует точка $\nu_i \in B(\xi_i, r) \cap [0, a]^d$, которая не лежит ни в каком другом шаре $B(\xi_j, r), j \neq i$. Зафиксируем такие $\nu_i, i = 1, 2, \dots K_a$. Обозначим $\Delta_i := \nu_i - \xi_i$.

Объединим шары в группы $J_0, J_1^+, J_1^-, \dots J_d^+, J_d^-$ следующим образом. Определим $J_0 := \{i\colon \|\Delta_i\|_1 \leqslant r/2\}$. Оценим мощность этого множества. Для любых $i, j \in J_0$ выполнено:

$$r < \|\nu_j - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\nu_i - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\Delta_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + r/2.$$

То есть $\|\nu_j - \nu_i\| > r/2$, а значит, $\#J_0 \leqslant c_1 r^{-d} a^d$, где константа $c_1 \ = \ 2^d / \operatorname{vol}_d B(0,1)$.

Теперь пусть $i \notin J_0$. Значит,

$$\|\Delta_i\|_\infty \geqslant c_2 \|\Delta_i\|_1 > c_2 r/2.$$

Поэтому i принадлежит одному из $2d$ множеств вида:

$$J_m^+ := \{i\colon \Delta_i^{(m)} > c_2 r/2\}, \quad J_m^- := \{i\colon \Delta_i^{(m)} < -c_2 r/2\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant d.$$

Шаг 2. Оценка расстояний между центрами. Пусть $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – проекция, определенная таким образом:

$$\sigma x := (x^{(1)}, \dots x^{(d-1)}, 0).$$

Лемма 1 (см. [2], Lemma 20)**.** *Пусть $i, j \in J_d^+$, $i \neq j$, и пусть $c_3 := c_2 r/2$. Тогда*

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1, c_3].$$

Шаг 3. Подсчет ячеек, содержащих центры шаров. Зафиксируем большое число $A > 0$ и покроем куб $[0,a]^d$ следующим набором ячеек:

$$V_{\bar{k},k_d} := \prod_{m=1}^{d} \left[\frac{A k_m}{(na^{-d})^{1/(d-1)}}, \frac{A(k_m+1)}{(na^{-d})^{1/(d-1)}} \right],$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor A^{-1}(na^{-1})^{1/(d-1)} \rfloor\}$ для $1 \leqslant m \leqslant d$ и мульти-индекса $\bar{k} := (k_1, \dots, k_{d-1})$.

Зафиксируем некоторый индекс $\bar{k}$ и оценим количество ячеек, содержащих центры шаров:

$$N(\bar{k}, d, +) := \#\{k\colon \xi_i \in V_{\bar{k},k} \text{ для некоторого } i \in J_d^+\}.$$

Заметим, что если $\xi_i \in V_{\bar{k},\kappa_i}$ и $\xi_j \in V_{\bar{k},\kappa_j}$ для некоторых $i, j \in J_d^+$, то

$$\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1 \ \leqslant \ (d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}.$$

Поэтому по лемме

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [(d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}, c_3].$$

Замечание. *При достаточно больших a, n этот интервал корректно определен.*

Исходя из этого, разобъем $[0,a]$ на $a\lceil c_3^{-1} \rceil$ частей длины не более c_3, и заметим, что если $\xi_i^{(d)}, \xi_j^{(d)}$ лежат в одной части, то $|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \leqslant (d-1)A(na^{-d})^{-1/(d-1)}$. Поэтому тогда $|\kappa_i - \kappa_j| \leqslant d$. Отсюда получаем искомую оценку:

$$N(\bar{k}, d, +) \leqslant ad\lceil c_3^{-1} \rceil =: ac_4.$$

Теперь мы можем получить общее число ячеек, содержащих центры:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{m=1}^{d} (N(\bar{k}, m, +) + N(\bar{k}, m, -)) \leqslant (2d) \cdot (ac_4) \cdot (na^{-1}A^{-(d-1)}) =: \frac{c_5 n}{A^{d-1}}.$$

Пусть $\mathcal{U}$ – семейство всех возможных объединений из $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек. Их количество – число способов выбрать $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек из $\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)} A^d} \right\rceil$. Поэтому можно выписать следующую простую оценку:

$$\#\mathcal{U} \leqslant \exp\left(\frac{c_5 n}{A^{d-1}} \log \left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rceil \right) =$$
$$= \exp\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + O(n) \right).$$

Для каждого $U \in \mathcal{U}$ объем можно оценить так:

$$\mathrm{vol}_d(U) \leqslant \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \left(\frac{Aa^{d/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}} \right)^d = \frac{Ac_5 a^{d^2/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}.$$

Шаг 4. Оценка вероятности. Напомним, что

$$K_a = \#J_0 + \#\left(\bigcup_{m=1}^{d} (J_m^+ \cup J_m^-) \right) =: K^{(0)} + K^{(\pm)}.$$

Заметим, что для некоторого случайного множества $U \in \mathcal{U}$ выполнено:

$$N_U := \#\{i \colon \xi_i \in U\} \geqslant K^{(\pm)}.$$

Пусть $c_6 := c_1 r^{-d}$. Тогда, как мы помним, $K^{(0)} \leqslant c_6 a^d$.

Поэтому, пользуясь тем, что случайная величина N_U имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $\lambda \operatorname{vol}_d(U)$, получаем следующую оценку:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[K^{(\pm)} \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \#\mathcal{U} \cdot \max_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \\
\leqslant \exp\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n \log n)\right)\left(\frac{\lambda \operatorname{vol}_d(U) e}{n - c_6 a^d}\right)^{n - c_6 a^d} \leqslant \\
\leqslant \exp\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} dn \log a + o(n \log n)\right) \cdot \\
\cdot \left(\frac{\lambda A c_5 a^{d^2/(d-1)} e n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d}\right)^{n - c_6 a^d} = \\
= \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} - 1 - \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \right. \\
\left. + \left(\frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} + 1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + o(n \log n)\right).
\end{aligned}
$$

Здесь использовалось следующее равенство:

$$
n \log(n - c_6 a^d) = n \log(n - c_6 a^d) - n \log n + n \log n = n \log(1 - c_6 a^d / n) + n \log n = n \log n + o(n).
$$

Так как константа A может быть выбрана сколь угодно большой, получаем:

$$
\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + o(n \log n)\right).
$$

□

4 Связь с задачей постоянного размера куба

4.1 Нижние оценки

Следующая теорема показывает, как получить нижнюю оценку для случая константного радиуса из такой же оценки для задачи с $a = 1$.

Теорема 5. *Пусть $R_1 \leqslant r$ п.н. для некоторого $r > 0$, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d \lambda$, и $n \gg a^d$. Предположим, что*

$$
\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right), \ n \to \infty.
$$

Тогда

$$
\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + O(n)\right), \ n, a \to \infty.
$$

Доказательство. Пусть $h = h(a,r) = \left\lfloor \dfrac{a-1}{2r+1} \right\rfloor$. Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{ \prod_{m=1}^{d} \left[k_m \left(\frac{a-2rh}{h+1} + 2r \right), k_m \left(\frac{a-2rh}{h+1} + 2r \right) + \frac{a-2rh}{h+1} \right] \right\},$$

где $k_m \in \{0, 1, \dots, h\}$.

Заметим, что для точек x и y, лежащих в разных ячейках, $\min_{1 \leqslant m \leqslant d} |x^{(m)} - y^{(m)}| \geqslant 2r$, поэтому шары с центрами в разных ячейках не пересекаются.

Мы построили ячейки $V_1, \dots, V_l$, где $l = (h+1)^d$. Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке V_j следующую величину:

$$K^j = \min\{s \mid \exists i_1, \dots i_s \in \{1, \dots N\} \colon S \cap V_j = \bigcup_{t=1}^{s} B(\xi_{i_t}, R_1) \cap V_j\}.$$

Обозначим $V = \bigcup_{j=1}^{l} V_j$. Определим следующее событие:

$$E = \{\xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\} \cap \bigcap_{j=1}^{l} \{K^j \geqslant n/(h+1)^d\}.$$

Заметим, что для различных j события $\{K^j \geqslant n/(h+1)^d \mid \xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\}$ независимы.

Докажем, что событие E влечет событие $\{K_a \geqslant n\}$. Действительно, если все центры лежат в наших ячейках, то шары с центрами в разных ячейках не пересекаются. Тогда если в каждой ячейке минимальное число видимых шаров хотя бы $n/(h+1)^d$, то минимальное число видимых шаров во всей картинке хотя бы n.

Так как количество центров шаров в $[0,a]^d \setminus V$ – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda \operatorname{vol}_d([0,a]^d \setminus V)$, можно выписать следующую оценку:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\} = \exp(-\lambda \cdot \operatorname{vol}_d([0,a]^d \setminus V)) \geqslant \exp(-\lambda \cdot (2ra^{d-1}) \cdot dh) \geqslant \exp(-\lambda \cdot da^d).$$

Заметим, что при условии, что центры шаров лежат только в выбранных ячейках, события $\{K^j \geqslant n/(h+1)^d\}$ – это с точностью до гомотетии то же самое, что событие $\{\widetilde{K}_1 \geqslant n/(h+1)^d\}$, где $\widetilde{K}_1$ – минимальное необходимое количество шаров для задачи в единичном кубе с постоянными радиусами $\widetilde{R}_1 = R_1 \cdot \left(\dfrac{a-2rh}{h+1} \right)^{-1}$ и интенсивностью $\widetilde{\lambda} = \lambda \cdot \left(\dfrac{a-2rh}{h+1} \right)^{d}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{K^j \geqslant n/(h+1)^d \mid \xi_i \in V \text{ для } i = 1, \dots, N\} = \mathbb{P}\{\widetilde{K}_1 \geqslant n/(h+1)^d\} \geqslant \\ &\quad \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d \log(n/(h+1)^d) + \gamma \cdot n/(h+1)^d \log \widetilde{\lambda} + O(n/(h+1)^d) \right) \geqslant \\ &\quad\quad \geqslant \exp\left(-\beta \cdot n/(h+1)^d (\log n - d \log a) + \gamma \cdot n/(h+1)^d \log \lambda + O(n/(h+1)^d) \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $n\log\widetilde{\lambda} = n\log\lambda + O(n)$. Также, используя то, что $(h + 1)^d \cdot O(n/(h + 1)^d) = O(n)$, получаем

$$\mathbb{P}\{K_a \geqslant n\} \geqslant \exp\left(-\lambda d a^d - \beta\cdot n(\log n - d\log a) + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right) = \\ \exp\left(-\beta\cdot n\log n + \beta\cdot dn\log a + \gamma\cdot n\log\lambda + O(n)\right).$$

□

Следствие 1 (теорема 1)**.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

Доказательство. Эта оценка следует из proposition 10 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

Следствие 2 (теорема 2)**.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_2-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{2}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

Доказательство. Эта оценка следует из proposition 9 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

Следствие 3. Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_∞-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a + n\log\lambda + O(n)\right),\ n,a\to\infty.$$

Доказательство. Эта оценка следует из proposition 11 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \geqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + n\log\lambda + O(n)\right),\ n\to\infty.$$

применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

4.2 Верхние оценки

Следующая теорема верна для любой нормы.

Теорема 6. *Пусть $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$ и $n \gg a^d$. Предположим, что неравенство*

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n\log n + \gamma \cdot n \log \lambda + o(n\log n)\right), \ n \to \infty$$

верно радиусов R_1 с некоторым распределением и для радиусов $\widetilde{R}_1 = R_1(\lfloor a \rfloor/a)$ одновременно. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + o(n\log n)\right), \ n, a \to \infty.$$

Доказательство. Разобьем куб $[0,a]^d$ на такие ячейки:

$$\prod_{m=1}^{d}\left[\frac{k_m a}{\lfloor a \rfloor}, \frac{(k_m+1)a}{\lfloor a \rfloor}\right],$$

где $k_m \in \{0, 1, \ldots, \lfloor a \rfloor - 1\}$. Пусть это ячейки $V_1, \ldots, V_l$, где $l = \lfloor a \rfloor^d$. Определим картинку, образованную ячейкой V_j, следующим образом:

$$S^j = \bigcup_{\substack{i \in \{1,\ldots,N\}:\\ \xi_i \in V_j}} B(\xi_i, R_i) \cap V_j.$$

Назовём минимальным числом видимых шаров в ячейке V_j следующую величину:

$$K^j = \min\{s \geqslant 1 \mid \exists i_1, \ldots i_s \in \{1, \ldots, N\} \colon \xi_{i_t} \in V_j, \ t = 1, \ldots, s; \ S^j = \bigcup_{t=1}^{s} B(\xi_{i_t}, R_1) \cap V_j\}.$$

Рассмотрим событие

$$E = \bigcup_{\substack{\{n_1,\ldots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0 \ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \bigcap_{s=1}^{l} \{K^s \geqslant n_s\}.$$

Заметим, что из события $\{K_a \geqslant n\}$ следует событие E. Действительно, если $K_a \geqslant n$, то и $\sum K^s \geqslant n$. Тогда существует набор $\{n_1, \ldots n_l\}$ с $n_s \geqslant 0$ $\forall s$ и $\sum n_s = n$, для которого выполнено $K^s \geqslant n_s$ для всех $s = 1, \ldots l$. Это и есть событие E.

Вычислим вероятность события $\{K^s \geqslant n_s\}$. С точностью до гомотетии это то же самое, что $\widetilde{K}_1 \geqslant n_s$, где $\widetilde{K}_1$ обозначает минимальное число видимых шаров в кубе $[0,1]^d$, рассматриваемое раньше, но с интенсивностью пуассоновского поля $\widetilde{\lambda} = \lambda(a/\lfloor a \rfloor)^d$ и радиусами $\widetilde{R}_1 = R_1(\lfloor a \rfloor/a)$.

Заметим также, что события $\{K^s \geqslant n_s\}$ независимы для различных s. Таким образом,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[E] \leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \mathbb{P}[K^s \geqslant n_s] = \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \mathbb{P}[\widetilde{K}_1 \geqslant n_s] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \prod_{s=1}^{l} \exp(-\beta \cdot n_s \log n_s + \gamma \cdot n_s \log \widetilde{\lambda} + o(n_S \log n_s)) =$$

$$= \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^{l} n_s \log n_s + \gamma \cdot n \log \widetilde{\lambda} + \sum_{s=1}^{l} o(n_s \log n_s)\right).$$

Нетрудно убедиться, что минимум выражения $\sum_{s=1}^{l} n_s \log n_s$ достигается на наборе $\{n/l, \dots, n/l\}$. Также заметим, что $n \log \widetilde{\lambda} = n \log \lambda + o(n \log n)$ и $\sum_{s=1}^{l} o(n_s \log n_s) = o(n \log n))$. Получим, что

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot \sum_{s=1}^{l} \frac{n}{l} \log \frac{n}{l} + \gamma \cdot n \log \lambda + o(n \log n)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\{n_1,\dots n_l\}:\\ n_s \geqslant 0\ \forall s,\\ \sum n_s = n}} \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + o(n \log n)\right).$$

Посчитаем количество способов разбиения числа n на $\lfloor a \rfloor^d$ неотрицательных слагаемых:

$$\binom{n + \lfloor a \rfloor^d - 1}{\lfloor a \rfloor^d - 1} \leqslant \frac{(n + a^d)^{a^d}}{(\lfloor a \rfloor^d - 1)!} = \exp\left(a^d + a^d \log\left(\frac{n}{a^d} + 1\right) - \frac{d}{2} \log a + o(n)\right) = \exp(o(n)).$$

Объединяя все полученные неравенства, получаем, что

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\beta \cdot n \log n + \beta \cdot dn \log a + \gamma \cdot n \log \lambda + o(n \log n)\right).$$

□

Следствие 4 (теорема 4)**.** Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_1-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d \lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn \log a + n \log \lambda + o(n \log n)\right),\ n, a \to \infty.$$

Доказательство. Эта оценка следует из proposition 19 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + n\log\lambda + o(n\log n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

Следствие 5. Пусть $R_1 \equiv r > 0$ п.н., где шары берутся в ℓ_2-норме, $d \geqslant 2$, $n \gg a^d\lambda$, и $n \gg a^d$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right) dn\log a + n\log\lambda + o(n\log n)\right),\ n, a\to\infty.$$

Доказательство. Эта оценка следует из proposition 21 в [2]. Из доказательства этого утверждения видно, что есть оценка

$$\mathbb{P}[K_1 \geqslant n] \leqslant \exp\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + n\log\lambda + o(n\log n)\right),\ n\to\infty.$$

Применяя доказанную выше теорему, получаем требуемое. □

Следствие 6. Пусть распределение R_1 таково, что $\sup_{x>0}\mathbb{P}[R_1 \in [x, x+r]] \leqslant cr^\alpha$ для некоторых $c > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и всех $r > 0$. Предположим, что $d \geqslant 1$, $n \gg a^d$ и $n \gg a^d\lambda$. Тогда

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(-(1+\alpha/d)\, n\log n + (1+\alpha/d) dn\log a + n\log\lambda + o(n\log n)\right),\ n, a\to\infty.$$

Доказательство. Написать доказательство!!! Для этого надо вытащить лямбду из предложения 18 из статьи. □

Список литературы

[1] F. Aurzada, S. Dereich, M. Scheutzow, C. Vormoor, High resolution quantization and entropy coding of jump processes, J. Complexity 25 (2) (2009) 163–187.

[2] F. Aurzada, M. Lifshits, How complex is a random picture? Journal of Complexity 53 (2019) 133–161.

[3] S.N. Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, Wiley Series in Probability and Statistics, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2013, p. xxvi+544.

[4] T.M. Cover, J.A. Thomas, Elements of Information Theory, second ed., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006, p. xxiv+748.

[5] S. Dereich, The coding complexity of diffusion processes under supremum norm distortion, Stochastic Process. Appl. 118 (6) (2008) 917–937.

[6] S. Graf, H. Luschgy, Foundations of Quantization for Probability Distributions, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1730, Springer-Verlag, Berlin, 2000, p. x+230.

[7] A.N. Kolmogorov, Three approaches to the quantitative definition of information, Int. J. Comput. Math. 2 (1968) 157–168.

[8] R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, 2008, p. xii+693.