1 Введение

Пусть S – случайный элемент некоторого метрического пространства $(X, dist)$. Средней ошибкой дискретизации называется величина

$$D^{(q)}(r) := \inf_{\#\mathcal{C}\leqslant e^r} \mathbb{E} \min_{A\in\mathcal{C}} dist(S, A), \quad r > 0.$$

Скорость ее убывания при стремлении r к бесконечности характеризует сложность распределения S. *Тут надо добавить ссылки на существующие результаты.*

В работе [1] рассматривалась ошибка дискретизации для случайного множества, рассматриваемого как случайный элемент пространства компактов, снабжённого метрикой Хаусдорфа $d_H(A,B) := \max(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|)$. В качестве случайного множества была взята стандартная Булева модель (Boolean model), которая устроена следующим образом.

Рассмотрим куб $[0,a]^d$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. В результате [1] изучался случай $a = 1$. Рассмотрим случайный набор шаров с центрами в этом кубе, определенный следующим образом: пусть центры шаров ξ_i — независимые случайные величины, распределенные равномерно в $[0,a]^d$, радиусы R_i — некоторые независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины, а количество шаров N — пуассоновская случайная величина с параметром $a^d\lambda > 0$. Все эти случайные величины независимы. Отметим, что при таком построении множество $(\xi_i)_{i\leqslant N}$ — это Пуассоновский точечный процесс с интенсивностью λ.

Обозначим через $B(\xi_i, R_i)$ шар с центром в ξ_i радиуса R_i (пока что мы не фиксируем норму в $\mathbb{R}^d$). Мы будем рассматривать "картинку", образованную этим наборов шаров:

$$S_a = \bigcup_{i=1}^{N} B(\xi_i, R_i) \cap [0,a]^d.$$

Заметим, что свойства S будут зависеть от рассматриваемой нормы.

Результаты [1] основаны на изучении вероятностей больших уклонений величины

$$K_a = \min\{r \geqslant 1 | \exists i_1,\ldots,i_r \subset \{1,\ldots,N\} : S_a = \bigcup_{l=1}^{r} B(\xi_{i_l}, R_{i_l}) \cap [0,a]^d\},$$

называемой *минимальным числом видимых шаров*, то есть на нахождении асимптотики $\mathbb{P}[K_a \geqslant n]$ при n, стремящемся к бесконечности.

В настоящей работе некоторые из этих оценок распространяются на случай, когда параметр a стремится к бесконечности, причем $n >> a^d$.

Заметим, что тривиальная оценка, вытекающая из свойств пуассоновского распределения, такова:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[N \geqslant n] \sim \mathbb{P}[N = n] = \\ = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \sim \left(\frac{ea^d\lambda}{n}\right)^n e^{-a^d\lambda}\sqrt{2\pi n} = \exp(-n\log n + n\log(a^d\lambda) + O(n)) = \\ = \exp((-n\log n + dn\log a)\cdot(1+o(1))),\ n\to\infty, a\to\infty.\end{aligned}$$

Условие $n >> a^d$ гарантирует то, что вероятность больших уклонений стремится к нулю, так как $-n\log(n/a^d)$ стремится к минус бесконечности с ростом n и a. Также заметим, что $0 < \log(a^d)/\log n < 1$, поэтому можно утверждать, что $dn\log a = O(n\log n)$.

Получены (*пока что :)*) более точные оценки вероятности больших уклонений в случае l_1-нормы, а именно, что существует число $\beta > 1$, для которого

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] = \exp((-\beta \cdot n\log n + \beta \cdot dn\log a) \cdot (1 + o(1))),\ n \to \infty, a \to \infty.$$

Число β зависит от размерности d, используемой нормы и распределения радиусов R_i.

2 Важная переформулировка

Рассмотрим следующую аналогичную переформулировку нашей задачи, которая, хоть и менее интуитивна, более приятна для работы. Будем рассматривать единичный куб в $\mathbb{R}^d$ и следующий случайный набор шаров с центрами в нём. Пусть центры шаров $\widetilde{\xi_i}$ независимы и равномерно распределены в единичном кубе, радиусы $\widetilde{R_i}$ — некоторые независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины (они связаны с исходными радиусами соотношениями $\widetilde{R_i} = R_i/a$), а количество шаров $\widetilde{N}$ — пуассоновская случайная величина с параметром $a^d\lambda$.

Тогда наша случайная картинка определяется как

$$\widetilde{S_a} = \bigcup_{i=1}^{N} B(\widetilde{\xi_i}, \widetilde{R_i}) \cap [0,1]^d,$$

а минимальное число видимых шаров:

$$K_a = \min\{r \geqslant 1 | \exists i_1, \dots, i_r \subset \{1, \dots, \widetilde{N}\} : \widetilde{S_a} = \bigcup_{l=1}^{r} B(\widetilde{\xi_{i_l}}, \widetilde{R_{i_l}}) \cap [0,1]^d\}.$$

Задача оценки остается такой же.

3 Нижние оценки для вероятности больших уклонений

Будем пользоваться второй переформулировкой (когда размер куба фиксирован) задачи и рассмотрим случай, когда радиусы – это константа r/a, где a – наш параметр, $r < 1$. Это соответствует ситуации, когда размер куба стремится к бесконечности, а радиусы шаров п.н. равны некоторой константе r.

Теорема 1. *Пусть* $R_1 \equiv \dfrac{r}{a}$ *п.н., где* $r < 1$*, шары берутся в* l_1*-норме, и* $d \geqslant 2$*. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(\left(-\left(1 + \frac{1}{d-1}\right) n\log n + \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) dn\log a\right)(1 + o(1))\right), n, a \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{a^{1/(d-1)}(k_m+1/4)}{(4n)^{1/(d-1)}}, \frac{a^{1/(d-1)}(k_m+3/4)}{(4n)^{1/(d-1)}}\right]\right\}\times$$
$$\left\{\left[l\left(\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}+\frac{2r}{a}\right), l\left(\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}+\frac{2r}{a}\right)+\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}\right]\right\},$$

где $k_m \in \{0,\dots,\lfloor(4n/a)^{1/(d-1)}\rfloor-1\}$, $l\in\{0,\dots,\lfloor a/2\rfloor\}$, $c_1=2^{-(2+2/(d-1))}$.

Все эти ячейки лежат в кубе $[0,1]^d$. По первым $d-1$ координатам это очевидно, проверим по последней. Действительно,

$$\frac{a}{2}\left(\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}+\frac{2r}{a}\right)+\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}=\frac{c_1a^{d/(d-1)}}{2n^{1/(d-1)}}+\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}+r<1$$

при достаточно больших a и n.

Мы получили порядка $4n/a\cdot a/2=2n$ ячеек, поэтому можно выбрать из них n непересекающихся. Назовем их $V_1,\dots,V_n$ и рассмотрим событие

$$E=\{N=n\}\cap\bigcup_{\pi\text{ – перестановка }\{1,\dots,n\}}\{\xi_i\in V_{\pi(i)}, i=1,\dots,n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $K\geqslant n$. Действительно, пусть выполнено E. Докажем, что тогда в каждом шаре $B(\xi_i,R_1)$ есть точка, не покрытая никаким другим шаром $B(\xi_j,R_1)$. Действительно, если $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в разных интервалах, то расстояние между ними хотя бы $2R_1$, поэтому шары не пересекаются. Рассмотрим случай, когда $\xi_i^{(d)}$ и $\xi_j^{(d)}$ лежат в одном интервале. Пусть точка $x_i=\xi_i+(0,\dots,0,R_1)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0,1]^d$. Итак, при $j\neq i$

$$\|x_i-\xi_j\|_1=|\xi_i^{(d)}+R_1-\xi_j^{(d)}|+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|\geqslant$$
$$\geqslant R_1-|\xi_i^{(d)}-\xi_j^{(d)}|+\sum_{m=1}^{d-1}|\xi_i^{(m)}-\xi_j^{(m)}|\geqslant R_1-\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}+\frac{1/2\cdot a^{1/(d-1)}}{(4n)^{1/(d-1)}}>R_1.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a\geqslant n]\geqslant\mathbb{P}[E]=\frac{(a^d\lambda)^n}{n!}e^{-a^d\lambda}\cdot n!\cdot\left(\left(\frac{1/2\cdot a^{1/(d-1)}}{(4n)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1}\cdot\frac{c_1a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}\right)^n=$$
$$=\exp\left(dn\log a-a^d\lambda-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n+\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log a+O(n)\right)=$$
$$=\exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n+\left(1+\frac{1}{d-1}\right)dn\log a\right)(1+o(1))\right).$$

□

Теорема 2. *Пусть $R_1 \equiv \dfrac{r}{a}$ п.н., где $r < 1$, шары берутся в l_2-норме, и $d \geqslant 2$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(\left(-\left(1+\frac{2}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d}\right)n\log a^d\right)(1+o(1))\right), n\to\infty, a\to\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим набор ячеек:

$$\left\{\prod_{m=1}^{d-1}\left[\frac{k_m+1/4}{(2n)^{1/(d-1)}}, \frac{k_m+3/4}{(2n)^{1/(d-1)}}\right]\right\} \times \left[0, \frac{c_2 a}{n^{1/(d-1)}}\right],$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor (2n)^{1/(d-1)} \rfloor - 1\}$, $c_2 = 2^{-(4+2/(d-1))}$.

Замечание. *Здесь ячейки (то есть множители а в них) подобраны так, чтобы оценка получилась оптимальная, как и в предыдущей теореме.*

Затем выберем n непересекающихся ячеек $V_1, \dots, V_n$ и рассмотрим событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcup_{\pi \text{ – перестановка } \{1,\dots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что событие E влечет событие $K_a \geqslant n$. Действительно, пусть выполнено E. Докажем, что тогда в каждом шаре $B(\xi_i, R_1)$ есть точка, не покрытая никаким другим шаром $B(\xi_j, R_1)$. Это будет точка $x_i = \xi_i + (0, \dots, 0, R_1)$. Заметим, что для достаточно больших n и a эта точка действительно лежит в кубе $[0,1]^d$. Итак, при $j \neq i$

$$\|x_i - \xi_j\|_2 = |\xi_i^{(d)} + R_1 - \xi_j^{(d)}|^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geqslant$$
$$\geqslant R_1^2 + 2R_1|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| + (\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)})^2 + \sum_{m=1}^{d-1} |\xi_i^{(m)} - \xi_j^{(m)}|^2 \geqslant$$
$$\geqslant R_1^2 - 2rc_2 n^{-2/(d-1)} + \left(\frac{1/2}{(2n)^{1/(d-1)}}\right)^2 \geqslant R_1^2.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{(a^d\lambda)^n}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(\left(\frac{1/2}{(2n)^{1/(d-1)}}\right)^{d-1} \cdot \frac{c_2 a}{n^{1/(d-1)}}\right)^n =$$
$$= \exp\left(n\log a^d - a^d\lambda - \left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + n\log a + O(n)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right)n\log n + \left(1+\frac{1}{d}\right)n\log a^d\right)(1+o(1))\right).$$

□

Теорема 3. *Пусть* $R_1 \equiv \dfrac{r}{a}$ *п.н., где* $r < 1$*, шары берутся в* l_∞*-норме, и* $d \geqslant 2$*. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + dn\log a\right)(1+o(1))\right), n\to\infty, a\to\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем ρ_1, ρ_2, такие, что $r < \rho_1 < \rho_2 < 1$. Заметим, что тогда $r/a < \rho_1 < \rho_2 < 1$ для любого $a \geqslant 1$. Далее сделаем все то же самое, что в статье. Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \left\{x \in [0,1]^d \colon \sum_{m=1}^{d} x^{(m)} = d\rho_2, \min_{1\leqslant m\leqslant d} x^{(m)} > \rho_1\right\}.$$

Для достаточно малой константы c_1 выберем n точек $\beta_1, \ldots, \beta_n$ из H, чтобы выполнялось $\|\beta_i - \beta_j\|_1 > c_1 n^{1/(d-1)}$ для всех $i \neq j$. Теперь рассмотрим ячейки $V_i = B(\beta_i, c_2 n^{-1/(d-1)})$, где $c_2 < c_1/(4d)$. И определим следующее событие

$$E = \{N = n\} \cap \bigcup_{\pi \text{ – перестановка } \{1,\ldots,n\}} \{\xi_i \in V_{\pi(i)}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Затем показывается, что из события E следует событие $K_a \geqslant n$. В итоге получаем:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \geqslant \mathbb{P}[E] = \frac{a^d\lambda}{n!} e^{-a^d\lambda} \cdot n! \cdot \left(c_2 n^{-1/(d-1)}\right)^d n =$$
$$= \exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + dn\log a\right)(1+o(1))\right).$$

□

4 Верхние оценки для вероятности больших уклонений

Теорема 4. *Пусть* $R_1 \equiv \dfrac{r}{a}$ *п.н., где* $r < 1$*, шары берутся в* l_1*-норме, и* $d \geqslant 2$*. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log a^d\right)(1+o(1))\right), n\to\infty, a\to\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Объединение шаров в группы. Пусть

$$S = \bigcup_{i=1}^{K_a} B(\xi_i, R_1) \cap [0,1]^d$$

обозначает неуменьшаемое представление картинки S. Тогда для каждого числа $i \leqslant K_a$ существует точка $\nu_i \in B(\xi_i, R_1) \cap [0,1]^d$, которая не лежит ни в каком другом шаре $B(\xi_j, R_1), j \neq i$. Зафиксируем такие $\nu_i, i = 1, 2, \ldots K_a$. Обозначим $\Delta_i := \nu_i - \xi_i$.

Объединим шары в группы $J_0, J_1^+, J_1^-, \dots J_d^+, J_d^-$ следующим образом. Определим $J_0 := \{i\colon \|\Delta_i\|_1 \leqslant R_1/2\}$. Оценим мощность этого множества. Для любых $i, j \in J_0$ выполнено:

$$R_1 < \|\nu_j - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\nu_i - \xi_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + \|\Delta_i\| \leqslant \|\nu_j - \nu_i\| + R_1/2.$$

То есть $\|\nu_j - \nu_i\| > R_1/2$, а значит, $\#J_0 \leqslant c_1(R_1)^{-d} = c_1 r^{-d} a^d$, где константа $c_1 = 2^d / \operatorname{vol}_d B(0,1)$.

Теперь пусть $i \notin J_0$. Значит,

$$\|\Delta_i\|_\infty \geqslant c_2 \|\Delta_i\|_1 > c_2 R_1/2,$$

где c_2 – контанта, зависящаятолько от нормы. Поэтому i принадлежит одному из $2d$ множеств вида:

$$J_m^+ := \{i\colon \Delta_i^{(m)} > c_2 R_1/2\}, \quad J_m^- := \{i\colon \Delta_i^{(m)} < -c_2 R_1/2\}.$$

Шаг 2. Оценка расстояний между центрами. Пусть $\sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – проекция, определенная таким образом:

$$\sigma x := (x^{(1)}, \dots x^{(d-1)}, 0).$$

Лемма 1 (Lemma 20 из статьи.)**.** *Пусть $i, j \in J_d^+$, $i \neq j$, и пусть $c_3 := c_2 r/2$. Тогда*

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1, c_3/a].$$

Доказательство. См. статью. □

Шаг 3. Подсчет ячеек, содержащих центры шаров. Зафиксируем большое число $A > 0$ и покроем куб $[0,1]^d$ следующим набором ячеек:

$$V_{\bar{k},k_d} := \prod_{m=1}^{d} \left[\frac{Ak_m}{(na^{-1})^{1/(d-1)}}, \frac{A(k_m+1)}{(na^{-1})^{1/(d-1)}} \right],$$

где $k_m \in \{0, \dots, \lfloor A^{-1}(na^{-1})^{1/(d-1)} \rfloor\}$ для $1 \leqslant m \leqslant d$ и мульти-индекса $\bar{k} := (k_1, \dots, k_{d-1})$.

Зафиксируем некоторый индекс $\bar{k}$ и оценим количество ячеек, содержащих центры шаров:

$$N(\bar{k}, d, +) := \#\{k\colon \xi_i \in V_{\bar{k},k} \text{ для некоторого } i \in J_d^+\}.$$

Заметим, что если $\xi_i \in V_{\bar{k},\kappa_i}$ и $\xi_j \in V_{\bar{k},\kappa_j}$ для некоторых $i, j \in J_d^+$, то

$$\|\sigma\xi_i - \sigma\xi_j\|_1 \ \leqslant \ (d-1)A(an^{-1})^{1/(d-1)}.$$

Поэтому по лемме

$$|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \notin [(d-1)A(an^{-1})^{1/(d-1)}, c_3/a].$$

Замечание. *При достаточно больших a, n этот интервал определен (то есть левый конец меньше правого).*

Исходя из этого, разобьем $[0,1]$ на $\lceil ac_3^{-1}\rceil$ частей длины не более c_3/a, и заметим, что если $\xi_i^{(d)}, \xi_j^{(d)}$ лежат в одной части, то $|\xi_i^{(d)} - \xi_j^{(d)}| \leqslant (d-1)A(an^{-1})^{1/(d-1)}$. Поэтому тогда $|\kappa_i - \kappa_j| \leqslant d$. Отсюда получаем искомую оценку:

$$N(\bar{k}, d, +) \leqslant d\lceil ac_3^{-1}\rceil =: ac_4.$$

Теперь мы можем получить общее число ячеек, содержащих центры:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{m=1}^{d} (N(\bar{k}, m, +) + N(\bar{k}, m, -)) \leqslant (2d) \cdot (ac_4) \cdot (na^{-1}A^{-(d-1)}) =: \frac{c_5 n}{A^{d-1}}.$$

Замечание. *Размер ячеек специально выбирался так, чтобы общее количество ячеек, содержащих центры, не зависело от a. Иначе в финальном рассуждении мы не смогли бы избавиться от громоздкого множителя, взяв достаточно большое A. Чтобы все было хорошо (хотя бы с членом $n \log n$ в финальной асимптотике), надо чтобы этот множитель был $O(n)$. Из всех таких степеней a я выбрала ту, которая дает наилучшую оценку.*

Пусть $\mathcal{U}$ – семейство всех возможных объединений из $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек. Их количество – число способов выбрать $\left\lfloor \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \right\rfloor$ ячеек из $\left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rceil$. Поэтому можно выписать следующую простую оценку:

$$\#\mathcal{U} \leqslant \exp\left(\frac{c_5 n}{A^{d-1}} \log \left\lceil \frac{n^{d/(d-1)}}{a^{d/(d-1)A^d}} \right\rceil \right) = \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n \log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d \right) (1 + o(1)) \right).$$

Для каждого $U \in \mathcal{U}$ объем можно оценить так:

$$\mathrm{vol}_d(U) \leqslant \frac{c_5 n}{A^{d-1}} \left(\frac{A a^{1/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}} \right)^d = \frac{A c_5 a^{d/(d-1)}}{n^{1/(d-1)}}.$$

Шаг 4. Оценка вероятности. Напомним, что

$$K_a = \#J_0 + \#\left(\bigcup_{m=1}^{d} (J_m^+ \cup J_m^-) \right) =: K^{(0)} + K^{(\pm)}.$$

Заметим, что для некоторого случайного множества $U \in \mathcal{U}$ выполнено:

$$N_U := \#\{i : \xi_i \in U\} \geqslant K^{(\pm)}.$$

Пусть $c_6 := c_1 r^{-d}$. Тогда, как мы помним, $K^{(0)} \leqslant c_6 a^d$.

Поэтому, пользуясь тем, что случайная величина N_U имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $a^d\lambda\,\mathrm{vol}_d(U)$, получаем следующую оценку:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \mathbb{P}[K^{(\pm)} \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \sum_{U\in\mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant \#\mathcal{U} \cdot \max_{U\in\mathcal{U}} \mathbb{P}[N_U \geqslant n - c_6 a^d] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n\log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d\right)(1+o(1))\right)\left(\frac{a^d\lambda\,\mathrm{vol}_d(U)e}{n - c_6 a^d}\right)^{n-c_6a^d} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} n\log n + \frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} n \log a^d\right)(1+o(1))\right)\left(\frac{(a^d\lambda A c_5 a^{d/(d-1)}e)n^{-1/(d-1)}}{n - c_6 a^d}\right)^{n-c_6a^d} =$$

$$= \exp\left(\left(\left(\frac{c_5 d}{(d-1)A^{d-1}} - 1 - \frac{1}{d-1}\right) n\log n + \left(\frac{c_5}{(d-1)A^{d-1}} + 1 + \frac{1}{d-1}\right) n \log a^d\right)(1+o(1))\right).$$

Здесь использовался тот факт, что $a^d = o(n)$, а также следующее равенство:

$$n\log(n - c_6a^d) = n\log(n-c_6a^d) - n\log n + n\log n = n\log(1 - c_6a^d/n) + n\log n = n\log n + o(n).$$

Так как A может быть выбрана сколь угодно большой, получаем:

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + \left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log a^d\right)(1+o(1))\right).$$

$\square$

% Интересно, является какая-нибудь из этих оценок точной?

Теорема 5. *Пусть $R_1 \equiv \dfrac{c}{a}$ п.н., где $c < 1$, шары берутся в l_2-норме, и $d \geqslant 2$. Тогда*

$$\mathbb{P}[K_a \geqslant n] \leqslant \exp\left(\left(-\left(1+\frac{1}{d-1}\right) n\log n + (d+2)n\log a\right)(1+o(1))\right), n\to\infty, a\to\infty.$$

% Как-то тут совсем все не сходится.

Доказательство. Аналогично случаю l_1, как и в статье. $\square$

Список литературы

[1] Frank Aurzada, Mikhail Lifshits, How complex is a random picture?, Journal of Complexity 53 (2019) 133–161.