

# TD1 - Analyse en composante Principale

MAF 2025-2026

## Avant-propos

Les TD et TP du cours MAF servent trois objectifs:

- Revenir sur certaines notions de cours pour mieux les appréhender
- donner des outils pratiques pour mettre en oeuvre les méthodes vues en cours,
- réfléchir à leur mise en oeuvre et leur application dans des cas concrets.

Il est donc fréquent que l'on fasse certaine partie avec peu d'outils (à la main) pour bien faire le lien avec les concets de cours, tandis que d'autres servent d'exemple pour illustrer comment dérouler une analyse sur un jeu de données en particulier.

## Faire le lien avec le cours

On s'intéresse à un jeu de données de 100 individus, pour lesquels on mesure 4 variables

- le poids en  $Kg$  (variable  $P$  )
- la taille en  $m$ ,
- la longueur de pas en  $cm$ ,
- la vitesse de marche en  $m.s^{-1}$ .

```
# A tibble: 4 x 3
  variable      moyenne variance
  <chr>      <num:.4!> <num:.4!>
1 weight      68.8150  153.3425
2 height       1.6898   0.0082
3 steplength   70.5010   52.1415
4 walkingspeed  1.3453   0.0203
```

1. Que peut-on dire de la dispersion le long de chacun des axes initiaux.

2. Combien vaut l'inertie projeté sur l'axe de vecteur directeur  $(1, 0, 0, 0)^\top$  ?
3. Combien vaut l'inertie projeté sur l'axe de vecteur directeur  $(0, 1, 0, 0)^\top$  ?

On note  $X$  de dimension  $100 \times 4$  la matrice des données centrées. Chaque individu a le même poids.

4. On souhaite utiliser la distance euclidienne puis réaliser une ACP. le cours indique qu'on diagonalise la matrice  $M^{1/2}VM^{1/2}$ . Indiquer ce que sont les matrices  $V$  et  $M$  impliquées.
5. On diagonalise la matrice  $M^{1/2}VM^{1/2}$  et on obtient les valeurs propres suivantes. Quelle est l'inertie portée par le premier plan principal, quel pourcentage de l'inertie totale ceci représente-t-il ? Pensez vous qu'on ait ainsi une bonne manière de représenter les données initiales en seulement deux dimensions ?

[1] 160.754 44.752 0.004 0.002

6. Si on souhaite réaliser une ACP normée, on change de métrique, quelle est l'inertie portée par l'axe de vecteur directeur  $(1, 0, 0, 0)^\top$  dans ce cas ?
7. Que deviennent les matrices  $V$  et  $M$  dans ce cas ?
8. Les valeurs propres de  $MVM$  sont données ci-dessous. Quelle est maintenant la part d'inertie représentée sur le premier axe principal, sur le premier plan principal.

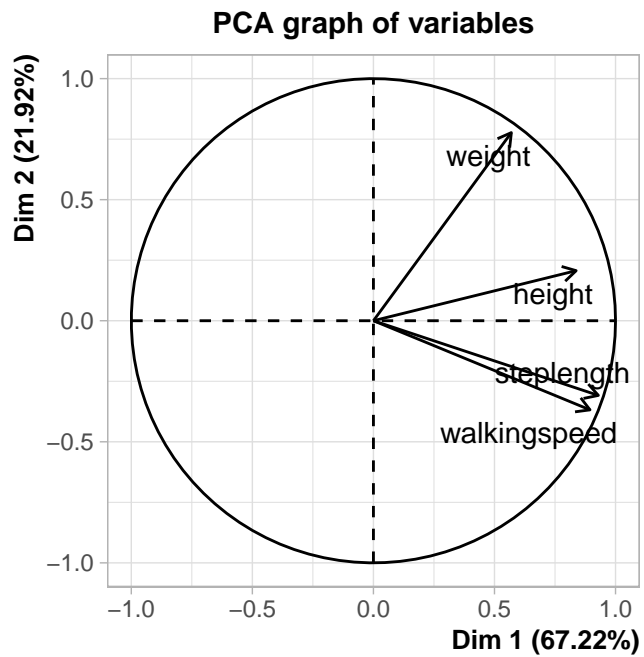
[1] 2.689 0.877 0.377 0.058

9. On utilise le package **FactoMineR** pour réaliser l'ACP. Peut on deviner quelle est la métrique utilisée par défaut ? Quelles sont les variables bien représentées ? Discuter du lien entre les variables.

```
walking_dta_pca <- PCA(walking_dta, graph = FALSE)
walking_dta_pca$eig
```

|        | eigenvalue | percentage of variance | cumulative percentage of variance |
|--------|------------|------------------------|-----------------------------------|
| comp 1 | 2.68869333 | 67.217333              | 67.21733                          |
| comp 2 | 0.87687700 | 21.921925              | 89.13926                          |
| comp 3 | 0.37659068 | 9.414767               | 98.55403                          |
| comp 4 | 0.05783899 | 1.445975               | 100.00000                         |

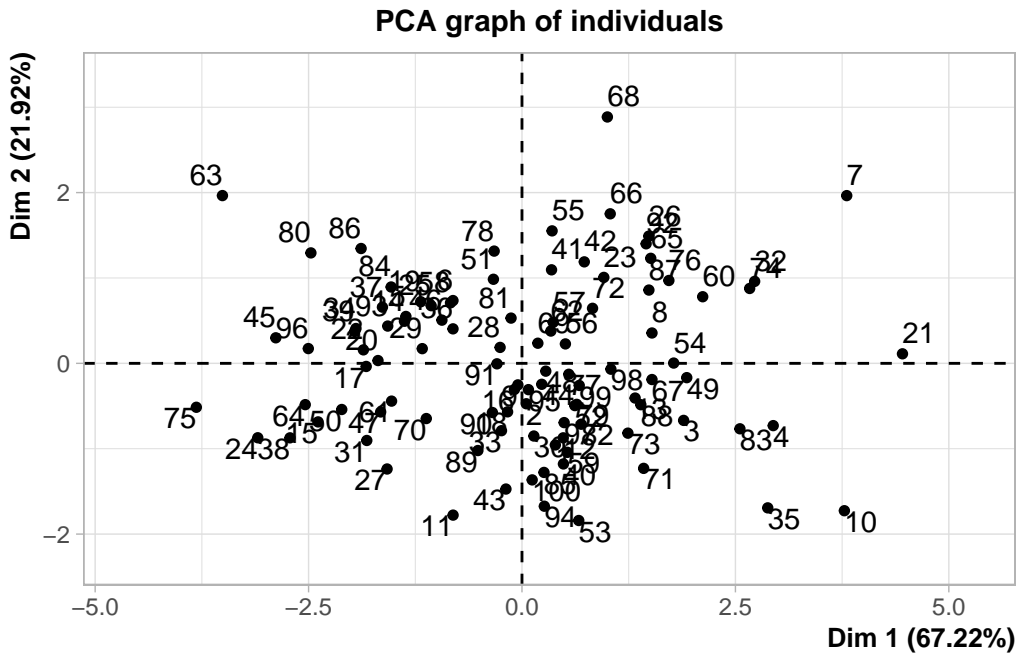
```
plot(walking_dta_pca, choix = "var")
```



10. En utilisant le graphique ci-dessous, que pouvez-vous dire

- sur l'individu 10 ?
- sur l'individu 94 ?

```
plot(walking_dta_pca, choix = "ind")
```



11. Quels sont les individus qui contribuent le plus à la formation du premier axe ?

```
walking_dta_pca$ind$contrib |> as_tibble() |> rowid_to_column("Ind") |> arrange(-Dim.1)
```

```
# A tibble: 100 x 5
  Ind Dim.1 Dim.2 Dim.3 Dim.4
  <int> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>
1    21  7.39 0.0142  1.09  0.0424
2    75  5.41 0.302   2.09  1.94
3     7  5.38 4.40    1.15  2.90
4    10  5.30 3.40    2.80  2.01
5    63  4.58 4.40    0.233 0.233
6    24  3.56 0.866   0.333 3.48
7     4  3.22 0.607   0.645 0.594
8    45  3.09 0.102   0.0596 0.242
9    35  3.08 3.27    0.0590 0.715
10   32  2.76 1.05    1.54  0.663
# i 90 more rows
```

12. Quels sont les individus les mieux représentés sur le premier axe ?

```
walking_dta_pca$ind$cos2 |> as_tibble() |> rowid_to_column("Ind") |> arrange(-Dim.1)
```

```
# A tibble: 100 x 5
  Ind Dim.1      Dim.2      Dim.3      Dim.4
  <int> <dbl>      <dbl>      <dbl>      <dbl>
1    17 0.994 0.000398 0.00178 0.00398
2    54 0.990 0.00000331 0.00686 0.00347
3    45 0.985 0.0106 0.00266 0.00166
4    21 0.979 0.000615 0.0202 0.000121
5    96 0.972 0.00465 0.0184 0.00483
6    29 0.962 0.0209 0.0000642 0.0169
7    64 0.957 0.0348 0.00753 0.000453
8    34 0.936 0.0412 0.0111 0.0120
9    75 0.926 0.0169 0.0502 0.00713
10    8 0.925 0.0505 0.0144 0.0100
# i 90 more rows
```

13. Comment sont définies ces deux quantités ?
14. Comment mesurer la qualité de la représentation sur le premier plan ?

## Une première ACP. Etude des performance au Décathlon

La package `FactoMineR` contient un jeu de données sur des performances au Décathlon. Le tableau de données contient 41 lignes et 13 colonnes. Les dix premières colonnes correspondent aux performances des athlètes pour les dix épreuves du décathlon et les colonnes 11 et 12 correspondent respectivement au rang et au nombre de points obtenus. La dernière colonne indique la compétition durant laquelle a eu lieu cette performance (Jeux Olympiques de 2004 ou Décastar 2004). Les lignes sont identifiés avec le nom de l'athlète.

Chargez la package `FactoMineR` et le tableau de données en tapant la ligne de code suivante :

```
library(FactoMineR)
data("decathlon")
```

1. Discuter de la nature des variables

Le code ci-dessous calcule des résumés quantitatifs pour les variables pertinentes.

```
decathlon |> summarise(across(is.numeric, list(moyenne=mean, variance=var ))) |>
  pivot_longer(
    everything(),
    names_to = c("variable", ".value"),
    names_sep = "_"
```

```
) |>
  mutate(variance = variance *(n-1)/n) |> # pour corriger la variance par défaut de R
  mutate(across(is.numeric, \(x) round(x, 2)))
```

```
# A tibble: 12 x 3
  variable      moyenne variance
  <chr>         <dbl>     <dbl>
1 100m           11         0.07
2 Long.jump      7.26         0.1
3 Shot.put      14.5         0.67
4 High.jump      1.98         0.01
5 400m          49.6         1.32
6 110m.hurdle    14.6         0.22
7 Discus        44.3        11.3
8 Pole.vault     4.76         0.08
9 Javeline      58.3        23.1
10 1500m         279.        135.
11 Rank          12.1         62.1
12 Points       8005.       116055.
```

2. Pour comprendre les relations entre les variables, nous pouvons réaliser une ACP.

- Faut il prendre en compte toutes les variables quantitatives ?
- Quelle choix de distance feriez vous ?

3. l'ACP est réalisée grâce aux commandes suivantes. A quoi servent les options `quanti.sup` et `quali.sup` ? pourquoi ce choix ? Combien y a t il de variables quantitatives au total ?

```
decathlon_pca <- PCA(decathlon, scale.unit = TRUE, quanti.sup = c("Rank"), quali.sup = "Comp
```

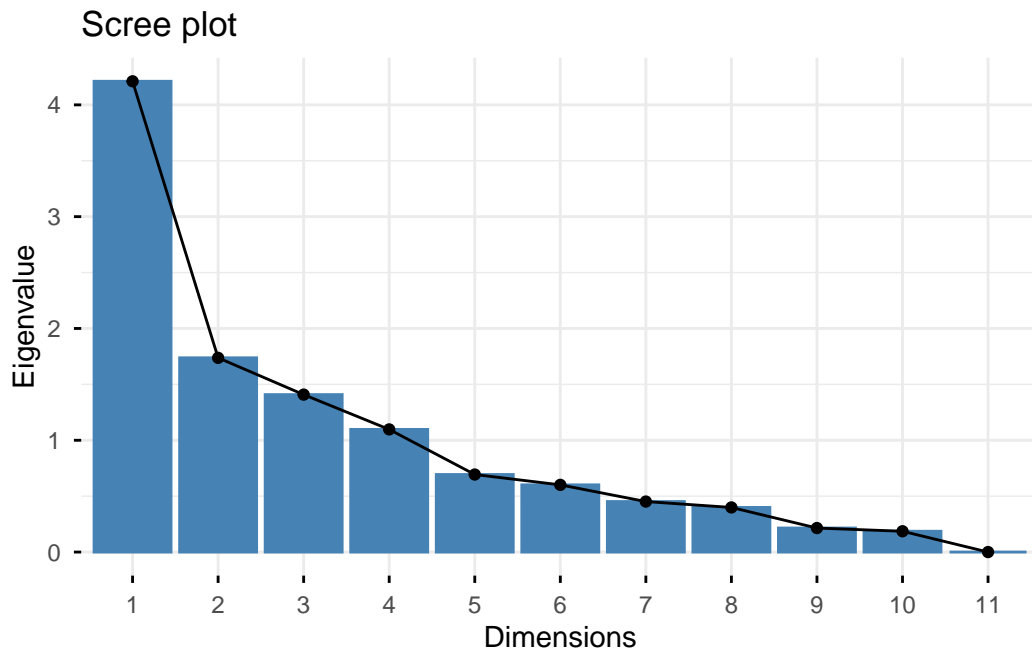
4. Combien suggérez d'axes vous semble-t-il pertinent de regarder ?

```
library(factoextra) # for nice vizualisation
decathlon_pca$eig
```

|        | eigenvalue   | percentage of variance | cumulative percentage of variance |
|--------|--------------|------------------------|-----------------------------------|
| comp 1 | 4.210772e+00 | 3.827975e+01           | 38.27975                          |
| comp 2 | 1.737315e+00 | 1.579378e+01           | 54.07352                          |
| comp 3 | 1.408296e+00 | 1.280269e+01           | 66.87621                          |
| comp 4 | 1.097035e+00 | 9.973046e+00           | 76.84926                          |
| comp 5 | 6.936226e-01 | 6.305660e+00           | 83.15492                          |

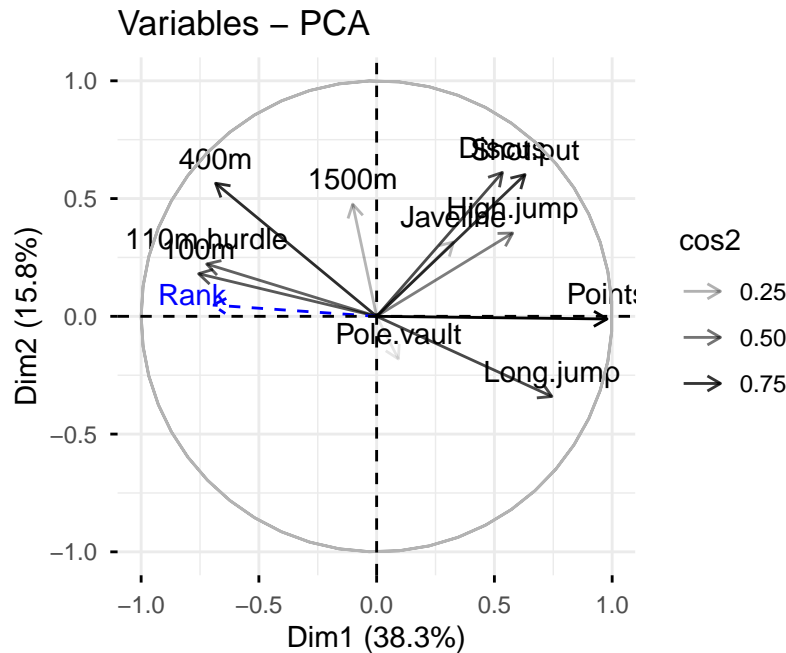
|         |              |              |           |
|---------|--------------|--------------|-----------|
| comp 6  | 6.010811e-01 | 5.464374e+00 | 88.61929  |
| comp 7  | 4.516987e-01 | 4.106352e+00 | 92.72564  |
| comp 8  | 3.991488e-01 | 3.628626e+00 | 96.35427  |
| comp 9  | 2.148244e-01 | 1.952949e+00 | 98.30722  |
| comp 10 | 1.861517e-01 | 1.692288e+00 | 99.99951  |
| comp 11 | 5.439085e-05 | 4.944623e-04 | 100.00000 |

```
fviz_eig(decathlon_pca, choice = "eigenvalue", ncp = 11)
```



5. Quelles sont les variables bien représentées sur le premier plan principal ?

```
library(factoextra) # for nice vizualisation
fviz_pca_var(decathlon_pca, axes = c(1,2), alpha.var = "cos2")
```



6. Discuter du lien entre les variables. Cela semble-t-il surprenant ?
7. Le saut à la perche `Pole.vault` est-il bien représenté ? Sur quel plan faut-il projeté pour pouvoir visualiser les performances au saut à la perche ?

```
decathlon_pca$var$cos2
```

|             | Dim.1       | Dim.2        | Dim.3        | Dim.4        | Dim.5        |
|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 100m        | 0.57139704  | 0.0327242707 | 0.0430338384 | 0.001274172  | 1.148933e-01 |
| Long.jump   | 0.55357323  | 0.1157488070 | 0.0395671585 | 0.002557195  | 1.048259e-05 |
| Shot.put    | 0.39706705  | 0.3621620493 | 0.0002382196 | 0.021897220  | 7.677701e-03 |
| High.jump   | 0.33342735  | 0.1250871798 | 0.0595892073 | 0.027148070  | 2.787889e-01 |
| 400m        | 0.46743733  | 0.3191990038 | 0.0125288513 | 0.006698959  | 5.756890e-03 |
| 110m.hurdle | 0.52071355  | 0.0493917625 | 0.0150700801 | 0.118904929  | 2.642918e-02 |
| Discus      | 0.28508308  | 0.3733202080 | 0.0040004975 | 0.083457249  | 7.389082e-03 |
| Pole.vault  | 0.00854153  | 0.0328341249 | 0.4490187957 | 0.349771085  | 9.983515e-02 |
| Javeline    | 0.10647521  | 0.0996192520 | 0.1639116219 | 0.437392911  | 1.247085e-01 |
| 1500m       | 0.01034718  | 0.2271041183 | 0.6187491252 | 0.019227369  | 2.210338e-02 |
| Points      | 0.95670958  | 0.0001246526 | 0.0025882124 | 0.028705925  | 6.029924e-03 |
|             | Dim.6       | Dim.7        | Dim.8        | Dim.9        | Dim.10       |
| 100m        | 0.051885058 | 0.0684509434 | 0.0819624457 | 2.464186e-03 | 0.031913545  |
| Long.jump   | 0.060860974 | 0.1740178871 | 0.0009616512 | 5.047724e-02 | 0.002223441  |
| Shot.put    | 0.046794392 | 0.0484975072 | 0.0444866878 | 3.987637e-02 | 0.031301962  |
| High.jump   | 0.153216454 | 0.0042214724 | 0.0048514263 | 1.265994e-02 | 0.001007847  |



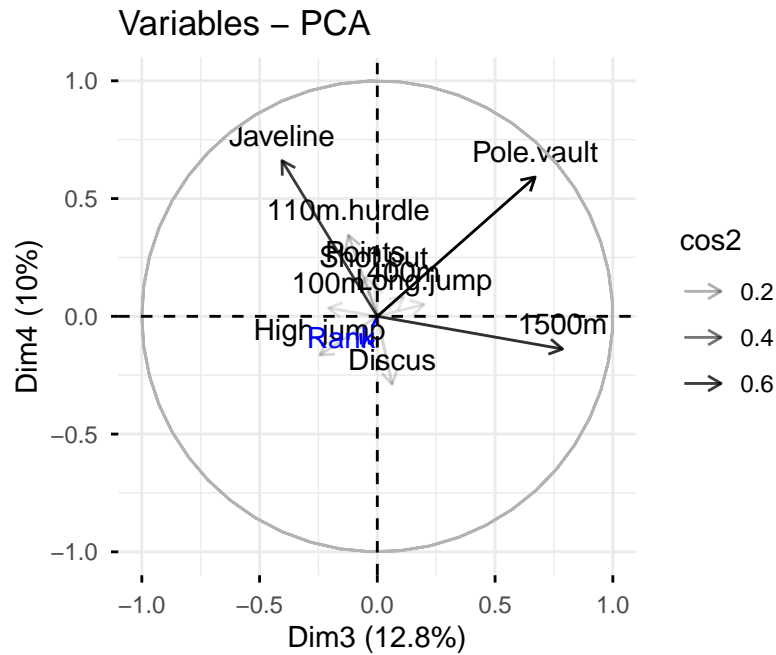
|             |             |              |              |              |             |
|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| 400m        | 0.059019037 | 0.0053962448 | 0.0229309061 | 6.457339e-02 | 0.036458409 |
| 110m.hurdle | 0.006952002 | 0.0543807117 | 0.2006915068 | 4.967260e-03 | 0.002497964 |
| Discus      | 0.124992676 | 0.0825979330 | 0.0002560070 | 5.261503e-03 | 0.033640071 |
| Pole.vault  | 0.032468459 | 0.0049944097 | 0.0101802056 | 1.478939e-03 | 0.010875042 |
| Javeline    | 0.016107763 | 0.0051044820 | 0.0310317324 | 1.290937e-02 | 0.002737377 |
| 1500m       | 0.047647885 | 0.0037097648 | 0.0002353866 | 2.014860e-02 | 0.030725498 |
| Points      | 0.001136448 | 0.0003273564 | 0.0015608778 | 7.628454e-06 | 0.002770533 |

Dim.11

|             |              |
|-------------|--------------|
| 100m        | 1.196104e-06 |
| Long.jump   | 1.938446e-06 |
| Shot.put    | 8.482581e-07 |
| High.jump   | 2.125406e-06 |
| 400m        | 9.753387e-07 |
| 110m.hurdle | 1.056204e-06 |
| Discus      | 1.696489e-06 |
| Pole.vault  | 2.261812e-06 |
| Javeline    | 1.732012e-06 |
| 1500m       | 1.694150e-06 |
| Points      | 3.886663e-05 |

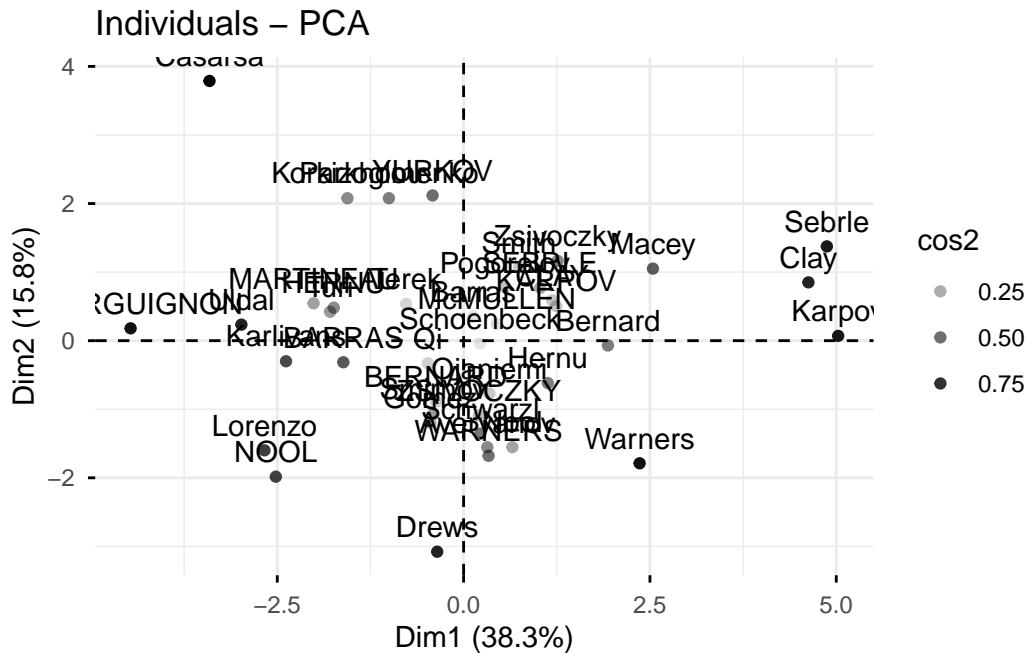
8. Le saut à la perche est la huitième épreuve au décathlon, le javelot la neuvième, le 1500 m la dernière. Que laisse espérer une bonne performance au saut à la perche, quant à la performance au javelot à venir ?

```
fviz_pca_var(decathlon_pca, axes = c(3,4), alpha.var = "cos2")
```



9. La variable nombre de points est très bien représentée par l'axe 1. que pensez de l'intérêt des trois dernières épreuves sur le résultat final ?
10. Ci-dessous le code pour obtenir la représentation des individus dans le premier plan principal. Citer un excellent décathlonien. Discuter de la performance de Casarsa (en haut à gauche) au 400m. Peut-on affirmer que Qi (près de l'origine) est un décathlonien moyen ?

```
fviz_pca_ind(decathlon_pca, axes = c(1,2), alpha.ind = "cos2")
```



11. Le graphique suivant ajoute l'information sur la Competition. Que pouvez vous déduire des résultats au Decastar et aux Jeux Olympiques ?

```
plot.PCA(decathlon_pca,invisible=c('ind.sup'), habillage = c("Competition"),
  palette = c("#999999", "#222222"))
```

