

Chapitre 4 : Équations différentielles linéaires d'ordre 2 et plus

- [1- méthode de résolution](#)
- [2- existence et unicité des solutions](#)
- [3- technique de réduction d'ordre](#)
- [4- équation homogène \(à coefficients constants\)](#)
- [5- solution particulière \(méthode des coefficients indéterminés\)](#)
- [6- solution particulière \(méthode de variation des paramètres\)](#)
- [7- le mouvement harmonique](#)
- [8- le circuit électrique RLC](#)
- [9- équations d'ordre supérieure à 2](#)

4-1 Méthode de résolution

Considérons les équations différentielles d'ordre 2 pouvant s'écrire ou se ramener à la forme générale suivante :

$$y'' = F(x, y, y') \text{ ou } \frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Il n'existe pas de technique générale de résolution de ce type d'équations. Cependant, si l'équation est en plus linéaire (en y et ses dérivées), alors on pourra plus aisément la résoudre.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = H(x) \quad \text{équation linéaire d'ordre 2}$$

Dans l'équation précédente, si $a(x)$ et $b(x)$ sont des constantes au lieu de fonctions de la variable x , on dit qu'on a une équation linéaire à coefficients constants et on sait résoudre celle-ci.

Soit y_h une solution générale de $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

Soit y_p une solution particulière de $y'' + a(x)y' + b(x)y = H(x)$

Alors $y = y_h + y_p$ sera la solution générale de $y'' + a(x)y' + b(x)y = H(x)$

L'équation où $H(x) = 0$ se nomme l'équation homogène associée et sa solution générale se nomme la solution homogène.

La solution homogène sera de la forme $y_h = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$

C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires

$u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes

Exemple :

Soit à résoudre $y'' + 4y' + 3y = 3x - 5$

On peut vérifier par substitution que :

$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ est la solution générale de l'équation homogène associée

$$\text{car } \frac{d^2}{dx^2}(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}) + 4 \frac{d}{dx}(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}) + 3(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 e^{-x} + 9C_2 e^{-3x} - 4C_1 e^{-x} - 12C_2 e^{-3x} + 3C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} = 0$$

$y_p = x - 3$ est une solution particulière de cette équation

$$\text{car } \frac{d^2}{dx^2}(x - 3) + 4 \frac{d}{dx}(x - 3) + 3(x - 3) = 0 + 4 + 3(x - 3) = 3x - 5$$

Donc la solution générale de l'équation originale sera :

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + x - 3$$

Nous verrons dans les prochaines sections comment trouver ces solutions homogène et particulière.



4-2 Existence et unicité des solutions

Théorème d'existence et d'unicité pour les équations linéaires d'ordre 2

Considérons l'équation linéaire d'ordre 2 sous sa forme standard :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = H(x) \quad \text{équation linéaire d'ordre 2}$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $H(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I = (a, b)$ contenant un point x_0 .

À chaque choix de conditions initiales

$$y(x_0) = c \quad \text{et} \quad y'(x_0) = d$$

correspondra une solution unique $y(x)$ satisfaisant l'équation sur l'intervalle I et satisfaisant les conditions initiales données.

Notion d'indépendance linéaire

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 et plus

Deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont dites **linéairement dépendantes** sur un intervalle I s'il existe 2 constantes réelles k_1 et k_2 (au moins une, différente de 0) telles que

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Si la seule façon d'obtenir ce dernier résultat est d'assigner la valeur 0 aux deux constantes, alors on dit que les deux fonctions sont linéairement indépendantes.

Dans le cas de deux fonctions seulement, elles sont linéairement dépendantes si une des deux peut s'exprimer comme une constante (réelle) fois l'autre fonction.

Dans le cas de n fonctions, elles sont linéairement indépendantes si aucune des n fonctions ne peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $(n-1)$ autres.

Le résultat suivant permet de systématiser la vérification de l'indépendance de 2 fonctions.

Soient deux fonctions dérivables $f(x)$ et $g(x)$ sur un intervalle I .

Le Wronskien de ces deux fonctions est défini à l'aide d'un déterminant :

$$W(f(x), g(x)) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

$$\text{Si } \forall x \in I, \quad W(f(x), g(x)) \neq 0$$

alors on conclut que les deux fonction sont linéairement indépendantes.

Soient 2 solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation homogène

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

pour x dans un certain intervalle I et où $a(x)$ et $b(x)$ sont continues sur I .

Si les deux solutions sont linéairement indépendantes alors on dit qu'elles constituent **un ensemble fondamental de solutions** de cette équation différentielle linéaire homogène. De plus toute autre solution doit s'écrire comme une combinaison linéaire de cet ensemble fondamental de solutions.

$$\Rightarrow \text{ Si } y(x) \text{ est une solution alors } y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

(pour un choix approprié de valeurs pour C_1 et C_2).

Remarque : la définition précédente du Wronskien n'est pas limitée à deux fonctions. Par exemple, le calcul du déterminant suivant pourra servir à tester l'indépendance linéaire de 3 fonctions :

$$W(f(t), g(t), h(t)) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix}$$



4-3 Technique de réduction d'ordre

Soit l'équation linéaire homogène d'ordre 2

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Si on connaît une solution, par exemple $y_1(x)$ ou plus simplement y_1 , alors la substitution $y = v y_1$ dans l'équation différentielle permettra après simplifications d'obtenir une équation d'ordre 1 (de forme linéaire et séparable).

Exemple :

Soit $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6y = 0$ avec $y_1 = x^3$ une solution

En posant $y = v x^3 \Rightarrow y' = v' x^3 + 3v x^2$ et $y'' = v'' x^3 + 6v' x^2 + 6v x$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$x^2 (v'' x^3 + 6v' x^2 + 6v x) - 6v x^3 \Rightarrow v'' x^5 + 6v' x^4 = 0$$

En posant $v' = w \Rightarrow v'' = w'$

On obtient l'équation suivante qui est d'ordre 1, pouvant se résoudre par variables séparables ou comme une équation linéaire d'ordre 1 :

$$w' x^5 + 6w x^4 = 0 \Rightarrow w' + \frac{6}{x} w = 0$$

La solution de cette dernière équation est

$$w = \frac{C}{x^6} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{6C}{x^7} \Rightarrow v = \frac{C}{-5x^5} + K = \frac{C_1}{x^5} + C_2$$

La solution générale de l'équation initiale sera :

$$y = \left(\frac{C_1}{x^5} + C_2 \right) x^3 \text{ ou } y = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^3$$

De façon plus générale, on peut montrer que si y_1 est une solution de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

alors la substitution $y = v y_1$ dans celle-ci donnera :

$$v''y_1 + v' \left(2y_1' + a(x)y_1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow v'' + v' \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a(x) \right) = 0$$

On obtiendra ensuite une équation d'ordre 1 (linéaire et séparable)
en posant $w = v'$



4-4 Équation homogène (à coefficients constants)

Considérons le cas général suivant pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{où } a, b \text{ et } c \in \mathbb{R} \quad \text{et où } a \neq 0$$

Posons comme candidat-solution la fonction

$$y = e^{mx} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

En substituant ce candidat dans notre équation, on obtient :

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = (am^2 + bm + c)e^{mx} = 0$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir un candidat-solution il faut que :

$$am^2 + bm + c = 0$$

Cette équation se nomme l'équation caractéristique (ou auxiliaire) associée à notre équation homogène.

Comme la partie gauche est un polynôme de degré 2, les solutions se trouvent aisément à l'aide de la formule quadratique :

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trois cas peuvent alors se produire :

$$\boxed{1- \text{ si } b^2 - 4ac > 0}$$

on trouve 2 racines réelles m_1 et m_2 ;
la solution générale de l'équation différentielle sera :
 $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

$$\boxed{2- \text{ si } b^2 - 4ac = 0}$$

on trouve 1 racine réelle double m ;

la solution générale de l'équation différentielle sera :

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} = (C_1 + C_2 x) e^{mx}$$

3- si $b^2 - 4ac < 0$

on trouve 2 racines complexes conjuguées de forme générale

$$m = \alpha \pm \omega i \text{ avec } \alpha, \omega \in \mathbb{R}$$

la solution générale de l'équation différentielle sera :

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))$$

Remarque : le cas 3- peut se ramener au cas 1- en posant

$$y = k_1 e^{(\alpha + i\omega)x} + k_2 e^{(\alpha - i\omega)x} = e^{\alpha x} (k_1 e^{i\omega x} + k_2 e^{-i\omega x})$$

Les valeurs à donner aux constantes k_1 et k_2 seront cependant des nombres complexes pour obtenir une solution à valeurs réelles.

Exemples :

a) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = 0$

L'équation caractéristique est :

$$m^2 + 4m + 3 = (m+3)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ ou } m = -3$$

La solution générale est $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

b) $y'' + 4y' + 9y = 0$

L'équation caractéristique est :

$$m^2 + 4m + 9 = 0 \Rightarrow m = -2 \pm \sqrt{5} i$$

La solution générale est $y = e^{-2x} (C_1 \sin(\sqrt{5} x) + C_2 \cos(\sqrt{5} x))$

c) $\frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} + 9i = 0$

L'équation caractéristique est :

$$m^2 + 6m + 9 = (m+3)^2 = 0 \Rightarrow m = -3 \text{ une racine double}$$

La solution générale est $i = (C_1 + C_2 t) e^{-3t}$



4-5 Solution particulière (méthode des coefficients indéterminés)

La méthode des coefficients indéterminés vise à trouver une solution particulière à

$$ay'' + by' + cy = H(x) \quad \text{où } a, b \text{ et } c \in \mathbb{R} \quad \text{et où } a \neq 0$$

Comme vu en 4-1, en additionnant à cette solution particulière la solution homogène, on trouvera la solution générale de cette équation linéaire à coefficients constants.

L'idée générale derrière cette méthode est de poser comme candidat pour une solution particulière une ou des fonctions similaires à celles apparaissant dans $H(x)$ mais avec des coefficients à déterminer. On substitue ensuite ce candidat dans l'équation pour déterminer la valeur des coefficients inconnus.

Exemple :

Soit à résoudre $y'' + 4y = 2e^{-3x}$

Le candidat solution particulière est $y_p = Ae^{-3x}$

Après substitution de ce candidat dans l'équation, on trouve

$$9Ae^{-3x} + 4Ae^{-3x} = 2e^{-3x} \Rightarrow 13A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{13}$$

La solution particulière est donc

$$y_p = \frac{2}{13}e^{-3x}$$

Comme la solution de l'équation homogène est

$$y_h = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$$

(équation caractéristique: $m^2 + 4 = 0$)

La solution générale de l'équation initiale est :

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{2}{13}e^{-3x}$$

Cette méthode ne peut être utilisée que lorsque la fonction $H(x)$ est constituée de sommes ou produits de fonctions polynomiales et/ou de fonctions de type

$$\sin(\omega x), \cos(\omega x) \quad \text{ou} \quad e^{\alpha x}$$

Règle de base pour la méthode des coefficients indéterminés :

Poser comme candidat

$$y_p = Au_1(x) + Bu_2(x) + Cu_3(x) + \dots + Nu_n(x)$$

où $u_1(x), u_2(x), u_3(x) \dots u_n(x)$ sont les fonctions essentielles de $H(x)$

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 et plus

et celles qui en proviennent par dérivations successives et où A, B, C, \dots, N sont des coefficients à déterminer.

Il suffit par la suite de substituer ce candidat dans l'équation originale.

Exemple :

Soit à résoudre $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 25y = H(x)$

a) si $H(x) = 3\sin(2x) + 5x$

$$\Rightarrow y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x) + Cx + D$$

b) si $H(x) = 2xe^{-5x}$

$$\Rightarrow y_p = Axe^{-5x} + Be^{-5x}$$

c) si $H(x) = 2\sin^2(x) + 3e^{2x}$

$$\Rightarrow y_p = A\sin^2(x) + B\sin(x)\cos(x) + C\cos^2(x) + De^{2x}$$

La méthode décrite précédemment peut échouer s'il y a chevauchement entre la solution homogène (solution générale de l'équation homogène associée) et le candidat normal obtenu par la procédure décrite ci-haut.

Exemple :

Soit à résoudre $y'' - 9y = 2e^{3x}$

L'équation homogène associée est :

$$y'' - 9y = 0 \Rightarrow \text{l'équation caractéristique est: } m^2 - 9 = 0$$

La solution homogène sera

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

Le candidat-solution pour la méthode des coefficients indéterminés est

$$y_p = Ae^{3x}$$

Après substitution de ce candidat dans l'équation d'origine, on trouve

$$9Ae^{3x} - 9e^{3x} = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow 0 = 2e^{3x} \text{ ce qui est impossible}$$

Comme le candidat est essentiellement identique à une partie de la solution homogène, il est naturel que sa substitution dans l'équation donne un résultat nul.

Dans cet exemple, on règle le problème en utilisant plutôt le candidat

$$y_p = Axe^{3x} \text{ au lieu de } Ae^{3x}$$

En substituant, on trouve

$$9Axe^{3x} + 6Ae^{3x} - 9Axe^{3x} = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \text{ et } y_p = \frac{1}{3}xe^{3x}$$

La solution générale de l'équation de départ est

$$y_h + y_p = y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}xe^{3x}$$

On peut généraliser la résolution de ce type de difficultés dans l'énoncé suivant.

Règle d'exception pour la méthode des coefficients indéterminés :

Si un ou des termes du candidat y_p (se rapportant à une fonction dans $H(x)$) apparaît (ou apparaissent) aussi dans la solution homogène y_h , il faut multiplier ce (ou ces) terme(s) par une puissance de la variable indépendante x juste assez élevée pour qu'il n'y ait plus chevauchement de termes entre y_h et y_p .

Comme on traite ici d'équations d'ordre 2, il faudra multiplier par x ou x^2 les termes fautifs.

Attention : on ne multiplie que les termes fautifs, pas nécessairement tous les termes du candidat.

Exemple :

$$\text{Soit } \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2te^{-2t} + 3\sin(5t)$$

Après calculs, on trouve la solution homogène

$$x_h = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

Le candidat de base pour la méthode des coefficients indéterminés est

$$x_p = Ate^{-2t} + Be^{-2t} + C\sin(5t) + D\cos(5t)$$

Comme il y a chevauchement de termes, on doit modifier le candidat :

$$\text{candidat modifié: } x_p = At^2e^{-2t} + Bte^{-2t} + C\sin(5t) + D\cos(5t)$$

On remarque que l'on a multiplié les 2 premiers termes par la variable t ; ces deux fonctions doivent être traitées ensemble, puisqu'ils proviennent de la fonction exponentielle dans le terme $H(x)$ de l'équation différentielle.

Après substitution dans l'équation et simplifications, on trouve :

$$\begin{aligned}
 & -2Ate^{-2t} + (2A - B)e^{-2t} + (-23C - 15D)\sin(5t) + (15C - 23D)\cos(5t) \\
 & = 2te^{-2t} + 3\sin(5t) \\
 \Rightarrow & A = -1 \quad B = -2 \quad C = -\frac{69}{754} \quad D = -\frac{45}{754}
 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation initiale est :

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} - t^2 e^{-2t} - 2te^{-2t} - \frac{69}{754} \sin(5t) - \frac{45}{754} \cos(5t)$$

Si en appliquant cette méthode, vous n'obtenez pas une solution unique pour la valeur des coefficients indéterminés, c'est que votre candidat-solution n'est pas adéquat.



4-6 Solution particulière (méthode de variation des paramètres)

Considérons l'équation linéaire d'ordre 2 sous sa forme standard

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = H(x) \quad \text{équation linéaire d'ordre 2}$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $H(x)$ sont des fonctions ou des constantes.

Remarque: le coefficient de y'' doit être égal à 1.

Supposons que l'on connaisse deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation homogène associée ; en d'autres mots, soit la solution homogène

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

La **méthode de variation des paramètres** stipule que l'on peut trouver une solution particulière de l'équation initiale en remplaçant les deux constantes réelles C_1 et C_2 de la solution homogène par deux paramètres variables $L_1(x)$ et $L_2(x)$, donc

$$y_p = L_1(x)y_1(x) + L_2(x)y_2(x)$$

$$\text{ou plus simplement } y_p = L_1 y_1 + L_2 y_2$$

Pour que cette dernière expression soit solution particulière de l'équation différentielle de départ, on demande que les deux fonctions $L_1(x)$ et $L_2(x)$ satisfassent le système d'équations :

$$L_1' y_1 + L_2' y_2 = 0$$

$$L_1' y_1' + L_2' y_2' = H(x)$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1' \\ L_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H(x) \end{bmatrix}$$

En utilisant la **règle de Cramer**, on trouve pour ce système la solution suivante :

$$L_1' = \frac{-y_2 H(x)}{W[y_1, y_2]} \quad \text{et} \quad L_2' = \frac{y_1 H(x)}{W[y_1, y_2]}$$

$$\text{où } W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

représente le Wronskien des deux fonctions de base, solutions de l'équation homogène. On peut ensuite intégrer ces deux termes pour trouver L_1 et L_2 et ainsi obtenir une solution particulière (en laissant tomber les constantes d'intégration). Cette méthode permet de résoudre une plus grande classe d'équations différentielles linéaires que la méthode des coefficients indéterminés. Elle demande cependant de pouvoir trouver un ensemble fondamental de solutions pour l'équation homogène associée et il faut réussir à effectuer les intégrales mentionnées plus haut.

Remarque : on peut avec cette méthode écrire la solution en une seule formule :

$$y = -y_1 \int \frac{y_2 H(x)}{W[y_1, y_2]} dx + y_2 \int \frac{y_1 H(x)}{W[y_1, y_2]} dx$$

Exemple :

$$\text{Résolvons } \frac{d^2 x}{dt^2} + x = \text{tg}(t)$$

La solution homogène est :

$$x = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

On pose comme candidat :

$$x_p = L_1 \sin(t) + L_2 \cos(t)$$

Les deux fonctions L_1 et L_2 doivent satisfaire le système suivant :

$$L_1' \sin(t) + L_2' \cos(t) = 0$$

$$L_1' \cos(t) - L_2' \sin(t) = \text{tg}(t)$$

En solutionnant, on trouve :

$$L_1' = \sin(t) \quad \text{et} \quad L_2' = \frac{-\sin^2(t)}{\cos(t)} = \cos(t) - \sec(t)$$

$$\Rightarrow L_1 = -\cos(t) \quad \text{et} \quad L_2 = \sin(t) - \ln(\sec(t) + \text{tg}(t))$$

La solution particulière sera donc :

$$\begin{aligned}x_p &= -\sin(t)\cos(t) + \sin(t)\cos(t) - \cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t)) \\ &= -\cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t))\end{aligned}$$

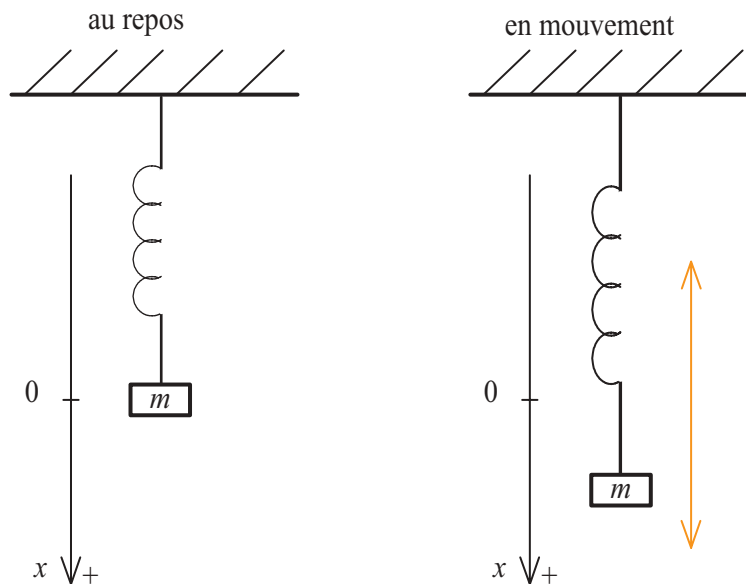
Finalement, la solution générale est :

$$x = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) - \cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t))$$



4-7 Le mouvement harmonique

Considérons le montage suivant :



Un objet, de masse m , est suspendu à un ressort fixé à un support ; 0 représente le point d'équilibre après avoir suspendu l'objet et x représente la position de celui-ci par rapport au point d'équilibre, avec la direction positive vers le bas.

La forme générale de l'équation différentielle modélisant ce mouvement harmonique est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

où

m = masse de l'objet

β = constante de proportionnalité de la force d'amortissement
(on considère ici un amortissement proportionnel à la vitesse)

k = constante de rappel du ressort

$f(t)$ = force extérieure appliquée sur l'objet

Si $\beta = 0$ et $f(t) = 0$ alors on dit que l'on a un **mouvement harmonique simple**. Si seulement $f(t) = 0$ alors on a un **mouvement harmonique amorti**. Lorsque $f(t) \neq 0$ le mouvement harmonique est dit **forcé**.

Exemple :

Un objet ayant une masse de 500 gr est suspendu à un ressort qui s'étire alors de 20 cm. On considère également une force d'amortissement égale à la vitesse et une force extérieure de $5 \sin(5t)$ newtons (N).
On travaille ici avec

$$m = \frac{1}{2} \text{ kg} \quad \beta = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad f(t) = 5 \sin(5t) \text{ N}$$

Pour simplifier les calculs, considérons que $g = 10 \text{ m/s}^2$ au lieu de 9,81. Lorsque l'objet est suspendu et qu'il y a équilibre, cela signifie que la force de rappel du ressort est égale au poids de l'objet. En posant $s =$ élongation du ressort en suspendant l'objet, on trouve :

$$s = 20 \text{ cm} = \frac{1}{5} \text{ m} \quad \text{donc,}$$

$$k s = m g \Rightarrow k \frac{1}{5} = \frac{1}{2} 10 \Rightarrow k = 25$$

L'équation différentielle de ce mouvement est :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 25x = 5 \sin(5t)$$

En appliquant les techniques vues plus haut dans ce chapitre, on trouve la solution générale suivante :

$$x = e^{-t} (C_1 \sin(7t) + C_2 \cos(7t)) + \frac{10}{29} \sin(5t) - \frac{4}{29} \cos(5t)$$

On remarque qu'après quelques secondes, la première partie de la solution devient négligeable (vu le terme exponentiel qui tend vers 0). Il ne restera ensuite que **le régime permanent** qui peut se réécrire, à l'aide d'une transformation trigonométrique :

$$x(t) = 0,3714 \sin(5t - 0,3805)$$

$$\text{car } A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } \phi = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$

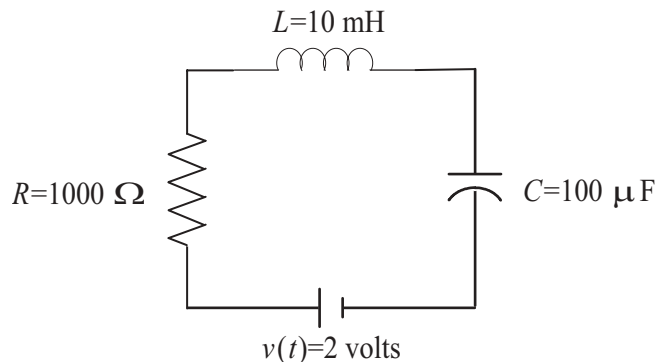
En régime permanent, l'objet oscillera de 37cm de chaque côté du point d'équilibre avec une période de $2\pi/5$ radian et un angle de phase (ou un retard) de 0,3805 rad (21,8°).

Il est intéressant de noter ici que les conditions initiales de l'expérience, soient la position et la vitesse initiales, n'ont un impact que dans la **partie transitoire de la réponse** et non au niveau du régime permanent.



4-8 Le circuit électrique RLC

Considérons un circuit électrique de base constitué d'une source (ou force électromotrice) $v(t)$ (les unités sont des volts) branchée en série avec une résistance R (les unités sont des ohms, Ω), une bobine d'inductance L (les unités sont des henrys, H) et un condensateur de capacitance C (les unités sont des farads, F).



On utilise les notations, définitions et relations suivantes :

$q(t)$ = charge sur le condensateur (en Coulombs)

$i(t)$ = courant électrique circulant dans le circuit (en ampères)

$v_c(t)$ = tension aux bornes du condensateur (en volts)

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} \quad i(t) = C \frac{dv_c}{dt}$$

Comme, selon une des lois de Kirchhoff, la somme des chutes de tension (aux bornes de chaque élément) doit être égale à la source, on trouve l'équation suivante pour ce circuit :

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{q}{C} = v(t) \quad \text{ou} \quad L \frac{di}{dt} + R i + v_c = v(t)$$

À l'aide des définitions mentionnées plus haut, on peut trouver des formes équivalentes à cette équation différentielle :

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int i dt = v(t)$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = v'(t)$$

$$LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = v(t)$$

On travaillera avec cette dernière forme ainsi qu'avec les conditions initiales $v_c(0)$, la tension initiale sur le condensateur, et $i(0)$, le courant initial circulant dans le circuit ce qui permet de trouver $v_c'(0)$:

$$\frac{dv_c}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C}$$

Exemple :

Penons le circuit dont les valeurs sont celle indiquées sur la figure plus haut.

$R = 1000 \, \Omega$ $L = 10 \, \text{mH}$ $C = 100 \, \mu\text{F}$ et une source constante $v = 2 \, \text{volts}$

(note sur les préfixes: $\text{m} \rightarrow \text{milli} = 10^{-3}$ et $\mu \rightarrow \text{micro} = 10^{-6}$)

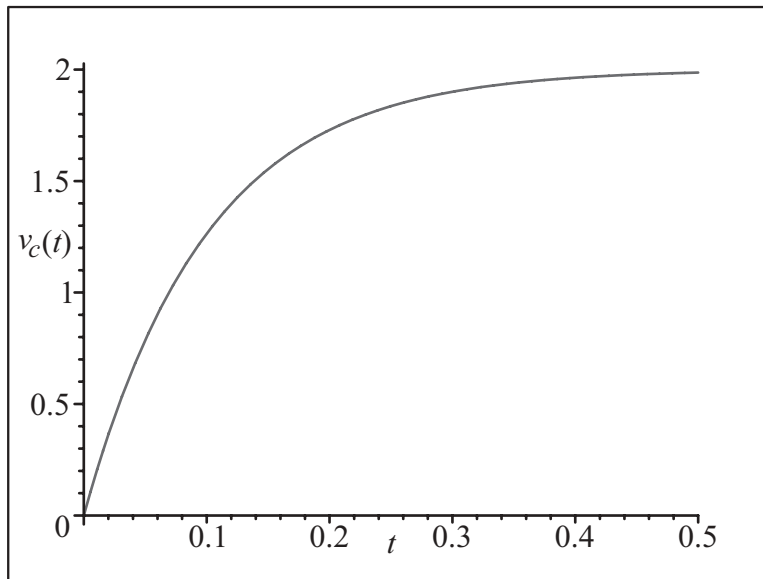
On considère également que les conditions initiales sont nulles. Après substitution dans l'équation générale, on obtient :

$$\frac{1}{1000000} \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{1}{10} \frac{dv_c}{dt} + v_c = 2$$

La solution est obtenue aisément à l'aide des méthodes de ce chapitre :

$$v_c(t) = 2 - 2,00020006e^{-10,001t} + 0,00020006e^{-99989,999t}$$

Voici le graphe de cette solution pour t variant de 0 à 0,5 seconde. On remarque que le condensateur se chargera très rapidement à une valeur de 2 volts, soit la tension constante fournie par la source.



En utilisant la relation

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt}, \text{ on trouve le courant circulant dans le circuit:}$$

$$i(t) = 0,0020004e^{-10,001t} - 0,0020004e^{-99989,999t}$$



4-9 Équations d'ordre supérieur à 2

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation qui a la forme générale suivante :

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

où les a_i et $F(x)$ ne dépendent pas de y et où $a_0 \neq 0$.

Si $F(x) = 0$, on dit qu'on a une équation linéaire homogène. On peut simplifier la notation pour ces équations générales en définissant l'**opérateur** « $L[]$ » tel que

$$L[y] = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y$$

Ainsi on peut abréger les notations :

$$L[y] = F(x) \quad \text{équation linéaire d'ordre } n$$

$$L[y] = 0 \quad \text{équation homogène associée}$$

Les notions vues pour les équations d'ordre 2 s'appliquent, avec les ajustements appropriés, aux équations d'ordre n .

Solution homogène

Considérons l'équation linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants :

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad \text{ou} \quad L[y] = 0$$

avec les $a_i \in \mathbb{R}$

Examinons l'impact de l'opérateur $L[]$ sur un candidat-solution de type exponentiel.

$$L[e^{mx}] = (a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n) e^{mx}$$

On aura une solution homogène si

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

On obtient l'**équation caractéristique** de cette équation différentielle. Les racines de ce polynôme de degré n serviront à déterminer **un ensemble fondamental de solutions**, c'est à dire un ensemble de n fonctions linéairement indépendantes obtenues en utilisant (et adaptant au besoin) les règles vues pour l'équation d'ordre 2. En combinant ces fonctions avec n constantes arbitraires réelles, on obtient la solution homogène cherchée.

Exemple :

a) $\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} + 18y = 0$

L'équation caractéristique à résoudre est :

$$m^3 + 2m^2 + 9m + 18 = 0 \Rightarrow (m+2)(m^2+9) = 0$$

Les racines sont

$$m = -2 \quad \text{et} \quad m = \pm 3i$$

En utilisant les règles de la section 4-4, on obtient la solution générale :

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \sin(3x) + C_3 \cos(3x)$$

b) $\frac{d^3 x}{dt^3} + 6\frac{d^2 x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 8x = 0$

L'équation caractéristique à résoudre est :

$$m^3 + 6m^2 + 12m + 8 = 0 \Rightarrow (m+2)^3 = 0$$

On a donc $m = -2$ une racine triple. En adaptant la règle vue pour une racine double, on trouve les 3 solutions indépendantes :

$$e^{-2t}, \quad te^{-2t}, \quad t^2 e^{-2t}$$

La solution générale est :

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + C_3 t^2 e^{-2t}$$

La recherche d'une solution particulière de l'équation d'ordre n demeure essentielle pour permettre d'en trouver la solution générale.

solution générale = solution homogène + solution particulière

donc la solution générale de $L[y] = F(x)$ est $y = y_h + y_p$

La **méthode des coefficients indéterminés** et la **méthode de variation des paramètres** peuvent encore être utilisées pour trouver cette solution particulière. Les calculs seront évidemment plus longs que pour ordre 2.

Exemple :

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 16x = 4e^{-5t}$$

L'équation caractéristique à résoudre est :

$$m^4 - 16 = 0 \Rightarrow (m^2 + 4)(m^2 - 4) = 0$$

Les racines sont

$$m = -2 \quad m = 2 \quad \text{et} \quad m = \pm 2i$$

$$\Rightarrow x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \sin(2t) + C_4 \cos(2t)$$

Avec la **méthode des coefficients indéterminés**, le candidat solution particulière est :

$$x_p = x = A e^{-5t} \Rightarrow \frac{d^4 x}{dt^4} = 625 A e^{-5t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^4 x}{dt^4} - 16x = 625 A e^{-5t} - 16 A e^{-5t} = 609 A e^{-5t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{609} \Rightarrow x_p = \frac{4}{609} e^{-5t}$$

La solution générale de l'équation initiale est :

$$\Rightarrow x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 \sin(2t) + C_4 \cos(2t) + \frac{4}{609} e^{-5t}$$

La **méthode de variation des paramètres**, vue à la section 4-6, doit être adaptée pour tenir compte de l'ordre de l'équation. On ne fournira pas une formulation générale pour « ordre n » car il est rare qu'on utilise cette méthode pour un ordre supérieure à 3.

Prenons une équation d'ordre 3 pouvant s'écrire sous la forme générale suivante :

$$y^{(3)} + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = F(x)$$

où les p_i et $F(x)$ ne dépendent pas de y

Remarque : le coefficient de la dérivée troisième doit être 1.

Supposons que l'on connaisse un ensemble fondamental de solutions $\{ y_1, y_2, y_3 \}$ de l'équation homogène associée. On a donc,

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

Pour la solution particulière, on pose :

$$y_p = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

et les 3 fonctions L_1 , L_2 et L_3 se trouvent en résolvant le système suivant :

$$L_1' y_1 + L_2' y_2 + L_3' y_3 = 0$$

$$L_1' y_1' + L_2' y_2' + L_3' y_3' = 0$$

$$L_1' y_1'' + L_2' y_2'' + L_3' y_3'' = F(x)$$

On comprend que les calculs à l'aide de cette méthode peuvent devenir lourds. De plus, on peut être confronté à des difficultés de calcul de primitives pour déterminer les fonctions L_i à partir de la solution du système d'équations mentionné.

