Analyse Qualitative 2D - Applications

C. Wolf

avec les packages deSolve et PhaseR

Exemple : Modèle de compétition

```
library(deSolve)
library(phaseR)
```

Nous allons maintenant faire l'étude qualtitative du modèle de compétition de lotka-Volterra à l'aide du package **PhaseR**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & r_1 x - b_1 xy \\ \frac{dy}{dt} & = & r_2 y + b_2 xy \end{cases}$$

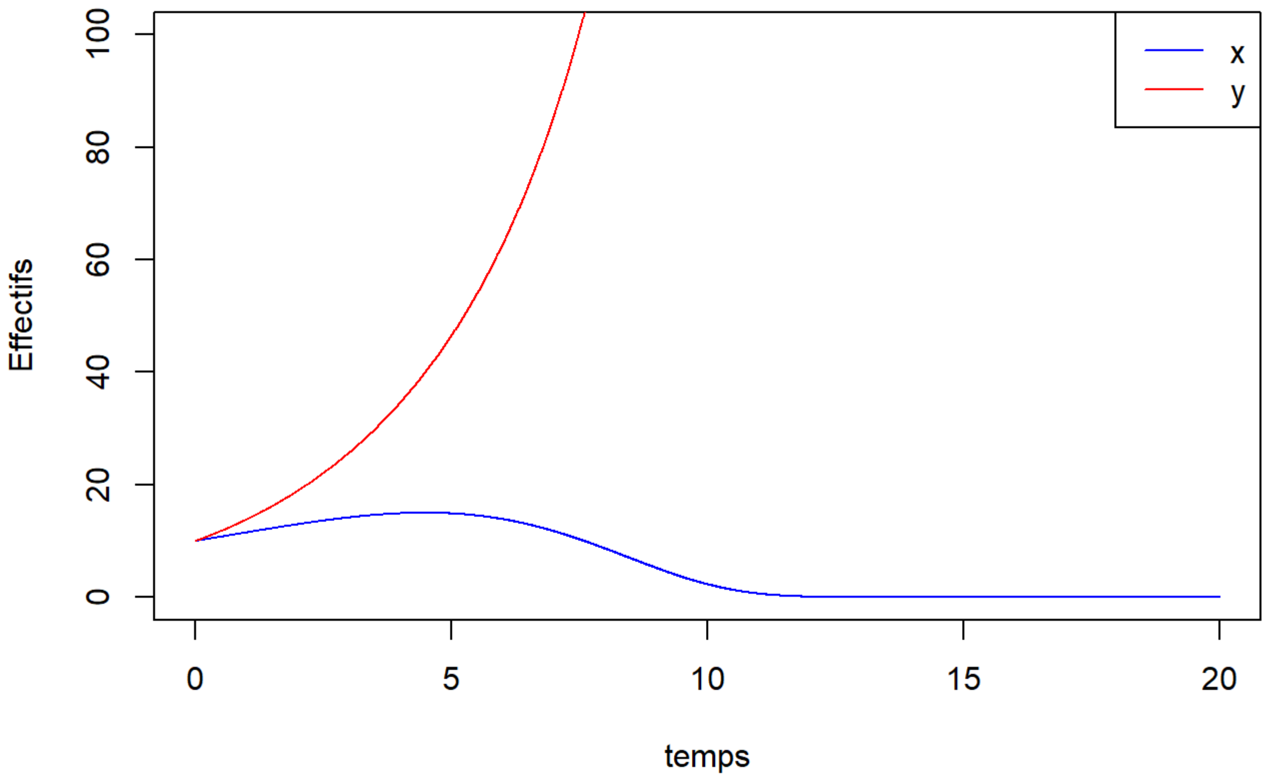
On rappelle que comme pour le package **deSolve** la fonction définissant le système doit respecter la syntaxe suivante :

```
Compet<- function(t, y, parameters) {
  x <- y[1]
  y <- y[2]
  r1 <- parameters[1]
  r2 <- parameters[2]
  c1 <- parameters[3]
  c2 <- parameters[4]
  dy <- numeric(2)
  dy[1] <- r1*x - c1*x*y
  dy[2] <- r2*y - c2*x*y
  list(dy)
}
```

Il est en particulier important que les 2 premiers arguments de la fonction soient le temps et un objet unique comportant les variables d'état, et qu'ensuite on ait un objet avec le(s) paramètre(s) éventuel(s).

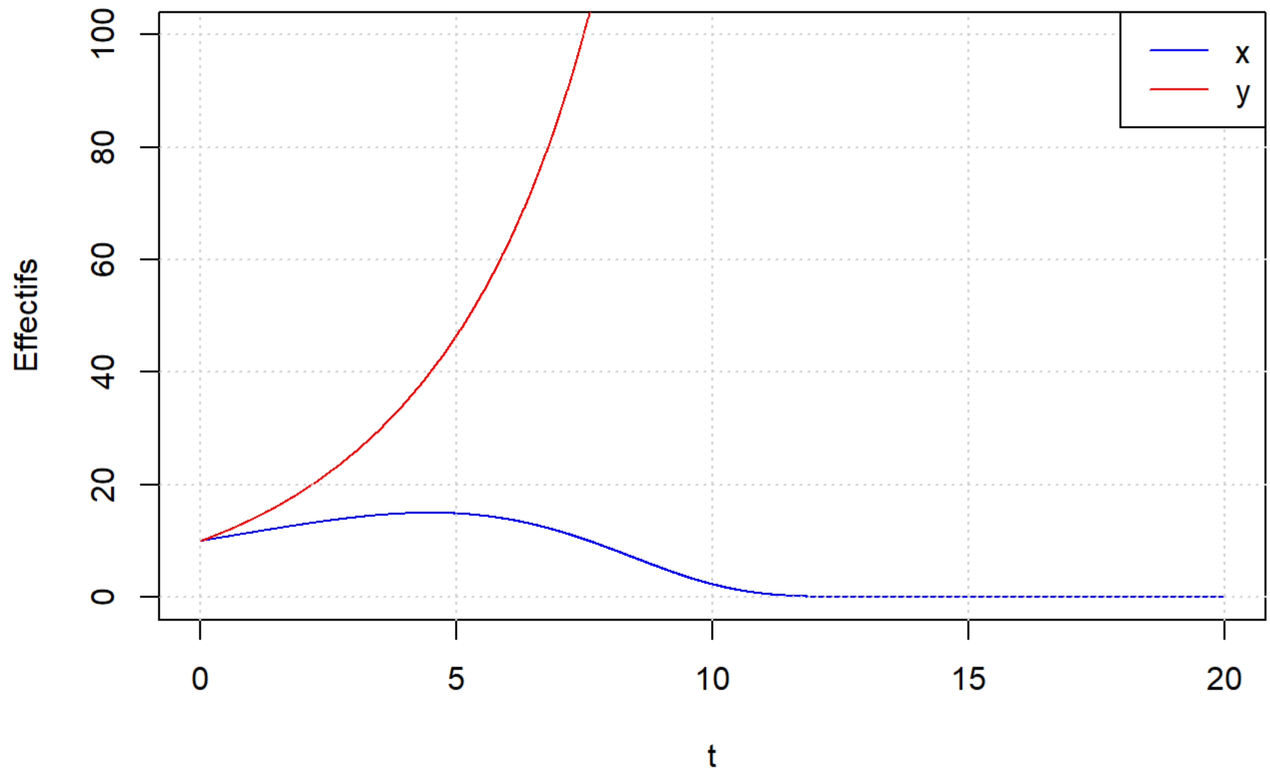
La fonction **ode()** du package solve s'utilise alors de la façon suivante :

```
parametres=c(r1=0.2,r2=0.4,c1=0.005,c2=0.007)
temps=seq(from = 0, to = 20, by = 0.01)
X0=c(10,10)
sol <- ode(y = X0, times = temps, func = Compet, parms = parametres)
plot(temps,sol[,2],col="blue",type="l",ylim=c(0,100),ylab="Effectifs")
lines(temps,sol[,3],col="red")
legend("topright",c("x","y"),col=c("blue","red"),lty=1)
```



Le package *PhaseR* permet aussi de simuler numériquement des trajectoires en fonction du temps :

```
numericalSolution(Compet, y0 = c(10,10), tlim =c(0, 20), type = "one", parameters = parametres, col = c("blue", "red"), ylab = "Effectifs", ylim = c(0, 100))
```



En réalité cette fonction fait elle-même appel à deSolve, mais produit directement la représentation graphique. A quoi sert l'argument type ici ?

Rem : Par défaut elle "produit" également beaucoup de résultats qui prenent de la place dans la console et ne sont pas forcément souhaiter. Il suffit de donner un nom à cet objet pour éviter cet affichage (tout en pouvant accéder aux résultats ultérieurement si souhaité)

1. ***En utilisant le package Phase R (et notamment les fonctions flowField() et nullclines() vues dans le cadre 1D), tracer le portrait de champ du modèle de compétition. On conservera les valeurs de paramètres ci-dessus***
2. ***A l'aide de la fonction trajectory(), tracer la trajectoire simulée précédement dans ce plan. Tracer ensuite plusieurs trajectoires (nombreuses) "partant" d'un peu partout***
3. ***Revenez à un tracé du portrait de champ sans les trajectoires. Utiliser la fonction stability() pour déterminer (en fait estimer) la stabilité du point fixe (0,0).***
4. ***Testez la fonction findEquilibrium() pour tenter de trouver d'autres points fixes du modèle. Quelle est leur stabilité ? On pourra tester également la fonction drawManifolds() sur ce(s) point(s) fixes. A quoi sert-elle ?***

Autres modèles vus en cours

« Vérifiez » les comportements déterminés en cours par l'analyse qualitative pour les modèles suivants. On veillera à traiter les différents cas possibles et on traçera notamment à chaque fois le portrait de champs seul, puis en y traçant plusieurs trajectoires, et on tracera en fonction du temps des trajectoires types.

On considèrera (pour des graphiques représentatifs) des taux de croissance compris entre 0 et 1 et les autres coefficient de l'ordre de 10 à 100 fois plus petits.

<u>Modèle Proie-Prédateur de Lotka-Volterra :</u>

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} & = & r_1 N - b_1 NP \\ \frac{dP}{dt} & = & -r_2 P + b_2 NP \end{cases}$$

Modèle Proie-Prédateur logistique de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} & = & r_1 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - b_1 NP \\ \frac{dP}{dt} & = & -r_2 P + b_2 NP \end{cases}$$

Modèle de compétition avec croissance logistique :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - b_1 xy \\ \frac{dy}{dt} & = & r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - b_2 xy \end{cases}$$

Un modèle épidémiologique

Faire l'analyse qualitative et étudier numériquement le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} & = & rS - \beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} & = & \beta SI - \gamma I - \delta I \end{cases}$$

avec :

r - Taux de croissance de la population β - Taux de transmission du virus γ - Taux de guérison (sans immunité) δ - Mortalité dûe au virus

Une base de départ pour vos études (pour une visualisation correcte) sera de considérer que les paramètres sont compris entre 0 et 1, et que la zone d'étude couvre de 0 à quelques centaines d'individus

Et avec 3 équations ?

Mobiliser vos connaissances et compétences pour étudier le système suivant, correspondant à un système Proie-Prédateur-Superprédateur

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} & = & r_1 N - b_1 NP \\ \frac{dP}{dt} & = & -r_2 P + b_2 NP - c_1 PS \\ \frac{dS}{dt} & = & -r_3 S + c_2 PS \end{cases}$$