Chapitre 3

Equations différentielles ordinaires

3.1 Introduction

Qu'est-ce que c'est une équation différentielle ordinaire ? C'est une équation définie en termes d'une variable $t \in I$, I intervalle réel, une fonction inconnue $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ et ses dérivées par rapport à t. En formule :

$$\mathcal{F}(t, y(t), y\prime(t), y\prime\prime(t), \cdots) = 0. \tag{1}$$

Une fonction y qui vérifie $\mathcal{F}(t, y(t), y\prime(t), y\prime\prime(t), \cdots) = 0$ s'appelle solution de l'EDO.
Une EDO est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k.

Exemple 14 Le équations :

$$y\prime(t) - t = 0;$$

$$y^2\prime(t) - y(t) = 0;$$
$$e^{y^2\prime(t)} - t^2 + y = 0;$$

sont équation différentielles ordinaires.

Si $n = 1$ on parle d'équation différentielle scalaire. Si $n > 1$ on parle d'equation différentielle vectorielle. Par exemple l'équation pour l'inconnue $y(t) = (y_1(t), y_2(t))) \in \mathbb{R}^2$:

$$y\prime(t) = ||y||^2 y$$

est un premier exemple simple d'équation vectorielle.

Exemple 15 L'EDO d'ordre 2 la plus célèbre est la deuxième loi de Newton :

$$F(x) = mx''(t)$$

qui décrit per exemple la dynamique d'un point matérielle soumis à la résultante des forces F.

On peut écrire la loi de Newton en termes du système :

$$\begin{cases} x'(t) & = v \\ v'(t) & = \frac{1}{m}F(x) \end{cases}$$

de deux équations d'ordre 1. En general une équation scalaire d'ordre k peut être écrite comme un système de k équations d'ordre 1.
Dans la suite on va considerer des équations différentielles d'ordre k sous la forme normale :

$$y^{(k)} = f(t, y, \cdots, y^{(k-1)}) \quad k \in \mathbb{N}$$

3.2 Existence et unicité locales pour le problème de Cauchy

Soit I un intervalle, $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. On considere l'EDO :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

On peut penser à cette équation comme un phénomène évolutif en temps (la variable t). Comme le problème de déterminer toutes les primitives d'une fonction donnée, cette problème admet en genéral un nombre infini de solutions. Pour choisir une solution particulière on impose une condition initiale, c'est à dire

$$y(t_0) = y_0,$$

ce qui veut dire que à l'instant initial t_0 la loi evolutive vaut y_0.

Définition 3.2.1 *[Problème de Cauchy] On appelle problème de Cauchy le problème de trouver une intervalle I tel que $t_0 \in I$ et une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\begin{cases} y\prime(t) & = f(t, y(t)) \quad t \in I \\ y(t_0) & = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Première question : sous quelles conditions existe-t-il une solution du problème de Cauchy ? Deuxième question : cette solution est-elle unique ?
Le théorème de Cauchy- Lipschitz donne une réponse à ces deux questions. Si f satisfait une condition supplémentaire, alors l'existence et l'unicité d'une solution sont assurées localement, c'est à dire sur un (petit) intervalle autour de t_0.
La condition supplémentaire qu'on demande pour la fonction f est d'être lipschitzienne par rapport à la variable y dans un voisinage du point initial y_0.

Définition 3.2.2 *[Fonction localement lipschitzienne] Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Soit $J \subset D$ un voisinage du point y_0. On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable y dans le voisinage J si il existe une constante $L > 0$ et il existe un voisinage $U \subset I$ du point t_0 tels que :*

$$||f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|| \leq L||y_1(t) - y_2(t)||$$

pour $y_1(t), y_2(t) \in J, t \in U$.

Exemple 16 La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$:

$$f(y) = \sqrt{y}$$

n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. En fait :

$$\lim_{(y_1,y_2)\to(0,0)} \frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \infty$$

et par conséquence il ne peut pas exister aucune constante L vérifiant la condition de Lipschitz. Cependant f est lipschitzienne sur tout intervalle

$[a,b]$ avec $b > a > 0$. En fait pout tout $y_1(t), y_2(t) \in [a,b]$ on a :

$$\frac{|\sqrt(y_1) - \sqrt(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{|\sqrt(y_1) - \sqrt(y_2)|} \leq \frac{1}{2\sqrt(a)}$$

Et donc la condition de Lipschitz est vérifiée avec $L = \frac{1}{2\sqrt(a)}$.

Si une fonction (d'une variable) est dérivable au voisinage d'un point et la dérivée est bornée dans ce voisinage, alors la fonction est localement lipschitzienne. La réciproque est fausse : il y a des fonctions lipschitziennes qui ne sont pas dérivables. Si une fonction est de classe C^1 alors elle est localement lipschitzienne.

Exemple 17 La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$:

$$f(y) = |y|$$

est lipschitzienne au voisinage de tout $y \in \mathbb{R}$. En fait pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$|f(y_1) - f(y_2)| = ||y_1| - |y_2||.$$

La condition de Lipschitz est donc vérifiée avec $L = 1$:

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|.$$

Noter que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en $y = 0$. Cependant elle est lipshcitizienne.

Théorème 3.2.3 *[Cauchy - Lipschitz] Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Si f est continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable dans un voisinage du point y_0, alors le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y\prime(t) & = f(t, y(t)) \quad t \in I \\ y(t_0) & = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in D \end{cases}$$

admet une unique solution $\overline{y}$ définie dans un petit voisinage du point t_0. De plus la solution est de classe C^1 dans ce voisinage.

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que au moins localement et sous certaines conditions, le problème de Cauchy est bien posé. Essayons maintenant de calculer quelque solution d'EDO très simples.

Exemple 18 [Modèle de Malthus pour la croissance des populations] Un des premières et plus simples modèles pour l'évolution en temps des populations est le modèle de Malthus du 1798. On considère une fonction $t \mapsto y(t)$ *qui décrit le nombre d'individus à l'instant* t*. Si l'on suppose que le rapport entre le taux de croissance de la population et la population même soit proportionnel au temps passé l'on trouve :*

$$\frac{y(t+\Delta t)}{y(t)} = k\Delta t \quad k \in \mathbb{R}^+$$

et si on fait la limite pour $\Delta t \to 0$ *l'on trouve l'équation différentielle :*

$$y\prime(t) = ky(t) \quad k \in \mathbb{R}^+$$

La fonction $f(t,y) = ky(t)$ *est bien continue et lipschitzienne par rapport à la variable* y *pour toute condition initiale* (t_0, y_0)*. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour toute condition initiale* (t_0, y_0) *il existe une unique solution du problème :*

$$\begin{cases} y\prime(t) & = ky(t) \quad t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \quad y_0 \in J \end{cases}$$

On observe que si $y_0 = 0$ alors la (seule) solution du problème est la fonction costante $y(t) = y_0 = 0$. Si $y_0 \neq 0$ on peut chercher cette solution par séparation des variables. Cette méthode s'applique lorsque le terme $f(t, y(t))$ est de la forme :

$$f(t, y(t)) = a(t)b(y(t))$$

pour a, b fonction donnés. Ici $a(t) = 1$ et $b(y(t)) = ky(t)$. Si $y_0 \neq 0$, on peut supposer que $y(t) \neq 0$ (au voisinage de y_0) et diviser par y(t) l'équation différentielle :

$$\frac{y\prime(t)}{y(t)} = k$$

On intégre entre t_0 et t :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y\prime(t)}{y(t)} dt = \int_{t_0}^{t} k dt$$

$$\ln|y(t)| - \ln|y_0| = k(t - t_0)$$

et on explicite la solution $y(t)$ en fonction de t et de la condition initiale :

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

On remarque que la solution est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3.3 EDO linéaires

Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. On dit que f est linéaire par rapport à la variable y si pour tout $t \in I$ fixé l'on a :

$$f(t, \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)) = \lambda_1 f(t, y_1(t)) + \lambda_2 f(t, y_2(t))$$

pour tout $y_1(t), y_2(t) \in D$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si f est linéaire alors il existe une matrice $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(t, y(t)) = A(t)y(t)$. On appelle équation différentielle linéaire (du premier ordre) toute équation de la forme :

$$y\prime(t) = A(t)y(t)$$

oú $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue et $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ est une matrice.

Proposition 3.3.1 *Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ une matrice. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Si A est continue sur I alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times D$ il existe une unique solution $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y\prime(t) & = A(t)y(t) \quad t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \quad y_0 \in D \end{cases}$$

Ce résultat est une simple conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le prochaine théorème donne une caractérisation des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Théorème 3.3.1 *Soient I un intervalle et $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ une matrice continue. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :*

$$y\prime(t) = A(t)y(t)$$

est une espace vectoriel de dimension n. Notamment il existe n fonctions $y^{(1)}(t), \cdots, y^{(n)}(t)$ telles que :

— *$y^{(i)}(t)$ est solution de l'EDO pour tout $i = 1, \cdots, n$;*

— *les $y^{(i)}(t)$ sont linéairement indépendants :*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(t) = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i, c_i \in \mathbb{R}$$

— *si $\overline{y(t)}$ est une solution de l'EDO et $\overline{y(t)} \neq y^{(i)}(t)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ alors $\overline{y(t)}$ il existe $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\overline{y(t)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(t)$$

3.4 EDO linéaires à coefficients constants

On cherche à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y\prime(t) & = Ay(t) t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \quad y_0 \in D \end{cases} \tag{1}$$

dont la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ne dépend pas de t. Par analogie avec le cas scalaire (modèle de Malthus) on a la tentation d'affirmer que la solution du problème est donné par $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ ainsi définie :

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0 \tag{2}$$

Dans l'expression de la solution on voit apparaître l'exponentielle d'une matrice A. Qu'est-ce c'est l'exponentielle d'une matrice ? Formellement elle est définie comme la matrice égale à

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Avec un peu de théorie d'operateurs dans les espaces de Banach on pourrait montrer que cette série est convergente. On appelle sa limite exponentielle de la matrice A. En supposant d'avoir donné un sens à la notion d'exponentielle d'une matrice, on pourrait aussi démontrer que 2 est l'unique solution du problème 1. En pratique, pour calculer la solution d'un problème de type 1 il faut calculer l'exponentielle de la matrice associée au problème. Si cette matrice est diagonalisable alors le calcul de l'exponentielle est plutôt simple.

Proposition 3.4.1 *[Exponentielle d'une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Alors il existe n valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et une matrice $C \in M_n(\mathbb{R})$ inversible tels que :*

$$A = C \ diag\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) C^{-1}$$

Sous ces hypothèse on peut montrer que l'exponentielle de la matrice A est simplement :

$$e^A = C \ diag\ (e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) C^{-1}$$

Ainsi, si A est diagonalisable, le calcul de la solution du problème 1 repose sur le calcul des valeurs propres (et vecteurs propres) de la matrice A. Si A n'est pas diagonalisable, le calcul repose sur sa décomposition de Jordan.

Exemple 19 On cherche à calculer l'exponentielle de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) ? On cherche les valeurs propres :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = y^2 - 7y + 6 = 0 \textit{ ssi } \lambda = 1, \lambda = 6.$$

Elle est bien diagonalisable. On cherche les vecteurs propres v et w solutions des équations :

$$Av = v \textit{ et } Aw = 6w.$$

Un simple calcul conduit à $v = (1 \quad -1)$ et $w = (4 \quad 1)$. Ainsi :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e + 4e^6 & -4e + 4e^6 \\ -e + e^6 & 4e + e^6 \end{pmatrix}$$

Exemple 20 On cherche la solution $t \mapsto y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ du problème :

$$\begin{cases} y_1\prime(t) & = y_1(t) + 2y_2(t) \quad , y_1(t_0) = y_{10} \\ y_2\prime(t) & = 2y_1(t) + y_2(t) \quad , y_2(t_0) = y_{20} \end{cases}$$

Ce problème est de la forme 1, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

Tout d'abord on calcule l'exponentielle de A. On cherche les valeurs propres :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \textit{ ssi } \lambda = -1, \lambda = 3$$

On cherche les vecteurs propres v et w solutions des équations :

$$Av = -v \textit{ et } Aw = 3w$$

Un simple calcul conduit à $v = (1 \quad -1)$ *et* $w = (1 \ \ 1)$. *Ainsi :*

$$e^A t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix}$$

La solution y *définie pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *est donnée par :*

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)}\begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (y_{10} - y_{20})e^{-(t-t_0)} + (y_{10} + y_{20})e^{3(t-t_0)} \\ (-y_{10} + y_{20})e^{-(t-t_0)} + (y_{10} + y_{20})e^{3(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Et si les valeurs propres de la matrice du système sont des nombres complexes ? On cherche à diagonaliser A dans $\mathbb{C}$, c'est à dire on cherche une matrice inversible $C \in M_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $\Lambda \in M_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$A = C\Lambda C^-1.$$

et on calcule e^A avec la strategie usuelle. Même si les calculs reposent sur les nombre complexes, la matrice e^A sera toujours une matrice de nombres réels. Sauriez-vous expliquer pourquoi ?

Exemple 21 [Exponentielle d'une matrice réelle dans $\mathbb{C}$ *] On cherche à calculer l'exponentielle de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0$. *On cherche les valeurs propres :*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0 \ ssi \ \lambda = \alpha + i\beta, \lambda = \alpha - i\beta$$

On appelle $\lambda = \alpha + i\beta$ *et* $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ *les valeurs propres (complexes) de la matrice* A. *On cherche les vecteurs propres* v *et* w *solutions :*

$$Av = \lambda v \ et \ Aw = \overline{\lambda} w$$

Un simple calcul conduit à $v = (1 \quad -i)$ *et* $w = (1 \ \ i)$. *Ainsi :*

$$e^A = \frac{1(-i)}{2i(-i)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda} t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda t}+e^{\overline{\lambda} t}}{2} & \frac{i(e^{\lambda t}-e^{\overline{\lambda} t})}{2} \\ \frac{-i(e^{\lambda t}+e^{\overline{\lambda} t})}{2} & \frac{e^{\lambda t}+e^{\overline{\lambda} t}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a les formules :

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

A l'aide de ces formules on trouve :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} & \frac{i(e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t})}{2} \\ \frac{-i(e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} & \frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

ce qui est une matrice à coefficients réels !

Exemple 22 [Exemple 7 bis] Reprenons la matrice A définie dans l'exemple précédent :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0$. On peut calculer e^A sans faire les calculs complexes. La matrice A admet la décomposition :

$$A = \alpha I + \beta J \quad , I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dés que $IJ = JI$ on a la suivante propriété (croyez-moi) :

$$e^{At} = e^{\alpha It + \beta Jt} = e^{\alpha It}e^{\beta Jt}$$

IMPORTANT : cette propriété c'est pas vrai si $IJ \neq JI$ (rappel : en général le produit matriciel n'est pas commutatif !). La matrice αI est diagonale et sa exponentielle est simplement

$$e^{\alpha It} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essayons de calculer l'exponentielle de la matrice βJt :

$$e^{\beta Jt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{J^k(\beta t)k}{k!}$$

Comment sont faites les puissances de la matrice J ? Vérifiez vous-mêmes que :

$$J^{(2k)} = (-1)^k I \;\; et \; J^{(2k+1)} = (-1)^k J \qquad k \in \mathbb{N}$$

Ainsi on trouve :

$$e^{\beta Jt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{J^{2k}(\beta t)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{J^{2k+1}(\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$e^{\beta Jt} = I \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\beta t)^{2k}}{2k!} + J \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Rappelons que ces deux dernières séries (réelles) sont convergentes et ses limites sont bien connues :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\beta t)^{2k}}{2k!} = \cos(\beta t)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(\beta t)$$

Ainsi on trouve :

$$e^{\beta Jt} = \cos(\beta t) I + \sin(\beta t) J = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Finalement on peut calculer e^{At} *et retrouver le résultat attendu :*

$$e^{At} = e^{\alpha t} I e^{\beta Jt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

3.5 EDO linéaires à coefficients constants non homogènes

On cherche à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y\prime(t) & = Ay(t) + B(t)t \in I \\ y(t_0) & = y_0 \quad y_0 \in D \end{cases} \tag{1}$$

avec I intervalle,$A \in M_n(\mathbb{R})$, $B : I \mapsto \mathbb{R}^n$ continue, $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On appelle équation homogène associée à l'équation $y\prime(t) = Ay(t) + B(t)$ l'équation

$$y\prime(t) = Ay(t)$$

oú le second membre $B(t)$ est nul. On appelle équation non homogène l'équation $y\prime(t) = Ay(t) + B(t)$ avec $B(t)$ non nul. Toute solution de l'équation différentielle non homogène s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation non homogène :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

La solution de 1 qui vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$ s'écrit sous la forme :

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

Le première terme est la bien connue solution du problème de Cauchy homogène. Le deuxième terme est une solution particulière de l'équation non homogène.

Exemple 23 Cherchons à résoudre problème de Cauchy linéaire du première ordre non homogène :

$$\begin{cases} y_1\prime(t) & = y_1(t) + e^{-t} \quad , y_1(0) = 1 \\ y_2\prime(t) & = -y_2(t) - 2e^{-2t} \quad , y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Si l'on pose $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ alors le problème de Cauchy s'écrit sous *forme matricielle* $Y\prime(t) = AY(t) + B(t)$, $Y(0) = Y_0$, *avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix},$$

Dès que la matrice A *est diagonale, l'exponentielle* e^{At} *est simplement :*

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution du problème homogène est :

$$Y_h(t) = e^{A(t)}Y_0 = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant le terme :

$$\int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

$$e^A(t-s)B(s) = \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ 0 & e^{-(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ -2e^{-2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-2s} \\ -2e^{-t-s} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{t-2s}\, ds \\ \int_0^t -2e^{-t-s}\, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{t}(e^{-2t}-1) \\ 2e^{-t}(e^{-t}-1) \end{pmatrix}$$

La solution du problème de Cauchy est :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t} - \frac{1}{2}e^{t}(e^{-2t}-1) \\ e^{-t} + 2e^{-t}(e^{-t}-1) \end{pmatrix}$$

3.6 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2 homogènes

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 homogène :

$$y\prime\prime(t) + a_1 y\prime(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{1}$$

oú I est une intervalle, $y : I \mapsto \mathbb{R}$, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. On sait que l'espace des solutions de l'équation est un espace vectoriel de dimension 2. On cherche une base de l'espace. On cherche des solutions de la forme $y(t) = e^{\lambda t}$. En reportant dans 1 on voit que $y(t)$ est solution si et seulement si λ vérifie :

$$\lambda(t)^2 + a_1\lambda(t) + a_0 = 0.$$

Ainsi on s'est ramené au calcul des racines d'une polynôme. On appelle ce polynôme le polynôme caractéristique de l'équation. Selon la nature des racines du polynôme caractéristique on peut distinguer trois cas.

Cas 1 : racines distinctes et réelles
Si le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes et réelles $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donne par les fonctions :

$$e^{\lambda_1 t} \quad , e^{\lambda_2 t}.$$

Toute solution de l'équation différentielle 1 s'écrit sous la forme :

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cas 2 : une racine réelle multiple
Si le polynôme caractéristique admet une racine réelle multiple $\lambda \in \mathbb{R}$ alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donne par les fonctions :

$$e^{\lambda t} \quad , te^{\lambda t}.$$

Toute solution de l'équation différentielle 1 s'écrit sous la forme :

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cas 3 : deux racines complexes
Si le polynôme caractéristique admet deux racines complexes $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ alors une base de l'espace vectoriel des

solutions est donne par les fonctions :

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad , e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Toute solution de l'équation différentielle 1 s'écrit sous la forme :

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3.7 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2 non homogènes

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 *non homogène :*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \tag{1}$$

oú I *est une intervalle,* $y : I \mapsto \mathbb{R}$, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *continue. Toute solution de 1 s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation homogène 1 plus une solution particulière de l'équation non homogène 1 :*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

On a vu comment calculer la solution homogène $y_h(t)$. *Essayons maintenant de calculer une solution particulière de l'équation non homogène.*

3.7.1 Méthode des coefficients indéterminés

La méthode des coefficients indéterminés vise à trouver une solution particulière à 1. Cette méthode ne s'applique que dans le cas oú le terme $f(t)$ *est somme ou produit de polynômes, fonctions trigonométriques (* $\sin(\omega t), \cos(\omega t)$*), fonctions exponentielles (* $e^{\alpha t}$*). L'idée générale derrière ette méthode est de poser comme candidat pour une solution particulière une ou des fonctions similaires à celles apparaissant dans* $f(t)$ *mais avec des coefficient à déterminer. On substitue ensuite ce candidat dans l'équation pour déterminer la valeur des coefficients inconnues. Si* $f(t)$

est somme ou produit de fonctions essentielles $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ *(avec* u_i *polynôme, trigonométrique ou exponentielle) alors on pose comme candidat solution* $y_p(t)$ *une somme ou produit des fonctions essentielles* u_i *et toutes fonctions qui proviennent par dérivations successives des fonctions* u_i*, toutes multipliés par des coefficients à déterminer.*

Exemple 24 Cherchons une solution particulière de l'équation :

$$y''(t) + 6y'(t) + 25y(t) = 3\sin(2t) + 5t$$

Le terme $f(t)$ *est somme d'une fonction trigonométrique et d'un polynôme. On pose comme candidat solution :*

$$y_p(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t) + Ct + D$$

avec A, B, C, D *coefficients à déterminer.*

Exemple 25 Cherchons une solution particulière de l'équation :

$$y''(t) + 6y'(t) + 25y(t) = 2\sin^2(t) + 3e^{2t}$$

Le terme $f(t)$ *est somme d'une fonction trigonométrique et d'une exponentielle. On pose comme candidat solution :*

$$y_p(t) = A\sin^2(t) + B\cos(t)\sin(t) + C\cos^2(t) + De^{2t}$$

avec A, B, C, D *coefficients à déterminer.*

Exemple 26 Cherchons une solution particulière de l'équation :

$$y''(t) + 4y'(t) = 2e^{-3t}$$

On pose comme candidat solution :

$$y_p(t) = Ae^{-3t}$$

avec A *coefficient à déterminer. On calcule les dérivées d'ordre* 1 *et* 2 *de la fonction* $y_p(t)$ *:*

$$y_p'(t) = -3Ae^{-3t} \quad , y_p''(t) = 9Ae^{-3t}$$

Après substitution dans l'équation on trouve :

$$9Ae^{-3t} + 4Ae^{-3t} = 2e^{-3t},$$

et donc $A = \frac{2}{13}$*. La solution cherchée est :*

$$y_p(t) = \frac{2}{13}e^{-3t}$$

Dans le cas special ou le candidat solution particulière est essentiellement identique à une partie de la solution homogène cette méthode peut échouer. En fait il faut proposer comme candidat solution une solution qui ne fait pas partie de l'équation homogène. Par exemple soit à résoudre :

$$y''(t) - 9y'(t) = 2e^{3t}.$$

La solution homogène est :

$$y_h(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t}.$$

Si l'on pose come candidat solution :

$$y_p(t) = Ae^{3t}$$

en reportant dans l'équation l'on trouve :

$$9Ae^{3t} - 9e^{3t} = 2e^{3t}$$

et cette dernière équation est impossible. Ce comportement est lié à la présence de la même solution (e^{3t}*) dans la solution homogène et dans le candidat solution particulière. Dans ce cas il suffit d'utiliser plutôt le candidat :*

$$y_p(t) = Ate^{3t}.$$

Considérons un autre exemple. Soit à résoudre :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2te^{-2t} + 3\sin(5t).$$

La solution homogène est :

$$y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}.$$

Si l'on pose come candidat solution :

$$y_p(t) = (At + B)e^{-2t} + C\sin(5t) + D\cos(5t),$$

alors il y a chevauchement être les termes Ate^{-2t} *et* $2te^{-2t}$. *Pour régler le problème ou choisira plutôt :*

$$y_p(t) = (At^2 + Bt)e^{-2t} + C\sin(5t) + D\cos(5t).$$

Exemple 27 Soit à résoudre :

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{3t}.$$

La solution homogène est :

$$y_h(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}.$$

Si l'on pose come candidat solution :

$$y_p(t) = Ae^{3t}$$

alors il y a chevauchement être les termes Ae^{3t} *et* e^{3t}. *Dans ce cas multiplier par* t *ne règle pas le problème du chevauchement car* te^{3t} *apparaît toujours dans la solution homogène. Pour régler le problème ou choisira plutôt de multiplier par* t^2 *:*

$$y_p(t) = At^2e^{3t}.$$