

Économétrie des séries temporelles

Thomas Chuffart

thomas.chuffart@univ-fcomte.fr

Informations générales

- 15h CM + 3h TD
- des heures de forecasts entre des séances
- Évaluation : Devoir sur table + projet
- Pré-requis : Économétrie en coupe transversale

Introduction

Definition

Une série temporelle est une suite de variables stochastiques $\{x_1, x_2, \dots, y_t\}$ indicé par $t = 1, \dots, T$, le temps. Cette série représente un vecteur de variables observées de façon régulières.

Remarques :

- Il existe une dépendance temporelle entre les observations : la distribution conditionnelle de y_t dépend des valeurs passées.
- $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{x_{-\infty}, \dots, 0, x_{\infty}\}$
- Si l'on connaît le PGD, il est possible d'obtenir I collections de réalisations de $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Introduction

- L'économètre dispose d'une seule collection de réalisations de T v.a
- Il faut choisir (ou se restreindre) suivant la disponibilité des données, à la meilleure périodicité possible.
- On cherche à identifier le meilleur processus stochastique. On pourra alors :
 - effectuer des prévisions
 - réaliser des simulations à des fins statistiques

CPI and GDP: get data from FRED Database

```
library(tidyverse)
library(data.table)
library(viridis)
library(quantmod)

my.names <- data.table(var=c("CPILFESL","GDPC1"), name=c("CPI","GDP"))
df= getSymbols('CPILFESL',src='FRED', auto.assign=F)
df = data.frame(date=time(df), coredata(df))
df.gdp_us =getSymbols('GDPC1',src='FRED', auto.assign=F)
df.gdp_us = data.frame(date=time(df.gdp_us), coredata(df.gdp_us))

df<-merge(df,df.gdp_us,by="date")
dt<-data.table(df)
dt %>% gather(var,value,-date) %>% data.table() -> dt2
dt2<-merge(dt2,my.names,by="var")

# Base 100 pour la date t = 1

dt2=dt2[,id:=1:.N, by=var]
dt2=dt2[,var0:=100*value/sum(ifelse(id==1,value,0)),by=var]
```

CPI et GDP Figure

```
ggplot(data=dt2,aes(x=date,y=var0,color=name,linetype=name))+geom_line(size=1.1)+  
  scale_y_log10(breaks=c(100,200,400,800))+theme_minimal()+  
  theme(plot.caption=element_text(hjust=0),legend.position="top")+guides(linetype=F)+  
  scale_color_viridis(name="Variable",discrete=T,end=0.8)
```



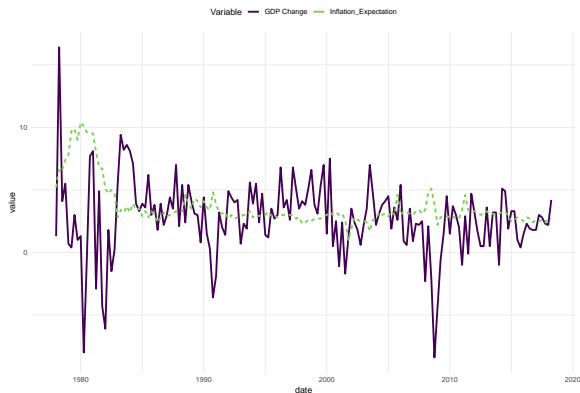
CPI expectation change et GDP change: get data from FRED

```
rm(list = ls())
my.names <- data.table(var=c("MICH","A191RL1Q225SBEA"),
                       name=c("Inflation_Expectation","GDP Change"))
df= getSymbols('MICH',src='FRED', auto.assign=F)
df = data.frame(date=time(df), coredata(df))
df.gdp_us =getSymbols('A191RL1Q225SBEA',src='FRED', auto.assign=F)
df.gdp_us = data.frame(date=time(df.gdp_us), coredata(df.gdp_us))

df<-merge(df,df.gdp_us,by="date")
dt<-data.table(df)
dt %>% gather(var,value,-date) %>% data.table() -> dt2
dt2<-merge(dt2,my.names,by="var")
```

Michigan inflation expectation et GDP change Figure

```
ggplot(data=dt2,aes(x=date,y=value,color=name,linetype=name))+  
  geom_line(size=1.1)+  
  theme_minimal()+theme(plot.caption=element_text(hjust=0),  
    legend.position="top")+  
  guides(linetype=F)+  
  scale_color_viridis(name="Variable",discrete=T,end=0.8)
```



Introduction

Outline

- 1 Séries temporelles non-stationnaires
- 2 Séries temporelles stationnaires
- 3 Dynamiques non-linéaires

Séries temporelles non-stationnaires

Introduction

Definition

Un processus stochastique, noté $\{y_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{Z}\}$ est une séquence ordonnée de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ avec :

- Ω l'ensemble des possibles
- \mathbb{F} une tribu ou un σ -algèbre représentant les évènements
- \mathbb{P} une mesure de probabilité

Ce processus sera noté y_t .

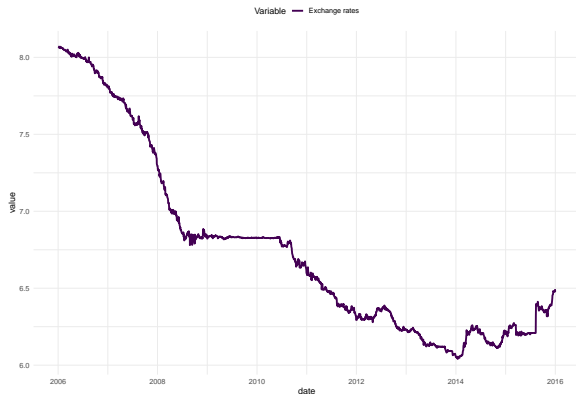
Exchange rate China/US in level and % change: get data

```
rm(list = ls())
# set dates
date.start <- "2006-01-01"
date.end <- "2015-12-31"
my.names <- data.table(var=c("DEXCHUS"),
                        name=c("Exchange rates"))
df= getSymbols('DEXCHUS',src='FRED', auto.assign=F)
df <- df[!(is.na(df$DEXCHUS)),]
df <- df[paste(date.start,date.end,sep="/")]
df.exrate_change <- log(df$DEXCHUS) - log(lag(df$DEXCHUS))
df.exrate_change <- data.frame(date=time(df.exrate_change), coredata(df.exrate_change))

df = data.frame(date=time(df), coredata(df))
dt<-data.table(df)
dt %>% gather(var,value,-date) %>% data.table() -> dt2
dt2<-merge(dt2,my.names,by="var")
```

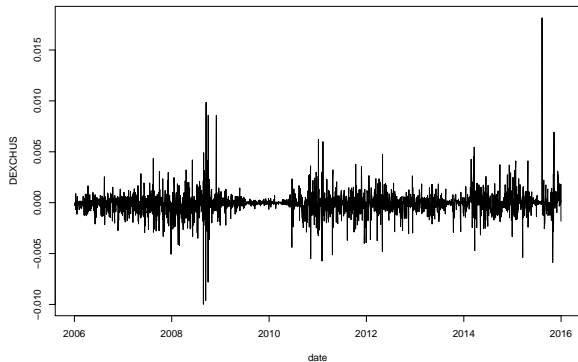
Exchange rate China/US in level

```
ggplot(data=dt2,aes(x=date,y=value,color=name,linetype=name))+geom_line(size=1.1)+  
theme_minimal()+theme(plot.caption=element_text(hjust=0),legend.position="top")+  
guides(linetype=F)+scale_color_viridis(name="Variable",discrete=T,end=0.8)
```



Exchange rate China/US % change

```
plot(df.exrate_change, type="l")
```



Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- **Définition de la stationnarité**
- Non-stationnarité
- Rappels
- Spurious regressions
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Les moments inconditionnels ordinaires et centrés de y_t peuvent s'exprimer comme l'espérance de $h(y_t)$, une fonction continue de y_t :

$$E[h(y_t)] = \int_{t=1}^T h(y_t) f(y_t) dy_t \quad (1)$$

avec $f(y_t)$ la fonction de densité inconditionnelle de y .

- Pour l'espérance $h(y_t) = y_t$
- Pour la variance $h(y_t) = (y_t - \mathbb{E}[y_t])^2$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

La fonction d'autocovariance de y_t s'obtient à partir de la densité jointe de $(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+h})$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \mathbb{E} [(y_t - \mu_t) (y_{t+h} - \mu_{t+h})] \\ &= \int \dots \int (y_t - \mu_t) (y_{t+h} - \mu_{t+h}) \\ &\quad f(y_t, \dots, y_{t+h}) dy_t \dots dy_{t+h} \end{aligned}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Soit y_t une séquence de v.a, y_t est (faiblement) stationnaire au second ordre si

- $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[y_t] = \mu < \infty$
- $\forall t, h \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \gamma(h) < \infty$

avec pour $h = 0, \gamma(0) = \sigma^2$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Soit y_t une séquence de v.a, y_t est strictement stationnaire si la distribution jointe de y_t et y_{t+h} dépend uniquement de h :

$$f(y_t, \dots, y_{t+h}) = f(y_\tau, \dots, y_{\tau+h}) \quad (2)$$

avec $t \neq \tau$. La distribution jointe du processus y_t doit donc être invariante par translation dans le temps.

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Soit y_t un processus stationnaire au second ordre, il est ergodique si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \gamma(h) = 0 \quad (3)$$

- La mémoire du processus est finie
- l'ergodicité décrit une forme faible d'indépendance asymptotique

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Theorem (Décomposition de Wold)

Soit $\{y_t\}$ un processus stationnaire au second ordre. On peut montrer que y_t peut toujours se décomposer en une somme pondérée des innovations de y_t et une composante déterministe μ_t :

$$y_t = \mu_t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}, \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon < \infty) \quad (4)$$

avec $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Le fait que la somme des a_i^2 soit finie est important :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E[(y_t - \mu_t)(y_{t+h} - \mu_t)] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+h} \varepsilon_{t-j+h}\right] \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i a_{j+h} \gamma_{\varepsilon}(i-j+h) \\ &= \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i a_{j+h}\end{aligned}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- **Non-stationnarité**
- Spurious regressions
- Rappels
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

Si un processus ne respecte pas les conditions de stationnarité et l'hypothèse d'ergodicité, alors il est non stationnaire

Il existe donc de nombreux processus non stationnaires

- La tendance déterministe linéaire :

$$y_t = \mu + \delta t + \varepsilon_t$$

- La tendance déterministe non-linéaire :

$$y_t = \mu + \delta(t) + \varepsilon_t \quad (5)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

$(y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus **TS** si il peut s'écrire $y_t = \delta(t) + u_t$.

- y_t est composé d'une partie **déterministe** et d'une partie **stochastique stationnaire**
- Exemple : $y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$, $Y_t - b_0 - b_1 t = \varepsilon_t$ est stationnaire
- Un choc sur la partie stochastique de ce genre de processus est dit **non persistant** car la tendance du modèle est **déterministe**.
- Économiquement, la trajectoire de long terme de la série est **insensible** aux aléas conjoncturels.

Choc déterministe

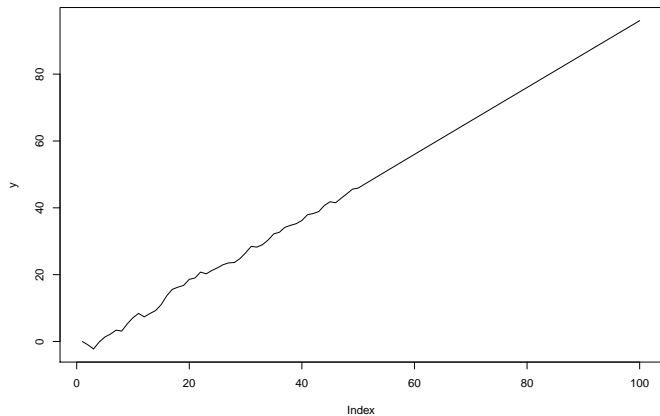
```
rm(list = ls())

T = 100
e = rnorm(T)
y = rep(NA, T)
y[1] = 0

for (t in 2:50){
  y[t] = 0.2*t + 0.8 *y[t-1] + e[t]
}
for (t in 51:T){
  y[t] = 0.2*t + 0.8 *y[t-1]
}
```

autre frame

```
plot(y,type='l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

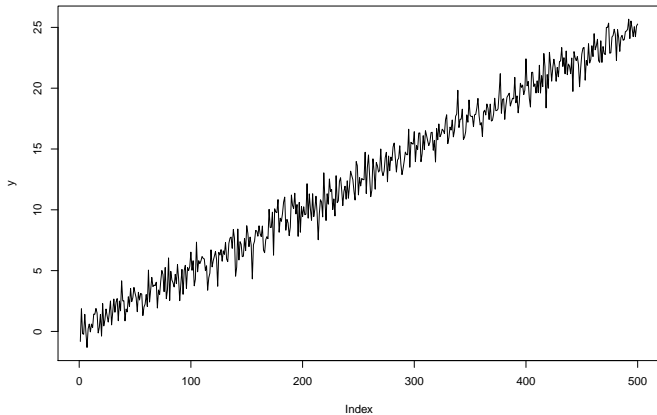
Theorem

*Pour **stationnariser** un processus TS, il convient de retirer la composante déterministe $\delta(t)$ en régressant la série y_t sur des puissances de t .*

- Exemple : $y_t = b_0 + b_1 t + z_t + \varepsilon_t$. On enlève la trend :
$$y_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t = z_t + \varepsilon_t.$$

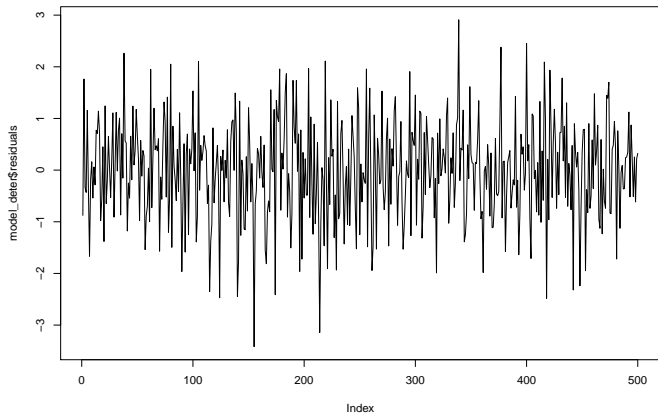
Tendance déterministe 1

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 1:T){  
  y[t] = 0.05*t + e[t]  
}  
plot(y,type='l')
```



Tendance déterministe 2

```
t <- c(1:T)
model_deter <- lm(y~0+ t)
plot(model_deter$residuals, type = 'l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Proposition

L'influence d'un choc ε_t à une date T sur y_t défini par $y_t = f(t) + z_t$ avec z_t stationnaire et $E[z_t] = 0$, est transitoire. Après le choc ε_T , la séquence des y_t converge ainsi vers sa valeur de long terme $f(t)$.

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

L'opérateur retard est défini par $L : y_t \rightarrow L(y_t) = Ly_t = y_{t-1}$. Le polynôme retard est défini par $P(L) = (1 - \lambda L)$.

Proposition

Si $|\lambda| \leq 1$, alors $P(L)$ est inversible et $(1 - \lambda L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L^k$. Sinon, il n'est pas inversible dans l'espace backward.

- Tout polynome $A(L) = 1 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_n L^n$ peut s'écrire $A(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i)$ avec $\lambda_i = \frac{1}{z_i}$, z_i les racines du polynomes.
- Si $|z_i| \geq 1$, le polynome est inversible.

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

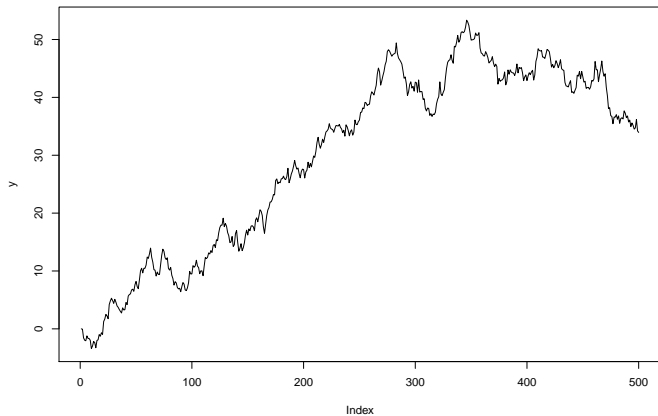
Une marche aléatoire est un processus stochastique non stationnaire respectant

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim IID \quad (6)$$

- $\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[y_{t-1} + \varepsilon_t] = \dots = \mathbb{E}\left[y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}\right]$
- $Cov(y_t, y_{t+h}) = (t+h) \sigma_\varepsilon^2$
- y_t est une martingale de tendance stochastique $\sum_i \varepsilon_{t-i}$

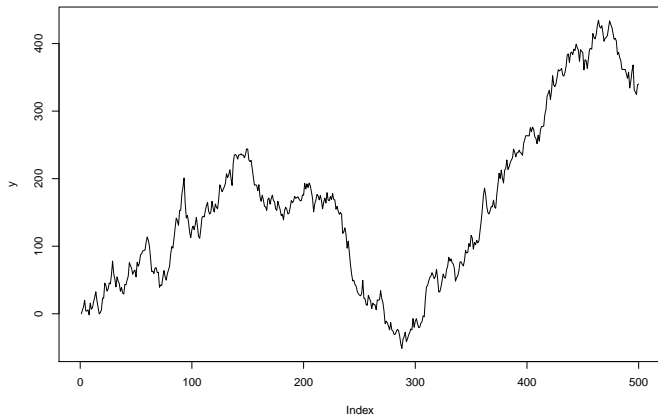
Marche aléatoire 1

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y,type='l')
```



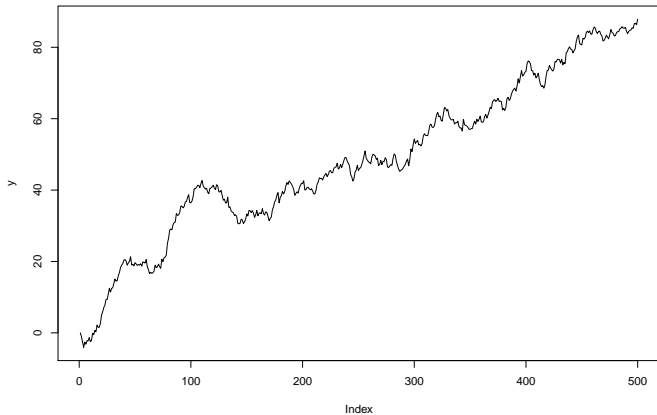
Marche aléatoire 2

```
T=500;  
e = rnorm(T,0,10)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y,type='l')
```



Marche aléatoire 3

```
T=500;
e = rnorm(T)
y = rep(NA,T)
y[1] = 0
for (t in 2:T){
  y[t] = 0.1 + e[t] + y[t-1]
}
plot(y,type='l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

Un processus est dit DS, Differency Stationary, si la non-stationnarité est causée par une source stochastique

- $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus DS d'ordre d si le processus **filtré** défini par $(1 - L)^d y_t$ est stationnaire. On dit que y_t est intégré d'ordre d .
- On peut définir une classe de processus stochastiques qui ne satisfont pas les conditions de la stationnarité, mais dont la différence à l'ordre d satisfait les propriétés de la stationnarité.

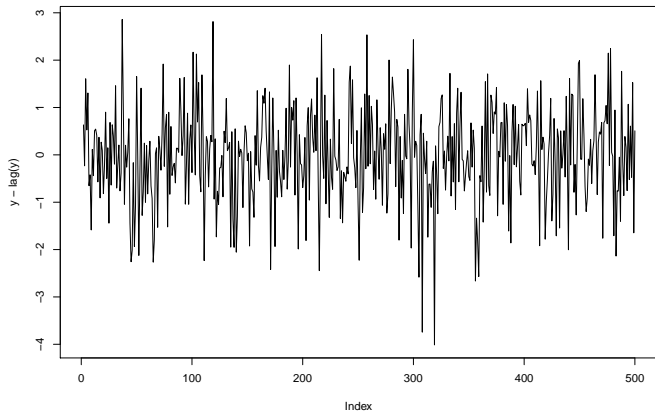
Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

- Soit la marche aléatoire, $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$. Ce processus est non-stationnaire.
- Soit le processus différencié, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$. Ce processus est stationnaire.

Marche aléatoire 4

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y-lag(y),type='l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Les processus possédant une tendance déterministe ou stochastique sont globalement non-stationnaires

- le processus viole les conditions de stationnarité
- les paramètres du processus sont invariants
- la non-stationnarité existe pour toute évolution du processus

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Les processus dont les paramètres évoluent dans le temps sont possiblement localement non-stationnaires

- un modèle à changement de régime peut être stationnaire dans un régime non-stationnaire dans autre régime (localement non-stationnaire)
- globalement stationnaire ou non-stationnaire, ce sont des processus non-linéaires

Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- Non-stationnarité
- **Spurious regressions**
- Rappels
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Spurious regression

Soit deux marches aléatoires $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ et $x_t = x_{t-1} + u_t$:

- $x_0 = y_0 = 0$
- $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $u_t \sim IID(0, \sigma_u^2)$.
- $E[\varepsilon_t u_s] = 0$

Que se passe-t-il si l'on régresse y_t sur x_t sans avoir diagnostiquer la non stationnarité ?

$$y_t = \alpha + \beta x_t + v_t$$

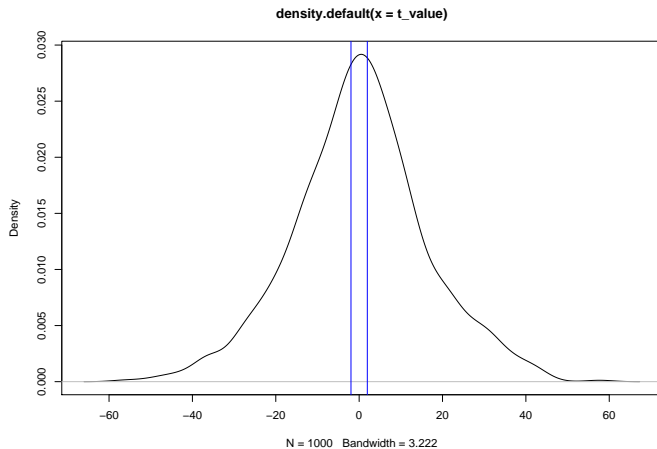
Spurious regression

```
N = 1000
T=500
t_value = rep(NA,N)
p_value = rep(NA,N)
for (i in 1:N){
  e = rnorm(T)
  u = rnorm(T)
  y = rep(NA,T)
  x = rep(NA,T)
  y[1] = 0
  x[1] = 0
  for (t in 2:T){
    y[t] = e[t] + y[t-1]
    x[t] = x[t-1] + u[t]
  }
  results_sum <- summary(lm(y~x))
  results_coef <- results_sum$coefficients
  beta.estimate <- results_coef["x", "Estimate"]
  std.error <- results_coef["x", "Std. Error"]
  t_value[i] <- beta.estimate/std.error
  p_value[i] <- 2*pt(-abs(t_value[i]), df=T-1)
}
sum(p_value<0.05)/N
```

```
## [1] 0.882
```

Spurious regression: figure

```
plot(density(t_value))  
abline(v=1.96,col="blue")  
abline(v=-1.96,col="blue")
```



Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- Non-stationnarité
- Spurious regressions
- **Rappels**
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Soit y_i une fonction de n variables aléatoires $y_n = f(Y_1, \dots, Y_n)$.

- On étudie le comportement de Y_n quand $n \rightarrow \infty$.
- La fonction $f(\cdot)$ est souvent un estimateur. Cela peut aussi être une statistique de test.
- Cette étude repose sur des notions de convergence :
 - convergence presque sûre
 - convergence en probabilité
 - convergence en moyenne quadratique
 - convergence en loi

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Definition

y_n converge presque sûrement vers une constante c si,

$$Pr\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = c\right) = 1$$

Explications : Y_n tend vers une valeur constante de manière certaine, sa distribution asymptotique est une masse ponctuelle

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Definition (Convergence en probabilité)

Y_n converge en probabilité vers une constante c , si pour toute valeur de $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|Y_n - c| > \varepsilon) = 0 \quad (7)$$

Definition (Convergence en moyenne quadratique)

Y_n converge en moyenne quadratique vers une constante c , si $\mathbb{E}[|Y_n|^2] < \infty$ et si pour tout γ :

$$\mathbb{E}[|Y_n - c|^2] < \gamma \quad (8)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Definition (Convergence en Loi)

Soit $F_n(.)$ la fonction de répartition de Y_n . Y_n converge en loi vers une variable aléatoire Y définie sur un support $Y(\Omega)$ et ayant pour fonction de répartition $F(.)$ si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z), \forall z \in Y(\Omega)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Theorem (Loi faible des grands nombres)

Pour une séquence de variables aléatoires IID, $Y_t = Y_1, \dots, Y_n$, la moyenne empirique de ces variables converge en probabilité vers l'espérance de Y_t

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}[Y_t] = \bar{Y}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Theorem (Loi forte des grands nombres)

Pour une séquence de variables aléatoires IID, $Y_t = Y_1, \dots, Y_n$, la moyenne empirique de ces variables converge p.s vers l'espérance de Y_t

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{a.s} \mathbb{E}[Y_t] = \bar{Y}$$

si $\mathbb{E}[|Y_t|] < \infty$.

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Theorem (Théorème central limite)

Soit une séquence IID, $Y_t = Y_1, \dots, Y_n$ d'espérance $\mathbb{E}[Y_t] = m$ et de variance finie $V(Y_t) = \sigma^2$. D'après le théorème central limite de Lindeberg-Levy,

$$Z_n = \sqrt{n} (\bar{Y} - m) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Soit le modèle linéaire :

$$Y_t = y_t\beta + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (9)$$

L'estimateur OLS est alors donné par

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^T y_t^2 \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T y_t Y_t = \beta + \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_t}{n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t^2}\end{aligned}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Est-ce que $\hat{\beta}$ est convergent ?

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \text{plim} \beta + \frac{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_t}{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t^2}$$

- On a $\mathbb{E}[y_t \varepsilon_t] = 0$ et $V([y_t \varepsilon_t]) = \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2$
- D'après la loi forte de grand nombre, $\sum \frac{\sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2}{t^2} < \infty$
- Donc $\frac{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_t}{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t^2} = \frac{0}{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T y_t^2} = 0$
- Notez que faille la condition $\mathbb{E}[y_t^4] < \infty$ est nécessaire

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

- La consistance donne une distribution dégénérée : $\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta$
- on peut montrer que $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{p} \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Que se passe-t-il dans le cas d'un AR(1)? $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- $\hat{\rho} = \rho + \frac{\sum_{t=1}^T Y_{t-1} \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2}$
- $\sigma_y^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T Y_t^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T \rho^2 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \right] = \rho^2 \sigma_y^2 + \sigma_\varepsilon^2$
- Donc $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$
- On a donc $\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow[\rho]{} \mathcal{N}(0, 1 - \rho^2)$
- Comment tester $\rho = 1$?

Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- Non-stationnarité
- Spurious regressions
- Rappels
- **Stationnariser un processus**

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

- Supposons que $Y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$ et qu'on lui applique un filtre $(1 - L)^d$
- $Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t = \Delta Y_t$
- $\Delta Y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t - b_0 - b_1(t-1) - \varepsilon_{t-1} = b_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- Le processus est bien stationnaire mais on a introduit de l'auto-corrélation dans les résidus...

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

- Supposons que $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ et qu'on le stationnarise à l'aide d'une régression sur une tendance
- On obtient un processus qui n'a aucun sens. D'autant plus que les paramètres estimés de la régression sont parfois significatifs

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

- Test de **Dickey Fuller** de racine unitaire dont l'**hypothèse nulle** est la **non stationnarité** d'un processus AR(1) :
$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t.$$
- Le test DF revient à tester les hypothèses $H_0 : \rho = 1$ vs $H_1 : \rho < 1$.
- Il suffirait alors d'appliquer un test de Student mais sous l'hypothèse de non stationnarité, l'estimateur des MCO n'a pas une distribution asymptotique standard.
- Il faudra calculer les seuils de significativité.

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

Remarque

*La distribution **asymptotique**, sous H_0 , de la statistique de Student $t_{\hat{\rho}=1}$ du test de Dickey Fuller n'est pas **standard**. L'utilisation, à tort, des seuils standard associés à une distribution normale peut conduire à un mauvais diagnostic quant à la non stationnarité de la série étudiée. Ce type d'erreur conduit à **rejeter trop souvent** l'hypothèse de non stationnarité.*

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

Proposition

Sous l'hypothèse H_0 de non stationnarité, la distribution asymptotique de la statistique de Student $t_{\hat{\rho}=1}$ diffère suivant le modèle utilisé :

1 $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

2 $Y_t = b_0 + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = b_0 + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

3 $Y_t = b_0 + b_1 t + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = b_0 + b_1 t + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

avec $\phi = 1 - \rho$.

On ne sait pas ce que l'on doit inclure dans le modèle testé. On propose généralement **une stratégie de tests de Dickey Fuller**, et non pas un seul test unique.

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

La stratégie de test : on va du plus général au plus spécifique.

1 Modèle 1 : $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$

2 Modèle 2 : $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha) = \varepsilon_t$

3 Modèle 3 : $(1 - \phi L)Y_t = \varepsilon_t$

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 1, Modèle 1 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$
- On test $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi < 0$
- Si on accepte $H_0 : \phi = 0$ alors le processus peut contenir une racine unitaire
- Si on rejette H_0 , le processus peut ne pas contenir de racine unitaire

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 2, Modèle 1 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$
- Il faut vérifier que le modèle (1) est le bon
- Si on a accepté $H_0 : \phi = 0$, on test $H_0 : \phi = \beta = 0$ sinon on test $H_0 : \beta = 0$
 - 1er cas : Valeur critique simulée. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(1) + T + C$
 - 2ème cas : Valeur critique classique. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(0) + T + C$

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 3, Modèle 2 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha) = \varepsilon_t$
- On test $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi < 0$
- Si on accepte $H_0 : \phi = 0$ alors le processus peut contenir une racine unitaire et/ou
- Si on rejette H_0 , le processus peut ne pas contenir de racine unitaire

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 4, Modèle 2 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha) = \varepsilon_t$
- Il faut vérifier que le modèle (2) est le bon
- Si on a accepté $H_0 : \phi = 0$, on test $H_0 : \phi = \alpha = 0$ sinon on test $H_0 : \alpha = 0$
 - 1er cas : Valeur critique simulée. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(1) + C$
 - 2ème cas : Valeur critique classique. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(0) + C$

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 5, Modèle 3 $(1 - \phi L) Y_t = \varepsilon_t$
- On test $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi < 0$
- Si on accepte $H_0 : \phi = 0$ alors le processus est $I(1)$
- Si on rejette H_0 , le processus est $I(0)$

Séries temporelles stationnaires

Introduction

Comment modéliser une série **non-stationnaire** ?

- Il faut la **stationnariser**. On peut ensuite l'étudier de façon **univariée** via ses propriétés **stochastiques**.
- L'ajout de **covariates** peut par contre poser des problèmes (**Cointégration**).
- **Cointegration** : deux séries ont une tendance de long-terme commune.
- Avant de régresser deux séries stationnaires, ils faut vérifier cette tendance commune.
- On ne s'y intéresse pas dans ce cours malheureusement.

Séries temporelles stationnaires

Introduction

Definition

On dit que deux séries sont cointégrées si

$$y_t - \beta y_t = u_t$$

avec u_t stationnaire.

Séries temporelles stationnaires

Outline

- 1 La méthode Box-Jenkins
- 2 Les modèles auto-régressifs
- 3 Les modèles à Moyenne Mobile
- 4 Les modèles ARMA

La méthode Box-Jenkins

La procédure de modélisation de Box et Jenkins (1976) est composée de 5 étapes :

- Stationnarisation
- Identification (Choix du modèle stationnaire)
- Estimation
- Validation et Test
- Prévisions

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Definition

Le processus stationnaire $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait une représentation AR d'ordre p , notée $AR(p)$, si et seulement si :

$$\Phi(L)y_t = c + \varepsilon_t \quad (10)$$

avec $c \in \mathbb{R}$, $\Phi(L) = \sum_{i=0}^p \phi_i L^i$ et $\phi_0 = 1$ et $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

- $\mathbb{E}[y_t] = m = \frac{c}{\sum_{i=0}^j \phi_i}$
- $\text{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{i=0}^j \phi_i^2}$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Quels sont les conditions de stationnarité ? **Petit rappel**

Definition

$A(L)$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B(L)$ tel que $A(L) \circ B(L) = Id$.

On suppose $P(L) = \sum_{k=0}^p a_k L^k$ et $Y_t = P(L)X_t$. Est-ce que y_t peut s'exprimer en fonction $y_t = P(L)^{-1}Y_t$. Tout polynome peut se factoriser :

$$P(z) = \phi_p \prod_{i=1}^p (z - z_i) \Leftrightarrow \alpha \prod_{i=1}^p \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \Leftrightarrow \alpha \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z)$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

- Si $|\lambda_i| = 1$, le polynôme n'est pas inversible
- Si $|\lambda_i| = \left| \frac{1}{z_i} \right| < 1$ alors $\Phi(L)$ est inversible et
$$\Phi^{-1}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i$$
- Donc $y_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \varepsilon_t$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Propriétés du modèle AR(p) :

■ Fonction d'auto-covariance :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \mathbb{E}(y_t y_{t-h} - h)$$

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow y_t^2 = \phi_1 y_{t-1} y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p} y_t + \varepsilon_t y_t$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \cdots + \phi_p \gamma(h-p)$$

■ Fonction d'auto-corrélation :

$$\Leftrightarrow \rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \cdots + \phi_p \rho(h-p)$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Équations de Yule-Walker :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \dots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Proposition

Si $y_t \sim AR(p)$ alors les $|\rho(h)|$ et les $\gamma(h)$ décroissent vers 0 exponentiellement

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Auto-corrélations partielle

Proposition

Si $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim AR(p)$ tel que $\Phi(L)y_t = \varepsilon_t$, alors

$$r(h) \begin{cases} = 0 & \text{si } h > p \\ \neq 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Démonstration : $r(h)$ est le coefficient de y_{t-h} dans $E(y_t | y_{t-1} \dots y_{t-p})$:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$E(y_t | y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Mais, à quoi ça sert ? RRRRrrrr

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Soit le modèle AR(2) suivant :

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (11)$$

- Quelles conditions sur ϕ_1 et ϕ_2 pour que le processus soit stationnaire ?
- Moyenne constante : $\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu \Rightarrow \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

- On peut écrire $c = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$
- Soit $\tilde{y}_t = y_t - \mu$ et $\tilde{y}_t = \phi_1\tilde{y}_{t-1} + \phi_2\tilde{y}_{t-2} + a_t$
- ou encore $(1 - \phi_1L - \phi_2L^2)\tilde{y}_t = a_t$
- $(1 - \phi_1L - \phi_2L^2)$ peut s'écrire $(1 - \lambda_1L)(1 - \lambda_2L)$
- λ_1^{-1} et λ_2^{-1} sont les racines du polynôme du second degrés $1 - \phi_1L - \phi_2L^2$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

La fonction d'autocovariance

- $\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2$
- $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$
- Pour $k = 1$ on a $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_{-1} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}$
- On remplace dans la variance :

$$\sigma_y^2 = \gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)} \quad (12)$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

Definition

Un processus MA d'ordre 1 est défini par une combinaison linéaire des innovations :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (13)$$

ou

$$y_t = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t \quad (14)$$

Ce processus sera **toujours stationnaire**.

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

Proposition

Si $|\theta_1| < 1$ alors le processus est dit inversible. L'information passée a moins de poids de que l'innovation présente. L'effet des valeurs passées décroît au file du temps

On peut réécrire ce processus :

$$\begin{aligned}y_t &= \varepsilon_t - \theta_1(y_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}) \\&= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \\&= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2(y_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_t \\&= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} - \theta_1^3 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \\&= -\sum_{i=1}^{t-1} \theta_1^i y_{t-i} - \theta_1^t \varepsilon_0 + \varepsilon_t\end{aligned}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

La variance :

- La variance du processus est

$$\mathbb{E}(y_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) - 2\theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$

- Soit $\sigma_y^2 = \sigma^2 (1 + \theta_1^2)$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

ACF et PACF

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t y_{t-1}) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) \\ &= 0 - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} (\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})) \\ &= -\theta_1 \sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t y_{t-2}) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

- $\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$
- $\rho_j = 0, \quad j > 1$
- Par contre, la PACF est non nulle et décroît exponentiellement.
- On peut voir ici la dualité entre les modèles MA et les modèles AR.

Séries temporelles Stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

Definition

Le MA(q) s'écrit :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

$$y_t = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

Séries temporelles Stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

ACF et PACF

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$$

$$\gamma_k = (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-1}\theta_q^2) \sigma^2 \quad k = 1, \dots, q$$

$$\gamma_k = 0 \quad k > q$$

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{k+i}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} \quad k = 1, \dots, q$$

$$\rho_k = 0 \quad k > q$$

avec $\theta_0 = -1$.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Il y a plusieurs implications à tous ça :

- Un processus AR admet une représentation $MA(\infty)$ mais impose une restriction sur la forme de la décroissance (sur les ψ^i).
- Un processus MA n'impose pas de conditions sur les coefficients.
- Au niveau de l'autocorrélation, un processus AR admet plusieurs coefficient non nuls mais avec un pattern de décroissance fixe. Un MA admet seulement quelques coefficients non nuls

Definition

Un processus ARMA combine ces propriétés et nous autorise une représentation en forme réduite de ces deux dynamiques.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$
$$(1 - \phi_1 L)y_t = (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$

- Condition de stationnarité : $|\phi_1| < 1$
- Condition d'inversibilité : $|\theta_1| < 1$
- Il n'y a pas de racines communes dans les polynômes AR et MA

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

ACF

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \mathbb{E}(\varepsilon_t y_{t-k}) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) \quad (15)$$

Pour $k > 1$ les espérances sont nulles :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}, \quad k > 1 \quad (16)$$

Pour $k = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t y_t) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_t) = \sigma^2(\phi_1 - \theta_1)$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

ACF :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1 \sigma^2 (\phi_1 - \theta_1)$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2$$

Soit :

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1 - 2\phi_1\theta_1 + \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} \quad (17)$$

et

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

PACF : On réécrit le modèle ARMA(1,1) comme un $AR(\infty)$:

$$(1 - \theta_1 L)^{-1}(1 - \phi_1 L)y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t = (\phi_1 - \theta_1)y_{t-1} + \theta_1(\phi_1 - \theta_1)y_{t-2} + \\ \theta_1^2(\phi_1 - \theta_1)y_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$$

La méthode Box-Jenkins

La procédure de modélisation de Box et Jenkins (1976) est composée de 5 étapes :

- Stationnarisation
- **Identification** (Choix du modèle stationnaire)
- Estimation
- Validation et Test
- Prévisions

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Comment choisir l'ordre des retards ?

- Certains sont basés sur la divergence Kullback-Leibler : comment une distribution de probabilité diverge d'une autre distribution de probabilité.
- Il propose une estimation de la perte d'information lorsqu'on utilise le modèle considéré pour représenter le processus qui génère les données.
- Il servent donc à comparer deux modèles.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

- AIC : $2k - 2\log(L)$ ou k est le nombre de paramètres à estimer et L est le maximum de la fonction de vraisemblance.
- BIC : $\log(T)k - 2\log(L)$ avec T la taille de l'échantillon.
- L'AIC pénalise le nombre de paramètres moins fortement que le BIC.
- Il en existe d'autres bien entendu !

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Algorithme de choix de modèle :

- Pour q allant de 1 à n ,
- Pour p allant de 1 à n ,
- Estimer $\text{ARMA}(p,q)$
- Calculer AIC, BIC
- Fin
- Fin
- Calculer min AIC BIC

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

- En pratique, on vérifie la significativité des coefficients
- Il se peut que les critères d'information choisissent $p = q = 2$ mais que le paramètre θ_1 soit non significatifs.
- On peut opérer un test de Student classique.

La méthode Box-Jenkins

La procédure de modélisation de Box et Jenkins (1976) est composée de 5 étapes :

- Stationnarisation
- Identification (Choix du modèle stationnaire)
- **Estimation**
- Validation et Test
- Prévisions

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Estimation On estime généralement les processus ARMA via
Maximum de Vraisemblance

- c'est une méthode **numérique** via un algorithme de maximisation
- Elle nécessite une hypothèse sur la **loi** des résidus

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

La fonction de vraisemblance est une **fonction de probabilité** conditionnelle

- Elle prend comme arguments les paramètres du modèle pour les valeurs y_i observées ;
- Elle mesure une adéquation entre la distribution observée sur un échantillon aléatoire et une loi de probabilité supposée décrire une réalité sur la population ;
- On la note généralement $L(y_1, y_2, \dots, y_t; \theta)$.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Definition

Notons f_θ la densité de probabilité de la loi P_θ . On appelle vraisemblance associée à P_θ , la fonction qui à un n-uplet (y_1, \dots, y_t) et à une valeur de θ du paramètre associe la quantité :

$$L(y_1, \dots, y_t, \theta) = \prod_{i=1}^T f_\theta(y_i).$$

L'estimateur de vraisemblance $\hat{\theta}$ est la valeur de θ qui maximise cette fonction.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Exemple : le lancer de pièce

- On lance un pièce 10 fois de suite et on obtient l'échantillon 0,1,0,1,0,1,1,1,0,0.

- Le lancer de pièce suit probablement une loi de Bernoulli :

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}.$$

- La vraisemblance s'écrit : $L(X_1, \dots, X_{10}, p) = (p^0(1 - p)^1) \times p^1(1 - p)^0 \times \dots \times p^0(1 - p)^1 = p^5(1 - p)^5$
- L'estimateur du Maximum de vraisemblance est la valeur de p qui maximise cette fonction.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Definition

La vraisemblance d'une variable distribuée selon une loi normale est définie par

$$\prod_{i=1}^T f_{\theta}(y_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^T e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

Definition

La log-vraisemblance d'une variable distribuée selon une loi normale est définie par

$$\log L(y_1, \dots, Y_T; \theta) = 0 - \frac{T}{2} T \log(\sigma^2) - \frac{T}{2} T \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \frac{y_i - \mu}{\sigma^2}$$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

- Supposons les erreurs du processus
 $AR(1) : y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$,
- Les variables aléatoires y_1, \dots, y_T suivent une loi normale $\mathcal{N}(\frac{c}{1-\phi_1}, \frac{\varepsilon^2}{(1-\phi_1)^2})$ si Y_t est stationnaire.
- Il suffit alors de remplacer dans la fonction de log-vraisemblance et de maximiser.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

- Soit le modèle $\Phi(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ stationnaire.
- On suppose que la population des résidus ε_t peut-être décrite par un processus Gaussien $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
- La vraisemblance associée au vecteur $Y = (y_1, \dots, y_t)$ s'écrit :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_\varepsilon^2)}} \right)^T \times \frac{1}{\det(\Omega)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} Y' \Omega^{-1} Y \right\}$$

La méthode Box-Jenkins

La procédure de modélisation de Box et Jenkins (1976) est composée de 5 étapes :

- Stationnarisation
- Identification (Choix du modèle stationnaire)
- Estimation
- **Validation et Test**
- Prévisions

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Comment vérifier que la série est bien modélisée ?

- Graphe d'un ACF, si il a le comportement d'un bruit blanc : ok !
- il faut aussi le vérifier à l'aide de tests statistiques sur la série filtrée.
- $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\phi}_1 y_{t-1}$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Test de normalité

- Le test de Jarque-Bera :
 H_0 : Les données suivent une loi normale
- C'est un test joint sur moments 3 et 4 d'une loi normale (Skewness et Kurtosis)
- Le Skewness représente l'asymétrie. Il est donc sensé être nul.
- Le Kurtosis représente l'aplatissement de la loi

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Definition

La statistique du test de **Jarque-Bera** est donnée par :

$$JB = \frac{T - k}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

- T le nombre d'observation ;
- k le nombre de variables explicatives ;
- S le Skewness ;
- K le kurtosis.
- Cette statistique de test suit une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Test de non-autocorrélation

- Test de Box-Pierce et **Ljung-Box**
- H_0 : Non autocorrelation
- H_1 : Autocorrelation.
- L'idée : On estime la fonction d'autocorrelation.
- $H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(p) = 0$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Definition

La statistique du test Ljung-Box est donnée par :

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{h=1}^m \frac{\hat{\rho}(h)^2}{T-h} \quad (18)$$

- $\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^T (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(\varepsilon_{t-h} - \bar{\varepsilon})}{(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2}$
- On rejette H_0 si $Q(m) > q_\alpha$ avec q_α le $100(1 - \alpha)$ quantile d'une χ^2 avec $m - p - q$ degrés de liberté

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Remarque

- *Le carré d'un bruit blanc Gaussien est aussi un bruit blanc Gaussien.*
- *Les résidus élevés au carré doivent donc aussi être non-corrélés.*
- *Économiquement, si on rejette l'hypothèse nulle, il faudrait modéliser la variance de la série d'une manière différente.*

Dynamiques non-linéaires

Introduction

- **Faits stylisés**
- Définition
- Les modèles nonlinéaires en moyenne
- Les modèles nonlinéaires en variance

Dynamiques non-linéaires

Introduction

- Pourquoi s'intéresser aux modèles non-linéaires ?
- Quelles sont les limites des modèles linéaires ?
- Quels instruments de diagnostic (visuels et statistiques) peuvent indiquer une incompatibilité entre les données et un modèle linéaire ?
- Quelles caractéristiques des données ne peuvent pas être modélisées par les méthodes linéaires ?

Dynamiques non-linéaires

Introduction

- **Objectifs** : révéler la distribution probabiliste qui décrit le processus sous-jacent dans le but de comprendre et d'interpréter les mécanismes générateurs de données, de **prévoir** les événements futurs et de contrôler la survenue des événements futurs à travers une **intervention**.
- Sur la base des **objectifs** fixés ex-ante et des **faits stylisés** identifiés sur les données observées, le modèle probabiliste le plus approprié est choisi

Dynamiques non-linéaires

Introduction

Remarques

La caractérisation complète de la dynamique du processus stochastique est impossible si on ne recourt pas à des hypothèses simplificatrices.

- Si Ω est fini, $t \in 1, 2, \dots, T$ et qu'on se limite aux deux seuls premiers moments du processus stochastique, il faudrait estimer $E(y_1), E(y_2), \dots, E(y_t)$, soit T éléments, ainsi que les $T(T+1)/2$ éléments de la matrice de variance-covariance résumant la dépendance temporelle.
- Hypothèse simplificatrice standard : stationnarité (au sens faible) du processus stochastique

Dynamiques non-linéaires

Introduction

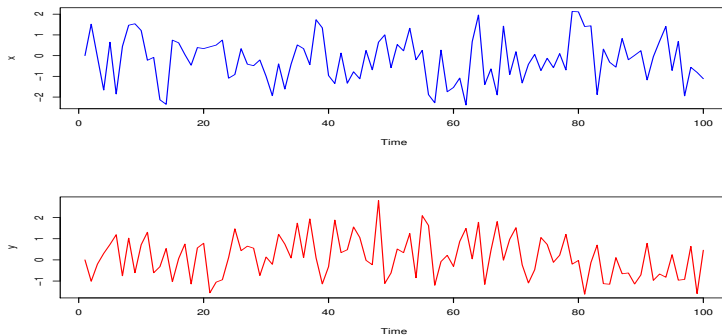


FIGURE – Deux processus, un linéaire, l'autre non

Dynamiques non-linéaires

Introduction

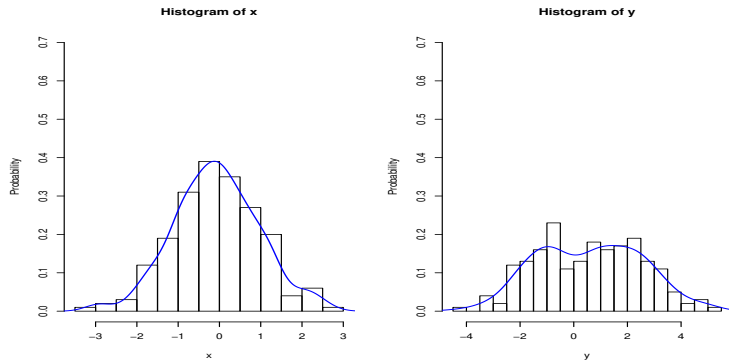
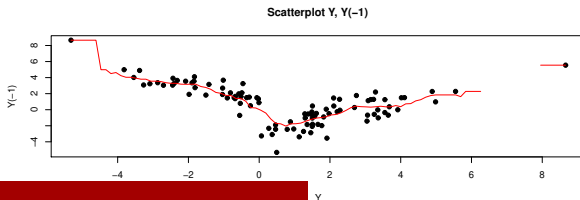
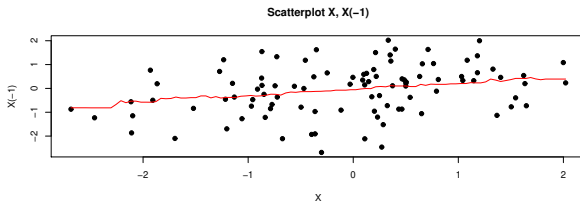


FIGURE – Deux processus, un linéaire, l'autre non

Dynamiques non-linéaires

Introduction

- Analyse de la relation entre y_t et y_{t-1} par une regression non paramétrique



Dynamiques non-linéaires

Introduction

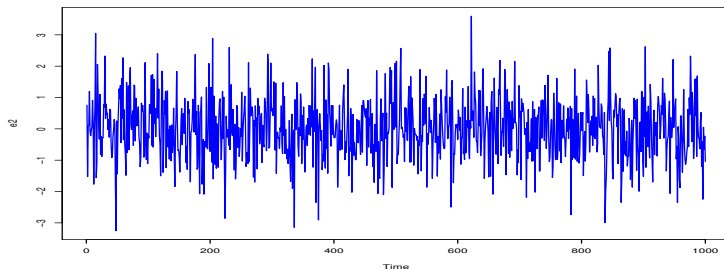


FIGURE – Bruit blanc Gaussien

- $Z_t \sim IID(0, \sigma^2)$ est un processus time-reversible

Dynamiques non-linéaires

Introduction

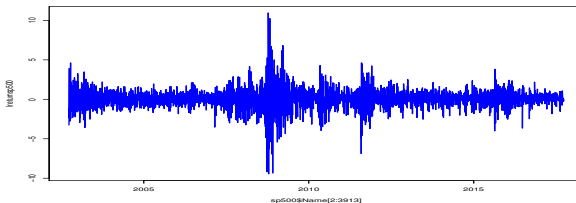


FIGURE – Log-returns du SP500

- Est-ce que ce processus est time-reversible ?

Dynamiques non-linéaires

Introduction

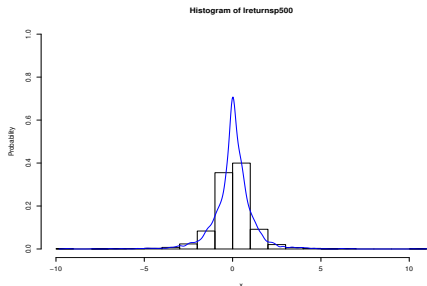


FIGURE – Histogramme et densité des rendements du SP500

Dynamiques non-linéaires

Introduction

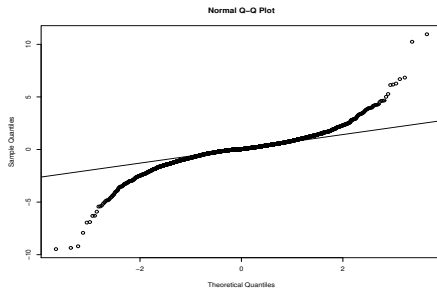


FIGURE – QQplot du SP500 vs Loi normale

Dynamiques non-linéaires

Définition

Definition : Tout processus qui n'est pas linéaire est un processus stochastique nonlinéaire. L'équation dynamique du processus doit être nonlinéaire.

- *Time-changing* Variance
- Assymétrie (business cycle)
- Effet de seuil
- Break, changements structurels

Dynamiques non-linéaires

Rappels sur les processus linéaires

Définition

Dans ce cours, un processus stochastique $\{y_t\}$, $t \in 1, \dots, T$ est un processus linéaire s'il est linéaire dans les paramètres

- $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ est linéaire ;
- $y_t = \alpha + \beta x_t^2 + u_t$ est linéaire ;
- $y_t = \alpha + \beta^2 x_t + u_t$ est nonlinéaire.

Un processus ARMA(p,q) est linéaire et peut s'écrire à l'aide de l'opérateur retard L :

$$\Phi(L)y_t = \Theta(L)u_t$$

Dynamiques non-linéaires

Définition

- Modèle linéaire = modèle de base, fondé sur la normalité
- Vaste classe de modèles non-linéaires, adaptés aux propriétés des séries économiques
- On distingue notamment la non-linéarité en moyenne de la non-linéarité en variance

Dynamiques non-linéaires

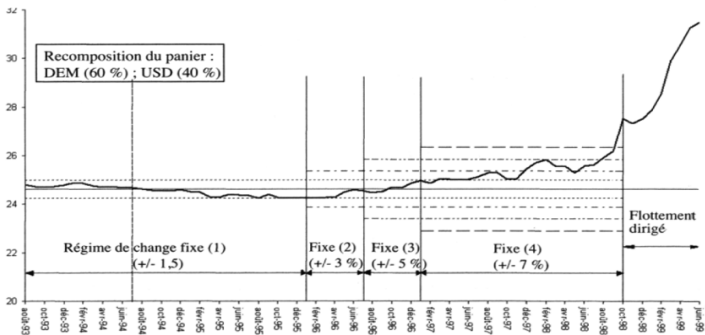
Nonlinéaires en moyenne

- Les séries économiques et financières exhibent bien souvent des comportements non-linéaires
- La non-linéarité peut prendre différentes formes...
 - déterministe (e.g. saisonnalité intra-hebdomadaire des marchés)
 - stochastique (e.g. régime de change / crise économique)
- et dépendre de variables
 - latentes (e.g. crise économique : de nombreux facteurs inobservés)
 - observées (e.g. régime de change : politique monétaire)

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Taux de change de la couronne slovaque
par rapport au panier de devises constitué du DEM et de l'USD



Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- On suppose que La variable y_t possède une dynamique non-linéaire qui dépend d'une variable observée z_t
- La variable z_t étant observée, elle est considérée non-stochastique
- z_t est néanmoins une réalisation d'une variable aléatoire
- c'est pourquoi il ne s'agit pas d'une non-linéarité déterministe

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- Tong (1990) introduit les modèles autorégressifs à seuil \Rightarrow **Threshold Autoregressiv (TAR)**
- Le **régime** est déterminé par une valeur seuil notée c
- Il s'écrit :

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t < c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t > c \end{cases}$$

- Spécificité du modèle : la transition d'un régime à l'autre est abrupte.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- Une spécification possible du TAR consiste à choisir $z_t = y_{t-k}$, $k > 0$
- On parle alors de modèle modèles auto-excité autorégressif à seuil **Self-Exciting Threshold AutoRegressive (SETAR)**
- Écriture alternative à l'aide de la fonction indicatrice

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - \mathbb{1}(z_t > c)) + \dots \\ (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})\mathbb{1}(z_t > c) + \varepsilon_t$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- La transition d'un régime à l'autre dans les modèles TAR et SETAR est abrupte
- On peut modéliser la transition entre deux régimes via une fonction lisse/souple en remplaçant la fonction indicatrice par une fonction continue
- **Smooth Transition AutoRegressive (STAR)**

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - G(z_t; \gamma, c)) + \dots \\ (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- Généralement, on utilise la fonction logistique :

$$G(z_t; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp(\gamma(z_t - c))}$$

- ou exponentielle :

$$G(z_t; \gamma, c) = 1 - \exp(-\gamma(z_t - c)^2)$$

- **Smooth Transition AutoRegressive (STAR)**

$$y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - G(z_t; \gamma, c)) + \dots \\ (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})G(z_t; \gamma, c) + \varepsilon_t$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- Avec La fonction logistique, les deux régimes correspondent à des valeurs faibles et élevées de la variable de transition z_t relativement à c
- La fonction exponentielle permet de considerer des regimes associés avec des valeurs absolues faibles et importantes de la variable de transition

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Il est possible d'augmenter le nombre de régime des modèles à seuil de deux manières

1 en augmentant le nombre de seuils :

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_t < c_1 \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } c_1 < z_t < c_2 \\ \phi_{0,3} + \phi_{1,3}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } c_2 < z_t \end{cases}$$

2 en augmentant le nombre de variables interagissant avec le seuil :

$$y_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_{1,t} < c_1 ; z_{2,t-1} < c_1 \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_{1,t} < c_1 ; z_{2,t-1} > c_1 \\ \phi_{0,3} + \phi_{1,3}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_{1,t} > c_1 ; z_{2,t-1} < c_1 \\ \phi_{0,4} + \phi_{1,4}y_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{si } z_{1,t} > c_1 ; z_{2,t-1} > c_1 \end{cases}$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

$$H_0 : \phi_{0,1} = \phi_{0,2} \text{ et } \phi_{1,1} = \phi_{1,2}$$

- Le seuil c c'est pas identifiable sous H_0 , c'est ce qu'on appelle un paramètre de nuisance. La distribution de la statistique de test est non-standard et les valeurs critiques sont obtenues par simulation.

$$t = n \frac{\hat{\sigma}_c^2 - \hat{\sigma}_{nc}^2}{\hat{\sigma}_c^2}$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

$H_0 : \phi_{0,1} = \phi_{0,2} \text{ et } \phi_{1,1} = \phi_{1,2}$

- Sous H_0 , on est en présence de paramètres de nuisance (non-identifiés) (c, γ)
- Il faut reformuler l'hypothèse nulle $H_0 : \gamma = 0$.
- Dans ce cas, le paramètre de seuil c et les paramètres autoregréssifs $\phi_{1,1}$ et $\phi_{1,2}$ ne sont pas identifiés ;
- Les statistiques de test ont des distributions non-standards et les p-values sont calculables uniquement par simulation.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

$$H_0 : \gamma = 0$$

- **Solution** : Remplacer la fonction de transition par un développement de Taylor approprié et tester la linéarité par une statistique classique du Multiplicateur de Lagrange (LM) qui suit asymptotiquement une χ^2 . (Luukkonen, Saikkonen, Teräsvirta, 1988)

Avantages :

- 1 Estimer uniquement le modèle sous H_0
- 2 Utiliser la théorie asymptotique standard pour calculer les valeurs critiques

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Les changements de régime dans les modèles à seuil peuvent être catégorisé de *déterministe*, les MS-AR proposent des modèles à changement de régimes **stochastiques**. La probabilité de changer de régime est

- égale à 1 dans les modèles à seuil
- **strictement** inférieure à 1 dans les modèles MS-AR

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- Les phénomènes cycliques sont un sujet d'étude central : Récessions/expansions, Bull/Bear
- Ces dynamiques cycliques irrégulières échappent aux modèles linéaires. Les cycles sont persistants et de durées diverses. Ajouter des retards dans un modèle autorégressif ne suffit pas !
- Ces dynamiques impliquent des distributions multimodales : l'hypothèse Gaussienne ne tient pas.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Definition

On dit qu'une variable aléatoire $\{\Delta_t\}$ suit une chaîne de Markov d'ordre k si le futur de la variable ne dépend que des m valeurs passées.

$$\begin{aligned} P(\Delta_{t+1} = j | \Delta_t, \Delta_{t-1}, \dots, \Delta_{t-m}, \dots, \Delta_0) \\ = P(\Delta_{t+1} = j | \Delta_t, \Delta_{t-1}, \dots, \Delta_{t-m}) \end{aligned}$$

- j représente les états de la nature, il est supposé dénombrable.
- Les modèles de MS-AR supposent que $m = 0$.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

- Une chaîne de Markov peut-être représenté par une matrice de transition de taille $k \times k$.
- $p_{ij} = P(\Delta_{t+1} = j | \Delta_t = i)$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

- Possible de la représenter graphiquement.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Pour faire de l'inférence sur une chaîne de Markov il faut plusieurs hypothèses :

- 1 homogène : $P(\Delta_t = i | \Delta_{t-1} = j) = P(\Delta_{t-l} = i | \Delta_{t-l-1} = j)$
- 2 irréductible : tout état est accessible depuis n'importe quel autre état à toute date t .
- 3 ergodique : apériodique et récurrente positive. Elle assure que la distribution de Δ_t converge vers une distribution invariante quelque soit l'état initial.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Pour faire de l'inférence sur une chaîne de Markov il faut plusieurs hypothèses :

- Grâce à toutes ces hypothèses on peut calculer les probabilités non conditionnelles :

$$\pi_1 = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Partons du modèle le plus simple possible :

$$y_t = \mu_{\Delta_t} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim B(0, \sigma^2)$$

avec $\Delta_t = 1, 2$.

- μ dépend de la chaîne de Markov : $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_\varepsilon)'$
- $y_t = \begin{cases} \mu_1 + \varepsilon_t, & \text{si } \Delta_t = 1 \\ \mu_2 + \varepsilon_t, & \text{si } \Delta_t = 2 \end{cases}$

Cette classe de modèle dit Markov-Switching (MS) a été popularisée par Hamilton (1989). y_t est donc un mélange Markovien de 2 distributions normales.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Ce modèle peut-être complexifié :

$$y_t = \mu_{\Delta_t} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim B(0, \sigma_{\Delta_t}^2)$$

- μ et σ dépendent de la chaîne de Markov :

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)'$$

Amusez-vous à simuler ces processus et voir le comportement de la densité estimée. Il faut aussi savoir qu'il y a un lien entre les modèles MS et les modèles ARMA.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Ce modèle peut-être **encore** complexifié :

$$y_t = \mu_{\Delta_t} + \phi_{\Delta_t} y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\Delta_t}^2)$$

- μ , ϕ et σ dépendent de la chaîne de Markov :

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \sigma_1, \sigma_2)'$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en moyenne

Plusieurs tests peuvent être intéressant :

- tests de structure : la structure nonlinéaire du modèle est-elle pertinente ?
- tests de diagnostic variable omise ?

Si on souhaite tester la linéarité du modèle, l'hypothèse nulle est :

- $\mu_1 = \mu_2, \phi_1 = \phi_2, \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow$ la matrice P n'est pas identifiée.
- ou $p_{11} = 1$ et $p_{21} = 0 \Rightarrow$ les paramètres du régime 2 ne sont identifiés.

Carrasco *et al* (2014) proposent un test très lourd à mettre en place.

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en variance

Le modèle GARCH(p,q)

Soit $\{y_t\}$ un processus stochastique tel que :

$$y_t = E[y_t|\mathcal{F}_{t-1}] + \varepsilon_t, \quad \text{et} \quad \text{Var}[y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = h_t,$$

pour $t = 1, \dots, T$; $E[y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ et $\text{Var}[y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ sont l'espérance et la variance conditionnelles de y_t .

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en variance

- La moyenne conditionnelle peut être très générale et doit être spécifiée indépendamment

$$E[y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = m(x_t, \lambda),$$

- m doit être continue et deux fois différentiable par rapport à λ .
- Les erreurs sont définies par

$$\varepsilon_t = h_t^{1/2} \eta_t, \quad \eta_t \sim \text{IID}(0, 1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \gamma_j h_{t-j}.$$

Dynamiques non-linéaires

Nonlinéaires en variance

Soit le processus $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$

- Calculez l'espérance et la variance non conditionnelles et conditionnelles de y_t
- Soit $\varepsilon_t = h_t^{1/2} \eta_t$ avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}$, répondez de nouveau à la question précédente.
- Proposez des conditions de stationnarité.

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

L'origine des modèle VAR

Macroeconomics and Reality, Sims, Econometrica (1980)

- Estimer des gros modèles Macro. Chaque variable est endogène
- Extension naturelle des modèles AR sous une forme multivariée
- Permet de décrire le comportement dynamique de variables économiques et financières

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

$$y_t = \beta_{10} + \phi_{11}y_{t-1} + \phi_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = \beta_{20} + \phi_{21}z_{t-1} + \phi_{22}y_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

- y et z sont endogènes, les erreurs sont des bruits blancs
- ε_{yt} affecte z de deux façons.
- Il y a 10 paramètres à estimer.
- $\Sigma\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_y\sigma_z \\ \sigma_z\sigma_y & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Cette forme est appelé forme-réduite (reduced form) du modèle VAR

- Valeurs courantes exprimées en fonction des valeurs retardées
- Utile pour la prévision
- Utile pour résumer les propriétés des données
- et utile pour quantifier la vitesse à laquelle les variables reviennent à leur équilibre après un choc.

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Structural form

$$y_t = \beta_{10} - \beta_{12}z_t + \phi_{11}y_{t-1} + \phi_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = \beta_{20} - \beta_{22}y_t + \phi_{21}z_{t-1} + \phi_{22}y_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{22} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{pmatrix}$$

ou

$$BY_t = \Gamma_1 + \Gamma_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Definition

Un modèle VAR peut s'écrire sous la forme réduite suivante :

$$Y_t = A_1 + A_2 Y_{t-1} + A_3 \varepsilon_t$$

avec $A_1 = B^{-1}\Gamma_1$, $A_2 = B^{-1}\Gamma_2$ et $A_3 = B^{-1}$.

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Remarque

- 1 *On utilise l'AIC pour choisir l'ordre des retards*
- 2 *Le système doit être stable (stationnaire). Il est stable si les racines de la matrice A_2 sont plus petites que 1 en VA.*
- 3 *Si non, il faut utiliser un Vector Error Correction Models*

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Impulse Response Functions (IRF)

Objectif : La réaction du système à un choc

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si le système est stationnaire en covariance :

$$Y_t = \Psi(L)a_t = \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \dots$$

$$Y_{t+s} = \Psi(L)a_{t+s} = \Psi_1 a_{t+s-1} + \Psi_2 a_{t+s-2} + \dots \quad \frac{\partial Y_{t+s}}{\partial a_t} = \Psi_s$$

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Remarque

- 1 *Est-ce possible de retrouver les paramètres du modèle VAR initial ?*
- 2 *Sims propose d'identifier le modèle via une décomposition de Cholesky.*
- 3 *On pose $\beta_{12} = 0$.*

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Exemple

$$\begin{pmatrix} y_t \\ \pi_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ \pi_{t-1} \\ r_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{yt} \\ u_{\pi t} \\ u_{rt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_t \\ \pi_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ \pi_{t-1} \\ r_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{\pi t} \\ \varepsilon_{rt} \end{pmatrix}$$

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

Definition

Décomposition de Cholesky : $\Sigma_u = P'P$, P' lower triangular

On est donc dans ce cas là !

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models

$$y_t = c_1 + \cdots + \tilde{a}_{11}\varepsilon_{yt}$$

$$\pi_t = c_2 + \cdots + \tilde{a}_{21}\varepsilon_{yt} + \tilde{a}_{22}\varepsilon_{\pi t}$$

$$r_t = c_3 + \cdots + \tilde{a}_{31}\varepsilon_{yt} + \tilde{a}_{32}\varepsilon_{\pi t} + \tilde{a}_{33}\varepsilon_{rt}$$

Introduction aux modèles multivariés

VAR Models