

Économétrie des séries temporelles

Thomas Chuffart

thomas.chuffart@univ-fcomte.fr

Informations générales

- 15h CM + 3h TD
- des heures de forecasts entre des séances
- Évaluation : Devoir sur table + projet
- Pré-requis : Économétrie en coupe transversale

Introduction

Definition

Une série temporelle est une suite de variables stochastiques $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ indicé par $t = 1, \dots, T$, le temps. Cette série représente un vecteur de variables observées de façon régulières.

Remarques :

- Il existe une dépendance temporelle entre les observations : la distribution conditionnelle de x_t dépend des valeurs passées.
- $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{x_{-\infty}, \dots, 0, x_{\infty}\}$
- Si l'on connaît le PGD, il est possible d'obtenir I collections de réalisations de $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Introduction

- L'économètre dispose d'une seule collection de réalisations de T v.a
- Il faut choisir (ou se restreindre) suivant la disponibilité des données, à la meilleure périodicité possible.
- On cherche à identifier le meilleur processus stochastique. On pourra alors :
 - effectuer des prévisions
 - réaliser des simulations à des fins statistiques

CPI and GDP: get data from FRED Database

```
library(tidyverse)
library(data.table)
library(viridis)
library(quantmod)

my.names <- data.table(var=c("CPILFESL","GDPC1"), name=c("CPI","GDP"))
df= getSymbols('CPILFESL',src='FRED', auto.assign=F)
df = data.frame(date=time(df), coredata(df))
df.gdp_us =getSymbols('GDPC1',src='FRED', auto.assign=F)
df.gdp_us = data.frame(date=time(df.gdp_us), coredata(df.gdp_us))

df<-merge(df,df.gdp_us,by="date")
dt<-data.table(df)
dt %>% gather(var,value,-date) %>% data.table() -> dt2
dt2<-merge(dt2,my.names,by="var")

# Base 100 pour la date t = 1

dt2=dt2[,id:=1:.N, by=var]
dt2=dt2[,var0:=100*value/sum(ifelse(id==1,value,0)),by=var]
```

CPI et GDP Figure

```
ggplot(data=dt2,aes(x=date,y=var0,color=name,linetype=name))+geom_line(size=1.1)+  
  scale_y_log10(breaks=c(100,200,400,800))+theme_minimal()+  
  theme(plot.caption=element_text(hjust=0),legend.position="top")+guides(linetype=F)+  
  scale_color_viridis(name="Variable",discrete=T,end=0.8)
```



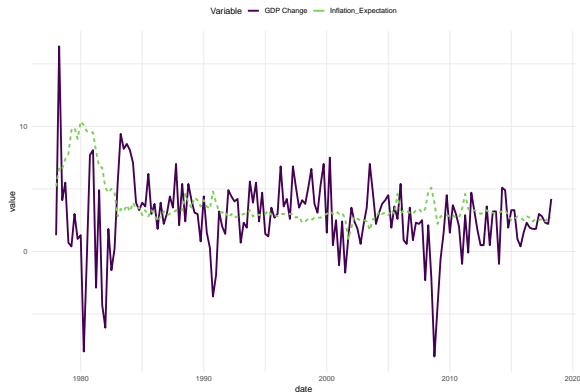
CPI expectation change et GDP change: get data from FRED

```
rm(list = ls())
my.names <- data.table(var=c("MICH","A191RL1Q225SBEA"),
                       name=c("Inflation_Expectation","GDP Change"))
df= getSymbols('MICH',src='FRED', auto.assign=F)
df = data.frame(date=time(df), coredata(df))
df.gdp_us =getSymbols('A191RL1Q225SBEA',src='FRED', auto.assign=F)
df.gdp_us = data.frame(date=time(df.gdp_us), coredata(df.gdp_us))

df<-merge(df,df.gdp_us,by="date")
dt<-data.table(df)
dt %>% gather(var,value,-date) %>% data.table() -> dt2
dt2<-merge(dt2,my.names,by="var")
```

Michigan inflation expectation et GDP change Figure

```
ggplot(data=dt2,aes(x=date,y=value,color=name,linetype=name))+  
  geom_line(size=1.1)+  
  theme_minimal()+theme(plot.caption=element_text(hjust=0),  
    legend.position="top")+  
  guides(linetype=F)+  
  scale_color_viridis(name="Variable",discrete=T,end=0.8)
```



Introduction

Outline

- 1 Séries temporelles non-stationnaires
- 2 Séries temporelles stationnaires
- 3 Dynamiques non-linéaires

Séries temporelles non-stationnaires

Introduction

Definition

Un processus stochastique, noté $\{y_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{Z}\}$ est une séquence ordonnée de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ avec :

- Ω l'ensemble des possibles
- \mathbb{F} une tribu ou un σ -algèbre représentant les évènements
- \mathbb{P} une mesure de probabilité

Ce processus sera noté y_t .

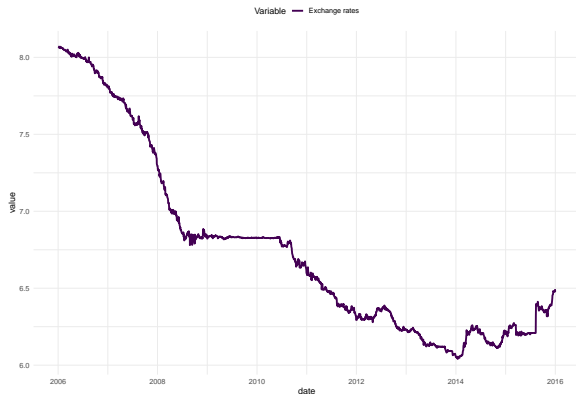
Exchange rate China/US in level and % change: get data

```
rm(list = ls())
# set dates
date.start <- "2006-01-01"
date.end <- "2015-12-31"
my.names <- data.table(var=c("DEXCHUS"),
                        name=c("Exchange rates"))
df= getSymbols('DEXCHUS',src='FRED', auto.assign=F)
df <- df[!(is.na(df$DEXCHUS)),]
df <- df[paste(date.start,date.end,sep="/")]
df.exrate_change <- log(df$DEXCHUS) - log(lag(df$DEXCHUS))
df.exrate_change <- data.frame(date=time(df.exrate_change), coredata(df.exrate_change))

df = data.frame(date=time(df), coredata(df))
dt<-data.table(df)
dt %>% gather(var,value,-date) %>% data.table() -> dt2
dt2<-merge(dt2,my.names,by="var")
```

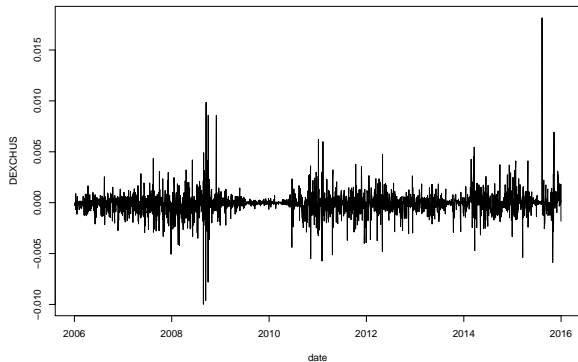
Exchange rate China/US in level

```
ggplot(data=dt2,aes(x=date,y=value,color=name,linetype=name))+geom_line(size=1.1)+  
theme_minimal()+theme(plot.caption=element_text(hjust=0),legend.position="top")+  
guides(linetype=F)+scale_color_viridis(name="Variable",discrete=T,end=0.8)
```



Exchange rate China/US % change

```
plot(df.exrate_change, type="l")
```



Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- **Définition de la stationnarité**
- Non-stationnarité
- Rappels
- Spurious regressions
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Les moments inconditionnels ordinaires et centrés de y_t peuvent s'exprimer comme l'espérance de $h(y_t)$, une fonction continue de y_t :

$$E[h(y_t)] = \int_{t=1}^T h(y_t) f(y_t) dy_t \quad (1)$$

avec $f(y_t)$ la fonction de densité inconditionnelle de y .

- Pour l'espérance $h(y_t) = y_t$
- Pour la variance $h(y_t) = (y_t - \mathbb{E}[y_t])^2$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

La fonction d'autocovariance de y_t s'obtient à partir de la densité jointe de $(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+h})$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \mathbb{E} [(y_t - \mu_t) (y_{t+h} - \mu_{t+h})] \\ &= \int \dots \int (y_t - \mu_t) (y_{t+h} - \mu_{t+h}) \\ &\quad f(y_t, \dots, y_{t+h}) dy_t \dots dy_{t+h} \end{aligned}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Soit y_t une séquence de v.a, y_t est (faiblement) stationnaire au second ordre si

- $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[y_t] = \mu < \infty$
- $\forall t, h \in \mathbb{Z}, \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \gamma(h) < \infty$

avec pour $h = 0, \gamma(0) = \sigma^2$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Soit y_t une séquence de v.a, y_t est strictement stationnaire si la distribution jointe de y_t et y_{t+h} dépend uniquement de h :

$$f(y_t, \dots, y_{t+h}) = f(y_\tau, \dots, y_{\tau+h}) \quad (2)$$

avec $t \neq \tau$. La distribution jointe du processus y_t doit donc être invariante par translation dans le temps.

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Definition

Soit y_t un processus stationnaire au second ordre, il est ergodique si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \gamma(h) = 0 \quad (3)$$

- La mémoire du processus est finie
- l'ergodicité décrit une forme faible d'indépendance asymptotique

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Theorem (Décomposition de Wold)

Soit $\{y_t\}$ un processus stationnaire au second ordre. On peut montrer que y_t peut toujours se décomposer en une somme pondérée des innovations de y_t et une composante déterministe μ_t :

$$y_t = \mu_t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}, \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon < \infty) \quad (4)$$

avec $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

Séries temporelles non-stationnaires

Définitions de la stationnarité

Le fait que la somme des a_i^2 soit finie est important :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E[(y_t - \mu_t)(y_{t+h} - \mu_t)] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+h} \varepsilon_{t-j+h}\right] \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i a_{j+h} \gamma_{\varepsilon}(i-j+h) \\ &= \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i a_{j+h}\end{aligned}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- **Non-stationnarité**
- Spurious regressions
- Rappels
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

Si un processus ne respecte pas les conditions de stationnarité et l'hypothèse d'ergodicité, alors il est non stationnaire

Il existe donc de nombreux processus non stationnaires

- La tendance déterministe linéaire :

$$y_t = \mu + \delta t + \varepsilon_t$$

- La tendance déterministe non-linéaire :

$$y_t = \mu + \delta(t) + \varepsilon_t \quad (5)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

$(y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus **TS** si il peut s'écrire $y_t = \delta(t) + u_t$.

- y_t est composé d'une partie **déterministe** et d'une partie **stochastique stationnaire**
- Exemple : $y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$, $Y_t - b_0 - b_1 t = \varepsilon_t$ est stationnaire
- Un choc sur la partie stochastique de ce genre de processus est dit **non persistant** car la tendance du modèle est **déterministe**.
- Économiquement, la trajectoire de long terme de la série est **insensible** aux aléas conjoncturels.

Choc déterministe

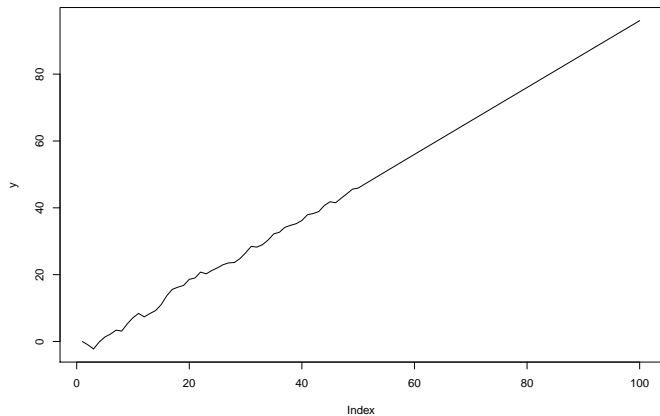
```
rm(list = ls())

T = 100
e = rnorm(T)
y = rep(NA, T)
y[1] = 0

for (t in 2:50){
  y[t] = 0.2*t + 0.8 *y[t-1] + e[t]
}
for (t in 51:T){
  y[t] = 0.2*t + 0.8 *y[t-1]
}
```

autre frame

```
plot(y,type='l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

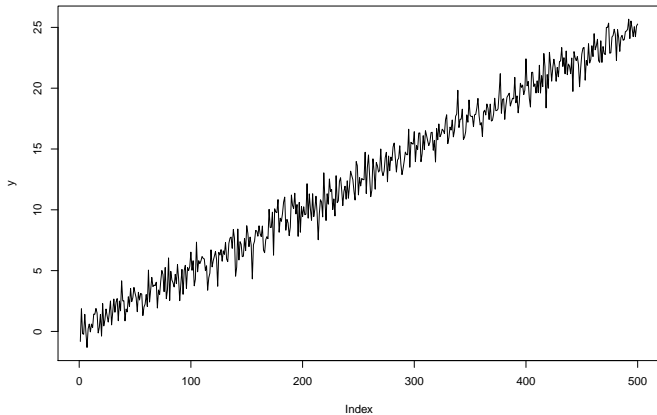
Theorem

*Pour **stationnariser** un processus TS, il convient de retirer la composante déterministe $\delta(t)$ en régressant la série y_t sur des puissances de t .*

- Exemple : $y_t = b_0 + b_1 t + z_t + \varepsilon_t$. On enlève la trend :
 $y_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t = z_t + \varepsilon_t$.

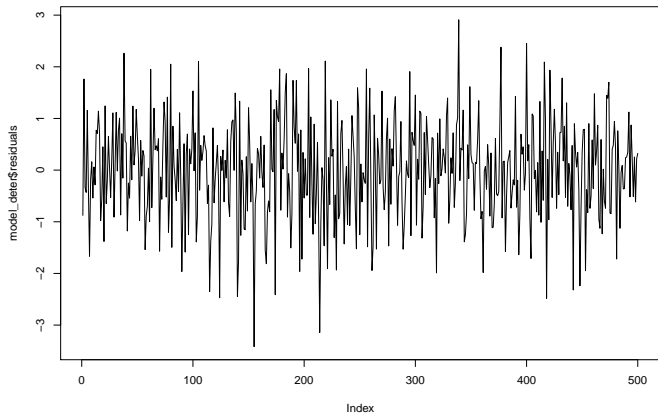
Tendance déterministe 1

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 1:T){  
  y[t] = 0.05*t + e[t]  
}  
plot(y,type='l')
```



Tendance déterministe 2

```
t <- c(1:T)
model_deter <- lm(y~0+ t)
plot(model_deter$residuals, type = 'l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Proposition

L'influence d'un choc ε_t à une date T sur y_t défini par $y_t = f(t) + z_t$ avec z_t stationnaire et $E[z_t] = 0$, est transitoire. Après le choc ε_T , la séquence des y_t converge ainsi vers sa valeur de long terme $f(t)$.

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

L'opérateur retard est défini par $L : y_t \rightarrow L(y_t) = Ly_t = y_{t-1}$. Le polynôme retard est défini par $P(L) = (1 - \lambda L)$.

Proposition

Si $|\lambda| \leq 1$, alors $P(L)$ est inversible et $(1 - \lambda L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L^k$. Sinon, il n'est pas inversible dans l'espace backward.

- Tout polynome $A(L) = 1 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_n L^n$ peut s'écrire $A(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i)$ avec $\lambda_i = \frac{1}{z_i}$, z_i les racines du polynomes.
- Si $|z_i| \geq 1$, le polynome est inversible.

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

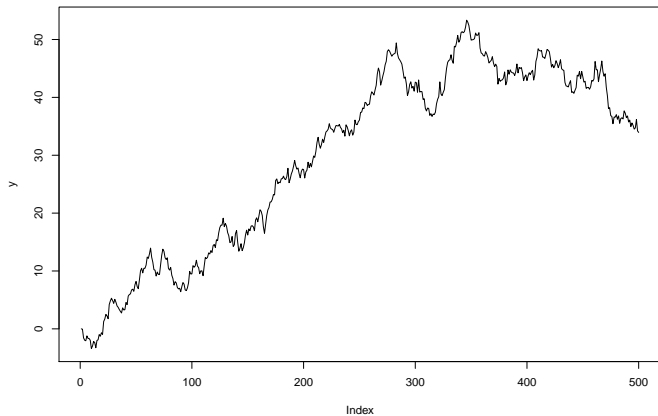
Une marche aléatoire est un processus stochastique non stationnaire respectant

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim IID \quad (6)$$

- $\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[y_{t-1} + \varepsilon_t] = \dots = \mathbb{E}\left[y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}\right]$
- $Cov(y_t, y_{t+h}) = (t+h) \sigma_\varepsilon^2$
- y_t est une martingale de tendance stochastique $\sum_i \varepsilon_{t-i}$

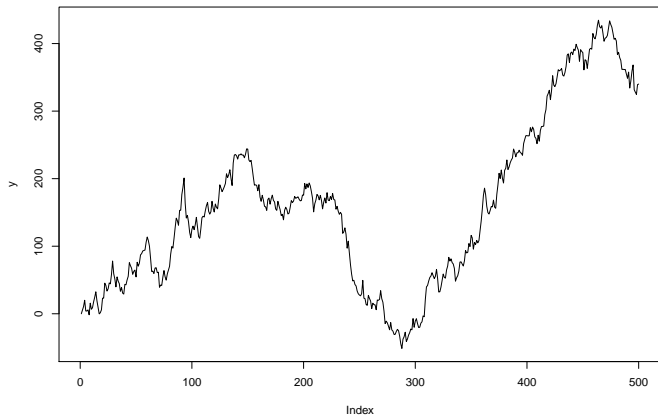
Marche aléatoire 1

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y,type='l')
```



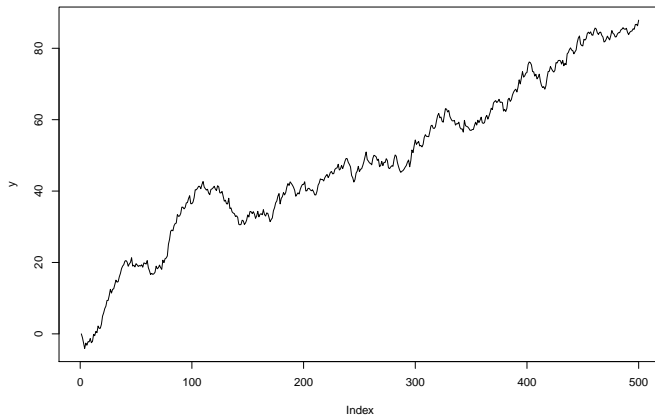
Marche aléatoire 2

```
T=500;  
e = rnorm(T,0,10)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y,type='l')
```



Marche aléatoire 3

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = 0.1 + e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y,type='l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Definition

Un processus est dit DS, Differency Stationary, si la non-stationnarité est causée par une source stochastique

- $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus DS d'ordre d si le processus **filtré** défini par $(1 - L)^d y_t$ est stationnaire. On dit que y_t est intégré d'ordre d .
- On peut définir une classe de processus stochastiques qui ne satisfont pas les conditions de la stationnarité, mais dont la différence à l'ordre d satisfait les propriétés de la stationnarité.

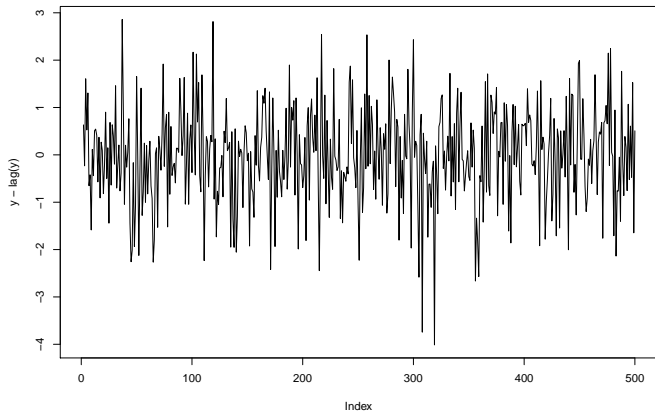
Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

- Soit la marche aléatoire, $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$. Ce processus est non-stationnaire.
- Soit le processus différencié, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$. Ce processus est stationnaire.

Marche aléatoire 4

```
T=500;  
e = rnorm(T)  
y = rep(NA,T)  
y[1] = 0  
for (t in 2:T){  
  y[t] = e[t] + y[t-1]  
}  
plot(y-lag(y),type='l')
```



Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Les processus possédant une tendance déterministe ou stochastique sont globalement non-stationnaires

- le processus viole les conditions de stationnarité
- les paramètres du processus sont invariants
- la non-stationnarité existe pour toute évolution du processus

Séries temporelles non-stationnaires

Non-stationnarité

Les processus dont les paramètres évoluent dans le temps sont possiblement localement non-stationnaires

- un modèle à changement de régime peut être stationnaire dans un régime non-stationnaire dans autre régime (localement non-stationnaire)
- globalement stationnaire ou non-stationnaire, ce sont des processus non-linéaires

Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- Non-stationnarité
- **Spurious regressions**
- Rappels
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Spurious regression

Soit deux marches aléatoires $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ et $x_t = x_{t-1} + u_t$:

- $x_0 = y_0 = 0$
- $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $u_t \sim IID(0, \sigma_u^2)$.
- $E[\varepsilon_t u_s] = 0$

Que se passe-t-il si l'on régresse x_t sur y_t sans avoir diagnostiquer la non stationnarité ?

$$y_t = \alpha + \beta x_t + v_t$$

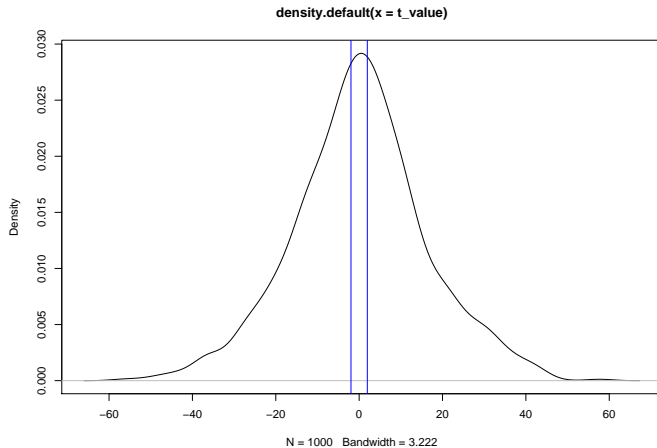
Spurious regression

```
N = 1000
T=500
t_value = rep(NA,N)
p_value = rep(NA,N)
for (i in 1:N){
  e = rnorm(T)
  u = rnorm(T)
  y = rep(NA,T)
  x = rep(NA,T)
  y[1] = 0
  x[1] = 0
  for (t in 2:T){
    y[t] = e[t] + y[t-1]
    x[t] = x[t-1] + u[t]
  }
  results_sum <- summary(lm(y~x))
  results_coef <- results_sum$coefficients
  beta.estimate <- results_coef["x", "Estimate"]
  std.error <- results_coef["x", "Std. Error"]
  t_value[i] <- beta.estimate/std.error
  p_value[i] <- 2*pt(-abs(t_value[i]), df=T-1)
}
sum(p_value<0.05)/N
```

```
## [1] 0.882
```

Spurious regression: figure

```
plot(density(t_value))  
abline(v=1.96,col="blue")  
abline(v=-1.96,col="blue")
```



Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- Non-stationnarité
- Spurious regressions
- **Rappels**
- Stationnariser un processus

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Soit y_i une fonction de n variables aléatoires $y_n = f(Y_1, \dots, Y_n)$.

- On étudie le comportement de Y_n quand $n \rightarrow \infty$.
- La fonction $f(\cdot)$ est souvent un estimateur. Cela peut aussi être une statistique de test.
- Cette étude repose sur des notions de convergence :
 - convergence presque sûre
 - convergence en probabilité
 - convergence en moyenne quadratique
 - convergence en loi

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Definition

y_n converge presque sûrement vers une constante c si,

$$Pr\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = c\right) = 1$$

Explications : Y_n tend vers une valeur constante de manière certaine, sa distribution asymptotique est une masse ponctuelle

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Definition (Convergence en probabilité)

Y_n converge en probabilité vers une constante c , si pour toute valeur de $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|Y_n - c| > \varepsilon) = 0 \quad (7)$$

Definition (Convergence en moyenne quadratique)

Y_n converge en moyenne quadratique vers une constante c , si $\mathbb{E}[|Y_n|^2] < \infty$ et si pour tout γ :

$$\mathbb{E}[|Y_n - c|^2] < \gamma \quad (8)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Definition (Convergence en Loi)

Soit $F_n(\cdot)$ la fonction de répartition de Y_n . Y_n converge en loi vers une variable aléatoire Y définie sur un support $Y(\Omega)$ et ayant pour fonction de répartition $F(\cdot)$ si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z), \forall z \in Y(\Omega)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Theorem (Loi faible des grands nombres)

Pour une séquence de variables aléatoires IID, $Y_t = Y_1, \dots, Y_n$, la moyenne empirique de ces variables converge en probabilité vers l'espérance de Y_t

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}[Y_t] = \bar{Y}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Theorem (Loi forte des grands nombres)

Pour une séquence de variables aléatoires IID, $Y_t = Y_1, \dots, Y_n$, la moyenne empirique de ces variables converge p.s vers l'espérance de Y_t

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{a.s} \mathbb{E}[Y_t] = \bar{Y}$$

si $\mathbb{E}[|Y_t|] < \infty$.

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Theorem (Théorème central limite)

Soit une séquence IID, $Y_t = Y_1, \dots, Y_n$ d'espérance $\mathbb{E}[Y_t] = m$ et de variance finie $V(Y_t) = \sigma^2$. D'après le théorème central limite de Lindeberg-Levy,

$$Z_n = \sqrt{n} (\bar{Y} - m) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Soit le modèle linéaire :

$$Y_t = X_t\beta + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (9)$$

L'estimateur OLS est alors donné par

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^T X_t^2 \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T X_t Y_t = \beta + \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \varepsilon_t}{n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^2} \end{aligned}$$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Est-ce que $\hat{\beta}$ est convergent ?

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \text{plim} \beta + \frac{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \varepsilon_t}{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^2}$$

- On a $\mathbb{E}[X_t \varepsilon_t] = 0$ et $V([X_t \varepsilon_t]) = \sigma_X^2 \sigma_\varepsilon^2$
- D'après la loi forte de grand nombre, $\sum \frac{\sigma_X^2 \sigma_\varepsilon^2}{t^2} < \infty$
- Donc $\frac{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \varepsilon_t}{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^2} = \frac{0}{\text{plim } n^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^2} = 0$
- Notez que faille la condition $\mathbb{E}[X_t^4] < \infty$ est nécessaire

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

- La consistance donne une distribution dégénérée : $\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta$
- on peut montrer que $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{p} \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$

Séries temporelles non-stationnaires

Rappels

Que se passe-t-il dans le cas d'un AR(1)? $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- $\hat{\rho} = \rho + \frac{\sum_{t=1}^T Y_{t-1} \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^T Y_{t-1}^2}$
- $\sigma_y^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T Y_t^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T \rho^2 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \right] = \rho^2 \sigma_y^2 + \sigma_\varepsilon^2$
- Donc $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$
- On a donc $\sqrt{n}(\hat{\rho} - \rho) \xrightarrow[\rho]{} \mathcal{N}(0, 1 - \rho^2)$
- Comment tester $\rho = 1$?

Séries temporelles non-stationnaires

Outline

- Définition de la stationnarité
- Non-stationnarité
- Spurious regressions
- Rappels
- **Stationnariser un processus**

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

- Supposons que $Y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$ et qu'on lui applique un filtre $(1 - L)^d$
- $Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t = \Delta Y_t$
- $\Delta Y_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t - b_0 - b_1(t-1) - \varepsilon_{t-1} = b_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- Le processus est bien stationnaire mais on a introduit de l'auto-corrélation dans les résidus...

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

- Supposons que $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ et qu'on le stationnarise à l'aide d'une régression sur une tendance
- On obtient un processus qui n'a aucun sens. D'autant plus que les paramètres estimés de la régression sont parfois significatifs

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

- Test de **Dickey Fuller** de racine unitaire dont l'**hypothèse nulle** est la **non stationnarité** d'un processus AR(1) :
$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t.$$
- Le test DF revient à tester les hypothèses $H_0 : \rho = 1$ vs $H_1 : \rho < 1$.
- Il suffirait alors d'appliquer un test de Student mais sous l'hypothèse de non stationnarité, l'estimateur des MCO n'a pas une distribution asymptotique standard.
- Il faudra calculer les seuils de significativité.

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

Remarque

*La distribution **asymptotique**, sous H_0 , de la statistique de Student $t_{\hat{\rho}=1}$ du test de Dickey Fuller n'est pas **standard**. L'utilisation, à tort, des seuils standard associés à une distribution normale peut conduire à un mauvais diagnostic quant à la non stationnarité de la série étudiée. Ce type d'erreur conduit à **rejeter trop souvent** l'hypothèse de non stationnarité.*

Séries temporelles non-stationnaires

Stationnariser un processus

Proposition

Sous l'hypothèse H_0 de non stationnarité, la distribution asymptotique de la statistique de Student $t_{\hat{\rho}=1}$ diffère suivant le modèle utilisé :

1 $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

2 $Y_t = b_0 + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = b_0 + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

3 $Y_t = b_0 + b_1 t + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = b_0 + b_1 t + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

avec $\phi = 1 - \rho$.

On ne sait pas ce que l'on doit inclure dans le modèle testé. On propose généralement **une stratégie de tests de Dickey Fuller**, et non pas un seul test unique.

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

La stratégie de test : on va du plus général au plus spécifique.

1 Modèle 1 : $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$

2 Modèle 2 : $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha) = \varepsilon_t$

3 Modèle 3 : $(1 - \phi L)Y_t = \varepsilon_t$

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 1, Modèle 1 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$
- On test $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi < 0$
- Si on accepte $H_0 : \phi = 0$ alors le processus peut contenir une racine unitaire
- Si on rejette H_0 , le processus peut ne pas contenir de racine unitaire

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 2, Modèle 1 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha - \beta t) = \varepsilon_t$
- Il faut vérifier que le modèle (1) est le bon
- Si on a accepté $H_0 : \phi = 0$, on test $H_0 : \phi = \beta = 0$ sinon on test $H_0 : \beta = 0$
 - 1er cas : Valeur critique simulée. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(1) + T + C$
 - 2ème cas : Valeur critique classique. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(0) + T + C$

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 3, Modèle 2 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha) = \varepsilon_t$
- On test $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi < 0$
- Si on accepte $H_0 : \phi = 0$ alors le processus peut contenir une racine unitaire et/ou
- Si on rejette H_0 , le processus peut ne pas contenir de racine unitaire

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 4, Modèle 2 $(1 - \phi L)(Y_t - \alpha) = \varepsilon_t$
- Il faut vérifier que le modèle (2) est le bon
- Si on a accepté $H_0 : \phi = 0$, on test $H_0 : \phi = \alpha = 0$ sinon on test $H_0 : \alpha = 0$
 - 1er cas : Valeur critique simulée. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(1) + C$
 - 2ème cas : Valeur critique classique. Si on accepte H_0 , le modèle (1) n'est pas le bon. Sinon $I(0) + C$

Les processus linéaires non stationnaires

Stationnariser un processus

- Stage 5, Modèle 3 $(1 - \phi L) Y_t = \varepsilon_t$
- On test $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi < 0$
- Si on accepte $H_0 : \phi = 0$ alors le processus est $I(1)$
- Si on rejette H_0 , le processus est $I(0)$

Séries temporelles stationnaires

Introduction

Comment modéliser une série **non-stationnaire** ?

- Il faut la **stationnariser**. On peut ensuite l'étudier de façon **univariée** via ses propriétés **stochastiques**.
- L'ajout de **covariates** peut par contre poser des problèmes (**Cointégration**).
- **Cointegration** : deux séries ont une tendance de long-terme commune.
- Avant de régresser deux séries stationnaires, ils faut vérifier cette tendance commune.
- On ne s'y intéresse pas dans ce cours malheureusement.

Séries temporelles stationnaires

Introduction

Definition

On dit que deux séries sont cointégrées si

$$y_t - \beta x_t = u_t$$

avec u_t stationnaire.

Séries temporelles stationnaires

Outline

- 1 La méthode Box-Jenkins
- 2 Les modèles auto-régressifs
- 3 Les modèles à Moyenne Mobile
- 4 Les modèles ARMA

La méthode Box-Jenkins

La procédure de modélisation de Box et Jenkins (1976) est composée de 5 étapes :

- Stationnarisation
- Identification (Choix du modèle stationnaire)
- Estimation
- Validation et Test
- Prévisions

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Definition

Le processus stationnaire $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait une représentation AR d'ordre p , notée $AR(p)$, si et seulement si :

$$\Phi(L)y_t = c + \varepsilon_t \quad (10)$$

avec $c \in \mathbb{R}$, $\Phi(L) = \sum_{i=0}^p \phi_i L^i$ et $\phi_0 = 1$ et $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

- $\mathbb{E}[y_t] = m = \frac{c}{\sum_{i=0}^j \phi_i}$
- $\text{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{i=0}^j \phi_i^2}$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Quels sont les conditions de stationnarité ? **Petit rappel**

Definition

$A(L)$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B(L)$ tel que $A(L) \circ B(L) = Id$.

On suppose $P(L) = \sum_{k=0}^p a_k L^k$ et $Y_t = P(L)X_t$. Est-ce que X_t peut s'exprimer en fonction $X_t = P(L)^{-1}Y_t$. Tout polynome peut se factoriser :

$$P(z) = \phi_p \prod_{i=1}^p (z - z_i) \Leftrightarrow \alpha \prod_{i=1}^p \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \Leftrightarrow \alpha \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i z)$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

- Si $|\lambda_i| = 1$, le polynôme n'est pas inversible
- Si $|\lambda_i| = \left| \frac{1}{z_i} \right| < 1$ alors $\Phi(L)$ est inversible et
$$\Phi^{-1}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i$$
- Donc $y_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \varepsilon_t$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Propriétés du modèle AR(p) :

- Fonction d'auto-covariance :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \mathbb{E}(y_t y_{t-h} - h)$$

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow y_t^2 = \phi_1 y_{t-1} y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p} y_t + \varepsilon_t y_t$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \cdots + \phi_p \gamma(h-p)$$

- Fonction d'auto-corrélation :

$$\Leftrightarrow \rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \cdots + \phi_p \rho(h-p)$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Équations de Yule-Walker :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \rho(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \dots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Proposition

Si $y_t \sim AR(p)$ alors les $|\rho(h)|$ et les $\gamma(h)$ décroissent vers 0 exponentiellement

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Auto-corrélations partielles

Proposition

Si $(y_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim AR(p)$ tel que $\Phi(L)y_t = \varepsilon_t$, alors

$$r(h) \begin{cases} = 0 & \text{si } h > p \\ \neq 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Démonstration : $r(h)$ est le coefficient de y_{t-h} dans $E(y_t | y_{t-1} \dots y_{t-p})$:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$E(y_t | y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Mais, à quoi ça sert ? RRRRrrrr

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

Soit le modèle AR(2) suivant :

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (11)$$

- Quelles conditions sur ϕ_1 et ϕ_2 pour que le processus soit stationnaire ?
- Moyenne constante : $\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu \Rightarrow \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

- On peut écrire $c = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$
- Soit $\tilde{y}_t = y_t - \mu$ et $\tilde{y}_t = \phi_1\tilde{y}_{t-1} + \phi_2\tilde{y}_{t-2} + a_t$
- ou encore $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) \tilde{y}_t = a_t$
- $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)$ peut s'écrire $(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$
- λ_1^{-1} et λ_2^{-1} sont les racines du polynôme du second degrés $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle auto-régressif

La fonction d'autocovariance

- $\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2$
- $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$
- Pour $k = 1$ on a $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_{-1} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}$
- On remplace dans la variance :

$$\sigma_y^2 = \gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)} \quad (12)$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

Definition

Un processus MA d'ordre 1 est défini par une combinaison linéaire des innovations :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (13)$$

ou

$$y_t = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t \quad (14)$$

Ce processus sera **toujours stationnaire**.

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

Proposition

Si $|\theta_1| < 1$ alors le processus est dit inversible. L'information passée a moins de poids de que l'innovation présente. L'effet des valeurs passées décroît au file du temps

On peut réécrire ce processus :

$$\begin{aligned}y_t &= \varepsilon_t - \theta_1(y_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}) \\&= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \\&= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2(y_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3}) + \varepsilon_t \\&= -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} - \theta_1^3 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \\&= -\sum_{i=1}^{t-1} \theta_1^i y_{t-i} - \theta_1^t \varepsilon_0 + \varepsilon_t\end{aligned}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

La variance :

- La variance du processus est

$$\mathbb{E}(y_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) - 2\theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$

- Soit $\sigma_y^2 = \sigma^2 (1 + \theta_1^2)$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

ACF et PACF

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t y_{t-1}) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) \\ &= 0 - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} (\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})) \\ &= -\theta_1 \sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \mathbb{E}(\varepsilon_t y_{t-2}) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Séries temporelles stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

- $\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$
- $\rho_j = 0, \quad j > 1$
- Par contre, la PACF est non nulle et décroît exponentiellement.
- On peut voir ici la dualité entre les modèles MA et les modèles AR.

Séries temporelles Stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

Definition

Le MA(q) s'écrit :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

$$y_t = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

Séries temporelles Stationnaires

Le modèle Moyennes mobiles (MA)

ACF et PACF

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$$

$$\gamma_k = (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-1}\theta_q^2) \sigma^2 \quad k = 1, \dots, q$$

$$\gamma_k = 0 \quad k > q$$

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^q \theta_i \theta_{k+i}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} \quad k = 1, \dots, q$$

$$\rho_k = 0 \quad k > q$$

avec $\theta_0 = -1$.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

Il y a plusieurs implications à tous ça :

- Un processus AR admet une représentation $MA(\infty)$ mais impose une restriction sur la forme de la décroissance (sur les ψ^i).
- Un processus MA n'impose pas de conditions sur les coefficients.
- Au niveau de l'autocorrélation, un processus AR admet plusieurs coefficient non nuls mais avec un pattern de décroissance fixe. Un MA admet seulement quelques coefficients non nuls

Definition

Un processus ARMA combine ces propriétés et nous autorise une représentation en forme réduite de ces deux dynamiques.

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$
$$(1 - \phi_1 L)y_t = (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$

- Condition de stationnarité : $|\phi_1| < 1$
- Condition d'inversibilité : $|\theta_1| < 1$
- Il n'y a pas de racines communes dans les polynômes AR et MA

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

ACF

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \mathbb{E}(\varepsilon_t y_{t-k}) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) \quad (15)$$

Pour $k > 1$ les espérances sont nulles :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}, \quad k > 1 \quad (16)$$

Pour $k = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t y_t) = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1} y_t) = \sigma^2(\phi_1 - \theta_1)$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

ACF :

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \theta_1 \sigma^2 (\phi_1 - \theta_1)$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2$$

Soit :

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{1 - 2\phi_1\theta_1 + \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} \quad (17)$$

et

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$$

Séries temporelles stationnaires

Les modèles ARMA

PACF : On réécrit le modèle ARMA(1,1) comme un $AR(\infty)$:

$$(1 - \theta_1 L)^{-1}(1 - \phi_1 L)y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t = (\phi_1 - \theta_1)y_{t-1} + \theta_1(\phi_1 - \theta_1)y_{t-2} + \theta_1^2(\phi_1 - \theta_1)y_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$$

Dynamiques non-linéaires

Introduction

Dynamiques non-linéaires

Introduction

Dynamiques non-linéaires

Introduction

Dynamiques non-linéaires

Outline

- Les modèles asymétriques
- Les modèles à changements structurels
- ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

Les modèles asymétriques

Dynamiques non-linéaires

Les modèles asymétriques

Dynamiques non-linéaires

Les modèles asymétriques

Dynamiques non-linéaires

Les modèles asymétriques

Dynamiques non-linéaires

Les modèles asymétriques

Dynamiques non-linéaires

Les modèles à changements structurels

Dynamiques non-linéaires

Les modèles à changements structurels

Dynamiques non-linéaires

Les modèles à changements structurels

Dynamiques non-linéaires

Les modèles à changements structurels

Dynamiques non-linéaires

Les modèles à changements structurels

Dynamiques non-linéaires

Les modèles à changements structurels

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH

Dynamiques non-linéaires

ARCH-GARCH