Proportions et évolutions.

I. Proportions.

a. Proportion d'une sous population.

Exemple : Dans le lycée, il y a deux classes de 1ere STMG. En 1ere STMG1, il y a 30 élèves parmi lesquels 12 ont choisi l'option sport. En 1ere STMG2, il y a 20 élèves parmi lesquels 10 ont choisi l'option sport.

1. Combien y a-t-il d'élèves en 1ere STMG dans ce lycée ? Combien ont choisi l'option sport ?

2. Considérons l'ensemble des élèves de 1ere STMG, déterminer la proportion d'élèves ayant choisi l'option sport ?

3. Considérons la classe de 1ere STMG1. Quelle est la proportion d'élèves ayant choisi l'option sport dans cette classe ?

4. Considérons la classe de 1ere STMG2. Quelle est la proportion d'élèves ayant choisi l'option sport dans cette classe ?

5. Comparer le nombre d'élèves ayant choisi l'option sport dans les deux premières STMG. Comparer les proportions d'élèves ayant choisi l'option sport dans les deux premières STMG. Que constatez vous ?

Considérons une population E.
Exemples de populations :

Les éléments d'une population sont appelés les …...................... de cette population.
Le nombre d'individus est appelé …................................. de la population.
On le note en général n_E .

Une sous population A d'une population E est un ensemble d'individus de la population E.
Par exemple :

On note, en général n_A l'effectif de la sous population A.

Définition : la proportion p d'une sous-population A, d'effectif n_A, dans une population E, d'effectif n_E est le rapport des effectifs : $p=\frac{n_A}{n_E}$.

Remarques :

- Une proportion est toujours comprise entre 0 et 1 et n'a pas d'unité.
- Pour des populations de référence différentes, les effectifs et les proportions ne sont pas forcément rangés dans le même ordre.
- une proportion peut s'exprimer sous forme de fraction , d'un nombre décimal ou d'un pourcentage.

Exemple : Parmi un groupe de 100 personnes, 80 déclarent qu'elles aiment le chocolat.
Donner la proportion de personnes aimant le chocolat dans ce groupe. Exprimer le résultat sous les trois formes possibles.

Pour exprimer une proportion en pourcentage, on utilise la formule suivant

$$p=\frac{n_A}{n_E}\times 100$$

A l'aide d'une proportion, on peut déterminer l'effectif d'une sous-population ou d'une population.

<u>Exemple</u> :

1. Parmi les 120 athlètes d'un club d'athlétisme, un sixième pratique la course de haie. Quel est le nombre d’athlètes de ce club pratiquant la course de haie ?

2. Dans un club de judo, 12% des adhérents sont ceintures noires, soit 8 personnes. Quel est le nombre d'adhérents de ce club ?

b. Union et intersection.

Exemple: 1000 personnes ont été soumis à un sondage. 420 d'entre elles ont déclaré posséder un ordinateur, 730 un téléviseur et 345 les deux.

1. A l'aide des informations précédentes, compléter le tableau suivant :

	Ont un ordinateur	N'ont pas d'ordinateur	Total
Ont un téléviseur			
N'ont pas de téléviseur			
Total			1000

2. On désigne par :
- E l'ensemble des personnes ayant répondu au sondage, et n_E son effectif ;
- A la sous-population des personnes possédant un ordinateur, et n_A son effectif ;
- B la sous-population des personnes possédant un téléviseur, et n_B son effectif.

On note :

- A∩B la sous-population des personnes qui possèdent un ordinateur et un téléviseur, et $n_{A\cap B}$ son effectif.
- A∪B la sous-population des personnes qui possèdent un ordinateur ou un téléviseur (c'est à dire qui possèdent l'un au moins des appareils), et $n_{A\cup B}$ son effectif ;

a. En utilisant le tableau, déterminer n_A , n_B , $n_{A\cap B}$ et $n_{A\cup B}$. En déduire une égalité reliant ces quatre valeurs.

b. On note p_A , p_B , $p_{A\cap B}$ et $p_{A\cup B}$ les proportions des sous-populations A, B,A∩B A∪B dans la population E.
Calculer ces proportions ; en déduire une égalité reliant $p_{A\cup B}$ à p_A , p_B et $p_{A\cap B}$.

Définitions : Soient A et B deux sous-populations d'une population E.
L'intersection A∩B est la sous-population constituée des éléments appartenant …...............
L'union A∪B est la sous-population constituée des éléments appartenant à …....................
Propriété : Soient A et B deux sous-populations d'une population E.
On a $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$.

Exemple : Sur les 610 élèves ayant mangé à la cantine du lycée ce jour, 250 ont pris du fromage, 475 ont pris un dessert et 198 ont mangé les deux. Quelle est la proportion d'élèves ayant pris du fromage ou du dessert ? Donner le résultat sous forme de pourcentage arrondi au dixième.

Définition : Deux sous-populations A et B d'une même population E sont dites …................ lorsqu'elles n'ont pas d'individu en commun : A∩B= ∅,

Dans ce cas, on a alors $n_{A\cap B}=0$, et donc $p_{A\cap B}=0$.
On obtient donc la propriété suivante :

Propriété : Soient A et B deux sous-populations disjointes d'une même population E :
$p_{A\cup B} = p_A + p_B$.

Exemples :
Dans une classe de 1ere STMG de 25 élèves, 15 élèves font de l'espagnol en LV2, 7 font de l'allemand et les élèves restants font de l'italien. Il y a 15 élèves aux yeux bleus et 10 élèves aux yeux marrons.

1. Quelle est la proportion d'élèves faisant de l'allemand ou de l'espagnol ?
2. Quelle la proportion d'élèves ayant les yeux bleus ? Les yeux marrons ?

Définition : Deux sous-populations forment une partition d'une population E lorsque A∩B= ∅ et A∪B=E.

c. Inclusion.

Exercice :

1. Dans un village de 350 habitants, la proportion des habitants appartenant à la catégorie des 0-60 ans est p=0,8. Calculer le nombre d'habitants qui sont dans la tranche d'âge 0-60 ans.

2. La proportion de la population des 0-19 ans dans la population des 0-60 ans est p'=0,35. Calculer le nombre d'habitants qui sont dans la tranche d'âge 0-19 ans.

3. Calculer la proportion P de la sous-population des 0-19 ans dans les populations du village. Vérifier que P=pp'.

Définition : on dit qu'un ensemble A est …................dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.

On note $A \subset B$.

Considérons trois populations A, B et E telles que $A \subset B$, $B \subset E$ et donc $A \subset E$.

La proportion de A dans B est $p' = \frac{n_A}{n_B}$.

La proportion de B dans E est par définition $p = \frac{n_B}{n_E}$.

La proportion de A dans E est $P = \frac{n_A}{n_E} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{n_B}{n_E} = p'p$.

Propriété : Soient trois populations A, B et E telles que $A \subset B$, $B \subset E$. Notons P la proportion de A dans E, p' la proportion de A dans B, p la proportion de B dans E.
$P = pp'$

Exemple : Dans une classe, il y a 40% de garçons dont 75% ont 16 ans. Quelle est la proportion de garçons ayant 16 ans parmi les élèves de la classe ?

II. Évolution.

a. Taux d'évolution.

Exemple :
De 2023 à 2024, le prix d'une machine à laver passe de 500€ à 502€.
Pendant le même temps, le prix d'un magazine passe de 2€ à 3€.
On peut lire dans le journal « Hausse impressionnante du prix d'un magazine alors que le prix d'une machine à laver n'a quasiment pas augmenté ».

1. Calculer les variations de prix, exprimés en euros, de la machine à laver et du magazine.
   Quelle est l'augmentation absolue la plus importante ?

2. Déterminer, sous forme de pourcentage, la variation relative $\frac{502-500}{500}$ du prix de la machine à laver, puis la variation relative du prix du magazine.
   Quelle est l'augmentation relative la plus importante ?
   Ces résultats expliquent-ils les écrits du journal ?

Définitions : Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à y_2.

- **La différence y_2-y_1 est appelée variation absolue de y_1 à y_2.**
- **Le rapport $\frac{y_2-y_1}{y_1}$ s'appelle le taux d'évolution de y_1 à y_2.**
  Pour exprimer un taux d'évolution en pourcentage, on utilise la formule suivante : $\frac{y_2-y_1}{y_1}\times 100$.
  Pour se souvenir de cette formule, on peut la remplacer par $\frac{v_{arrivée}-v_{départ}}{v_{départ}}\times 100$.

Remarque : le taux d'évolution a le même signe que celui de la différence y_2-y_1.

Lorsque le signe est positif, on parle de …..
Lorsque le signe est négatif, on parle de …..

Exemples :

1. Au moment des soldes, le prix d'une paire des chaussures passe de 120€ à 90€.
   a. Déterminer la variation absolue du prix de la paire de chaussures.

   b. Déterminer le taux d'évolution en pourcentage du prix de la paire de chaussures.

2. Après travaux, la capacité d'accueil d'un stade passe de 30 000 places à 50 000 places.
   a. Déterminer la variation absolue de la capacité d'accueil du stade.

   b. Déterminer le taux d'évolution en pourcentage de la capacité d'accueil du stade.

Remarques : un taux d'évolution peut être supérieur à 100%.

Exemple : Entre le premier et le deuxième trimestre, Julie a sa moyenne de Mathématiques qui passe de 5 à 15.
Déterminer le taux d'évolution de la moyenne de Mathématiques de Julie.

b. Coefficient multiplicateur.

Exemple : En 2024, un ticket de cinéma pour les moins de 18 ans coûte 8,50€.
Au 1er janvier 2025, il augmentera de 10%.

1. Déterminer de combien augmente le prix du ticket de cinéma.

2. Combien coûtera le ticket de cinéma au 1er janvier 2015 ?

Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à y_2. Notons t le taux d'évolution de y_1 à y_2.

$t=\frac{y_2-y_1}{y_1}$ donc $y_2-y_1=ty_1$ donc $y_2=ty_1+y_1=(1+t)y_1$.

Définition : Soit t le taux d'évolution de y_1 à y_2.
On a $y_2=(1+t)y_1$.
$1+t$ s'appelle le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2.

Propriété : Faire évoluer une quantité d'un taux t revient à la multiplier par ....

Propriétés :

- Augmenter une quantité d'un pourcentage de t% revient à la multiplier par …..............
- Diminuer une quantité d'un pourcentage de t% revient à la multiplier par …...............

Exemples :

1. Une fillette mesurait 94 cm, il y a 6 mois. On la mesure aujourd'hui et on constate que sa taille a augmenté de 5%.
   a. Par combien va-t-on multiplier la taille initiale de la fillette ?

   b. Combien mesure la fillette aujourd'hui ?

2. Un athlète s'entraîne pour un marathon. Son temps initial est de 3h. Après 6 mois d'entraînement, il diminue son temps de 20%.
   a. Par combien va-t-on multiplier le temps initial ?

   b. Combien de temps mets-il maintenant pour parcourir un marathon ?

Si on connaît le coefficient multiplicateur, on peut en déduire s'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution et on peut déterminer le taux d'évolution.

Coefficient multiplicateur	Augmentation ou diminution	Taux d'évolution	Taux d'évolution en pourcentage
1,5			
0,75			
1,1			
0,4			
2,1			

c. Évolutions successives.

Exemple : Pour fêter l'ouverture de son garage, un concessionnaire automobile fait une réduction de 10% sur un modèle de voiture dont le prix initial est 12000 €. Après discussion, un client obtient une remise supplémentaire de 5% sur le prix, après la réduction de 10%.

1. Calculer le prix de la voiture après la première réduction, puis le prix final.

2. Calculer le taux d'évolution du prix initial de la voiture au prix payé par le client. La réduction totale est-elle de 15% ?

3. Ce concessionnaire décide maintenant que quelque soit le modèle de voiture, le prix sera réduit de 8%. Un client négocie ensuite une baisse de 12% sur le prix réduit.
   Notons p le prix initial de la voiture.
   a. Déterminer, en fonction de p, le prix après la réduction de 8%.

   b. Déterminer, en fonction de p, le prix obtenu par le client.

   c. Calculer le taux d'évolution du prix initial de la voiture au prix payé par le client.

   ci.

Schéma :

prix initial prix 1 prix final

Propriété : Lorsqu'une grandeur subit deux évolutions successives (hausses ou baisses), le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.
Si cette grandeur subit une première évolution de taux t_1 puis une seconde évolution de taux t_2, alors elle est multipliée par $(1+t_1)(1+t_2)$

Notons t le taux d'évolution global de cette grandeur, on obtient alors $1+t=(1+t_1)(1+t_2)$, soit $t=(1+t_1)(1+t_2)-1$.

Exemple : Un prix est augmenté de 20%, puis diminué de 10%. Quelle évolution globale subit donc ce prix ?

e. évolution réciproque.

Exemple : En 2024, les salaires d'une société sont augmentés de 10%.

1. Un salarié touchait 1400€ net mensuel en 2023.
   Quel salaire net mensuel a-t-il touché en 2024 ?

2. En proie à des difficultés économiques, la société décide qu'en 2025 les salariés toucheront le même salaire qu'en 2023.
   Quel est le taux d'évolution des salaires de 2024 à 2025.

Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à y_2. Notons t le taux d'évolution de y_1 à

y_2 . Soit t' le taux dévolution de y_2 à y_1 .
On dit que les évolutions de y_1 à y_2 et de y_2 à y_1 sont réciproques.
Établissons une relation entre t et t' .
On a $(1+t)(1+t')=1$ et donc $1+t'=\frac{1}{1+t}$, soit $t'=\frac{1}{1+t}-1$.

Propriété : Pour une évolution de y_1 à y_2 de taux t , l'évolution réciproque de y_2 à y_1 de taux t' a pour coefficient multiplicateur l'inverse du coefficient multiplicateur de y_1 à y_2

: $1+t'=\frac{1}{1+t}$.

Ainsi le taux de l'évolution réciproque, de y_2 à y_1 est $t'=\frac{1}{1+t}-1$.

Exemple : Le prix d'un produit a baissé de 6%. Calculer le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer pour que le produit revienne à son prix initial (arrondir à 0,01% près).