Exercices :
Application de la dérivation.

Exercice 1: Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

1. $f(x)=x^3$, $D_f=\mathbb{R}$
2. $f(x)=3x^2-4x+2$, $D_f=\mathbb{R}$
3. $f(x)=x^3-3x+1$, $D_f=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\frac{-1}{3}x^{-x^2}-2x-2$, $D_f=\mathbb{R}$
5. $f(x)=-x^4-2x^2+5$, $D_f=\mathbb{R}$
6. $f(x)=\frac{-x^4}{2}+4x^2+2$, $D_f=\mathbb{R}$
7. $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$ pour $x\neq 1$
8. $f(x)=\frac{1-x}{x^2}$ pour $x\neq 0$
9. $f(x)=\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}$ pour $D_f=\mathbb{R}$
10. $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x}$ sur]0 ; +∞[.

Exercice 2: Le carré ABCD a pour côté 10. Les points M, N, P, Q appartiennent respectivement à [AB], [BC] , [CD] et [DA] et sont tels que AM=BN=CP=DQ= x , où x appartient à [0 ; 10]. On note $P(x)$ le périmètre du carré MNPQ.

1. Exprimer $P(x)$ en fonction de x .
2. Étudier le sens de variation de P sur [0;10].
3. Justifier que $20\sqrt{2}\leqslant P(x)\leqslant 40$ pour tout x de [0;10].

Exercice 3:Soit g la fonction définie et dérivable sur [-10;10] telle que $g(x)=x^3-12x$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g .
2. Donner un encadrement de $g(x)$ pour :
   a. x appartenant à [-5;2],
   b. x appartenant à [-2;5].
3. Soit m un réel tel que $m\in$[-65;65].
   Pour quelle(s) valeur(s) de m , l'équation $g(x)=m$ admet exactement une solution ?

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-4x+2$.

1. Montrer que $f'(x)=(x-1)(x+2)^2$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$
2. En déduire le sens de variation de f .
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
4. Discuter, suivant la valeur du réel m , du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

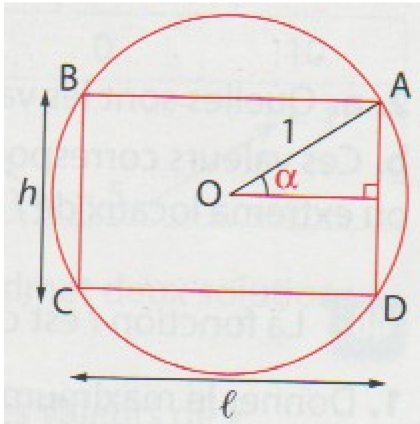
Exercice 5 : Un peu d'économie.
Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100€.
Partie A : Coût de production unitaire.
Le coût de production $U(x)$ par objet produit est $U(x)=x-10+\frac{900}{x}$ pour $x\in$I, où I=[10;100].

1. a. Étudier la fonction U sur I et tracer sa courbe C en prenant pour unités 1 cm pour 5 objets et 1 cm pour 10€.
   b. Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.
2. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80€.

Partie B : Étude du bénéfice.

1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x)=-x^2+110x-900$.
2. Déterminer son sens de variation sur [10;100] et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

Exercice 6 : Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $l\times h^2$ où l et h sont les deux dimensions ci-dessous :



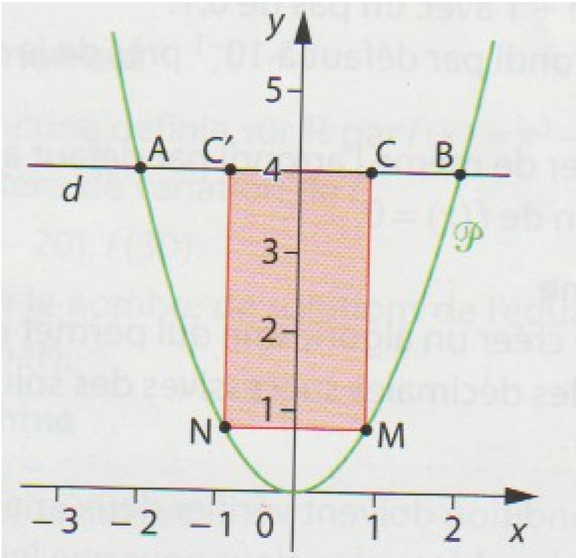
On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre.

1. Montrer que $h^2=4-l^2$.
2. En déduire que $lh^2=-l^3+4l$.
3. Soit $f(x)=-x^3+4x$ pour $x\geqslant 0$.
   a. Étudier le sens de variation de f sur [0 ; +∞[.
   b. Comment choisir l et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?
4. Quel est l'angle α correspondant à 0,1° près ?

Exercice 7 :

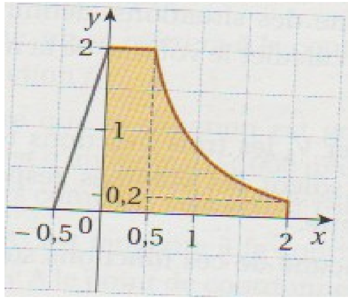
Soit P la parabole d'équation $y=x^2$ et k un réel strictement positif.
On nomme d la droite d'équation $y=k$.

1. Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de P et de d .
2. Soit C un point du segment [AB] et M le point de P de même abscisse x que C. On trace le rectangle CMNC' où C' appartient à [AB] et N à P .
   a. Exprimer l'aire $A_k(x)$ du rectangle CMNC' en fonction de x et k et préciser sur quel intervalle elle est définie.
   b. Déterminer x tel que l'aire de CMNC' soit maximale.
   c. Montrer, quand k décrit]0 ; +∞[, que les points C tels que l'aire de CMNC' soit maximale, décrivent une partie de la parabole $y=3x^2$.



Exercice 8:

1. Une entreprise veut réaliser les deux montants latéraux d'un toboggan. La courbe qui modélise le toboggan est définie comme une partie de la représentation graphique C d'une fonction f dans un repère orthonormé adapté.
   La partie utile de la courbe C qui modélise le toboggan est délimitée par le points de coordonnées (0,5;2) et (2;0,2) comme le suggère le schéma suivant.



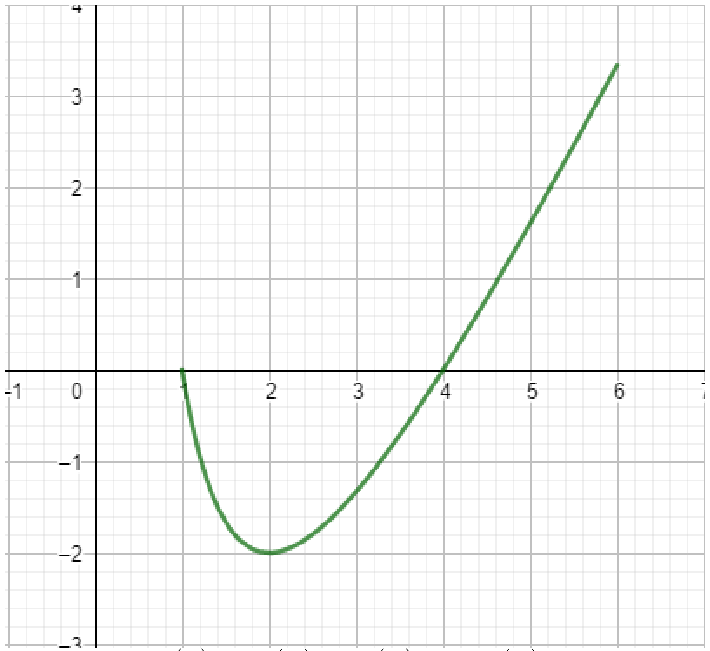
   La fonction f est définie, pour tout nombre réel x strictement positif, par :
   $f(x)=a+\frac{b}{x}$ où a et b sont des nombres réels.
   Déterminer a et b .
2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0,5;2] par
   $f(x)=-0{,}4+\frac{1{,}2}{x}$.
   On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)d'unité graphique 4 cm.
   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
   Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5;2].
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,5;2].
   c. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe C au point d'abscisse 0,5 et une équation de la tangente T_2 à la courbe C au point d'abscisse 2.
   d. Tracer, dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), les droites T_1 et T_2 , ainsi que la courbe C .
3. Donner un encadrement de l'aire de la partie grise du toboggan en utilisant d'une part les droites T_1 et T_2 , et d'autre part le point de coordonnées (1;0,8).

Exercice 9 : A tout nombre réel m , on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$f_m(x)=\frac{x^2+m}{x-1}$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f_m .
   b. Suivant les valeurs de m , dresser le tableau de variations de f_m .
2. Pour quelles valeurs de m , la fonction f_m admet-elle un maximum et un minimum locaux.

Exercice 10 : f est la fonction définie sur I = [1;6] par $f(x)=ax+b+\frac{8}{x}$ où a et b sont des nombres réels. On admet que f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.
La courbe C ci-dessous représente la fonction f sur I.



1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.
2. En déduire les valeurs des réels a et b .
3. On admet que f est définie sur [1;6] par $f(x)=2x-10+\frac{8}{x}$.

   a. Justifier la dérivabilité de f sur [1;6].
   b. Déterminer $f'(x)$ puis étudier les variations de f sur [1;6].
   c. Dresser le tableau de variations de f sur [1;6] en précisant les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(6)$.
   d. En déduire le signe de $f(x)$ sur [1;6].

Exercice 11 : g est la fonction définie sur ℝ par $g(x)=x^4-4x^3$.
Parmi les réponses proposées, choisir celles qui sont correctes en justifiant.

1. g est croissante sur [3;+ ∞[
2. g est positive sur [3;4]
3. g admet un extremum en 0 ;
4. g admet un extremum en 3 ;
5. g' est négative sur [2;3] ;
6. g' est décroissante sur [0;2].