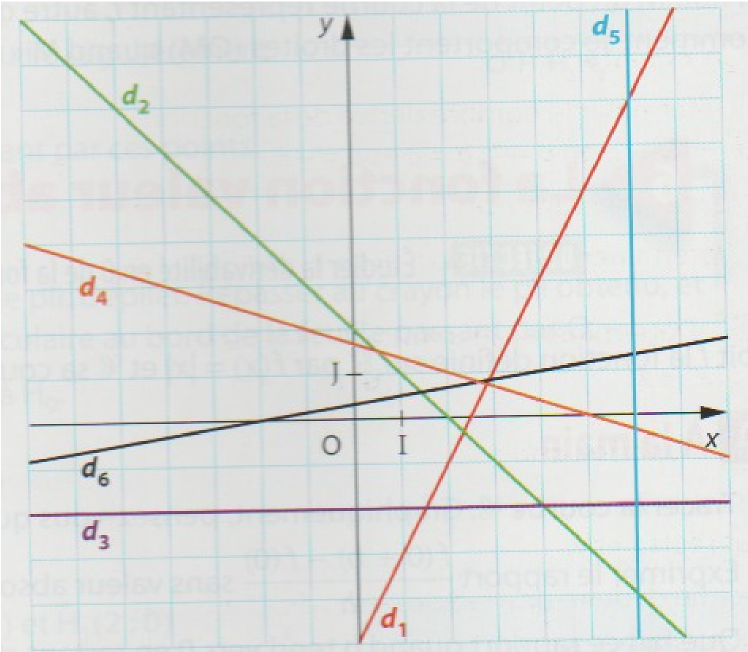
Dérivation : les exercices.

Exercice 1 : Lire graphiquement le coefficient directeur s'il existe de chacune des droites représentées ci-dessous.



Exercice 2 : Tracer la droite passant par A et de coefficient directeur m .

a. A(2;1) et $m=2$ b. A(3;4) et $m=-3$

c. A(-1;1) et $m=\frac{1}{3}$ d. A(3;-2) et $m=0$

Exercice 3:La fonction f est la fonction carré.

1. Calculer $f(5)$ et $f(5+h)$ où h est un réel.
2. En déduire le rapport $\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$.
3. Déterminer le nombre dérivé de f en 5.

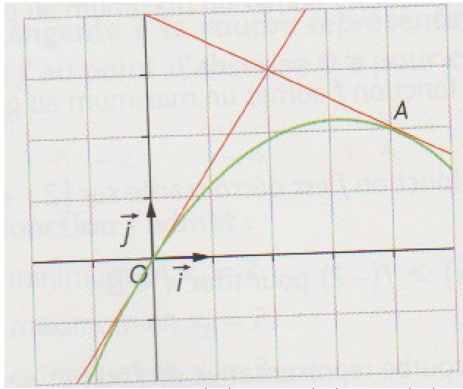
Exercice 4 :

1. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=2x-3$ en $a=1$, $a=3$ et $a=-6$.
2. Que conjecture-t-on ?
3. Déterminer $f'(a)$ pour un réel a quelconque.

Exercice 5:Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en a .

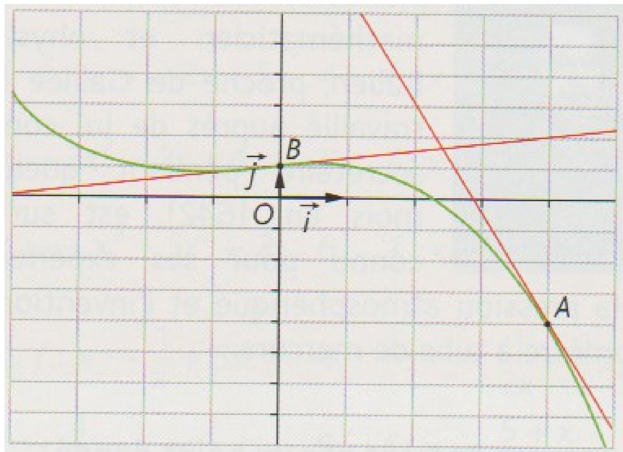
1. $f(x)=2x^2-x+3$ et $a=2$
2. $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ et $a=1$
3. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ et $a=-2$
4. $f(x)=2\sqrt{x}-1$ et $a=4$

Exercice 6:On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur ℝ et de deux de ses tangentes.



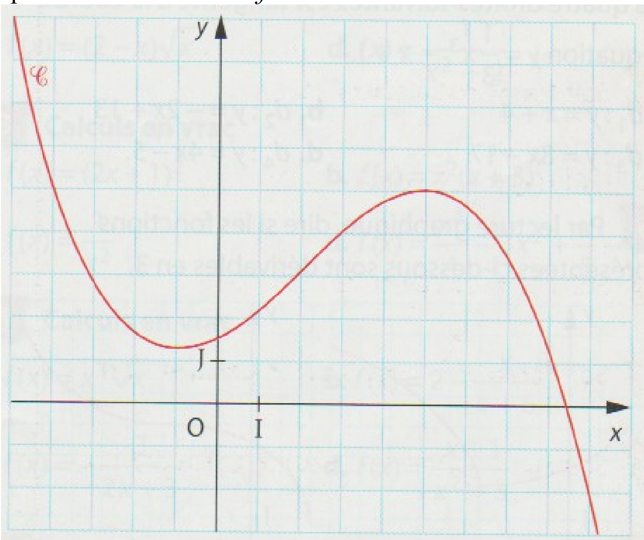
Par lecture graphique, donner les valeurs $f(0)$, $f'(0)$, $f(4)$ et $f'(4)$.

Exercice 7:On donne la représentation graphique d'une fonction g définie sur ℝ et de deux de ses tangentes.



Par lecture graphique, donner les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$, $g(4)$ et $g'(4)$.

Exercice 8 : C représente une fonction f dérivable sur ℝ



Déterminer graphiquement les valeurs de a telles que $f'(a)=0$.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=-x^2+x+2$.
Soit C la courbe représentative dans un repère.
a. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
b. Tracer C et T à l'écran de la calculatrice.

Exercice 10: f est une fonction dérivable sur ℝet C sa courbe représentative dans un repère.
A est le point de C de coordonnées (-2;4).
La tangente en A à C passe par l'origine.
Déterminer $f'(-2)$.

Exercice 11:Soit la fonction définie sur [0 ; +∞[par $f(x)=\sqrt{x}$. Soit C sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer $f'(4)$.
2. Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe représentative C au point d'abscisse 4.
3. Tracer C et T_A .

Exercice 12 : C_1 , C_2 et C_3 sont les courbes représentants les fonctions f , g et h définies sur ℝpar $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ et $h(x)=-x^2+4x-1$.

1. Établir les tableaux de variation de f , g et h .
2. Montrer que :
   a. le point A(1;2) est commun avec C_1 , C_2 et C_3 ;
   b. les trois courbes admettent en A la même tangente T.
3. Écrire une équation de T et étudier la position de chacune des courbes par rapport à T .
4. Tracer T, C_1 , C_2 et C_3 .
5. Chacune des courbes C_1 , C_2 et C_3 admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$? Si oui, préciser en quel point et écrire leur équation.

Exercice 13 :Soit H_a l'hyperbole d'équation $y=\frac{a}{x}$, avec $a>0$.
Dans la suite, M_0 désigne un point de H_a d'abscisse x_0 , où x_0 est un réel non nul.

1. Donner une équation de la tangente T à H_a au point M_0 .
2. Soit P un point de coordonnées (α , β).
   On se propose de trouver, suivant la position de P dans le plan, le nombre de tangentes que l'on peut mener de ce point à l'hyperbole H_a .
   a. Traduire, avec ses coordonnées, que le point P appartient à la tangente T en $M_0\left(x_0;\frac{a}{x_0}\right)$ à H_a .
   b. Déterminer la relation que doivent vérifier α et β pour que l'équation précédente ait des solutions. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 14: Déterminer la fonction dérivée de la fonction f ainsi que le domaine de dérivabilité.

1. $f(x)=x^2+1$
2. $f(x)=x^2+\sqrt{x}+4$
3. $f(x)=x^3+x^2+2$
4. $f(x)=x^2+\frac{1}{x}-2$
5. $f(x)=-5x$
6. $f(x)=13x^3$
7. $f(x)=\frac{4}{x}$
8. $f(x)=-5\sqrt{x}$
9. $f(x)=4x^2+3x+1$
10. $f(x)=-5x^3+5x^2+3$
11. $f(x)=-x^3+4\sqrt{x}-4$
12. $f(x)=\frac{5x-2}{4}$
13. $f(x)=\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{5}+2x$
14. $f(x)=\frac{x^4+3x^2-5x}{4}$
15. $f(x)=x\sqrt{x}$ $f(x)=x^2(2x+4)$
16. $f(x)=4x(x-5)$
17. $f(x)=x^3(x-\sqrt{x})$

18. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

19. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

20. $f(x)=\dfrac{2}{x+4}$

21. $f(x)=\dfrac{-5}{x^2+1}$

22. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

23. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+3}$

24. $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-1}$

25. $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{x}$

Exercice 15 : Soit la fonction définie et dérivable sur ℝpar $f(x)=x^2-4x+1$.
On note C_f la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. A quelle condition sur $f'(x)$ la tangente à C_f au point d'abscisse *x* est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?
3. En déduire la (ou les) éventuelle(s) valeur(s) de *x* pour laquelle (lesquelles) la tangente à C_f au point d'abscisse *x* est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 16 : Une entreprise fabriques des objets dont le coût de production s'exprime, en centaines d'euros, en fonction de la quantité q par $C(q)=0{,}01q^2+2q+1{,}5$.
En économie, on appelle coût marginal pour une quantité q produite, le coût de fabrication d'une unité supplémentaire, c'est à dire $C_m(q)=C(q+1)-C(q)$.

1. Calculer le coût marginal $C_m(q)$ en fonction de q .
2. Mathématiquement, le coût marginal est assimilé à la dérivée de la fonction coût total, c'est à dire $C'(q)$.
   Calculer $C'(q)$.
3. Quand on identifie $C_m(q)$ à $C'(q)$, on commet une erreur $E(q)$ avec $E(q)=C'(q)-C_m(q)$.
   Calculer $E(q)$ en fonction de q . A partir de combien d'unités produites cette erreur est-elle inférieure à 0,01 ?

Exercice 17 : La quantité demandée pour un article dépend du prix de cet article : elle est égale à $500-4p$, où p est le prix de l'article en euros. On appelle *f* cette fonction de demande qui à chaque prix fait correspondre la quantité demandée pour cet article.
On a donc $f(p)=500-4p$.

1. a. Lorsque le prix de l'article est 7€, déterminer la quantité demandée.
   b. Le prix de cet article initialement à 7€ subit une augmentation de 1%.
   Calculer le nouveau prix et la nouvelle quantité demandée.
   Calculer le pourcentage de variation d de la quantité demandée.
2. On appelle élasticité de la demande par rapport au prix p le réel $E(p)$ égal à $\dfrac{p\times f'(p)}{f(p)}$.
   a. Quel est le signe de $E(p)$?
   b. Déterminer, en fonction de p , l'expression de la fonction E.
   c. Calculer E(7), en donnant le résultat à 0,01 près.
   Comparer avec le résultat obtenu à la question 1. b.
   (On admet que l'élasticité de la demande par rapport au prix p indique le pourcentage de variation de la quantité demandée, pour un accroissement de 1% d'un prix p).

Exercice 18 :

1. Soit f la fonction définie sur [-0,5;0,5] par $f(x)=(1+x)^3$ et C sa représentation graphique.
   a. Déterminer une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 0.
   b. Représenter la courbe C et la droite T sur l'écran d'une calculatrice.
   c. On pose $d(x)=(1+x)^3-(1+3x)$.
   Interpréter graphiquement $d(x)$
   Calculer $d(x)$ pour $x=1$; $x=0{,}1$; $x=0{,}001$ et $x=0{,}0001$.
   Expliquer pourquoi $(1+x)^3$ est voisin $1+3x$ quand x est proche de 0.
2. Le salaire d'un employé est 1800 €. Il augmente trois fois de suite de 2%.
   a. Par quel coefficient multiplicateur faut-il multiplier son salaire initial pour obtenir son salaire après ces trois augmentations ?
   b. Si on applique l'approximation $(1+x)^3$ est proche de $1+3x$ pour trouver le nouveau salaire, quelle erreur commet-on ?