Probabilité : conditionnement et indépendance.

I. Probabilités conditionnelles.

a. Probabilité de A sachant B.

Soit Ω un univers sur lequel est défini une probabilité P.

Définition : Soient A et B deux événements tels que $P(B)\neq 0$.
La probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé est notée $P_B(A)$ et est définie par $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
$P_B(A)$ se lit « probabilité de A sachant B ».

C'est une nouvelle probabilité, dite conditionnelle, définie au moyen de la probabilité P définie sur Ω. Elle a toutes les propriétés d'une probabilité.

Notation : $P_B(A)$ se note aussi P(A/B).

Exemple : On lance un dé cubique équilibré.
Soit A l'événement « le résultat est pair », déterminer $P_A(2)$.
Soit B l'événement « le résultat est un multiple de 3 », déterminer $P_A(B)$.

Propriétés : Soit B un événement tel que $P(B)\neq 0$,
pour tout événement A, $0\leqslant P_B(A)\leqslant 1$

$$P_B(A)+P_B(\overline{A})=1$$

Preuve :

* $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B)\geqslant 0$ et $P(B)>0$ d'où $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq 0$.

De plus A∩B⊂B d'où $P(A\cap B)\leqslant P(B)$ donc $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\leqslant 1$,

donc $0\leqslant P_B(A)\leqslant 1$.

* $P_B(A)+P_B(\overline{A})=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}+\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$.

En effet $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=B$, de plus $(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B)=O$.
D'où $P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P\left((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(B)$.

Remarque : Si $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$, $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

b. Arbre pondéré.

Voici les régles pour la construction et l'utilisation des arbres de probabilités ;
Une succession de plusieurs branches est appelée un chemin. Ce chemin représente l'intersection des évènements rencontrés aux extrémités de ses branches et sa probabilité est égale au produit des probabilité notées sur ses branches.
Sur un arbre, la somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1.
Exemple : Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés (A) ; les autres bonbons

sont des guimauves . 18 guimauves sont parfumées à l'orange(O) et 10 bonbons acidulés sont parfumés à l'orange.
Construire un arbre pondéré représentant cette situation.

c. Probabilités totales.

- Cas particulier :
  Propriété : Soient A et B deux événements de probabilité non null.e
  $P(A)=P(B)\times P_B(A)+P(\overline{B})\times P_{\overline{B}}(A)$.

  Preuve : A est la réunion des événements incompatibles $B\cap A$ et $\overline{B}\cap A$.
  D'où, $P(A)=P(B\cap A)+P(\overline{B}\cap A)=P(B)P_B(A)+P(\overline{B})P_{(\overline{B})}(A)$.

- Cas général :
  Soient B_1 , B_2 , .., B_n n événements tels que :
  - chaque B_k a une probabilité non nulle,
  - les B_k sont incompatibles deux à deux.
  - leur réunion est l'univers Ω.

  On dit, dans ce cas, que les B_1 , B_2 , …, B_n forment une partition de l'univers Ω.
  Quelque soit l'événement A, on a :
  $P(A)=P_{B_1}(A)P(B_1)+\ldots+P_{B_k}(A)P(B_k)$

  Application : Soit le jeu de hasard suivant. On tire au sort un dé : si on fait 1 ou 2, on tire dans une urne verte, si on fait 3 à 6, on tire dans une urne bleue.
  Dans l'urne verte, il y a 3 jetons rouges, 2 jaunes et 1 noir.
  Dans l'urne bleue, il y a 5 jetons rouges, 4 jaunes et un noir.
  1. Faire un arbre représentant la situation.
  2. Quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge.

II. Indépendance.

a. Événements indépendants.

Intuitivement, deux événements sont indépendants (en probabilité) si la réalisation de l'un des deux événements n'influence pas les chances que l'autre se réalise.

Définition : Les deux événements sont dits indépendants si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Propriété : Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)=P(B)$ (ou si et seulement si $P_B(A)=P(A)$)

Preuve : $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$.
A et B sont indépendants
<=> $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
<=> $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$
<=> $P_B(A)=P(A)$

Exemple : Soit un dé équilibré à 6 faces.
A : « le résultat est pair »
B : « le résultat est 2 »
C : « le résultat est supérieur ou égal à 5 ».
A et B sont-ils indépendants ? A et c sont-ils indépendants ?

Propriété : Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Preuve :
$A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont des événements incompatibles dont la réunion est B.
On a alors $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P(B) + P(\overline{A} \cap B)$.
d'où $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) P(\overline{A})$.
Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

b. Épreuves indépendantes.

Définition : On appelle succession de deux épreuves indépendantes la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire deux fois, les résultats de la première épreuve n'influençant pas ceux de la seconde.

Exemple : une urne contient 10 boules vertes et cinq boules rouges. On tire successivement et avec remise deux boules.
Représenter cette situation par un arbre pondéré.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules vertes ?

Remarque : lors de la succession de deux épreuves indépendantes, les probabilités ne changent pas.