Équations, fonctions polynômes du second degré.

I. Fonction polynôme du second degré.

Définition : Une fonction P polynome du second degré est une fonction définie sur ℝ dont une expression est de la forme $P(x)=ax^2+bx+c$, où a , b , et c sont des rées tels que $a\neq 0$.
Les réels a , b et c sont appelés coefficients de la fonction polynôme.

Une fonction polynôme de degré 2 se nomme aussi trinôme.

L'expression ax^2+bx+c est dite forme développée de $P(x)$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=3(x+1)^2-5(x+7)$.
f est-elle une fonction polynôme du second degré. Si oui, identifiez ses coefficients.

Définition : On appelle racine d'un polynôme P tout nombre x_0 tel que $P(x_0)=0$.

Exemple : Soit P le polynome défini sur ℝ par P(x) = $2x^2+4x-6$.
1 est-il une racine de P ? Et 2 ?

II. Équation du second degré.

1. Définition.
   Une équation du second degré, à une inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a , b et c sont trois réels donnés, $a\neq 0$.

2. Forme canonique.

Pour tout réel x , $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

Or, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$,

donc $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$.

Par suite $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$

$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

On pose Δ = b^2-4ac .

Donc $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Définition:
- Le réel b^2-4ac , noté Δ, est le discriminant du trinôme ax^2+bx+c .

- $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ est la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c .

Exemple: voici les formes canoniques des trinômes suivants.

- $-x^2+6x+1 = -(x^2-6x-1) = -(x^2-6x+9-9-1) = -((x-3)^2-9-1) =$ $-((x-3)^2-10)$
- $3x^2-2x+1 = 3\left(x^2-\frac{2x}{3}+1\right) = 3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+1\right) = 3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right)$.

3. Résolution de l'équation (E) ax^2+bx+c = 0, avec $a \neq 0$.

– 1er cas: $\Delta>0$.

$\frac{\Delta}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ donc $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Donc, $ax^2+bx+c = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

L'équation (E) admet alors deux solutions distinctes: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

– 2éme cas: $\Delta=0$.

On a alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

Donc $ax^2+bx+c = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation (E) admet une unique solution: $x_0=-\frac{b}{2a}$.

– 3éme cas: $\Delta < 0$.

$\frac{\Delta}{4a^2}<0$ donc $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$.

Par suite, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\geqslant-\frac{\Delta}{4a^2}>0$

L'équation (E) n'a pas de solution réelle.

Bilan:

On considère l'équation $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$.

– Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.
– Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution: $x_0=-\frac{b}{2a}$.
– Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

<u>Exemples:</u>Résoudre les équations suivantes:

a) $-x^2+2x-10=0$
$\Delta = 2^2-4\times(-1)\times(-10)=-36$.
L'équation n'a pas de solution.

b) $2x^2-3x-5=0$
$\Delta = (-3)^2-4\times 2\times(-5)=49$.
D'où l'équation admet deux solutions:
$x_1=\dfrac{3+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{3+7}{4}=\dfrac{10}{4}=2{,}5$
$x_2=\dfrac{3-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{3-7}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

c) $9x^2+6x+1=0$
$\Delta = 6^2-4\times 9\times 1=0$.
D'où l'équation admet une unique solution:
$x_0=-\dfrac{6}{2\times 9}=-\dfrac{1}{3}$.

III. Signe du trinôme.

1. Factorisation.

On a vu lors de la démonstration faite au I.3 que le trinome ax^2+bx+c pouvait se factoriser si Δ était supérieur ou égal à 0. Nous admettrons qu'il est impossible de trouver une factorisation si Δ est négatif.
Propriété: Soit ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine du trinôme.
- Si $\Delta<0$, il n'existe pas de factorisation de ax^2+bx+c par un polynôme de degré 1.

Exemples: Reprenons les trois trinômes étudiés au II. 3. et factorisons les.
a) $-x^2+2x-10$ ne peut pas être factorisé par un polynôme de degré 1 car son discriminant est négatif.
b) $2x^2-3x-5 = 2(x-2{,}5)(x-(-1)) = 2(x-2{,}5)(x+1)$ car son discriminant est strictement positif et que les racines de l'équation $2x^2-3x-5=0$ sont $x_1=2{,}5$ et $x_2=-1$.
c) $9x^2+6x+1 = 9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$ car son discriminant est nul et l'unique racine de l'équation $9x^2+6x+1=0$ est $x_0=\dfrac{1}{3}$.

2. Somme et produit de racines.

Propriété : Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, alors $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.

Application : Soit P un polynome du second degré définie sur ℝ par $P(x)=ax^2+bx+c$
Nous savons qu'il admet pour racines $x_1=3$ et $x_2=-4$.
Nous savons également que a = -1. Déterminer les valeurs de b et c.

3. Signe du trinôme.

Étudions le signe du trinôme ax^2+bx+c , $a \neq 0$.
Pour cela, distinguons les trois cas vus précédemment.

- Si Δ>0, ax^2+bx+c peut se factoriser sous la forme suivante: $a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
  Afin d'étudier le signe du trinôme, nous allons faire un tableau de signe.
  Supposons que $x_1<x_2$.

x	-∞	x_1		x_2		+∞
a	Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x-x_1$	-	0	+		+	
$x-x_2$	-		-	0	+	
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe opposé à celui de a	0	Signe de a	

- Si Δ=0, ax^2+bx+c peut se factoriser sous la forme suivante: $a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine du trinôme.
  On sait que pour toute valeur de x , $(x-x_0)^2$ est positif et s'annule en x_0 .
  Donc ax^2+bx+c est du signe de a et s'annule en x_0 pour tout réel x .
- Si Δ<0, ax^2+bx+c ne peut pas se factoriser, on utilise donc la forme canonique:
  $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.
  Comme Δ est négatif, on en déduit que $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est positif, d'où $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux nombres positifs donc est positif d'où ax^2+bx+c est du signe de a pour tout réel x .

Bilan: Soit le trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$.

- Si Δ >0, le trinôme s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2 . Si $x_1<x_2$, son tableau de signe est le suivant:

x	-∞	x_1		x_2		+∞
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe opposé à celui de a	0	Signe de a	

- Si Δ = 0, le trinôme a le même signe que a pour tout x , mais s'annule en $-\frac{b}{2a}$.
- Si Δ <0, le trinôme a le même signe que a pour tout réel x .

On dit encore que: le trinôme ax^2+bx+c ($a \neq 0$) est du signe de a sauf entre ses racines s'il en a.

Exemples: Résoudre les inéquations suivantes:
a) $-x^2+6x-5 > 0$
$\Delta=6^2-4\times(-1)\times(-5)=16$
d'où $x_1=\dfrac{-6-4}{-2}=5$ et $x_2=\dfrac{-6+4}{-2}=1$.
Nous obtenons donc le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$ 1 5 $+\infty$
$-x^2+6x-5$	$-$ 0 + 0 $-$

D'où les solutions de cette inéquation est l'intervalle]1; 5[. S=]1; 5[

b) $x^2-2x+10 \leq 0$.
$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 10=4-40=-36$.
D'où pour tout réel x , $x^2-2x+10$ est strictement positif d'où cette inéquation n'admet pas de solution. $S=\emptyset$.

IV. Bilan.

Fiche à coller.