Suites numériques.

I. Modes de générations.

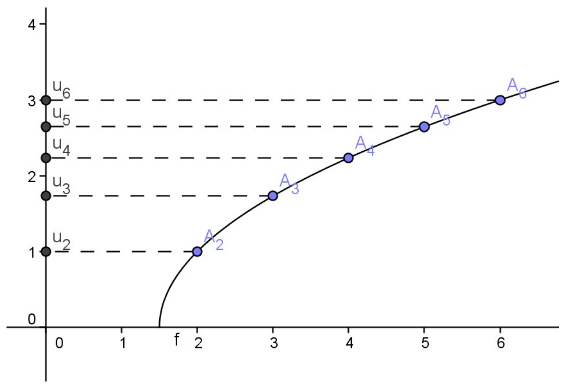
a. Suite définie par une formule explicite.

Une suite peut être définie par une formule explicite qui permet de calculer directement chaque terme d'indice n .

Si f est une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;+\infty[$, avec a réel positif ou nul, on peut définir une suite u en posant, pour tout entier naturel $n\geqslant a$, $u_n=f(n)$.

Exemple: Soit u la suite définie pour $n\geqslant 2$ par $u_n=\sqrt{2n-3}$.
Calculer u_2 , u_3 et u_{20} .

Représentation graphique:
La représentation graphique de la suite (u_n) est constituée des points A_n de coordonnées $(n;u_n)$.
Pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=f(n)$ où f est la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x-3}$.
Les termes de suite (u_n) sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f .



b. Suite définie par une relation de récurrence.

Une suite peut être définie par son terme initial et une relation de récurrence permettant de calculer chaque terme à partir du terme précédent.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à I et a un réel de l'intervalle de I. On peut définir une suite u définie sur $\mathbb{N}$ en posant:

- le terme initial: $u_0 = a$
- la relation de récurrence: $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Tous les termes de la suite appartiennent alors à l'intervalle I.

Exemple: Soit la suite u définie par les données: $u_0 = -2$ et $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 3}$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.

c. Quelle difficulté se pose à vous si vous souhaitez calculer u_{100}.

II. Sens de variation d'une suite.

a. Définition.

Définitions:

- **Dire qu'une suite (u_n) est croissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.**
- **Dire qu'une suite (u_n) est décroissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$.**
- **Dire qu'une suite (u_n) est constante signifie que pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.**

Exemples: Déterminer le sens de variation des suites suivantes.

a. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.

b. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}$.

c. Soit w la suite définie sur ℕ par $w_n=(-1)^n$.

Remarques:
- On dit que la suite (u_n) est strictement croissante (respectivement décroissante) si pour tout n appartenant à ℕ, $u_n<u_{n+1}$ (respectivement $u_n>u_{n+1}$).
- On dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang p si pour tout entier naturel $n\geqslant p$, on a $u_n\leqslant u_{n+1}$.

b. Quelques méthodes.

Soit u une suite définie sur ℕ. Pour étudier le sens de variation de u , on peut procéder de l'une des façons suivantes :

i. Étude de la différence $u_{n+1}-u_n$.

Règle:
- Si pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$, alors la suite u est croissante.
- Si pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$, alors la suite u est décroissante.

Exemple :
soit (u_n) la suite définie sur ℕ par $u_n=n^2-n-2$. Étudier le sens de variation de la suite

(u_n) en utilisant la méthode ci-dessus.

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison q^n . Étudions le sens de variation de la suite (u_n) .
$u_{n+1}=u_n+r$ donc $u_{n+1}-u_n=r$.
Donc le signe de $u_{n+1}-u_n$ dépend donc du signe de r .
On obtient donc le théorème suivant :

Théorème: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
- **Si $r>0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.**
- **Si $r<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si $r=0$, alors la suite (u_n) est constante.**

ii. Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Règle: Lorsque les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs,

- **si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.**
- **si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.**

Exemple: Soit la suite u définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{2^n}{n}$.Étudier le sens de variation de la suite (u_n) en utilisant la méthode ci-dessus.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, q et u_0 étant positifs.
On a $u_{n+1} = q \times u_n$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
On obtient donc le théorème suivant :

Théorème: Soit (q^n) la suite géométrique définie sur ℕ, de raison q, avec $q \neq 0$.

1) **(q^n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.**
2) **(q^n) est strictement décroissante si et seulement si** $0 < q < 1$.
3) **(q^n) est constante si et seulement si** $q = 1$.

Remarque: une suite géométrique peut-être ni croissante, ni décroissante comme la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2.
$u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 4$, ….

iii. Utiliser le sens de variation d'une fonction.

Théorème: La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0 ; +\infty[$

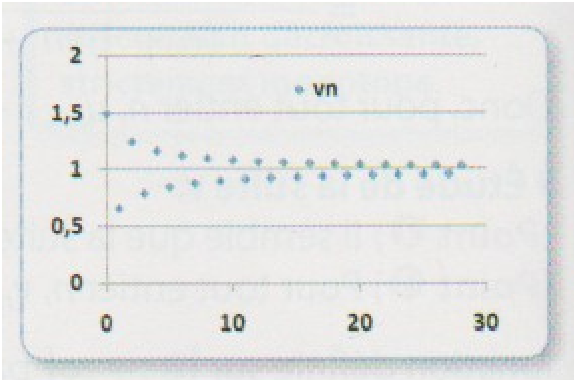
- **Si la fonction f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est strictement croissante.**
- **Si la fonction f est strictement décroissante, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.**

Remarque: Lorsque la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de f et de (u_n) ne sont pas nécessairement les mêmes.

III. Comportement d'une suite à l'infini.

Exemples : Soient les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) définies sur ℕ par : $u_n=\frac{(-1)^n}{n+2}+1$,
$v_n=n^2$, $w_n=-2n^2+2$, $t_n=cos n+1$.
Observons le comportement de ces suites à l'infini.

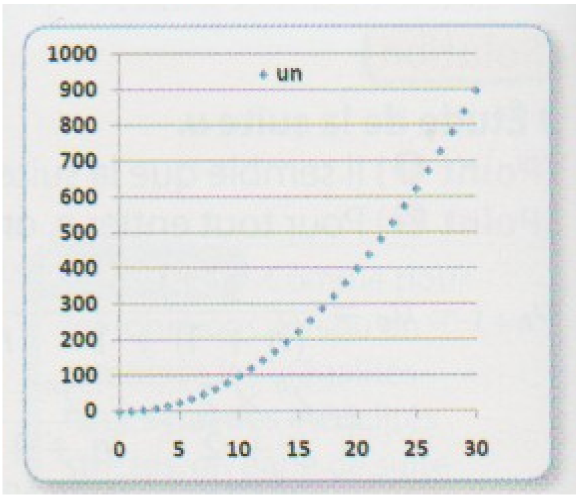
1. u_n peut être rendu aussi proche de 1 que l'on veut si n est choisi suffisamment grand.



Pour tout entier n>98, on a $|u_n-1|<0,01$.
Pour tout $n>10^6$, on a $|u_n-1|<10^{-6}$.
Plus généralement, pour tout écart e>0, dés que $n>\frac{1}{e}-2$, on a $|u_n-1|<e$, c'est à dire que la distance entre u_n et 1 est inférieure à e.

Notation : On dit que la suite (u_n) est convergente et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.

2. v_n peut être rendu aussi grand que l'on veut si n est choisi suffisamment grand.

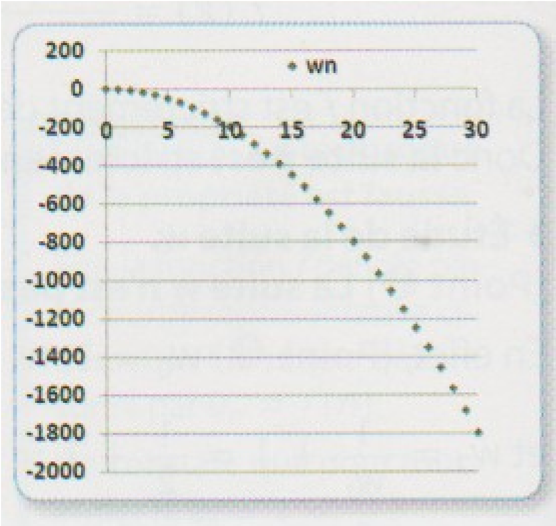


Pour tout entier $n\geqslant 1000$, on a $v_n\geqslant 10^6$.
Pour tout $n\geqslant 10^6$, on a $v_n\geqslant 10^{12}$.

Plus généralement, pour tout réel $M \geqslant 0$, dés que $n \geqslant \sqrt{M}$, on a $v_n \geqslant M$.

Notation : On dit que la suite (v_n) est divergente et on note $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3. w_n peut être rendu aussi petit que l'on veut si n est choisi suffisamment grand.



Pour tout entier $n \geqslant 708$, on a $w_n \leqslant -10^6$,
Pour tout $n \geqslant 707107$, $w_n \leqslant -10^{12}$.

Plus généralement, pour tout réel $M \geqslant 0$, dès que $n \geqslant \sqrt{\frac{M}{2} + 1}$, on a $w_n \leqslant -M$.

Notation : On dit que la suite (w_n) est divergente et on note $\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

4. t_n ne se stabilise autour d'aucune valeur réelle : on dit que (t_n) diverge et n'admet pas de limite.