Suites arithmétiques et géométriques.

Une suite est une liste ordonnée de nombres.
Exemples:

1) 0 ; 2 ; 4; 6; 8; …..
2) Température du mois de janvier: -3; -5; -2; -7; 0; 4; ….
3) Pour étudier l'évolution du prix de vente d'un produit, on note p_0 le prix initial, p_1 le prix au bout d'un mois, …, p_n le prix au bout de n mois.

Intuitivement, on peut considérer qu'une suite réelle est une liste infinie de nombre réels dont chaque terme est numéroté: à chaque rang n (entier naturel) correspond un terme numéroté n de la suite.

Définition: Soit p un entier naturel donné. Une suite numérique u est une fonction qui, à tout entier naturel $n, n \geqslant p$, associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n : $n \quad u_n$.
La suite u est la suite de terme général u_n. Elle est souvent notée (u_n).
Comme elle est définie à partir du rang p, le réel u_p est appelé le terme initial de la suite u.

I. Suites arithmétiques.

a. Exemple.

Un téléphérique progresse à vitesse constante: chaque seconde, son altitude augmente de 0,75 m.
La gare de départ est à une altitude de 1450 mètres.
On appelle a_n l'altitude de la cabine après n secondes de trajet.

1. Déterminer a_1 et a_2.
2. Préciser l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n.
3. La durée du trajet est précisément de 15 minutes. Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée?

1. $a_1=1450+0{,}75=1450{,}75$, $a_2=1450{,}75+0{,}75=1451{,}5$.
2. $a_{n+1}=a_n+0{,}75$
3. On remarque qu'à chaque seconde qui passe, il faut ajouter 0,75 m. Donc au bout de n secondes, on a ajouté 0,75n à l'altitude initiale. On obtient donc la formule suivante:
$u_n=1450+0{,}75\,n$.
En 15 minutes, il y a 900 secondes. On cherche donc à déterminer u_{900} .
$u_{900}=1450+0{,}75\times 900=2350$.
La gare d'arrivée est donc à une altitude de 2350 m.

b. Définition.

Définition: Dire qu'une suite (u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que: pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite (u_n).

Autrement dit, dire que la suite (u_n) est arithmétique signifie que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple: Soit u la suite arithmétique de raison $r=-2$ et de premier terme $u_0=7$.

$u_1 = 7 - 2 = 5$
$u_2 = 5 - 2 = 3$
$u_3 = 3 - 2 = 1$ ....

c. Exprimer u_n en fonction de n.
Soit (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r.
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$
...
$u_p = u_{p-1} + r = u_0 + pr$
Donc, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.

Théorème: Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Exemple: Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.
Déterminer u_{1003}.
On a d'après le théorème précédent, $u_n = u_0 + nr$, et donc $u_{1003} = 5 + (-2) \times 1003 = -2001$.

Réciproquement, si u est une suite définie par $u_n = an + b$ pour tout entier naturel n, cette suite est-elle une suite arithmétique ?
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = an + a + b - an - b = a$.
La différence entre u_{n+1} et u_n étant constante, la suite u est arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

Théorème: Si u est une suite telle que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = an + b$, a et b étant deux réels donnés, alors u est la suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

Remarque: Dire qu'une suite u est arithmétique signifie que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine.

On souhaite établir une relation entre deux termes d'indices quelconques.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Soit p et m deux entiers, $u_m = u_0 + mr$
$u_p = u_0 + pr$
d'où $u_m - u_p = u_0 + mr - (u_0 + pr) = (m - p)r$.

Théorème: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors, quels que soient les entiers naturels m et p, $u_m - u_p = (m - p)r$.

d. Somme de termes consécutifs.

i. Nombre de termes.
Le nombre de termes de la somme $S = u_m + u_{m+1} + .. + u_p$ est $p - m + 1$.
Exemple:
Il y a 6 termes dans la somme $u_0 + u_1 + .. + u_5$.
Il y a 19 termes dans la somme $u_2 + \ldots + u_{19}$

ii. Somme des n premiers entiers naturels.

Calculons la somme des n premiers entiers naturels non nuls. $S=1+2+..+n$.
Nous allons calculer $2S$.
$S=1+2+..+n-1+n$
$S=n+n-1+..+2+1$
d'où $2S=n+1+n+1+..+n+1+n+1$
d'où $2S=n(n+1)$.
Donc, $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété: La somme des entiers de 1 à n, notée $\sum_{k=1}^{n} k$, est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

iii. Cas général.

Calculons la somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Les termes s'écrivent $u_0, u_0+r, .., u_0+(n-1)r$.
Donc $S=u_0+u_0+r+u_0+2r+..+u_0+(n-1)r$

$$
\begin{aligned}
&= nu_0+r(1+2+..+n-1)\\
&= nu_0+r(2+..+n)\\
&= nu_0+(1+2+..+n-1)\\
&= nu_0+r\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\\
&= n\left(u_0+\frac{r(n-1)}{2}\right)\\
&= n\left(\frac{2u_0+(n-1)r}{2}\right)\\
&= n\frac{u_0+u_0+(n-1)r}{2}\\
&= n\frac{u_0+u_{n-1}}{2}.
\end{aligned}
$$

Théorème: Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
La somme des n premiers termes de la suite u est:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k=n\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$$

Exemple: Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=-3$ et de raison 3,5.
Nous souhaitons déterminer la somme des vingt premiers termes de cette suite.

$S=\sum_{k=0}^{19} u_k=u_0+..+u_{19}=20\times\dfrac{u_0+u_{19}}{2}$.

$u_{19}=-3+3{,}5\times 19=63{,}5$

d'où $S=20\times\dfrac{-3+63{,}5}{2}=605$.

Remarque: Si on ne part pas de u_0, mais de u_p, on a la formule suivante:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k=(n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$$

On peut donc résumer les choses de la façon suivante:

$$u_p+..+u_n=nombre\ de\ termes\times\frac{premier\ terme+dernier\ terme}{2}.$$

II. Suites géométriques.

a. Exemple.

La matière vivante retient dans ses tissus du carbone 14. Après la mort, le carbone 14 radioactif se désintègre à raison de 12 pour 1000 tous les 100 ans. C'est en mesurant cette désintégration que les archéologues procèdent à des datations.
Un échantillon de matière contient 5000 milligrammes de carbone 14.
On note u_n la quantité (en milligrammes) de carbone 14 contenue dans l'échantillon aprés $100\times n$ années.

a. Calculer u_1, u_2, u_3.
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c. Combien l'échantillon contiendra-t-il de carbone 14 dans 1000 ans?

a. $u_1=5000\times\left(1-\frac{12}{1000}\right)=5000\times 0{,}988=4940$.

$u_2=4940\times\left(1-\frac{12}{1000}\right)=4940\times 0{,}988=4880{,}72$

$u_3=4880{,}72\times\left(1-\frac{12}{1000}\right)=4880{,}72\times 0{,}988=4822{,}15$.

b. D'une année sur l'autre, la quantité de carbone 14 diminue de 12 pour 1000, il faut donc de multiplier par $1-\frac{12}{1000}=0{,}988$.
Donc $u_{n+1}=u_n\times 0{,}988$.
c. Pour savoir combien l'échantillon contiendra de carbone 14 dans 1000 ans, il faudra déterminer u_{10}.
En 100×n années, il faut multiplier n fois par 0,988 la quantité de carbone 14.
On obtient donc la formule suivante: $u_n=5000\times 0{,}988^n$.
D'où, $u_{10}=5000\times 0{,}988^{10}=4431{,}38$.
Au bout de 1000 ans, il reste 4431,38 milligrammes de carbone 14 dans notre échantillon

b. Définition.

Définition: Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que: pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n\times q$.
Le réel q est appelé la raison de la suite (u_n).

Autrement dit: dire que la suite (u_n) est géométrique signifie que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant par le même nombre q.

Exemple: Soit u la suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=6$.

$u_1=\frac{1}{3}\times 6=\frac{6}{3}=2$
$u_2=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$
$u_3=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

c. Exprimer u_n en fonction de n .

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
$u_1=u_0\times q$
$u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$
….
$u_p=u_{p-1}\times q=u_0\times q^{p-1}\times q=u_0\times q^p$.
Donc, pour tout entier n , $u_n=u_0\times q^n$.

Théorème: Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Alors, pour tout entier naturel n , $u_n=u_0\times q^n$.

Exemple: (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{32}$ et de raison $q=2$.

On a pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{1}{32}\times 2^n$.

Donc $u_{10}=\frac{1}{32}\times 2^{10}=32$.

Réciproquement: si u est une suite définie par $u_n=ab^n$ pour tout entier naturel n , avec a et b deux réels donnés, cette suite est-elle une suite géométrique ?
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=ab^{n+1}$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{ab^{n+1}}{ab^n}=b$.
Donc la suite u est géométrique de raison b et de premier terme $u_0=a$.

Théorème: Si u est une suite telle que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n=ab^n$, a et b étant deux réels donnés, alors u est la suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0=a$.

On souhaite établir une relation entre deux termes d'indices quelconques.
Soit p et m deux entiers, $u_m=u_0\times q^m$
$u_p=u_0\times q^p$.
D'où $\frac{u_m}{u_p}=\frac{u_0q^m}{u_0q^p}=q^{m-p}$.

Théorème: Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 0$, alors quelques soient les entiers naturels m et p , $u_m=q^{m-p}u_p$.

d. Somme de termes consécutifs.

i. Cas particulier.

Calculons la somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q\,(q\neq 1)$.

$S=1+q+\ldots+q^{n-1}$

$qS=q+q^2+..+q^n$

Donc, $S-qS=(1+q+..+q^{n-1})-(q+q^2+..+q^n)=1-q^n$.

$S(1-q)=1-q^n$

Puisque $q\neq 1$, alors $1-q\neq 0$, donc $S=\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Propriété: Pour tout réel q différent de 1, $1+q+..+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

ii. Cas général.

Calculons la somme S de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q, $q\neq 1$. Les autres termes s'écrivent aq, aq^2, .., aq^{n-1}.

D'où, $S=a+aq+aq^2+..+aq^{n-1}=a(1+q+..+q^{n-1})=a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Théorème: La somme de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q $(q\neq 1)$ est égale à $a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Exemple: Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=-3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

La somme des douze premiers termes est: $\displaystyle\sum_{k=0}^{11} u_k=-3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{12285}{2048}$.

Remarques:

- Si on ne part pas de u_0 mais de u_p, on a la formule suivante:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k=u_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

- Si $q=1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} aq^k=a(1+q+\ldots+q^{n-1})=a(1+1+..+1)=an$.