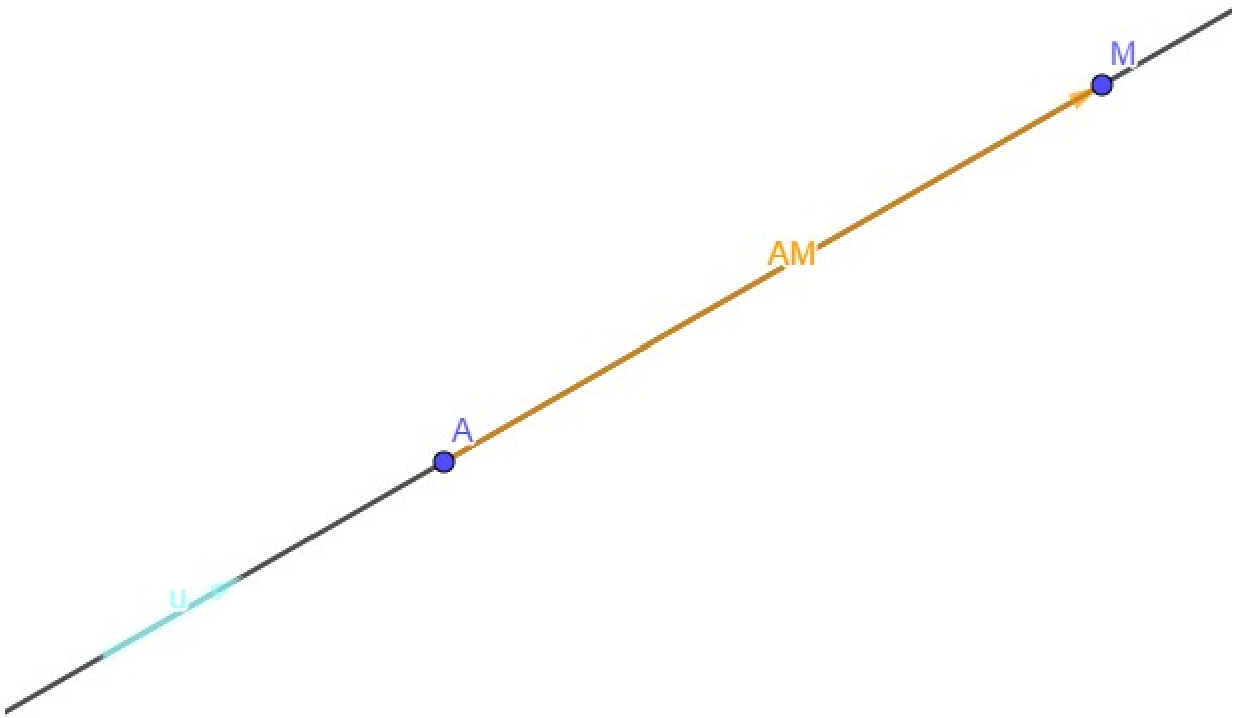
Géométrie repérée :
Application du produit scalaire.

I. Équation cartésienne de droite (rappel de seconde).

a. Vecteur directeur d'une droite.

Propriété-définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point.
L'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite passant par A. Le vecteur $\vec{u}$ est appelé un vecteur directeur de cette droite.



Propriétés :
Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

- les vecteurs directeurs de d sont tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.
- les droites d et d' sont parallèles si seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b. Équation cartésienne de droite.

Propriété-définition :
Soient a, b et c trois réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
L'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
L'équation $ax+by+c=0$ est appelée une équation cartésienne de la droite d.

Exemple :
Soit la droite d d'équation $3x+2y+7=0$. Déterminer un vecteur directeur de cette droite.

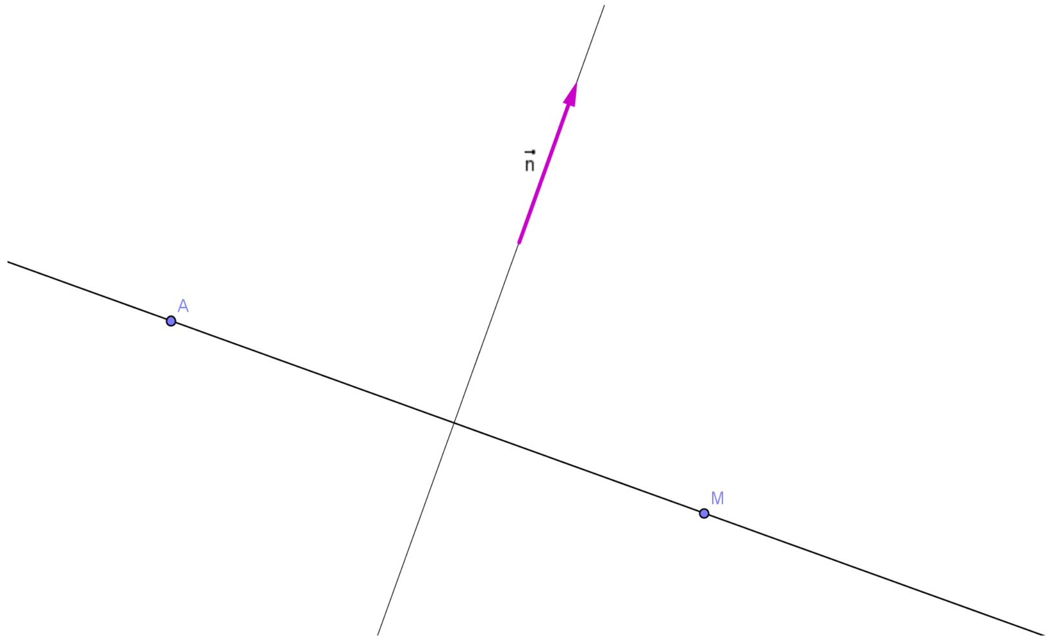
Propriété : Soient a et b deux réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
Toute droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$

Exemple :
Soit d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ et passant par le point A(-1;2).
Déterminer une équation cartésienne de la droite d .

II. Application du produit scalaire aux équations de droites.

a. Vecteur normal.

Définition: Dire qu'une vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite d signifie que $\vec{n}\neq 0$ et que la direction de $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de d.



Ainsi, un vecteur normal à d est orthogonal à tout vecteur directeur $\overrightarrow{AM}$ de d.

Exemple : Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

a. le vecteur $\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ est-il normal à la droite d ?

b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n_2}$ orthogonal à la droite d.

b. Équation de droites.

Soit d une droite passant par $A(x_0;y_0)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. On veut déterminer une équation de d.

Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tel que $ax+by+c=0$ avec a et b non simultanément nuls.

Propriétés: Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1) **Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $c \in \mathbb{R}$ Une telle équation est appelée équation cartésienne de la droite.**
2) **Un ensemble d'équation $ax+by+c=0$ (avec a et b non simultanément nuls) est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.**

Application: Dans un repère orthonormal, on a les points A(3;-1) et B(2;4).
Déterminer une équation de la médiatrice d du segment [AB].

Remarque:d admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, il suffit de multiplier par un réel.
On peut donc dire que d admet pour équation cartésienne $-2x+10y-10=0$ (multiplier par 2), ou $x-5y+5=0$ (multiplier par -1) …..

c. Droites perpendiculaires.

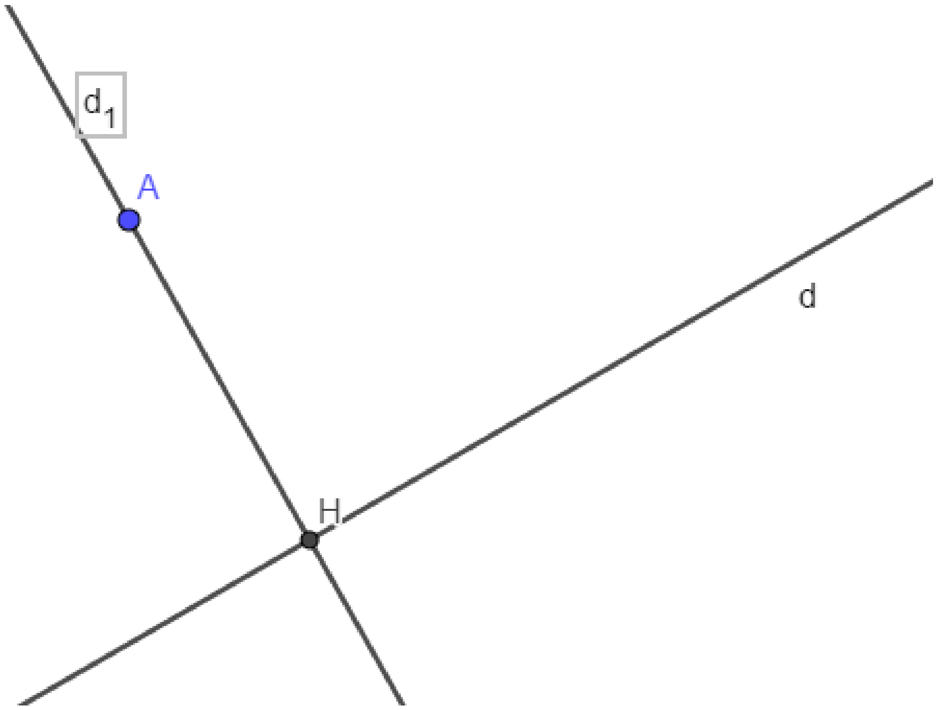
Propriété: Dans un repère orthonormal, soit les droites d et d' d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$.

Démonstration:
Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ les vecteurs normaux de d et d'.
d et d' sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.
Or $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{n'}$ =0, c'est à dire si et seulement si $aa'+bb'=0$.

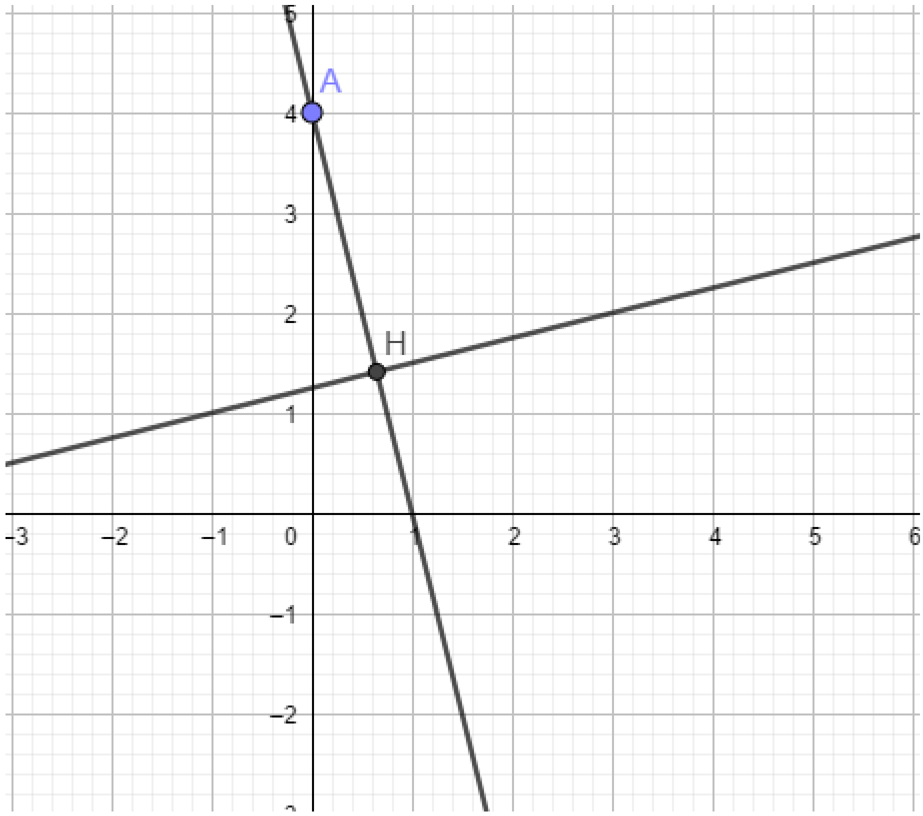
Exemple: Dans un repère orthonormal, soit d et d' les droites d'équations respectives $3x+2y-1=0$ et $6x-9y+5=0$. d et d' sont-elles parallèles.

d. Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Nous avons vu dans le chapitre sur le produit scalaire ce qu'était le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
Soit d une droite et A un point n'appartenant pas à cette droite.
Nous pouvons tracer une unique droite d_1 passant par A et perpendiculaire à la droite d.
Soit H le point d'intersection de d et $d_{1.}$. H est le projeté orthogonal de A sur la droite d.



Exemple : Soit la droite d d'équation $x-4y+5=0$, soit A(0;4) un point.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d .



III. Application du produit scalaire aux équations de cercle.

a. Caractérisation du cercle de diamètre [AB].

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB].
Le cercle de diamètre [AB], privé de A et de B, est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M, c'est à dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ =0, avec $\overrightarrow{MA}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{MB}\neq 0$.
De plus, si M=A ou si M=B, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ =0.

Théorème: Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ =0.

b. Dans un repère orthonormal.

i. avec le centre et le rayon.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R.
Plaçons nous dans un repère orthonormal.
Notons $A(x_A;y_A)$.
$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tel que AM=R
<=> AM²=R².
$M(x;y)\in\mathcal{C}$ <=> AM²=R²
<=> $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$

Propriété: Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.
On dit que $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$ est une équation du cercle $\mathcal{C}$.

Exemples:

1) Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation $(x-3)^2+(y-1)^2=4$.
   Quelle est la nature de cet ensemble ? En donner les caractéristiques.

2) Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre A(-2;3) et de rayon 5.
   Donner l'équation de ce cercle.

   .

ii. Avec le diamètre.

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].
$M(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}$
<=> $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
<=> $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$
<=> $x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_A x_B+y_A y_B=0$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
Remarque: Tout cercle a une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement celle d'un cercle.

Exemples:

1) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble d'équation $x^2+y^2-2x+4y+12=0$
   Quelle est la nature de cet ensemble ? En donner les caractéristiques.

2) Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble d'équation $x^2+y^2-6x+10y+25=0$.
   Quelle est la nature de cet ensemble ? En donner les caractéristiques.