Exercices : suites généralités.

Exercice 1 : Pour chacune des suites (u_n) définies sur ℕ calculer u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_{10} .

a. $u_n=4n+5$ b. $u_n=n^2$ c. $u_n=(-2)^n$ d. $u_n=\dfrac{n-1}{n+2}$

e. $u_n=\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ f. $u_n=2+(-1)^n$

Exercice 2 :

1. Soit la suite (v_n) définie sur ℕ* par $v_n=\dfrac{1}{n}$. Représenter graphiquement dans le plan les 10 premiers termes de la suite.
2. Représenter sur le même graphique les 10 premiers termes de la suite (w_n) définie par $w_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n\geqslant 1$.

Exercice 3 :

1. Afficher sur votre calculatrice la liste des 20 premiers termes de la suite u définie sur ℕ par $u_n=\dfrac{2n}{n+1}$ et les représenter graphiquement.
2. Comparer ces termes à 2.
3. Démontrer que pour tout $n\geqslant 0$, $u_n\leqslant 2$.

Exercice 4 : Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n pour tout $n\geqslant 0$:

a. $u_n=4n+2$ b. $u_n=n^2+4n$ c. $u_n=(-1)^n$ d. $u_n=2^{n-1}$

Exercice 5 : Soit (v_n) la suite définie sur ℕ par $v_n=n^2+2n$.
Exprimer v_{n+1} , v_{2n} et v_{n+4} en fonction de n .

Exercice 6 : Pour chacune des suites (u_n) définies sur ℕ calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .

a. $u_0=2$ et pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=4u_n-2$.

b. $u_0=0$ et pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n^2+\dfrac{3}{n+1}$.

c. $u_0=-1$ et pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=4u_{n-1}+2n$.

d. $u_0=3$ et pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=2u_{n-1}-3$.

Exercice 7 : La suite (u_n) est définie pour tout $n\geqslant 1$ par $u_n=1+\dfrac{10}{n}$.

1. En étudiant le signe de $u_{,+1}-u_n$, montrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 1$.
2. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)=1+\dfrac{10}{x}$.

Exercice 8 : Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-\dfrac{15}{2}$.

En étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$, déterminer les variations de (u_n) .

Exercice 9 : Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) , définie par :

a. $u_0=0$ et pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n+2n+3$.

b. $u_1=3$ et pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=u_n-n+1$.

Exercice 10 : La suite (u_n) est définie pour tout $n\geqslant 0$ par $u_n=\dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ à partir d'un certain rang à préciser.
3. En déduire les variations de (u_n) .

Exercice 11 : La suite (u_n) est définie par $u_0=1$ et pour tout n∈ℕ $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{n+1}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ à partir d'un certain rang à préciser.
3. En déduire les variations de (u_n) .

Exercice 12 : Donner le sens de variation des suites :

a. $(0{,}8^n)_{n\geqslant 0}$ b. $(1{,}2^n)_{n\geqslant 0}$ c. $(2^n)_{n\geqslant 0}$ d. $\left(\dfrac{1}{3^n}\right)_{n\geqslant 0}$

Exercice 13 : Dans chaque cas, déterminer si la suite converge en précisant sa limite éventuelle.

a. La suite (u_n) est définie sur ℕ par $u_n=1+\dfrac{1}{n+1}$.

b. La suite (v_n) est définie sur ℕ par $v_n=(-1)^n\times n$.

c. La suite (w_n) est définie sur ℕ par $w_n=n-\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 14 : Dans un disque de rayon 1, on trace un premier secteur qui est un demi-disque. Le deuxième secteur est la moitié du premier, le troisième secteur est la moitié du deuxième, etc.

1. Quelle portion du disque représente :
   a. L'aire du n-ième disque ?
   b. L'aire totale des n premiers secteurs ?
2. Combien de secteurs faut-il tracer pour recouvrir au moins 90% du disque ? 95% ? 99% ?
3. Quelles limites conjecture-t-on pour la suite des aires des secteurs ? Des aires totales des secteurs ?

Exercice 15 : Un nénuphar géant couvre 10m² d'un étang et croît de 8% chaque jour. On désigne par a_n l'aire de ce nénuphar n jours plus tard.
Exprimer a_n en fonction de n et déterminer au bout de combien de temps le nénuphar recouvrera-t-il l'étang si celui-ci a une superficie de 1000m² ; de 10000m² ; de 100000m².

Exercice 16 :

1. On lance trois dés bien équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir 421 ?
2. On répète n fois ce lancer ($n \in \mathbb{N}^*$).
   a. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois 421 ?
   b. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0{,}99$?

Exercice 17: Soit u_0 =-1 et $u_{n+1}=u_n+n+1$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. a. Calculer ses cinq premiers termes.
   b. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_{n+1}-u_n$.
   a. Calculer les 4 premiers termes de (v_n) .
   b. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. a. Calculer $v_0+v_1+..+v_{n-1}$ en fonction de n .
   b. Exprimer $v_0+v_1+..+v_{n-1}$ en fonction de u_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 18: On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et v_1 , v_2 .
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n=v_n-u_n$.
   a. Monter que (d_n) est une suite géométrique.
   b. Donner l'expression de d_n en fonction de n .
3. Soit $s_n=u_n+v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   a. Calculer s_0 , s_1 et s_2 .
   b. Montrer que $s_{n+1}=s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire u_n et v_n en fonction de n .
5. Déterminer $U_n=u_0+u_1+..+u_n$ et $V_n=v_0+v_1+..+v_n$.

Exercice 19: On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout n>0, $u_n=n-u_{n-1}$.

1. a. Faire afficher sur une calculatrice la liste des 30 premiers termes de cette suite et les représenter graphiquement.
   b. Que constate-t-on ?
   c. Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 0$ (on distinguera deux cas).
2. On note, pour tout $n \geqslant 0$, $v_n=u_{2n}$.
   a. Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
   b. Quelle semble être la nature de la suite (v_n) ? Le démontrer.
   c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
3. Démontrer les conjectures émises en 1c.

Exercice 20 : De nombreux produits radioactifs sont utilisés en médecine.

1. L'iode 131
   On étudie l'évolution au cours du temps d'une population de noyaux d'iode 131 comportant $u_0=10^7$ noyaux à $t=0$ (début de l'observation). On note u_n le nombre d'atomes au bout de n jours. Statistiquement le nombre de noyaux diminue chaque jour d'environ 8,3%.
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n) .
   b. Quel est son sens de variation ?
   c. Au bout de combien de jours la population de noyaux a-t-elle diminué de moitié (au moins) ? Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.
2. Un algorithme.
   On utilise aussi d'autres éléments radioactifs en médecine. On suppose qu'ils se désintègrent en moyenne de t chaque jour.
   a. Écrire un algorithme qui demande la valeur de t et affiche la demi vie de l'élément radioactif.
   b. Le programmer et donner la demi-vie de :
   - l'iridium 192 pour lequel t%=0,933%.
   - le cobalt 60 pour lequel t%=0,036%.

Exercice 21: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ et la suite (u_n) définie par $u_0=-5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses et conjecturer le comportement de la suite (u_n) .
2. Déterminer le réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$.
3. Soit $v_n=u_n-\alpha$ pour tout n .
   a. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
   b. En déduire v_n puis u_n en fonction de n .
   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .