Dérivation:
nombre dérivé, fonction dérivée.

I. Le nombre dérivé.

1. Définition.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a.

La fonction f est dérivable en a si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel l quand h tend vers 0. Il est alors appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

Notation:

Pour traduire que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0, on note

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple: La distance parcourue par un point mobile M à l'instant t ($t\geq 0$) est $d(t)=t^2$ où t est exprimée en seconde et $d(t)$ en mètre.

Nous allons calculer $d'(3)$.

$$\frac{d(3+h)-d(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(3+h)-d(3)}{h}=\lim_{h\to 0}6+h=6.$$

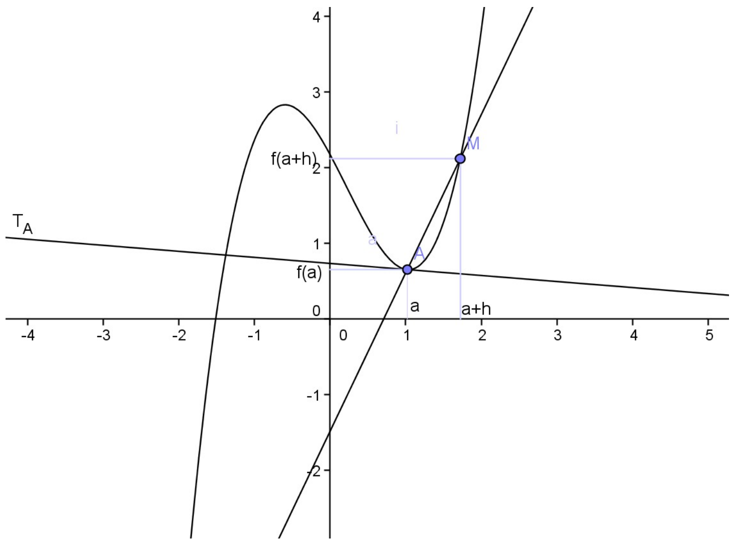
Donc $d'(3)=6$.

$d'(3)$ représente la vitesse instantanée du point mobile à la troisième seconde.

2. Tangente à une courbe.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et les points A et M de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et $a+h$.

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente alors le coefficient directeur de la droite (AM).



Dire que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le coefficient directeur de la droite (AM) tend vers $f'(a)$.
Autrement dit, quand M tend vers A sur la courbe, les droites (AM) tendent vers une position limite: celle de la droite T_A passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Définition: Soit f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. La droite passant par $A(a;f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Déterminons une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a;f(a))$.
Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $A(a;f(a))$.
T_A étant une droite, elle a une équation du type $y=mx+p$.
D'après la définition, on sait que $m=f'(a)$.
On sait que A appartient à T_A, on a donc:
$f(a) = f'(a)\times a + p$. Par conséquent, $p=f(a)-f'(a)a$.
Par suite, on a $y=f'(a)x+f(a)-f'(a)\times a$.
Donc T_A a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
Nous avons déterminé à l'exemple vu dans le I.1 que $f'(3) = 6$.
On a de plus $f(3)$ =9.
D'où la tangente a pour équation: $y=6(x-3)+9 = 6x-18+9=6x-9$.
d'où la tangente a pour équation: $y=6x-9$.

II. Fonction dérivée.

a. Définition.

Définition: Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles. On dit qu'une fonction f est dérivable sur D si elle est dérivable en tout réel a de D.
Dans ce cas, la fonction qui à tout a de D associe le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a est appelé fonction dérivée de f.
On la note: f' : D $\rightarrow \mathbb{R}$

$$a \mapsto f'(a)$$

b. dérivées des fonctions usuelles.

- Fonctions constantes.
  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)= k$, où k est un réel.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)$ =0.

  Justification: Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, et pour tout h non nul,
  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h}=0$.
  donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0} 0=0$.
  Par suite, pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(a)=0$.

- Fonction affines.

  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=mx+p$.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$et pour tout réel x , $f'(x)=m$.

  Justification: Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, et pour tout h non nul,
  $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)-ma}{h}=\frac{mh}{h}=m .$$
  donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0} m=m$.
  Par suite, pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(a)=m$.

  Conséquence: La dérivée de f: $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$par $f'(x)=1$.

- Fonctions puissances.
  Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=x^n$
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$et pour tout réel x , $f'(x)=nx^{n-1}$.

  Cette propriété sera admise.
  Exemples:
  - soit f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$.
  - soit f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$.

- Fonction inverse.
  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$
  f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

  Justification: Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}^*$, h appartenant à $\mathbb{R}^*$ avec $a+h\neq 0$,
  $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{h(a+h)a} = \frac{-1}{a(a+h)} .$$
  $\lim_{h\to 0} a+h=a$ d'où $\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=\frac{-1}{a^2}$.
  Par conséquent, $f'(a)=\frac{-1}{a^2}$.

- Fonction racine carrée
  Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
  f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

  Justification: Pour a un réel positif ou nul, h un réel non nul tel que $a+h\geqslant 0$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Or $\lim_{h\to 0}\sqrt{a+h}=\sqrt{a}$, d'où $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Par suite, $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ avec $a\neq 0$.

Attention, la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais pas sa dérivée.

III. Opérations sur les fonctions dérivables.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles.

a. somme de fonctions.

Propriété: Soit u et v deux fonctions dérivables sur D.
Alors $u+v$ est dérivable sur D et $(u+v)' = u'+v'$.

Preuve: Soit a appartenant à D, $h\neq 0$,
$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}.$$
Or, $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$.
Donc, pour tout a appartenant à D, $(u+v)'(a) = u'(a)+v'(a)$.

Exemple: donner les dérivées des fonctions f et g suivantes:
$f(x)=x^3-5x+1$ et $g(x)=x^2+\sqrt{x}$.
b. Produit de fonctions.

Propriété: soit u et v deux fonctions dérivables sur D.
Alors $u+v$ est dérivable sur D et $(uv)'=u'v+uv'$.
En particulier, si λ est un réel, $(\lambda v)'=\lambda v'$.

Preuve: Soit a appartenant à D, $h\neq 0$.
$$\frac{uv(a+h)-uv(a)}{h}=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a).$$

Or $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$.
On admettra de plus que $\lim_{h\to 0}v(a+h)=v(a)$.
On obtient donc $(uv)'(a) = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ pour tout a appartenant à D.
Soit en particulier, $(\lambda u(a))'=\lambda u'(a)+0\times u(a)=\lambda u'(a)$.

Conséquence: toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exemples: Donner les dérivées des fonctions f et g définies par:
$f(x)=\frac{3}{x}$ et $g(x)=3x^5-7x^2+3$.

c. Inverse d'une fonction.

Propriété: Soit v une fonction dérivable sur D, et tel que pour tout réel a de D, $v(a)\neq 0$.
Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.

Preuve: Soit a appartenant à D, h appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $v(a+h)\neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}=\frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}=\frac{v(a)-v(a+h)}{h}.\frac{1}{v(a)v(a+h)}$$

Or $\lim_{h\to 0}\frac{v(a)-v(a+h)}{h}=-v'(a)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(a+h)v(a)}=\frac{1}{v^2(a)}$.

Par suite, $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}=-\frac{v'(a)}{v^2(a)}$.

Donc $\frac{1}{v}$ est dérivable sur D avec $\left(\frac{1}{v}(x)\right)'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

Exemple: Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{2x-5}$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\left\{\frac{5}{2}\right\}$.
Notons u la fonction définie sur $\mathbb{R}\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $u(x)=2x-5$.
On a $u'(x)=2$.
Par suite, pour x appartenant à $\mathbb{R}\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $f'(x)=-\frac{2}{(2x-5)^2}$.

d. Quotient de fonctions.

Propriété: Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et telles que pour tout réel a de D, $v(a)\neq 0$. Alors, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Preuve: On peut écrire $\frac{u}{v}=u\times\frac{1}{v}$.
En appliquant les deux propriétés précédentes, on obtient:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\times\frac{1}{v}\right)'=u'\times\frac{1}{v}+u\times\left(\frac{1}{v}\right)'=u'\times\frac{1}{v}+u\times\frac{-v'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$.

Exemple: Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2-1}$.

f est définie et dérivable sur ℝ{-1; 1}.
Notons u et v les fonctions définies sur ℝ{-1; 1} par $u(x)=4x$ et $v(x)=x^2-1$. On a $u'(x)=4$ et $v'(x)=2x$.
On a alors pour tout x appartenant à ℝ{-1; 1},
$f'(x)=\frac{4(x^2-1)-4x\times 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^2-4-8x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2}$.

e. Dérivée de x |-> $g(ax+b)$.

On admettra le théorème suivant :
Théorème : a et b désignent deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel x tel que $ax+b$ ∈I, la fonction f : x |-> $g(ax+b)$ est dérivable en x et $f'(x)=a\times g(ax+b)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=(-7x+10)^{14}$.
f est dérivable sur ℝ
Soit g la fonction définie sur ℝpar $g(x)=x^{14}$, g est dérivable et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=14x^{13}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(-7x+10)$.
f est dérivable et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-7\times 14(-7x+10)^{13}=-98(-7x+10)^{13}$.