Exercices : Variable aléatoire.

Exercice 1:Un joueur tire au hasard une boule dans une urne contenant 1 boule verte, 2 boules bleues et trois boules rouges.

1. Déterminer la probabilité des événements :
   a.V : »tirer une boule verte ».
   b. B : « tirer une boule bleue ».
   c. R : »tirer une boule rouge ».
2. La boule verte rapporte 5€, la boule bleue rapporte 2€ et la boule rouge fait perdre 3€.
   On note G le gain algébrique du joueur.
   a. Quelles valeurs G peut-il prendre ?
   b. Quel est l'événement (G=5) ?
   Déterminer sa probabilité.
   c. Donner la loi de probabilité de G.

Exercice 2:On s'intéresse aux familles de trois enfants.
On prend au hasard une des ces familles et on note le sexe de chaque enfant dans l'ordre décroissant des âges. Ainsi FFG désignera l'issue : « les deux premiers enfants sont des filles et le dernier, un garçon ».

1. a. Écrire toutes les issues possibles.
   b. On choisit la loi répartie sur l'ensemble de ces issues. Quelle est la probabilité d'obtenir FFG ?
2. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de filles dans la famille.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. De quelles issues est constitué l'événement (X=1) ?
   c. Déterminer P(X=1).
   d. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3 : On lance deux dés tétraédriques supposés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Une issue est par exemple R1V4 si la face cachée du dé rouge est celle du 1 et la face cachée du dé vert est celle du 4.

1. a. Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
   b. Quelle loi de probabilité peut-on choisir sur l'ensemble de ces issues ?
2. Soit S la variable aléatoire associant à chaque issue la somme des deux nombres figurant sur les faces cachées.
   a. De quelles issues est constitué l'événement (S=4) ?
   b. Déterminer la probabilité de l'événement (S=4).
   c. Déterminer la loi de probabilité de S.

Exercice 4 : Dans une classe de 1ereS de 32 élèves, 12 élèves suivent l'option latin et 5 élèves l'option musique. On sait de plus que 3 élèves suivent les deux options.
On choisit un élève au hasard et on définit la variable aléatoire X qui associe à ce choix le nombre d'options suivies par l'élève.
a. Déterminer le nombre d'élèves qui suivent exactement une option.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 5 : La loi de probabilité d'une variable aléatoire est donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

1. On note $(X\leqslant 3)$ l'événement : (X=2) ou (X=3).
   Déterminer $P(X\leqslant 3)$.
2. Déterminer $P(X>5)$, $P(X\geqslant 5)$ et $P(X<5)$.

Exercice 6 :
X est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble {-3;1;2}.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-3	1	2
$P(X=x_i)$	0,25	0,3	

1. Déterminer la valeur manquante du tableau.
2. Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

Exercice 7 :
Yann propose un jeu de dés, où pour une mise de 4€, le joueur lance un dé cubique supposé équilibré et gagne autant d'euros que le nombre figurant sur la face supérieure du dé comporte de lettres dans son écriture en français.
Zoé propose le même jeu, mais avec l'écriture en anglais du nombre.
Soient Y et Z les variable aléatoires donnant les gains d'un joueur respectivement au jeu de Yann et au jeu de Zoé (en tenant compte de la mise).

1. Déterminer les lois de probabilités de Y et de Z.
2. Calculer l'espérance de Y et de Z.
   Quel jeu conseillerez vous de préférence à un joueur ?

Exercice 8:Dans un QCM, chaque question comporte quatre propositions de réponse dont une seule est correcte.
Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse enlève un demi-point.
Un élève répond au hasard à une question.
Soit X la variable donnant le nombre de points obtenus.

1. Déterminer le nombre de points que l'élève peut obtenir.
2. Combien de points une mauvaise réponse devrait-elle enlever pour qu'une réponse donnée au hasard ait une espérance de zéro point ?

Exercice 9 : On lance un dé dodécaédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 12. Si la face obtenue est paire, le joueur gagne 1 point. Si la face obtenue est un multiple de 3, le joueur gagne trois points. Si la face obtenue est supérieure ou égale à 10, le joueur gagne 4 points. Sinon, le joueur perd 5 points.
Ces gains sont cumulables si la face obtenue réalise plusieurs de ces conditions.
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe à un lancer le gain obtenu.
b. Déterminer E(X). Ce jeu est-il équitable ?
c. Quel montant devrait-on réclamer pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 10 : Une année non bissextile, on choisit un mois de l'année au hasard et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre d'heures écoulées pendant ce mois.
On considère la variable aléatoire $Y=\frac{X}{24}-30$.
a. Quelles données la variable aléatoire Y décrit-elle ?
b. Déterminer la loi de probabilité de Y.
c. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y.
d. En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de X, et interpréter ces résultats.

Exercice 11 : En 2012, dans une population, on choisit une personne au hasard et on considère la variable aléatoire X donnant son année de naissance.
Dans la population choisie, E(X)=1977 et $\sigma(X)=18$.
On considère la variable aléatoire Y donnant l'âge de la personne choisie.
a. Définir Y en fonction de X.
b. En déduire l'espérance et l'écart-type de Y.

Exercice 12: Pour se rendez au travail, Camille prend le bus. Le trajet comporte quatre arrêts.
On note S le nombre de fois où le bus s'est effectivement arrêté lors du trajet. Une étude statistique a permis d'établir la loi de probabilité de S.

x_i	0	1	2	3	4
$P(S=x_i)$	0,05	0,15	0,3	0,35	0,15

1. Calculer E(S) et interpréter le résultat.
2. Le trajet direct dure 20 minutes et chaque arrêt rallonge de trois minutes la durée du voyage.
   Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet.
   a. Quelle relation lie S et T ?
   b. En déduire, sur un très grand nombre de jours, le temps de trajet moyen mis par Camille pour se rendre au travail.

Exercice 13:Le jeu de la roulette au casino a été inventé au XVIIe siécle en Italie. Il consiste à faire tourner une bille sur un plateau tournant comportant des cases numérotées de 0 à 36 et alternativement colorées. Le 0 est vert. Les autres cases sont alternativement rouges et noires. On lance la bille dans le sens inverse du plateau de la roulette. La bille indique le numéro gagnant.
Le joueur peut utiliser plusieurs stratégies de jeu.
Stratégie 1 :
Xavier mise 1€ sur « ROUGE » : si un numéro rouge sort,, il gagne 1€ et récupère sa mise ; sinon, il perd sa mise.
Stratégie 2 :
Yoann mise 1e sur le numéro 7 : si le numéro 7 sort, il gagne 35€ et récupère sa mise ; sinon il perd sa mise.
Les gains algébriques réalisés par Xavier définissent deux variables aléatoires notées respectivement X et Y.

1. Comparer les espérances de gain de Xavier et Yoann.
2. Calculer les écarts types de X et Y. Les comparer et interpréter ces résultats.

Exercice 14 : Un objet est produit en série dans une entreprise, au coût de 950 euros. A l'issue de la fabrication, il peut présenter deux types de défauts, notés A et B.
La garantie permet de faire des réparations aux frais de l'entreprise, selon le barème suivant :
100 euros pour le défaut A ; 150 euros pour le défaut B ; 250 euros pour les deux défauts simultanés.
On admet que sur l'ensemble de la production, 90% des objets ne présentent aucun défaut, 4% présentent le seul défaut A et 2% présentent le seul défaut B.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe son prix net, c'est à dire son coût de production augmenté éventuellement du coût de la réparation.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Que représente E(X) pour l'entreprise ?

3. L'entreprise veut faire un bénéfice moyen de 100€ par objet. Quel doit être le prix de vente d'un objet pour réaliser cet objectif ?

Exercice 15:Parmi les stands de jeux d'une fête de village, les organisateurs ont installé une machine qui lance automatiquement une bille d'acier lorsque le joueur actionne un bouton.
Cette bille roule sur un plan comportant une cible circulaire évidée en son centre.
Lorsque la bille atteint la cible, soit elle est avalée, soit elle reste sur la cible.
Lorsque la bille n'atteint pas la cible, elle revient à son point de départ.
On note :

- C l'événement : « la cible est atteinte ».
- B l'événement : « la bille est avalée ».

Une étude préliminaire a démontré que :

- la probabilité d'atteindre la cible lors d'un lancer est égale à 0,3 ;
- lorsque la cible a été atteinte, la probabilité que la bille soit avalée est égale à 0,2.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. On actionne le bouton.
   a. Quelle est la probabilité que la bille soit avalée.
   b. Quelle est la probabilité que la bille reste sur la cible.
3. Pour jouer, on paie 0,60€ et on actionne la bouton qui lance la bille :
   - si la bille est avalée, on gagne un lot d'une valeur de g€.
   - si la bille reste sur la cible sans être avalée, on est remboursé,
   - si la bille rate la cible, on perd la mise.
   Soit G la variable aléatoire qui donne le gain, éventuellement négatif, d'un joueur. Déterminer la loi de probabilité de G.
4. a. Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{G})=0{,}06\,g-0{,}384$
   b. On prévoit qu'un grand nombre de parties seront jouées. Pour quelles valeurs de g les organisateurs peuvent-ils espérer un bénéfice ?