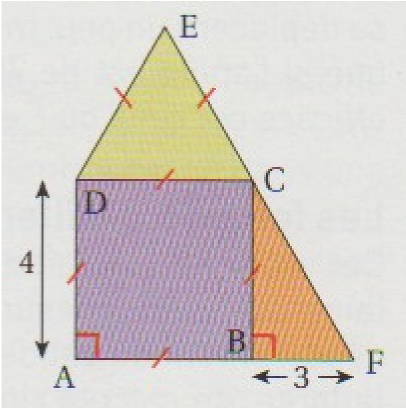
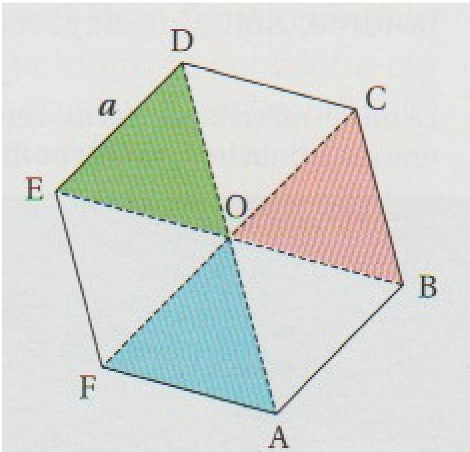
Le produit scalaire: exercices.

Exercice 1:
On considère la figure ci-dessous.



Calculer les produits scalaires.
a. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE}$ b. $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FA}$ c. $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BF}$ d. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{FB}$

Exercice 2:
On considère l'hexagone ci-dessous.



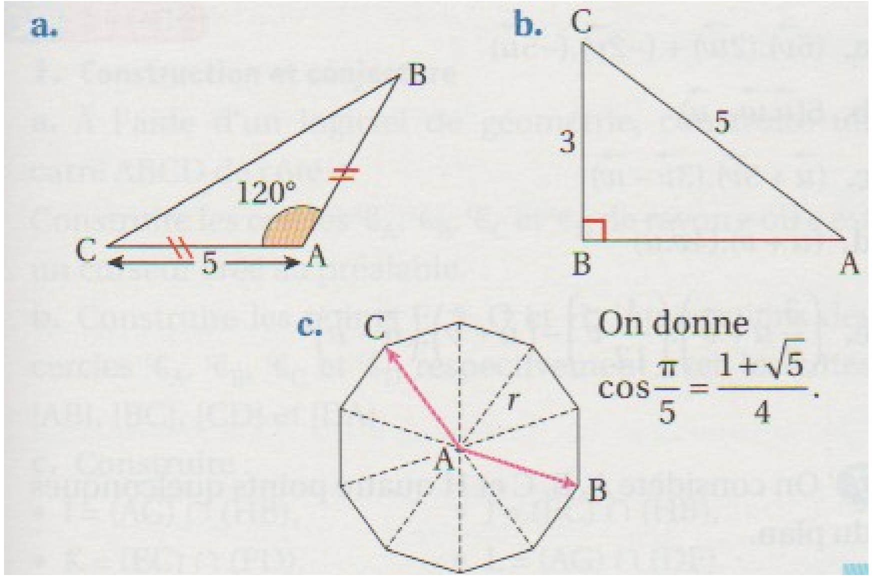
Exprimer les produits scalaires en fonction de a .
a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ b. $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BO}$ c. $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{ED}$ d. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{FC}$ e. $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{FC}$ f. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AO}$

Exercice 3:
Dans chaque cas, calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

a. $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=5$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{4}$.

b. $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=2$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{-2\pi}{3}$.

Exercice 4:
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.



Exercice 5: Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. c. $\vec{u}\begin{pmatrix}k-\sqrt{2}\\\sqrt{3}-k\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}k+\sqrt{2}\\\sqrt{3}+k\end{pmatrix}$

Exercice 6: Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on a: A(1;-1), B(5;3), C(10;-2) et D(3;-5).
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DA}$.

Exercice 7: Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on a: A(2;-1), B(4;2), C(4;0) et D(1;2).

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
2. Qu'en déduit-on pour les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 8: Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), soit A(2;1), B(6;-1), C(7;1) et D(3;3) 4 points.

1. Quelle est la nature du triangle ABC?
2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

Exercice 9: Dans chaque cas, calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

a. $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|=6$

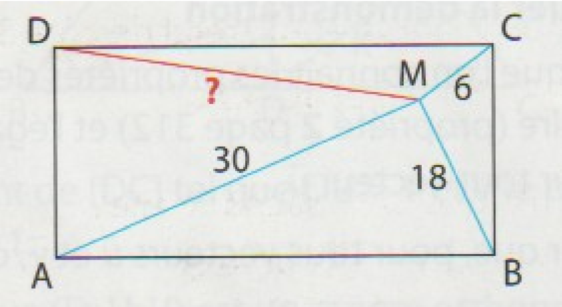
b. $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=4$

Exercice 10: Soit un parallélogramme ABCD tel que AB=6, AD=3 et AC=8.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 11: ABC est un triangle tel que AB=3, AC=6 et BC=5. Soit I le milieu de [AB].

1. Calculer CI.
2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que MA²+MB²=61. Vérifier que $C\in E$.

Exercice 12 : ABCD est un rectangle de centre O. Un point M est placé à l'intérieur du rectangle de telle sorte que MA=30 m, MB=31m et MC=6m.



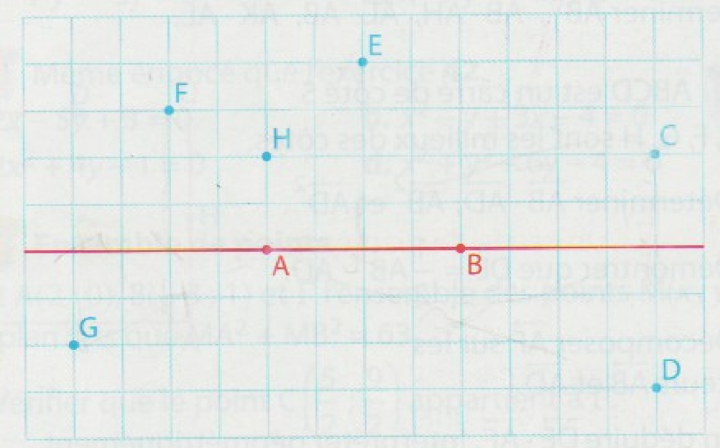
On souhaite déterminer MD.

1. Démontrer que MA²+MC²=MB²+MD².
2. Calculer MD

Exercice 13 : Sur la figure ci-contre, AB=4.
Déterminer graphiquement

a. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}$ c. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AE}$

d. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AF}$ e. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AG}$ f. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$.



Exercice 14 : Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3. Soit H le milieu de [BC].
Calculer $\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CH}$.

Exercice 15 : Le triangle ABC a ses trois angles aigus. [AK] et [BH] sont deux hauteurs du triangle.

1. Exprimer $\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CA}$ de deux façons différentes.
2. En déduire que $CH\times CA=CK\times CB$.

Exercice 16 : P et Q sont deux points d'un demi-cercle de diamètre [AB]. Les droites (AP) et (BQ) se coupent en un point M.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AP}\,.\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}$ et que $\overrightarrow{BQ}\,.\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BM}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AP}\,.\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BQ}\,.\,\overrightarrow{BM}$ = AB².

Exercice 17:Soit ABCD un trapèze rectangle de bases $AB=2a$ et $CD=a$ et de hauteur AD= h .

1. Calculer $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}$ en fonction de a et h .
2. Peut-on choisir h de telle sorte que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires ?

Exercice 18 : On considère A, B, C et H quatre points quelconques du plan.

1. En introduisant le point A, calculer $\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{HB}$ (*).
2. En utilisant (*), montrer que dans un triangle ABC non aplati, les trois hauteurs sont concourantes.
   Indication : Noter H l'intersection de deux hauteurs et prouver que la troisième hauteur passe aussi par H.

Exercice 19 : Le triangle ABC est tel que AB=4 , $BC=4\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$ =24.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, puis déterminer la nature du triangle ABC.