Exercices : la fonction exponentielle.

Exercice 1 : Simplifier les écritures suivantes :

$A = \exp(3)\exp(-5)\exp(36)$

$B = \dfrac{\exp(4)}{\exp(36)}$

$C = \exp(7)^3 \exp(19)$

$D = \dfrac{1}{\exp(-2)}$

Exercice 2 : Simplifier les écritures suivantes :

$A = (\mathrm{e}^x)^2 \qquad B = \dfrac{\mathrm{e}^{x+2}}{e^2} \qquad C = \dfrac{\mathrm{e}^{x+2}}{\mathrm{e}^{-x}} \qquad D = (\mathrm{e}^x)^3 \mathrm{e}^{-4x}$

Exercice 3 : Développer les expressions suivantes :

$A = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 - \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}) \qquad B = (\mathrm{e}^x + 1)^2 - (\mathrm{e}^{-x} - 1)^2$

Exercice 4 : Factoriser les expressions suivantes :

$A = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \qquad B = \mathrm{e}^{2x} - 1 \qquad C = 4\,\mathrm{e}^{2x} + 4\,\mathrm{e}^x + 1 \qquad D = xe^x - \mathrm{e}^{3x}$

Exercice 5 : Montrer que, quels que soit le réel $x \neq 0$, on a :

a. $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$

b. $\dfrac{1 + \mathrm{e}^{2x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$

Exercice 6 : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

a. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x - 2x$ b. $f(x) = 2x^2 - 4\,\mathrm{e}^x + 1$ c. $f(x) = xe^x$

Exercice 7 : Déterminer la dérivée ainsi que le domaine de définition de la fonction *f* suivante :

a. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ b. $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$ c. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}$

Exercice 8 : Étudier le sens de variation des fonctions :

a. $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

c. $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$

d. $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 : Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $x + 1$.
   b. En déduire le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}$
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0.
   b. Justifier que pour $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ puis que $x\,\mathrm{e}^x \geqslant x$.
   Comparer de même $f(x)$ et x pour $x < 0$.
   c. En déduire la position de C par rapport à T.

Exercice 10 : Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Soit C sa courbe représentative et T la tangente à C en son point d'abscisse 0.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Écrire une équation de la droite T.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$par : $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$.

   a. Monter que, pour tout x, $g'(x)=\frac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{4(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

   b. En déduire le sens de variation de g.

   c. Calculer $g(0)$.

   d. En déduire la position de C par rapport à T.

Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{R}$les équations suivantes :

a. $\mathrm{e}^{5x-3}=\mathrm{e}^{4x}\mathrm{e}^{-2x+1}$

b. $\mathrm{e}^{x^2-5x}=\mathrm{e}$

c. $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1=0$

d. $(\mathrm{e}^{5x}-1)\left(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right)=0$

Exercice 12 :Résoudre dans $\mathbb{R}$les inéquations suivantes :

a. $\mathrm{e}^{2x-3}\geqslant\mathrm{e}^{2x+3}$

b. $\mathrm{e}^{-x^2+5x}>1$

Exercice 13 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ b. $f(x)=(3x+7)\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$ c. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x+1}-1}$

Exercice 14 : Étudier les variations de la fonction f.

a. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}$ pour $x\neq-1$

b. $f(x)=x^2e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

c. $f(x)=\frac{2x-3}{\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$

d. $f(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x$

Exercice 15 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\mathrm{e}^x-3x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x)=\mathrm{e}^x\left(1-3x\mathrm{e}^{-x}\right)$
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16 : Dans chaque cas, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction proposée :

1. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$ 2. $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{-2}{3}x}+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$

3. $h(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+2}$ 4. $\mathrm{i}(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-2x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}$

Exercice 17 : Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $f(x)=2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}-\frac{1}{x}$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f(x)=2\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}$

4. Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 18 :
Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et, pour tout n $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n}$.
On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire $u_{n+1}=\mathrm{e}^{u_n}(\mathrm{e}^{u_n}-1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-x$.
   a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x)=(\mathrm{e}^{x}-1)(2\mathrm{e}^{x}+1)$
   b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
   c. En remarquant que $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $a\leqslant 0$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 0$.
   b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
   c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).
3. Dans cette question, on suppose que $a>0$.
   La suite (u_n) étant croissante, la question 1 permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant a$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}-u_n\geqslant g(a)$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant a+n\times g(a)$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on prend $a=0{,}02$.
   Le programme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n>M$, où M désigne un réel positif. Ce programme est incomplet.

```
u=0.02
n=0
M=int(input("saisir le nombre M"))
while ................. :
    .....................
    .....................
print(n)
```

   a. Compléter la partie traitement.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si M=60.

Exercice 19 :
On considère les deux courbes ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$) d'équations respectives $y=\mathrm{e}^{x}$ et $y=-x^2-1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathcal{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté ci-dessous, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
   Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe ($\mathcal{C}_1$) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe ($\mathcal{C}_2$).
2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe ($\mathcal{C}_1$) et par B le point d'abscisse b de la courbe ($\mathcal{C}_2$).
   a. Déterminer une équation de la tangente ($\mathcal{T}_A$) à la courbe ($\mathcal{C}_1$) au point A.
   b. Déterminer une équation de la tangente ($\mathcal{T}_B$) à la courbe ($\mathcal{C}_2$) au point B.
   c. En déduire que les droites ($\mathcal{T}_A$) et ($\mathcal{T}_B$) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S): $\begin{cases}\mathrm{e}^{a}=-2b\\ \mathrm{e}^{a}-a\mathrm{e}^{a}=b^2-1\end{cases}$.
   d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S'): $\begin{cases}\mathrm{e}^{a}=-2b\\ \mathrm{e}^{2a}+4a\mathrm{e}^{a}-4\mathrm{e}^{a}-4=0\end{cases}$.
3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation
   (E): $\mathrm{e}^{2x}+4x\mathrm{e}^{x}-4\mathrm{e}^{x}-4=0$.

Pour cela, on considère la fonction f définie sur ℝ par: $f(x)=e^{2x}+4xe^{x}-4e^{x}-4$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à]-∞;0[, $e^{2x}-4<0$ et $4e^{x}(x-1)<0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle]-∞;0[.

c. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0; +∞[.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle [0; +∞[.

On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .

4. On prend pour A le point d'abscisse a . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites ($\mathcal{T}_A$) et ($\mathcal{T}_B$) sont confondues.