Exercices : probabilités conditionnelles et conditionnement.

Exercice 1 : Dans une classe de Première de 35 élèves, 17 élèves suivent la spécialité SVT et 26 la spécialité mathématiques.
On choisit un élève au hasard. On note S « l'élève a choisi la spécialité SVT » et M « l'élève a choisi la spécialité mathématiques ».
La probabilité que l'élève suive la spécialité mathématiques sachant qu'il suit la spécialité SVT est égale 10/17.

1. Calculer la probabilité que l'élève suive les deux spécialités SVT et mathématiques.
2. a. Construire un tableau d'effectifs à double entrée traduisant la situation.
   b. Calculer la probabilité que l'élève suive la spécialité SVT sachant qu'il suit la spécialité mathématiques.
   c. Calculer la probabilité que l'élève suive la spécialité mathématiques sachant qu'il ne suit pas celle de SVT.
   d. Calculer la probabilité que l'élève suive la spécialité mathématiques mais ne suive pas la spécialité SVT.

Exercice 2 : Un test est mis au point pour dépister une maladie.Une étude sur l'efficacité du test est effectuée sur un échantillon de personnes. Elle montre que le test est positif dans 5% des cas. Il s'avère que 6% des personnes ayant un test positif ne sont en fait pas malades. De plus, 91,25% des personnes testées ont un test négatif et ne sont pas malades.
On choisit au hasard une personne testée.
On note respectivement P et M les événements « le test est positif » et « la personne est malade ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne ne soit pas malade sachant que son test est négatif.
3. a. Dans quel cas le test commet-il une erreur ?
   b. Calculer la probabilité p que le test commette une erreur.

Exercice 3 : Soient A et B deux événements tels que P(A ∩ B) = 0,4, P(A ∪ B) = 0,7 et $P_A(B)=0,8$.

1. Calculer P(A) et P(B).
2. En déduire la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

Exercice 4 : Soit E et F deux événements tels que P(E)= 0,8 et $P_E(F)=0,75$.
Calculer P(E ∩ $\overline{F}$).

Exercice 5 : Dans une classe de première, 95% des élèves possèdent un téléphone portable.
Parmi eux, 25% ont une connexion internet associée à leur téléphone.
On choisit un élève au hasard dans cette classe.
Quelle est la probabilité que cet élève ait un téléphone portable et une connexion Internet associée ?

Exercice 6: Dans un lycée, 60% des élèves sont des filles. Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès des élèves, on apprend que 10% des filles et 15% des garçons sont dépendants du tabac.
On choisit un élève de ce lycée au hasard.

1. On note F « l'élève est une fille » et T « l'élève est dépendant au tabac ».
   a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b. Calculer la probabilité que l'élève soit un garçon dépendant au tabac.
   c. Montrer que la probabilité que l'élève soit dépendant au tabac est égale à 0,012.
2. L'enquête permet également de savoir que parmi les élèves dépendants au tabac, la moitié a un parent dépendant au tabac. Parmi les élèves non-fumeurs, 70% ont des parents non-fumeurs.
   On note P l'événement « l'élève choisi a un parent dépendant au tabac ».
   a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   b. Calculer la probabilité que l'élève soit dépendant au tabac ainsi que l'un de ses parents.
   c. Calculer la probabilité que les parents de l'élève choisi soient non-fumeurs.

Exercice 7 : Soit A et B deux événements tels que P(A)=0,4, $P_A(B)=0,2$ et $P_{\overline{A}}(B)=0,7$.
Construire un arbre pondéré et calculer P(B).

Exercice 8 : Dans un restaurant, on a constaté que :

- 80% des clients prennent un café.
- 40% des clients prennent un dessert, dont les $\frac{3}{4}$ prennent aussi un café.

1. On choisit un client du restaurant au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il prenne un dessert et un café ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il ne prenne ni dessert, ni café ?
2. On choisit un client qui a pris un café. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert ?
3. Sachant qu'un client n'a pas pris de café, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert ?

Exercice 9 : Selon une enquête réalisée par un site Internet, la proportion de gauchers en France serait de 12,7% (6 garçons pour 4 filles).
On choisit au hasard une personne habitant en France.

1. Représenter la situation par un arbre.
2. a. Quelle est la probabilité que cette personne soit droitière ?
   b. Quelle est la probabilité que cette personne soit une fille gauchère ?

Exercice 10 : Dans un lot de pièces, on sait que 5% sont défectueuses. La procédure de contrôle des pièces en sortie de fabrication n'est pas parfaite :

- 4% des pièces saines sont rejetées,
- 2% des pièces défectueuses sont acceptées.

On choisit au hasard une pièce en sortie de fabrication.
Quelle est la probabilité que :

1. la pièce soit rejetée ;
2. la pièce soit saine et acceptée ;
3. il y ait une erreur de contrôle ;
4. la pièce soit saine sachant qu'elle est refusée ;
5. la pièce soit défectueuse sachant qu'elle est acceptée.

Exercice 11 : D'après la direction de la Voirie et des déplacements de la mairie de Paris, les accidents concernant les piétons dans la capitale sont causés :

- dans 59,9% des cas par une traversée irrégulière de la chaussée par le piéton (dont 72% en dehors des passages piétons et 28% lorsque le feu est vert pour les véhicules) ;
- dans 24,7% des cas par des refus de priorité aux piétons par les véhicules ;
- dans 12,5% des cas par d'autres infraction des véhicules qui renversent un piéton ;
- dans 2,9% des cas par une circulation irrégulière des piétons sur la chaussée.

On étudie au hasard le cas d'un accident survenu dans la ville de Paris et concernant un piéton.

1. a. Justifier que la probabilité qu'un tel accident soit causé par le véhicule est de 0,372.
   b. En déduire la probabilité de l'événement « l accident est dû au piéton ».
2. Quelle est la probabilité que l'accident soit causé par une traversée irrégulière du piéton en dehors des passages pour piétons ?

Exercice 12 : Une usine d'embouteillage vient d'acquérir deux nouvelles soutireuses notées S_1 et S_2.
La soutireuse S_1 remplit 14000 bouteilles par heure, contre 20000 bouteilles par la soutireuse S_2. Chaque heure, les bouteilles sont empaquetées puis expédiées.
On choisit au hasard une bouteille remplie dans cette usine.

1. a. Quelle est la probabilité que cette bouteille ait été remplie par la soutireuse S_1 ?
   b. En déduire la probabilité que cette bouteille ait été remplie par la soutireuse S_2.
2. Une étude interne affirme que 1 % des bouteilles remplies par la soutireuse S_1 et 0,5% des bouteilles remplies par la soutireuse S_2 ne sont pas conformes en termes de remplissage.
   On note C l'événement « la bouteille est conforme ».
   a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b. Quelle est la probabilité qu'une bouteille remplie dans cette usine ne soit pas remplie correctement ?
3. Après plusieurs plaintes de clients, le service des fraudes intervient au sein de cette usine pour effectuer un contrôle de conformité de remplissage. Le contrôleur, extrêmement pressé, choisit une bouteille au hasard. Cette bouteille est malheureusement non conforme.
   Quelle est la probabilité que cette bouteille provienne de la soutireuse S_1 ?
   Quelle est la probabilité que cette bouteille provienne de la soutireuse S_2 ?

Exercice 13 : Soient deux événement A et B tels que P(A)=0,4 et P(B)=0,3.

1. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$ sachant que A et B sont indépendants.
2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$ sachant que A et B sont incompatibles.

Exercice 14 : Soient A et B deux événements tels que : P(A)=0,8, P(B)=0,3 et $P(A \cup B)=0,86$.

1. Calculer $P_B(A)$.
2. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 15 : En France, les dernières données disponibles montrent une prévalence de l'asthme plus élevée chez les femmes que chez les hommes (personnes âgées de 15 ans ou plus) : respectivement 6,04% et 5,6% (données du ministère de la Santé).
On considère l'ensemble des couples homme/femme de la population française et on note H l'événement « L'homme est asthmatique » et F l'événement « La femme est asthmatique ».
On admet que les événements H et F sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'aucun des adultes du couple ne soit asthmatique.
2. Calculer la probabilité qu'un et un seul des deux adultes du couple soit asthmatique.
3. En déduire la probabilité que les deux adultes soient asthmatiques.

Exercice 16 : Dans une boulangerie-pâtisserie, un client sur trois commande à la fois du pain et des gâteaux, un client sut quinze commande à la fois du pain et des gâteaux, et trois clients sur cinq commandent uniquement du pain.
On choisit au hasard un client de cette boulangerie-pâtisserie. On note P l'événement « le client achéte du pain » et G l'événement « le client achète des gâteaux ».

1. Calculer la probabilité de l'événement G et la probabilité de l'événement P.
2. Les événements G et P sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement $\overline{G} \cap \overline{P}$?
4. Reprendre la question 2 et justifier la réponse d'une autre manière.

Exercice 17 : Dans un magasin d'articles de sports, 3% des clients font leurs achats uniquement dans le rayon dédié à la pratique du tennis. Parmi ces clients, 87% n'achètent que des balles de tennis.
On choisit au hasard un client de ce magasin.
On note T l'événement « le client achète uniquement dans le rayon dédié à la pratique du tennis » et B l'événement « le client achète uniquement des balles de tennis ».

1. Calculer $P_T(B)$.
2. Calculer $P_T(\overline{B})$.
3. En déduire $P(T \cap \overline{B})$.En donner une interprétation.

Exercice 18 : Avant le baccalauréat, on estime que les trois quarts des candidats révisent, et qu'un candidat a neuf chances sur dix d'être admis s'il a révisé, et seulement deux chances sur dix s'il n'a pas révisé.
Après le baccalauréat, tous les reçus font les fiers en prétendant qu'ils n'avaient même pas révisé et tous les refusés crient à l'injustice et affirment avoir travaillé jour et nuit.
On rencontre au hasard un candidat après l'examen.
Soit A, R et M respectivement, les événements : « le candidat est admis », « le candidat a révisé » et « le candidat est un menteur ».

1. Calculer la probabilité que ce candidat :
   a. soit admis et ait révisé ;
   b. soit admis et n'ait pas révisé ;
   c. soit refusé et n'ait pas revisé ;
   d. soit admis ;
   e. ait révisé sachant qu'il est refusé.
2. Quelle est la probabilité que ce candidat :
   a. soit un menteur ?
   b. soit un menteur, sachant qu'il est admis ?
   c. soit admis sachant qu'il est un menteur ?
   d. soit admis sachant qu'il n'est pas menteur ?

Exercice 19 : vers la Médecine !
On étudie la mise en place d'un test diagnostique qui doit permettre de dépister une maladie m dont la fréquence (ou prévalence) dans la population est notée p, avec $0<p<1$.
On prélève au hasard une personne ayant été soumise au test.
On définit les événements suivants :
T: « le test est positif », M : « la maladie est présente ».
Pour tout test, le fabriquant indique :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu malade ait un test positif, appelée sensibilité du test et notée Se.
- La probabilité $P_{\overline{M}}(T)$ qu'un individu sain ait un test est négatif, appelée spécificité du test et notée Sp.

Le test est idéal quand Sp=Se=1.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré ; y faire figurer les probabilités p, Sp et Se et le compléter.
2. a. Exprimer $P(M\cap T)$, $P(M \cap \overline{T})$, $P(\overline{M} \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap \overline{T})$ en fonction de p, Se et Sp.
   b. Montrer que la probabilité que le test délivre une juste conclusion est égale à : p(Se-Sp)+Sp.
3. On appelle :
   - valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'être malade, sachant que le test est positif.
   - valeur prédictive négative du test (VPN), la probabilité $P_{\overline{T}}(\overline{M})$ d'être non malade, sachant que le test est négatif.
   a. Calculer P(T).
   b. Exprimer les deux valeurs prédictives VPP et VPN en fonction de p, Se et Sp.
   c. Le test apporte une information intéressante si VPP>p. Montrer que dans ce cas : Se+Sp>1.
4. Application au diagnostic du paludisme.
   La prévalence p du paludisme est de 90% en Afrique et de 1/1000 en France.
   Le test biologique utilisé a pour sensibilité Se=0,95 et pour spécificité Sp=0,85.
   a. Calculer VPP et VPN pour l'Afrique et pour la France.
   b. En déduire ce que l'on peut dire en terme de probabilités à un patient africain et à un patient français selon que son test est positif ou négatif.
5. Influence de la prévalence sur VPP et VPN.
   En conservant les caractéristiques du test précédent (Se=0,95 et Sp=0,85), on considère les fonctions v et w définies sur]0;1[par $v(p)=P_T(M)$ et $w(p)=P_{\overline{T}}(\overline{M})$.
   a. Donner les expressions de v(p) et de w(p) en fonction de p.
   b. Tracer les courbes représentatives de v et w pour p appartenant à l'intervalle]0,01, 0,99[.
6. Répondre aux questions suivantes : en argumentant :
   a. Que peut-on dire de l'influence de la prévalence p sur les paramètres : Se, Sp, VPP, VPN ?
   b. Lorsque p n'est pas trop faible, en quoi la positivité du test est-elle un élément important du diagnostic ?
   c. Lorsque p est faible, v(p) l'est aussi ; pourquoi le Rapport de Vraisemblance : $RV=\dfrac{P_M(T)}{P_{\overline{M}}(T)}$ est-il à prendre en compte dans le processus diagnostique ?
   d. Pour une maladie rare, quels inconvénients présente un test de dépistage systématique de toute une population ?

Exercice 20 : Un couple souhaite avoir un enfant de chaque sexe. Des données statistiques conduisent à considérer que la probabilité de naissance d'un garçon est égale à 0,51 et, par suite, que celle d'une fille est 0,49. Nous supposons que chaque grossesse est unique et indépendante.

1. Quelle est la probabilité que leur souhait se concrétise en ayant seulement deux enfants ?
2. Quelques années plus tard, on apprend que ce couple a eu deux enfants du même sexe et qu'il attend un troisième enfant. Quelle est la probabilité que le souhait de ce couple se réalise ?

Exercice 21: Liban Mai 2013
Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et weekend) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70% des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure creuse, 20% des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90% des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les événements :

– C : « l'heure est creuse »
– T: « le terrain est occupé ».

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

   Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :
   - 10€ pour une heure pleine.
   - 6 € pour une heure creuse.

   On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :
   - 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
   - 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
   - 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.
5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.
6. Déterminer l'espérance de X.
7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.