Probabilités.
Variables aléatoires discrètes.

I. Variable aléatoire discrète.

a. Exemple.

Considérons l'expérience aléatoire suivante: un joueur lance un dé cubique bien équilibré et note le chiffre qui apparaît. On choisit comme univers de l'expérience l'ensemble
Ω = {1;2;3;4;5;6}.
On définit alors le jeu suivant:Un joueur mise 1€. Le joueur gagne 2€ s'il fait un chiffre supérieur ou égal à 5, le joueur gagne 1€ s'il fait un chiffre compris entre 2 et 4 et le joueur ne gagne rien s'il fait 1.
Nous pouvons donc associer à chaque résultat de l'univers un nombre réel. Cette association est une variable aléatoire.

b. Définition.

On appelle Ω l'univers fini associé à une expérience aléatoire, c'est à dire l'ensemble de tous les résultats possibles pour cette expérience.

Définition: Une variable aléatoire discrète sur Ω est une fonction X de Ω dans ℝqui à tout élément de Ω fait correspondre un réel.

Notation:

- On note l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire $\{x_1 ; x_2 ; .. ; x_n\}$.
- L'événement « X prend la valeur x_i« se note $(X=x_i)$.

Exemple: Appelons X la variable aléatoire définie précédemment. A chacune des 6 éventualités de Ω est associé l'un des trois gains: $x_1=-1$, $x_2=0$ et $x_3=1$. Donc l'ensemble des valeurs prises par X est $-1 ; 0 ; 1$.
L'événement $(X=0)$ est {2;3;4}.

c. Loi de probabilité d'un variable aléatoire.

Définition: Soit Ω l'univers sur lequel a été définie une loi de probabilité P.
On considère une variable aléatoire discrète X sur Ω prenant les valeurs $\{x_1 ; x_2 ; .. ; x_n\}$.
Définir la loi de probabilité de X, c'est donner la probabilité de l'événement $(X=x_i)$ pour tout i , avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau:

x_i	x_1	x_2	..	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	..	p_n

On a $p_1+p_2+..+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

Exemple: reprenons l'exemple précédent. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est égale au gain algébrique, en euros; elle est donnée par le tableau:

x_i	-1	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$(X=-1)$ = {1}. Donc la probabilité que X soit égal à -1 est la probabilité que le dé fasse un 1, soit $\frac{1}{6.}$.
(X=0)={2;3;4}.Donc la probabilité que X soit égal à 0 est la probabilité que le dé fasse un 2, un 3 ou un 4, soit $\frac{3}{6}$.
(X=1) ={4;5}. Donc la probabilité que X soit égal à est la probabilité que le dé fasse un 5 ou un 6, soit $\frac{2}{6}$.

Regardez la vidéo : https://youtu.be/2Ge_4hclPnI

II. Espérance, variance, écart type.

Considérons une variable aléatoire discrète X définie sur un univers Ω et donc la loi de probabilité est donnée par :

x_i	x_1	x_2	..	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	..	p_n

a. Définitions.

Définitions:

- On appelle espérance mathématique de X le nombre réel
  $E(X)=p_1x_1+p_2x_2+..+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- On appelle variance de X le nombre réel
  $V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+..+p_n(x_n-E(X))^2=\sum_{1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$
- On appelle écart type de X le nombre réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.
La variance d'une variable aléatoire est un indicateur de la dispersion des valeurs prises par X, pondérées par leurs probabilités.

Exemple: Reprenons l'exemple précédent.
$E(X)=-1\times\frac{1}{6}+0\times\frac{3}{6}+1\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$. Cela signifie que le gain moyen pour ce jeu est de 1/6 €. Ce jeu est favorable au joueur puisque E(X)>0.
$V(X)=\frac{1}{6}\left(-1-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{6}\left(0-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{6}\times\frac{49}{36}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{36}+\frac{2}{6}\times\frac{25}{36}=\frac{102}{216}=\frac{51}{108}$

$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{51}{108}}$

On admettra la propriété suivante:

Propriété: $V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$.

Regardez les vidéos suivantes : https://youtu.be/AcWVxHgtWp4 et https://youtu.be/elpgMDSU5t8

b. Propriétés.

Soit a et b deux réels quelconques.
La variable aléatoire Y, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX+b$.

ax_i+b	ax_1+b	ax_2+b	..	ax_n+b
$P(Y=ax_i+b)$	p_1	p_2	..	p_n

Propriété: $E(aX+b)=aE(X)+b$.

Démonstration:

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= p_1(ax_1+b)+p_2(ax_2+b)+..+p_n(ax_n+b) \\ &= a(p_1x_1+p_2x_2+..+p_nx_n)+b(p_1+p_2+..+p_n) \\ &= aE(X)+b \text{ . Car } p_1+p_2+..+p_n=1 \text{ .} \end{aligned}$$

Propriété: Soit X une variable aléatoire et a un réel quelconque.
$V(aX)=a^2V(X)$

Démonstration :

$$\begin{aligned} V(aX) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i-E(aX))^2=\sum_{1}^{n} p_i(ax_i-aE(X))^2 \\ &= a^2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2 \\ &= a^2V(X) \text{ .} \end{aligned}$$

Exemple: Le nombre d'entrées pour un spectacle est une variable aléatoire X d'espérance mathématique 200 et de variance 25. Le prix d'entrée est 15€.
Soit Y la variable aléatoire égale à la recette du spectacle. Déterminons $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
On a la relation $Y=15X$.
$E(Y)=E(15X)=15E(X)=15\times 200=3000$.
$V(Y)=V(15X)=15^{2V}(X)=15^2\times 25$ d'où $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{15^2\times 5^2}=15\times 5=75$.
L'espérance mathématique de la recette est 3000€ et son écart type est 75 €.

Regardez la vidéo : https://youtu.be/ljITvCBExVY