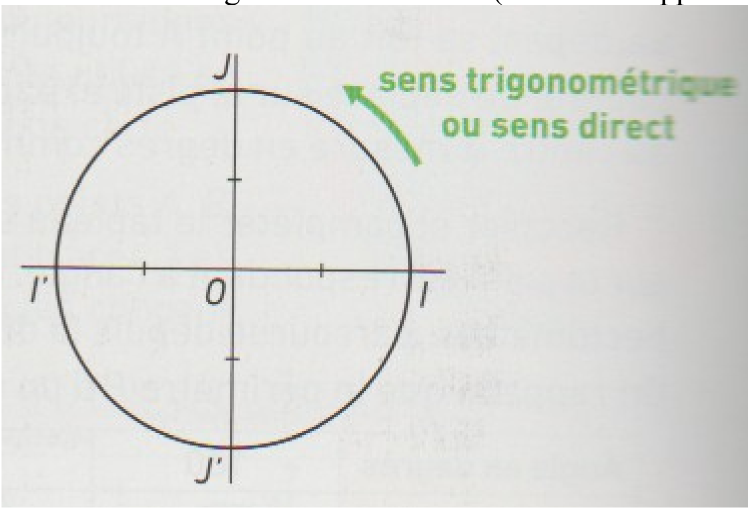
Trigonométrie.

I. Le cercle trigonométrique.

1. Définition.

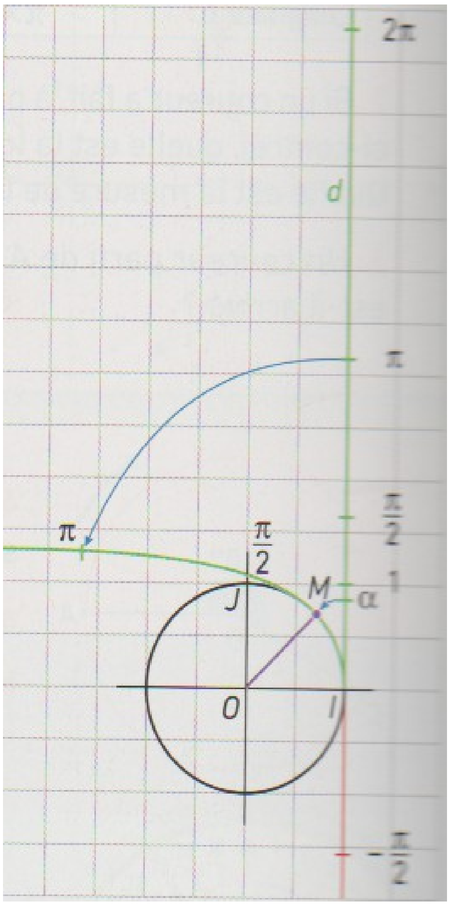
Définition : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Le cercle trigonométrique est le cercle C de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit le sens de parcours inverse aux aiguilles d'une montre (ce sens est appelé le sens direct).



2. Enroulement de la droite des réels autour du cercle.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique et la droite d tangente au cercle au point I. On définit sur cette droite un repère d'origine I et on imagine que la droite d s'enroule autour du cercle.

Pour tout nombre réel α , le point d'abscisse α sur d coïncide avec un unique point M du cercle trigonométrique. M s'appelle l'image de α sur le cercle trigonométrique.



Réciproquement, à tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de valeurs qui peuvent être considérées comme les abscisses de points de la droite d.
Si α est l'abscisse d'un de ces points sur d, tous les autres points de d ont pour abscisse $\alpha+2\pi$, $\alpha+4\pi$, ..., $\alpha-2\pi$, $\alpha-4\pi$, ..

Conséquence : A chaque réel α , on associe un point M sur le cercle trigonométrique. α est lié à l'angle au centre $\widehat{IOM}$. Ceci permet de définir une nouvelle unité d'angle appelée radian.

3. Les radians.

Définition : Soit C le cercle trigonométrique. Soit M le point de C tel que l'arc IM mesure 1 unité. On définit un radian comme étant la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

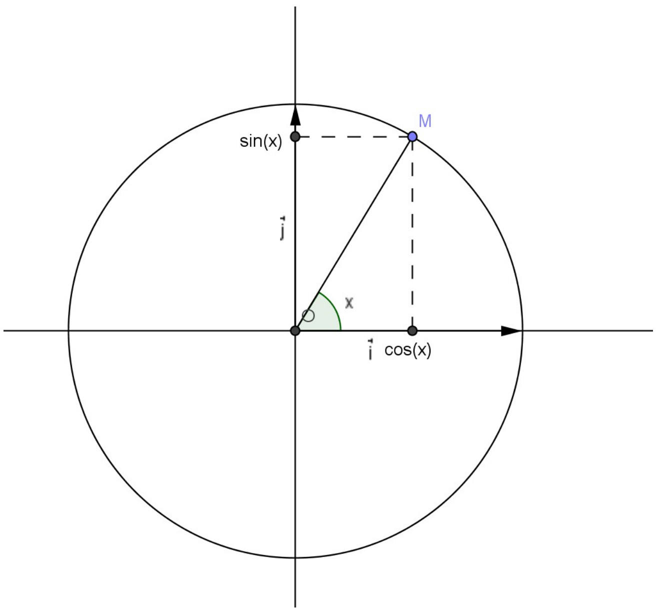
Propriété : La mesure, en radians, d'un angle géométrique est proportionnelle à sa mesure en degrés.

Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{3}$	π	2π
Angle en degrés	0	30	45	60	90	120	180	360

II. Cosinus et sinus d'un réel.

1. Définition.

Définition : Soit M un point sur le cercle trigonométrique C. Soit x une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.
Le cosinus de x est l'abscisse de M. Il est noté $\cos x$.
Le sinus de x est l'ordonnée de M. Il est noté $\sin x$.



Exemples : $\cos 0=1$, $\sin 0=0$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$

Propriétés :

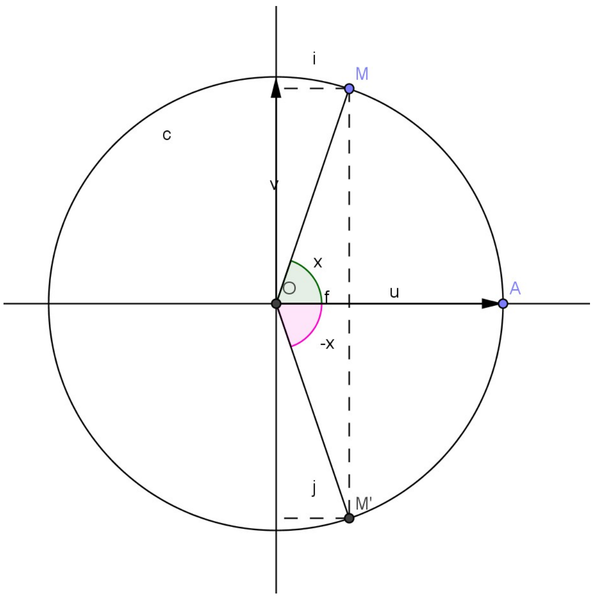
- Pour tout réel x , $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$, $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.
- Pour tout réel x , $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

2. Valeurs remarquables.

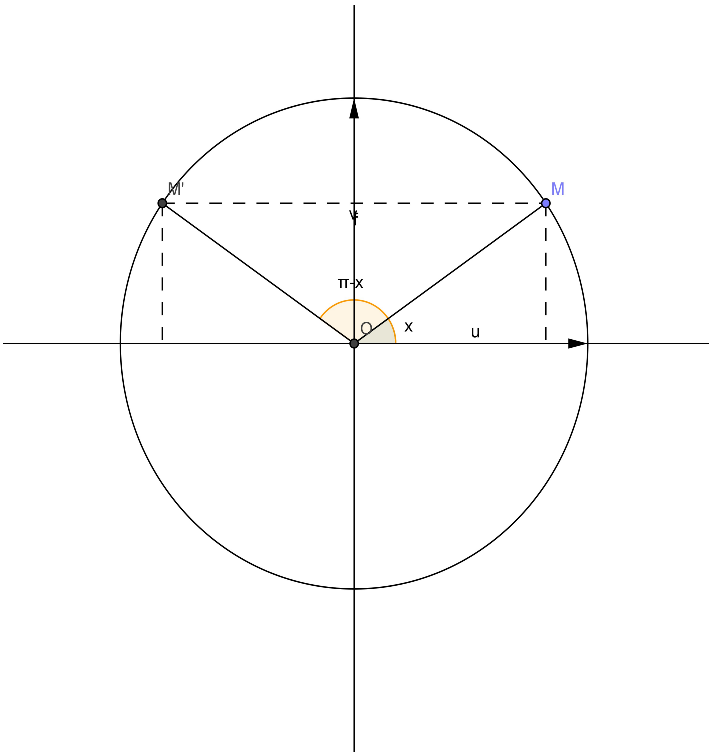
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3. Propriétés.

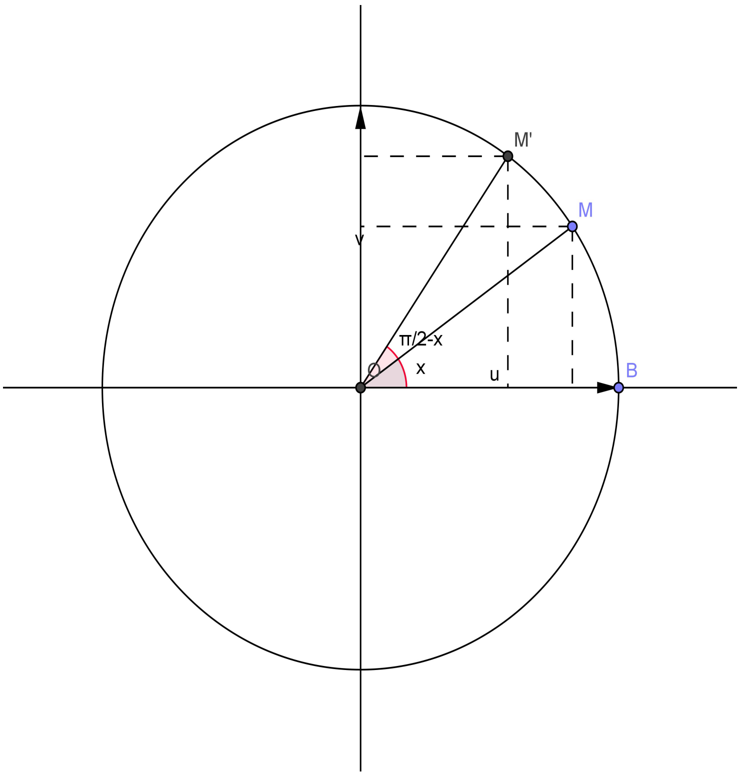
- Angles opposés.
  Pour tout réel x , on a:
  $\cos(-x)=\cos(x)$
  $\sin(-x)=-\sin(x)$



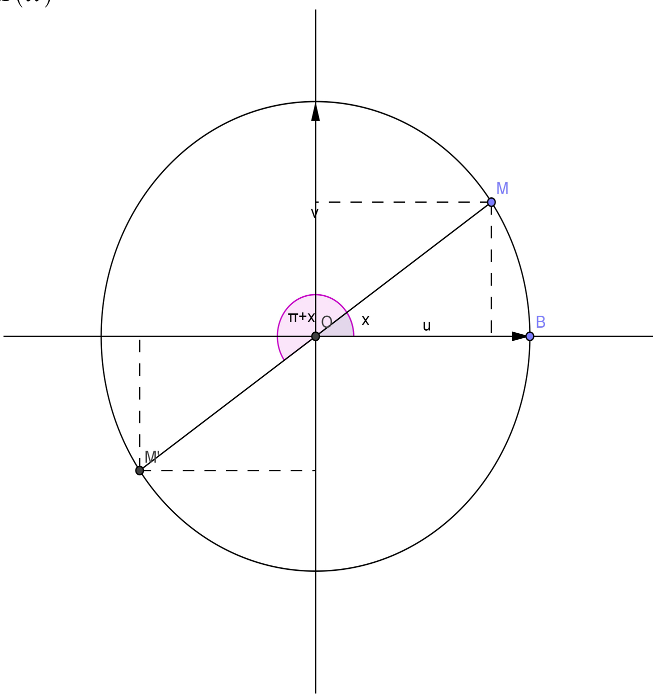
- Angles supplémentaires.
  Pour tout réel x , on a:
  $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
  $\sin(\pi-x)=\sin(x)$



- Angles complémentaires.
  Pour tout réel x , on a:
  $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$



- Angles qui différent de π.
  Pour tout réel x , on a:
  $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$
  $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$



e. Application à la résolution d'équations.

- $\cos x=\cos a$.
  Les solutions de l'équation $\cos x=\cos a$ sont les réels $x=a+2k\pi$ ou $x=-a+2k'\pi$, $k\in\mathbb{Z}, k'\in\mathbb{Z}$

  Exemple: Résoudre l'équation (E) $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où l'équation (E) est équivalente à $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Les solutions de (E) sont donc les réels $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi$, $k\in\mathbb{Z}, k'\in\mathbb{Z}$

- $\sin x=\sin a$.

  Les solutions de l'équation $\sin x=\sin a$ sont les réels $x=a+2k\pi$ ou $x=\pi-a+2k'\pi$, $k\in\mathbb{Z}, k'\in\mathbb{Z}$

  Exemple: Résoudre l'équation (E) $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  D'où l'équation (E) est équivalente à $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

  Les solutions de (E) sont donc les réels $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+2k'\pi$, $k\in\mathbb{Z}, k'\in\mathbb{Z}$

III. Fonctions cosinus et sinus.

1. Définition.

Définition :

- La fonction cosinus est la fonction, qui à tout réel x , associe le réel $\cos x$.
- La fonction sinus est la fonction, qui à tout réel x , associe le réel $\sin x$.

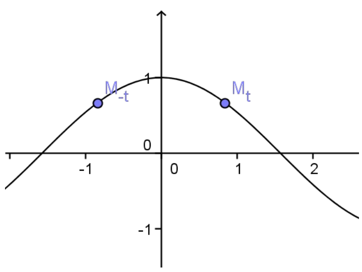
Notation : $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \cos x$ $\qquad$ $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \sin x$

2. Parité.

- Pour tout nombre réel t , $\cos(-t)=\cos(t)$. On dit que la fonction cosinus est paire.
- Pour tout nombre réel t , $\sin(-t)=-\sin(t)$. On dit que la fonction sinus est impaire.

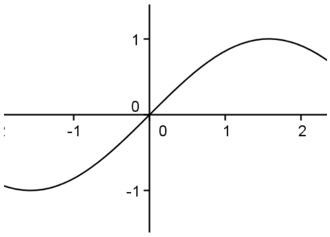
Interprétation géométrique :
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1)



Soit $t \in \mathbb{R}$ Soit $M_t \;\; (t\,;cost)$ et M' $(-t\,;\cos(-t))$.
M et M' appartiennent à la représentation graphique de la fonction cos.
$\cos(-t)=\cos(t)$ Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{j}$).
D'où la représentation graphique de la fonction cosinus admet pour axe de symétrie l'axe (O, $\vec{j}$).

2)



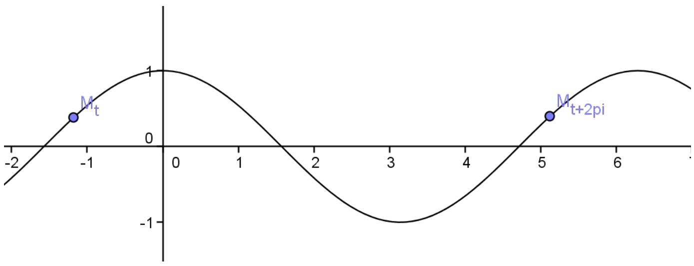
Soit $t \in \mathbb{R}$ Soit $M_t \;\; (t\,;\sin t)$ et M' $(-t\,;\sin(-t))$.
M et M' appartiennent à la représentation graphique de la fonction sin.
$\sin(-t)=-\sin(t)$ Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'origine.
D'où la représentation graphique de la fonction sinus admet pour l'origine O pour centre de symétrie.

Remarque : connaissez vous d'autres fonctions paires ou impaires ?
La fonction carré est paire et la fonction cube est impaire.

3. Périodicité.

Pour tout nombre réel t, $\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ et $\sin(t+2\pi)=\sin(t)$.
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π ou 2π -périodique.

conséquence graphique :



Soit t $\in \mathbb{R}$
Soit $M(t\,;\cos t)$ et $M'(t+2\pi\,;\cos t+2\pi)$. M et M' appartiennent à la représentation graphique de la fonction cos.
$\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ Donc $\overrightarrow{MM'}$ = 2π $\vec{i}$.
Il suffit donc d'étudier la fonction cosinus sur un intervalle de longueur 2π . On obtient la courbe sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$, k $\in \mathbb{Z}$
Il en est de même pour la courbe représentative de la fonction sinus.

4. Tableaux de variations.

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il suffit de les étudier sur un

intervalle d'amplitude 2π .
On choisit l'intervalle $]-\pi;\pi]$ centré en O.

- La fonction sinus.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- La fonction cosinus.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

5. Courbes représentatives.
En utilisant les propriétés de parité et de périodicité vues auparavant, on obtient dans un repère orthogonal deux sinuisoides.