Les vecteurs: l'essentiel de la seconde !

I. Vecteurs du plan.

a. Caractérisation d'un vecteur.

Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.
Pour deux points distincts A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par:

- sa direction, celle de la droite (AB),
- son sens: celui de A vers B,
- sa longueur: celle du segment [AB].

A est l'origine et B l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

<u>Définition:</u> La longueur AB s'appelle la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On la note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

On peut également noter un vecteur avec une seule lettre: $\vec{u}$, $\vec{v}$, ….
La norme de $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$.

b. Opposé d'un vecteur.

Définition: Deux vecteurs de même direction, de même longueur mais de sens contraire sont dits opposés.
On note - $\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, ainsi $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

c. Le vecteur nul.

Définition: Le vecteur de norme nulle est appelé le vecteur nul, il est noté $\vec{0}$.

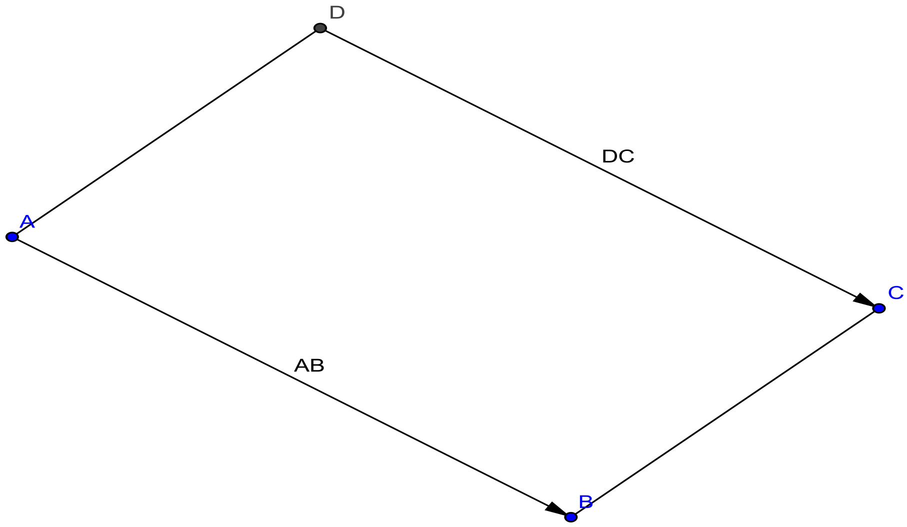
Remarque: Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors les points A et B sont confondus.

II. Propriétés.

a. Egalité de deux vecteurs.

Deux vecteurs sont dit égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Propriété: Soient A, B, C et D quatre points du plan.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



Conséquence: Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Somme de deux vecteurs.

Relation de Chasles: Soient A, B et C trois points du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété: Soit A, B, C et D quatre points distincts, ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

III. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

a. Définition.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $\vec{w}$, noté $k\vec{u}$ tel que:

- $\vec{w}$ a la même direction que $\vec{u}$.
- $\vec{w}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k>0$,
  $\vec{w}$ a le sens opposé à celui de $\vec{u}$ si $k<0$
- la norme de $\vec{w}$ est égale à $|k|\|\vec{u}\|$.

De plus, si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $k=0$, alors $k\vec{u}=\vec{0}$.

b. Propriétés.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous nombres réels k et k' , on a:

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k\vec{u}=\vec{0}$ si et seulement si $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.

c. Colinéarité de deux vecteurs.

Définition: On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs du plan.

Remarques:

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction.

IV. Applications.

a. Droites paralléles.

Propriété: Soient A, B, C, D des points du plan.
Les droites (AB) et (CD) sont paralléles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

b. Alignement de points.

Propriété: Soient A, B et C trois points distincts du plan.
A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

c. Milieu d'un segment.

Propriété: Soient A, B et I trois points distincts.
- I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- I est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.