Utilisation de la dérivation :
le sens de variation d'une fonction.

I. Sens de variation et dérivée.

a. du sens de variation au signe de la dérivée.

Propriété: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
2) Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x)=0$.
3) Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration: nous démontrerons le 1) et 2) de la propriété ci-dessus,le 3) se démontrant comme le 1) à quelques signes prés.
Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
1) Supposons que la fonction f est croissante sur I.
Soit $x \in$I, $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in$I.
- si $h>0$, $x \leqslant x+h$ donc $f(x) \leqslant f(x+h)$ et donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$.
- si $h<0$, $x+h \leqslant x$ donc $f(x+h) \leqslant f(x)$ et donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$.

Comme f est dérivable, $f'(x)$ est la limite de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h tend vers 0.
Or, si l'on donne à h des valeurs proches de 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives.
On admet alors que sa limite est positive et on a donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x appartenant à I.
2) Supposons que la fonction f est constante sur I.
Soit $x \in$I, $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in$I.
$f(x+h)=f(x)$ d'où $f(x+h)-f(x)=0$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.
Par conséquent, pour tout x appartenant à I, $f'(x)=0$.

b. Du signe de la dérivée au sens de variation.

On admettra le théorème suivant.

Théorème: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) Si $f'(x)=0$ pour tout x appartenant à I, f est une fonction constante sur I.
2) Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x appartenant à I, f est croissante sur I.
3) Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x appartenant à I, f est décroissante sur I.

Application: Étudions le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x^2-7x+1$.
- Déterminons la dérivée de f sur $\mathbb{R}$
  f est une fonction polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a ,pour tout x , $f'(x)=3x^2+4x-7$.
- Étudions le signe de f' .
  f' est un trinôme du second degré. Étudions le signe de $3x^2+4x-7$.
  On a $\Delta=4^2-4\times3\times(-7)=16+84=100$.

L'équation $3x^2+4x-7=0$ admet deux racines:

$x_1=\frac{-4+\sqrt{100}}{6}=\frac{-4+10}{6}=1$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{100}}{6}=\frac{-4-10}{6}=\frac{-7}{3}$.

D'où f' est positive partout sauf entre $\frac{-7}{3}$ et 1.

- En déduire le sens de variation de f.

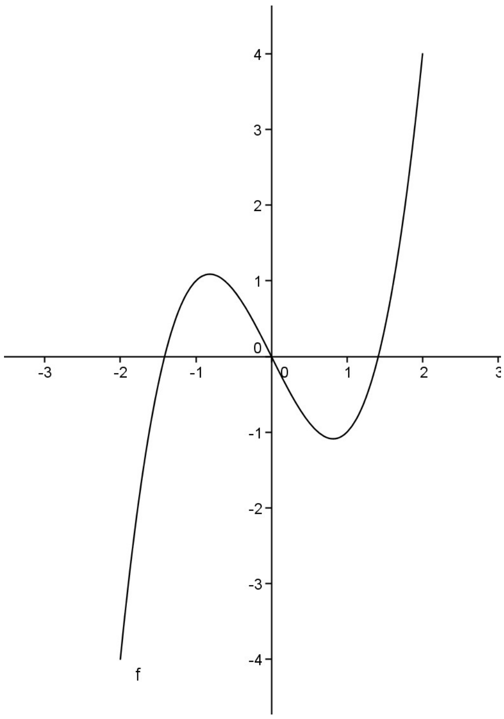
x	$-\infty$		$-7/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$419/3$	↘	-3	↗	

II. extremum local.

Définitions: f est une fonction définie sur un intervalle I et x_0 est un réel de I.

- dire que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement un minimum local) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x)\leqslant f(x_0)$.
- dire que $f(x_0)$ est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est maximum local ou un minimum local.

Exemple:
Soit f une fonction définie sur l'intervalle I=[-2; 2].



$1{,}2=f(-0{,}8)$ est un maximum local, car pour tout x appartenant à l'intervalle]-2; 1[, $f(x)\leqslant 1{,}2$.

$-1{,}2=f(0{,}8)$ est un minimum local, car pour tout x appartenant à l'intervalle]0; 2[,

$f(x) \geqslant -1{,}2$.
$-4 = f(-2)$ n'est pas un minimum local car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenu dans I et contenant -2.

Propriété: Si une fonction f dérivable sur un intervalle I admet un extremum ou un extremum local en α et si α n'est pas une borne de I, alors $f'(\alpha)$ =0.

Preuve: Supposons qu'il s'agisse d'un maximum ou d'un maximum local en α, α n'étant pas une borne de I. C'est à dire qu'il existe un intervalle ouvert J autour de α tel que $f(\alpha)$ soit le maximum de f sur J.
$f'(\alpha)$ est la limite de $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ quand h tend vers 0.
Alors pour h assez voisin de 0, $\alpha+h \in$J et donc $f(\alpha+h) \leqslant f(\alpha)$.
De ce fait, $f(\alpha+h)-f(\alpha) \leqslant 0$.
On en déduit que si $h>0$, $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \leqslant 0$ et si $h<0$, $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \geqslant 0$.
Quand h tend vers 0, les rapports $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ prennent des valeurs aussi bien positives ou nulles que négatives ou nulles. On admet alors que leur seule limite possible est 0. D'où $f'(\alpha)=0$.
On tient le même raisonnement avec un minimum.

Remarque: la réciproque de cette propriété est fausse.
Contre-exemple: $f(x)=x^3$ sur ℝ, alors $f'(0)=0$, cependant $f(0)$ n'est pas un extremum local.

On admettra la propriété suivante:
Propriété: f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	